

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 3(45)
июль – сентябрь 2020 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Заместитель ответственного секретаря: С. В. Матвеев

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1184

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2020

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
OF THE YAKOVLEV CHUVASH STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY
SERIES: MECHANICS OF LIMIT STATE**

**Scientific journal
№ 3(45)
Jule – September 2020**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media “Roskomnadzor”
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue “Press of Russia”
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko

Executive Secretary: S. V. Tikhonov, E. V. Murashkin

Associate Secretary: S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, G. K. Mikhailov, Yu. V. Nemorovskii,
R. I. Nepershin, V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov,
A. N. Sporihin, A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1184

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>



Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев, С. В. Тихонов

**ДЮИС ДАНИЛОВИЧ ИВЛЕВ.
К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
(6 сентября 1930 г. – 3 марта 2013 г.)**

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

DOI: 10.37972/chgpu.2020.79.64.001

6 сентября 2020 исполняется 90 лет со дня рождения выдающегося российского ученого в области механики деформируемого твердого тела, теории упругости и пластичности, теории предельного состояния и несущей способности тел и конструкций доктора физико-математических наук, профессора Дюиса Даниловича Ивлева.

Дюис Данилович Ивлев родился в г. Чебоксары в семье преподавателя Чувашского педагогического института (сейчас Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева) Данила Осиповича Ивлева. После окончания средней школы в 1948 г. он поступил на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. Как он сам указывал в своих воспоминаниях, в выборе механико-математического факультета МГУ сыграло много обстоятельств личных и не совсем личных, например, таких как географическое расположение факультета в то время на Моховой улице. Впоследствии, как он всегда указывал, о своем выборе никогда не жалел. В Университете он активно посещал лекции А. Г. Куроша, С. Н. Бахвалова, А. Я. Хинчина, А. П. Минакова, П. К. Рашевского, А. И. Маркушевича, С. Л. Соболева, М. М. Филоненко-Бородича, А. А. Космодемьянского, Л. И. Седова и др. Деканом мехмата в те времена был В. В. Голубев, заместителем декана по

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., Тихонов С. В. 2020

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 07.07.2020

научной части — П. В. Мясников, отец В. П. Мясникова, позже должность декана занял Ю. Н. Работнов. Курсовая работа на третьем году обучения в университете была написана Дюисом Даниловичем под руководством Андрея Петровича Минакова и была связана с сухим трением. Данная работа произвела на Андрея Петровича хорошее впечатление, и положительная оценка сыграла большую роль в его жизни, когда во время его последующей учебы в аспирантуре он рекомендовал Д. Д. Ивлева Владимиру Николаевичу Щелкачеву, заведующему кафедрой теоретической механики Московского нефтяного института имени академика Губкина, где впоследствии он проработал ассистентом на этой кафедре полтора года. Следующая его курсовая работа была связана с повторными нагружениями упругопластического тела и была удостоена 3 места на конкурсе студенческих работ механико-математического факультета. До поступления в аспирантуру он несколько месяцев проработал в Подлипках (г. Королев), где уже работал Леонид Викторович Ершов. С тех пор началась их совместная работа. В аспирантуре он вместе с В. Д. Ключниковым и С. А. Шестериковым принял участие в работе семинара кафедры теории пластичности, которой заведовал Ю. Н. Работнов. Впоследствии к ним присоединились Б. Д. Аннин, Ю. В. Немировский, О. В. Соснин и др. В 1956 г. после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ он успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Приближенное решение упругопластических задач методом малого параметра». Первым оппонентом диссертации был В. В. Соколовский, вторым — Г. С. Шапиро. Впоследствии, на основе кандидатской диссертации совместно с Леонидом Викторовичем Ершовым была издана монография «Метод возмущений в теории упругопластического тела», которая легла в основу ряда кандидатских и докторских диссертаций. В феврале 1957 г. после защиты диссертации Алексей Антонович Ильюшин, будучи директором, принял Д. Д. Ивлева на должность младшего научного сотрудника Института механики АН СССР, где он проработал вплоть до октября 1958 г.

В 1959 г. в возрасте 29 лет Дюис Данилович защитил диссертационную работу по теме «Пространственная задача теории идеальной пластичности» в диссертационном совете при МГУ и получил степень доктора физико-математических наук.

В октябре 1959 г. Д. Д. Ивлев как один из самых молодых докторов физико-математических наук страны был приглашен в Воронежский государственный университет, где руководил созданной им кафедрой теории упругости и пластичности, одновременно заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте и читал лекции по математике в Воронежском педагогическом институте. С этой даты ведет начало созданная Дюисом Даниловичем Воронежская школа механики, в которой сейчас насчитывается более 30 докторов, среди них как прямые ученики Дюиса Даниловича, так и учеными следующих поколений. Среди учеников следует выделить Г. И. Быковцева, И. А. Бережного, В. В. Дудукаленко. Сейчас в Воронеже работают такие ученые, как А. Д. Чернышев, А. Н. Спорыхин, Ю. А. Россихин, и М. В. Шитикова и др., в Москве и Самаре — Ю. Н. Радаев, Комсомольске-на-Амуре А. А. Буренин и А. И. Хромов (ученик Г. И. Быковцева), в Новосибирске — А. Ф. Ревуженко, в Минске — А. В. Чигарев.

По возвращении в Москву, Дюис Данилович работал профессором кафедры высшей математики Московского высшего технического училища им. Н. Э. Баумана, позднее заведовал этой кафедрой (1966–1970 гг.), а впоследствии (1971–1982 гг.) — кафедрой высшей математики во Всесоюзном заочном политехническом институте.

В 1982 г. Д. Д. Ивлев вернулся на родину в г. Чебоксары, где работал в ЧГУ им. И. Н. Ульянова сначала заведующим кафедрой математического анализа, а потом заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела и деканом физико-математического факультета (1982–1993 гг.). Под его председательством был открыт диссертационный совет по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «Механика деформируемого твердого тела». В истории науки Чувашии это был первый докторский диссертационный совет.

В 1993 г. Д. Д. Ивлев перешел на работу в Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, где заведовал кафедрой математического анализа. С самого начала работы в педагогическом университете он не только обеспечил функционирование докторского диссертационного совета по механике деформируемого твердого тела, но придал ему качественно новый статус – регионального совета с привлечением ведущих ученых страны в области механики твердых тел и конструкций. За время работы в вузе под его научным руководством и консультированием подготовлено более 30 кандидатов наук и 3 доктора наук.

Основными научными результатами Д. Д. Ивлева считается развитие общей теории предельных статически определимых состояний тел с математическим анализом уравнений гиперболического типа, в которой классические результаты плоской задачи являются частным разделом общей теории. Ряд исследований посвящен упрочняющемуся телу, деформационной теории пластичности, построению моделей сложных сред, статике и динамике сыпучих сред, механике квазихрупкого разрушения и др.

Профессором Д. Д. Ивлевым опубликовано более 250 научных и методических трудов, в том числе 9 монографий. Являлся экспертом Высшей аттестационной комиссии, членом редакционной коллегии журнала «Известия РАН. Механика твердого тела», ответственным редактором журнала «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния», членом экспертного совета ВАК РФ по математике и механике.

За большие заслуги в области высшего образования и научной деятельности Д. Д. Ивлев был награжден медалями «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», «50 лет Победы в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», «60 лет Победы в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени, высшей наградой Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики — Золотой медалью им. И. Я. Яковлева, нагрудным значком «За отличные успехи в работе», знаком «Изобретатель СССР».

Научная школа, основанная Дюисом Даниловичем Ивлевым, продолжает успешно работать в г. Чебоксары, а его идеи и сейчас оказывают существенное влияние на развитие механики деформируемого твердого тела в России.



Рис. 1. Кафедра математического анализа в ЧГПУ им. И. Я. Яковлева



Рис. 2. После заседания диссертационного совета в ЧГПУ им. И. Я. Яковлева



Рис. 3. Участники III Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике



Рис. 4. Лауреаты Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники за 2006 год

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Д.Д. ИВЛЕВА

1955

1. К теории простого деформирования пластических тел // Прикладная математика и механика. – 1955. – Т. 19, Вып. 6. – С. 734–735.

1956

2. К использованию линейной тензорной связи в пластичности // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, Вып. 2. С. 289–292.
3. Выпучивание эксцентричной трубы // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1956. – № 10. – С. 112–166.

1957

4. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких круговому // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
5. Упруго-пластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник МГУ. – 1957. – № 2. – С. 51–52 (совм. с Л.В. Ершовым).
6. Выпучивание толстостенной трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 5. – С. 113–118.
7. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 113. – № 2. – С. 294–296.
8. Приближенное решение задач теории малых упруго-пластических деформаций // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 113, № 2. – С. 527–528.
9. Упруго-пластическое напряженное состояние полого толстостенного тора, находящегося под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 7. – С. 129–131 (совм. с Л.В. Ершовым).
10. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 8. – С. 149–152 (совм. с Л.В. Ершовым).
11. Упруго-пластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 9. – С. 130–134 (совм. с Л.В. Ершовым).
12. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 10. – С. 89–93.
13. Об определении перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикладная математика и механика. – 1957. – Т. 21, вып. 5. – С. 716–718.
14. Приближенное решение плоских упругопластических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. – 1957. – № 5. – С. 17–26 (совм. с Л.В. Ершовым).

1958

15. О потере устойчивости вращающихся дисков // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125 (совм. с Л.В. Ершовым).
16. О некоторых работах К.Н. Шевченко по теории пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 2. – С. 159–162.
17. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.

18. Приближенное решение упругопластических осесимметрических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. – 1958. – № 2. – С. 47–56 (совм. с Л.В. Ершовым).
19. О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 4. – С. 480–486.
20. О некоторых частных решениях уравнений осесимметричной теории идеальной пластичности и обобщение решения Л. Прандтля о сжатии пластической полосы шероховатыми плитами // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 673–678.
21. К построению теории идеальной пластичности // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 6. – С. 850–855.
22. Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 11. – С. 107–109.
23. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 123, № 6. – С. 488–490.

1959

24. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1959. – № 1. – С. 132–133.
25. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 6. – С. 546–549.
26. О вдавливании жестких штампов в пластическое полупространство // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 2. – С. 247–281.
27. К теории разрушения твердых тел // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 3. – С. 618–624.
28. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1959. – № 3. – С. 137.
29. Об изотропном упрочнении пластических тел // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 4. – С. 777–779.
30. К определению перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 5. – С. 987–988.
31. К теории идеальной пластической анизотропии // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 6. – С. 1107–1114.
32. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 112–114.

1960

33. К теории идеально затвердевающих сред // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 4. – С. 742–745.
34. Об уравнениях линеаризованных пространственных задач теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 6. – С. 1232–1235.
35. О границе пластического состояния материала // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. 1960. – № 1. – С. 161.

36. О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 1. – С. 144–146.
37. О постулате изотропии в теории пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 125–127.
38. К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 4. – С. 707–710.
39. Об экстремальных свойствах условий пластичности // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 5. – С. 951–955.
40. К построению гидродинамики вязкой жидкости // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 135, № 2. – С. 280–282.
41. О работе В.С. Ленского Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 179–180.
42. К теории вдавливания штампа в пластическую среду // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1960. – № 3. – С. 214–216 (совм. с В. А. Жалнинным).
43. О вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство // Журнал практической механики и технической физики. – 1960. – № 4. – С. 75–78.

1961

44. Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 1. – С. 173–174 (совм. с Г. И. Быковцевым).
45. К теории неустановившейся ползучести // Проблемы механики сплошной среды : сб. ст., посв. 70-летию акад. Н. И. Мусхелишвили. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – С. 157–160.
46. Об определении поверхности выпучивающегося материала при вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 2. – С. 332–335.
47. К теории сферического деформированного состояния идеально пластических сред // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – № 1. – С. 72–75 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
48. Об устойчивости полосы при сжатии // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 5. – С. 1047–1049 (совм. с Л. В. Ершовым).
49. К построению теории упругости // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 6. – С. 1321–1324.
50. Об основных соотношениях теории анизотропной сыпучей среды // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – № 2. – С. 116–121 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
51. О математическом описании поведения упругого изотропного тела при помощи кусочнолинейного потенциала // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 5. – С. 897–905.
52. О кручении винтовых стержней из идеально жесткопластического материала // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 5. – С. 124–126.

53. О вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – № 6. – С. 153–154 (совм. с В. А. Жалниным, В. С. Мищенко).
54. Об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1126–1128 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
55. О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. – 1961. – № 6. – С. 197–203.

1962

56. Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, вып. 4. – С. 709–714.
57. К теории предельного равновесия оболочек вращения при кусочнолинейных условиях пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 6. – С. 95–102.

1963

58. К теории сжимаемых идеально пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 3. – С. 589–592 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
59. О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линейаризованном условии пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 3. – С. 115–118 (совм. с В. В. Дудукаленко).
60. К теории сложных сред // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 148, № 1. – С. 64–67.
61. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1963. – № 3. – С. 102–104 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
62. О предельном состоянии осесимметричных тел при условиях сопротивления сдвигу и отрыву // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 79–85 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
63. О кручении анизотропно упрочняющихся стержней при линейаризованном законе пластического течения // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 173–175 (совм. с В. В. Дудукаленко).
64. О кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений // Журнал прикладной механики и технической физики. 1963. – № 5. – С. 154–157 (совм. с И. А. Бережным).
65. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочнолинейных потенциалах // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 12–16 (совм. с В. А. Знаменским).
66. О сжатии полосы из упрочняющегося пластического материала жесткими шероховатыми плитами // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 5. – С. 1024–1026 (совм. с В. В. Дудукаленко).

1964

67. К теории осесимметричного состояния идеально пластического материала // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1964. – № 5. – С. 102–108 (совм. с Г. И. Быковцевым, Т.Н. Мартыновой).

68. О функциях нагружения анизотропного упрочняющегося пластического материала // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 4. – С. 794–797 (совм. с Г. И. Быковцевым, В. В. Дудукаленко).
69. О предельном состоянии слоистых пластин и оболочек вращения // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 77–86 (совм. с Ю. П. Листровой, Ю. В. Немировским).
70. Об устойчивости пластин в общем случае нелинейной деформационной теории при малых деформациях // Прикладная механика. – 1964. – № 2. – С. 117–123 (совм. с И. Д. Легеней).
71. Пластичности теория (математич.) // Физический энциклопедический словарь. – М. : Сов. энцикл., 1964. – С. 37–39.
72. Пластический шарнир // Физический энциклопедический словарь. – М. : Сов. энцикл., 1964. – С. 37.
73. Пластичности условия // Физический энциклопедический словарь. – М. : Сов. энцикл., 1964. – С. 39.

1965

74. О влиянии вязкости на механическое поведение упруго-пластических сред // Доклады АН СССР. – 1965. – Т. 163, № 3. – С. 595–598 (совм. с И. А. Бережным).
75. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1965. – Т. 164, № 4 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
76. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочнолинейных потенциалах // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1965. – № 1. – С. 56–69 (совм. с Г. И. Быковцевым, Т. Н. Мартыновой).
77. К теории устойчивости пластины в общем случае деформационной теории : тр. всесоюз. конф. по устойчивости. – М. : Стройиздат, 1965.

1966

78. Теория идеальной пластичности. – М. : Наука, 1966. – 232 с.

1967

79. О некоторых случаях интегрируемости соотношений теории упрочняющихся пластических сред при сингулярных поверхностях текучести // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1967. – № 1. – С. 143–144 (совм. с Л. В. Ершовым).
80. О диссипативной функции в теории упрочняющихся пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 2. – С. 346–348.
81. Об условиях квазихрупкого разрушения // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 5. – С. 537–542 (совм. с Л. В. Ершовым).
82. О деформационных теориях пластичности при сингулярных поверхностях нагружения // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 32, вып. 5. – С. 887–889.
83. О диссипативной функции в теории пластических сред // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1037–1039.
84. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеально-пластических телах // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1039–1042 (совм. с Г. И. Быковцевым, Ю. М. Мяснянкиным).
85. Об одном построении теории трещин // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1967. – № 6. – С. 91–94.

86. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1967. – № 6. – С. 88–128.

1968

87. О соотношениях на поверхности разрыва напряжений в трехмерных идеально жесткопластических телах // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 3. – С. 472–477 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).
88. О кинематических соотношениях на поверхности скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 4. – С. 623–631 (совм. с Г. И. Быковцевым, Ю. М. Мяснянкиным).
89. К задаче о внедрении гладкого клинообразного в плане штампа с плоским основанием в жесткопластическое пространство // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 115–118 (совм. с Р. И. Непершиным).

1969

90. О деформационных теориях пластичности // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды : сб. ст., посв. 60-летию акад. Л. И. Седова. – М., 1969. – С. 233–239.

1970

91. О диссипативных функциях в теории вязкопластических сред // Проблемы механики сплошной среды : (к 60-летию акад. В. В. Новожилова). – 1970. – С. 67–70 (совм. с И. А. Бережным, Е. В. Макаровым)
92. Об одной неполной задаче теории идеальной пластичности // Труды НИИ математики ВГУ. – 1970. – С. 145–148.
93. О деформационных моделях теории пластичности и сплошных сред // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 40, вып. 3. – С. 553–557 (совм. с И. А. Бережным, Е. В. Макаровым).

1971

94. Об уравнениях теории идеальной пластичности в компонентах скоростей перемещений // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 41, вып. 1. – С. 183–185 (совм. с А. Д. Чернышевым).
95. Теория упрочняющегося пластического тела. – М. : Наука, 1971. – 232 с. (совм. с Г.И. Быковцевым).

1972

96. О приобретенной анизотропии пластических тел // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа : сб. ст., посв. 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили. – М., 1972. – С. 601–605 (совм. с И. А. Бережным, В. В. Дудукаленко).
97. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикладная математика и механика. – 1972. – Т. 42, вып. 5. – С. 957–959.
98. О построении модели сыпучих сред исходя из определения диссипативной функции // Основы пластичности : сб. тр. симпозиума. – Варшава, 1973. – С. 601–605 (совм. с И. А. Бережным, В. Б. Чадовым).

1973

99. О построении модели сыпучих сред на основе диссипативных функций // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 123. – № 6 (совм. с И. А. Бережным, В. Б. Чадовым).

100. Внедрение гладкого сферического штампа в жесткопластическое полупространство // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 159–166 (совм. с Р. И. Непершиным).
101. Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния // Труды НИИ математики ВГУ. – Воронеж, 1973. – Вып. 10. – С. 1–3.

1974

102. О диссипативной функции в теории анизотропных пластических сред // Известия вузов. Машиностроение. МВТУ. – 1974. – С. 21–24 (совм. с В. Б. Чадовым).
103. О некоторых моделях, построенных на основе механизмов упругости, вязкости и пластичности с переменными определяющими параметрами // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 1 (совм. с И. А. Бережным, Н. В. Герасимовым).
104. О функции нагружения для идеально пластических моделей // Избранные проблемы прикладной механики : сб. ст., посв. 60-летию акад. В. Н. Челомея. – М., 1974. – С. 113–117 (совм. с И. А. Бережным, В. И. Цейлером).

1975

105. Об определении перемещений в упруго-пластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред : (к 100-летию со дня рождения акад. Б. Г. Галеркина). – М., 1975. – С. 236–240.
106. О построении поверхностей сложных жесткопластических моделей // Механика деформируемых тел и конструкций : сб. ст. – М. : Машиностроение, 1975. – С. 62–70 (совм. с И. А. Бережным, В. И. Цейлером).
107. О течении жидкости с управляемой вязкостью // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223, № 3. – С. 582–584 (совм. с И. А. Бережным, Н. В. Герасимовым, В. И. Цейлером).
108. О некоторых экспериментах со сходящимися кольцевыми волнами на поверхности тяжелой жидкости // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223. – № 4. – С. 810–811 (совм. с И. А. Бережным, Р. К. Логвиновой).

1976

109. Об определяющих неравенствах в теории пластичности // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 4. – С. 824–826 (совм. с И. А. Бережным)

1977

110. Диссипативная функция в теории пластичности // Механика деформируемого тела : межвуз. сб. – Куйбышев, 1977. – Вып. 3. – С. 5–22 (совм. с И. А. Бережным).

1978

111. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М. : Наука, 1978. – 208 с. (совм. с Л. В. Ершовым).
112. Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 80–87. (совм. с Е. В. Макаровым, Ю. М. Марушкой)

1980

113. Об интегральных неравенствах теории упругопластического тела // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 3. – С. 540–549 (совм. с И. А. Бережным).

1981

114. Определяющие неравенства в теории упругопластического тела : тез. докл. V Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. – Алма-Ата, 1981 (совм. с И. А. Бережным).

1982

115. Об уравнениях стареющих пластических тел // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1982. – Т. 25. – № 5. – С. 22–25 (совм. с Н. Х. Арутюняном).
116. Об обобщении решения Л. Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами // Современные проблемы механики и авиации : сб. ст. в честь 60-летия акад. И. Ф. Образцова. – М. : Машиностроение, 1982. – С. 137–144 (совм. с Л. В. Ершовым, А. В. Романовым).
117. Об обобщении решения Прандтля в сферической системе координат // Прикладная математика и механика. – 1982. – Т. 46, вып. 5. – С. 524–527 (совм. с А. В. Романовым).

1983

118. О влиянии внутреннего механизма вязкости на поведение идеально пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47, вып. 3. – С. 524–527 (совм. с М. А. Артемовым).
119. Об одной предельной модели сплошной среды // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1074–1076 (совм. с И. Т. Артемьевым).

1984

120. К теории предельного состояния хрупких тел с разрывными решениями // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 1. – С. 111–116 (совм. с И. Т. Артемьевым).
121. Об одном точном неавтономном решении теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 275. – № 5. – С. 1080–1083 (совм. с А. В. Романовым).
122. Об одном классе точных неавтономных задач теории идеальной пластичности // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела : сб. ст., посв. 60-летию акад. Ю. Н. Работнова. – М. : Наука, 1984. – С. 90–97 (совм. с А. В. Романовым).

1985

123. Краевая задача для сред с предельным сопротивлением всестороннему растяжению // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1985. – С. 3–9 (совм. с И. Т. Артемьевым).

1986

124. О течении идеально вязкой среды // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1986. – С. 33–42 (совм. с А. А. Горбуновым).
125. Об упругопластическом состоянии клина при предельном сопротивлении сдвигу и отрыву // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1986. – № 1. – С. 157–161 (совм. с И. Т. Артемьевым).
126. О нижней границе несущей способности тел, определяемой условиями предельного состояния : аннотации докл. VI Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. – Ташкент, 1986. – С. 51 (совм. с И. Т. Артемьевым, А. А. Горбуновым).
127. Об определяющих соотношениях в теории предельного сопротивления сдвигу и среднему напряжению // Актуальные задачи механики сплошных сред. – Чебоксары, 1986. – С. 45–52 (совм. с А. А. Горбуновым).

128. Об изгибе пластической полосы, ослабленной пологими выточками // Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами. – Чебоксары, 1986. – С. 57–60 (совм. с Л. Б. Шитовой).

1988

129. Определение напряженного состояния в деформируемом объеме порошкового материала методом характеристик // Порошковая металлургия. – 1988. – № 1. – С. 6–10 (совм. с Н. А. Чайниковым).
130. Упругопластические равновесия остроугольного клина при предельном сопротивлении сдвигу, среднему растягивающему напряжению и отрыву // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1988. – № 4. – С. 157–162 (совм. с И. Т. Артемьевым).
131. Линеаризованные уравнения теории анизотропного идеального жесткопластического тела // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложений. – Чебоксары, 1988. – С. 55–58 (совм. с Л. Б. Шитовой).

1989

132. Об образовании шейки при течении анизотропной жесткопластической полосы // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 2. – С. 183–185 (совм. с Е. А. Григорьевым, Л. Б. Шитовой).
133. Об образовании шейки при растяжении плоского образца с учетом влияния среднего напряжения // Краевые задачи и их приложения. – Чебоксары, 1989. – С. 117–119 (совм. с Л. Б. Шитовой).

1992

134. Пластичности теория (математическая) // Физическая энциклопедия. Т. 3. – М., 1992. – С. 628–631.
135. Пластический шарнир // Физическая энциклопедия. Т. 3. – М., 1992. – С. 628.
136. Пластичности условие // Физическая энциклопедия. Т. 3. – М., 1992. – С. 631.
137. К теории предельного состояния пластических пористых тел // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 163–165.
138. Об условиях текучести идеально пластического тела // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 5. – С. 107–109 (совм. с А. В. Романовым).
139. О свойствах основных соотношений теории идеальной пластической анизотропии // Актуальные проблемы механики деформ. твердого тела : сб. ст., посв. 70-летию Ж. С. Ержанова. – Алма-Ата, 1992. – С. 69–75 (совм. с И. Т. Артемьевым).

1993

140. Теория идеальной пластической анизотропии // Прикладная механика. – 1993. – Т. 29, № 1. – С. 73–78 (совм. с И. Т. Артемьевым).
141. Линеаризованные уравнения теории идеальной пластичности // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1993. – № 5. – С. 107–113 (совм. с И. Т. Артемьевым).
142. О применении обобщенных функций комплексного переменного к двумерной задаче теории упругости // Прочность и надежность конструкций : сб. ст., посв. 50-летию В. Д. Кулиева. – М., 1993. – С. 83–89 (совм. с М. В. Михайловой).

1994

143. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Известия АН Чувашской республ. – 1994. – № 2. – С. 16–21 (совм. с М. А. Артемовым).

144. К теории идеально затвердевающих сред // Известия АН Чувашской республ. – 1994. – № 2. – С. 22–25 (совм. с М. А. Артемовым).

145. К теории предельного состояния сыпучих сред. – 5 с. – Деп. в ВИНТИ 16.12.94. 2918-в94. (совм. с Л. Б. Шитовой).

1995

146. О статических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. – № 3. – С. 104–110 (совм. с М. А. Артемовым).

147. О линеаризованных уравнениях кинематически определимых задач // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 6. – С. 104–110 (совм. с М. А. Артемовым).

148. К теории затвердевающих сред // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 14–21 (совм. с М. А. Артемовым).

149. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально-пластического материала // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 39–48 (совм. с А. М. Васильевой, М. В. Михайловой).

150. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 27–38 (совм. с Т. Л. Захаровой).

151. Об идеально пластическом состоянии полого кругового цилиндра при произвольном возмущении боковой поверхности // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 29–36 (совм. с А. М. Васильевой).

1996

152. Об одной модели предельного состояния тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 1. – С. 61–64 (совм. с Л. Б. Шитовой).

153. О пластическом течении бруса прямоугольного сечения при растяжении // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 8–17 (совм. с М. А. Артемовым).

154. О соотношениях теории пластической анизотропии // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 121–125.

155. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Проблемы механики сплошной среды. – Владивосток, 1996. – С. 112–115.

156. О статической определимости предельного состояния твердого тела при отрыве // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 48–51.

157. О разрывных решениях теории пластичности // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32. – № 7. – С. 65–68 (совм. с М. А. Артемовым).

158. Об одном случае предельного состояния тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 3. – С. 43–45 (совм. с М. А. Артемовым).

159. К теории дифференциальных соответствий в механике сплошной среды // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1996. – № 2. – С. 5–7.

160. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Доклады РАН. – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 332–334 (совм. с М. А. Артемовым).

161. О течении трубы, ослабленной пологими выточками // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1996. – № 6. – С. 28–31 (совм. с Т. Л. Захаровой).
162. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально пластического материала // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 6. – С. 79–87 (совм. с А. М. Васильевой, М. В. Михайловой).
163. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1996. – № 6. – С. 32–34.
164. Об образовании шейки в растягиваемой вязкопластической полосе // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1996. – № 6. – С. 35–38 (совм. с Т. И. Рыбаковой).

1997

165. Об идеально пластическом состоянии призматических тел переменного прямоугольного сечения // Доклады РАН. – 1997. – Т. 353, № 1. – С. 47–50 (совм. с М. А. Артемовым).
166. К теории идеально затвердевающих сред // Доклады РАН. – 1997. – Т. 355, № 5. – С. 623–625 (совм. с М. А. Артемовым).
167. О напряженном состоянии идеально пластического полого цилиндра, близкого к круговому // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1997. – № 4. – С. 113–119 (совм. с А. М. Васильевой).
168. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1997. – Т. 38, № 5. – С. 165–172 (совм. с Т. Л. Захаровой).
169. О соотношениях ассоциированного закона течения и нагружения в теории идеальной пластичности // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1997. – № 4. – С. 78–94.

1998

170. О пространственном течении идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 1. – С. 5–12.
171. О течении трубы, ослабленной выточками // Доклады РАН. – 1998. – Т. 359, № 1. – С. 40–42 (совм. с Т. Л. Захаровой).
172. Об устойчивости вязкопластической полосы // Доклады РАН. – 1998. – Т. 358, № 4. – С. 490–491 (совм. с Т. И. Рыбаковой).
173. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 1998. – Т. 361, № 6. – С. 765–767.
174. Об идеальном жесткопластическом течении плоской полосы // Доклады РАН. – 1998. – Т. 363, № 4. – С. 483–485 (совм. с Л. А. Максимовой).
175. О возмущенном течении растягиваемой идеально пластической полосы // Доклады РАН. – 1998. – Т. 363, № 5. – С. 632–633 (совм. с Л. А. Максимовой).
176. О соотношениях ассоциированного закона пластического течения в обобщенных переменных // Доклады РАН. – 1998. – Т. 363, № 6. – С. 775–776.
177. О предельном состоянии идеально пластического прямоугольного бруса, ослабленного пологими выточками // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 4. – С. 173–179 (совм. с М. А. Артемовым).
178. Теория пластичности. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с. (совм. с Г. И. Быковцевым).

179. Изменение жесткости и процессы микроповреждений в хрупком материале // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1998. – № 5. – С. 18–28 (совм. с В. В. Дудукаленко).

1999

180. Об определении соотношений ассоциированного закона идеально-пластического течения // Прикладные задачи механики сплошных сред. – Воронеж, 1999. – С. 116–123.
181. К теории кинематически определимых состояний идеальнопластических тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 1. – С. 92–98 (совм. с М. А. Артемовым).
182. О соотношениях общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. – Чебоксары. Сводный том. – 1998. – № 3, 4 ; 1999. – № 1, 2. – С. 13–16 (совм. с Л. А. Максимовой).
183. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 6. – С. 39–54 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
184. Полная пластичность в теории идеально пластического тела // Доклады РАН. – 1999. – Т. 368, № 3. – С. 333–334 (совм. с А. Ю. Ишлинским).

2000

185. О сдавливании круглого в плане идеально пластического слоя шероховатыми плитами // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 129–140 (совм. с И. П. Григорьевым).
186. О плоских течениях идеально жесткопластической среды // Доклады РАН. – 2000. – Т. 370, № 1. – С. 43–45 (совм. с Л. А. Максимовой).
187. О вдавливании индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 3. – С. 131–136 (совм. с Л. А. Максимовой).
188. О течениях изотропных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 5–12 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
189. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Доклады РАН. – 2000. – Т. 371, № 1. – С. 49–51 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
190. О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Доклады АН РАН. – 2000. – Т. 373, № 1. – С. 39–41 (совм. с Л. А. Максимовой).
191. О свойствах течений изотропной среды // Доклады АН РАН. – 2000. – Т. 375, № 2. – С. 191–194 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
192. Об определении связи деформация – напряжение в теории сложного нагружения при выполнении постулата изотропии А. А. Ильюшина // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 2000. – № 4. – С. 15–28.

2001

193. О вдавливании жесткого штампа в идеально пластическое полупространство с учетом сдвиговых усилий // Доклады РАН. – 2001. Т. 379, № 2. – С. 196–199 (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным).

194. Об определении поля скоростей идеально пластического течения в случае общей плоской задачи // Доклады РАН. – 2001. – Т. 379, № 6. – С. 758–763 (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным).
195. О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеально пластического тела при условии полной пластичности // Доклады РАН. – 2001. – Т. 381, № 5. – С. 616–622 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
196. Математическая теория идеальной пластичности. Состояние и развитие : докл. на VIII Всерос. съезде по теор. и прикл. механике // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. Сводный том. – 1999. – № 3, 4 ; 2000. – № 1–4 ; 2001. – № 1–4. – С. 32–44 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
197. О представлении состояния полной пластичности на диаграмме Мора // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. Сводный том. – 1999. – № 3, 4 ; 2000. – № 1–4 ; 2001. – № 1–4. – С. 45–51 (совм. с Л. А. Максимовой).
198. О соотношениях плоской задачи теории упругопластического тела для неоднородного материала // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. Сводный том. – 1999. – № 3, 4 ; 2000. – № 1–4 ; 2001. – № 1–4. – С. 52–59 (совм. с А. В. Горским, П. В. Горским).
199. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.
200. Математическая теория пластичности. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с. (совм. с А. Ю. Ишлинским).
201. О предельных течениях изотропных сред // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск, 2001. – С. 223–227 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
202. Условия изотропии и ассоциированный закон пластического деформирования // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород : сб. ст., посв. 70-летию проф. Л. В. Ершова. – М. : Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 2001. – С. 93–116 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
- 2002**
203. Механика пластических сред. Т. 2 : Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
204. О характеристических соотношениях для напряжений пространственной задачи сыпучей среды при полном предельном равновесии // Доклады РАН. – 2002. – Т. 383, № 5. – С. 638–642 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
205. О характеристических соотношениях для скоростей перемещений в пространственной задаче полного предельного равновесия сыпучей среды // Доклады РАН. – 2002. – Т. 384, № 1. – С. 57–61 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
206. Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство // Доклады РАН. – 2002. – Т. 385, № 6. – С. 766–769 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).

207. О вдавливании плоского штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии контактных касательных напряжений // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, вып. 1. – С. 134–139 (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным).
208. О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 4. – С. 57–62 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
209. О свойствах моделей изотропных сред // Проблемы механики деформируемого твердого тела : сб. ст. к 70-летию акад. Н. Ф. Морозова. – СПб, 2002. – С. 149–153 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).

2003

210. О сдавливании идеально пластической пирамиды плоским штампом // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 3. – С. 337–339 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
211. О статически определимых соотношениях теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 4. – С. 483–486.
212. Статически определимые соотношения теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 5. – С. 634–637 (совм. с М. В. Михайловой).
213. О линеаризованных уравнениях статически определимых соотношений теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 6. – С. 769–771 (совм. с М. В. Михайловой).
214. К теории статически определимых соотношений и предельного состояния пластических тел // Доклады РАН. – 2003. – Т. 392, № 1. – С. 59–62 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
215. Статически определимые соотношения теории пластичности и предельное состояние и разрушение тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 3. – С. 84–89 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
216. Идеи и результаты А. Ю. Ишлинского в теории пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 4. – С. 167–174.
217. Идеи и результаты А. Ю. Ишлинского в теории пластичности // Проблемы механики : сб. ст. к 90-летию А. Ю. Ишлинского. – М., 2003. – С. 30–38.
218. О соотношениях теории идеальной пластичности при условии пластичности максимального приведенного напряжения // Проблемы нелинейной механики : сб. ст. к 80-летию Л. А. Толоконникова. – Тула, 2003. – С. 178–184 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
219. Статически определимые состояния теории идеальной пластичности : тез. докл. междунар. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики”. – Тула. – 2003. – С. 147.
220. Статически определимые соотношения теории идеальной пластичности // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 2003. – № 3. – С. 36–46 (совм. с М. В. Михайловой).
221. Теория идеальной пластичности. Состояние и развитие // Прикладная механика. – 2003. – № 11. – С. 6–46.

2005

222. Мир эллиптический и Мир гиперболический // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2005. – № 5(39). – С. 33–41.

223. Теория предельного состояния и идеальной пластичности : избранные работы. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005. – 357 с.
224. О статически определимых состояниях в теории идеальной пластичности // Вестник Чувашского педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2005. – №2(44). – С. 13–18 (совм. с Л. А. Максимовой).
225. Статически определимые соотношения теории сжимаемых идеально-пластических сред // Теоретическая и прикладная механика : межвед. сб. науч.-метод. ст. Вып. 19 : Белорусский национальный технический университет. – Минск, 2005. – С. 21–24.
226. О соотношениях ассоциированного закона течения теории сжимаемых идеально-ноупластических сред // Доклады РАН. – 2005. – Т. 405, № 5.
227. О статически определимых соотношениях сжимаемых идеально пластических сред // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 5. – С. 131–134.

2006

228. К теории статически определимых состояний деформируемых тел // Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 131–136 (совм. с Л. А. Максимовой).
229. О развитии идеальнопластического состояния // Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 130–133 (совм. с Н. М. Матченко).
230. Об идеях и результатах Е. И. Шемякина в механике предельного состояния твердых деформируемых тел и конструкций // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 46–51.
231. О предельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 287–290 (совм. с Н. М. Матченко).
232. Предельное состояние твердых тел как состояние статической определенности // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике : аннотации докладов. – Н. Новгород, 2006. – Т. 3. – С. 100.
233. Об эволюции идеальнопластического состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1 (48). – С. 58–61.
234. Механика сплошной среды как раздел дифференциальной геометрии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 5(52). – С. 215–220.

2007

235. О переходе статически неопределимого состояния в статически определенное // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 5–9.
236. Три дискуссии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 157–163.
237. Чем отличается теория идеальной пластичности от теории предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 3. – С. 3–10.
238. Три дискуссии в механике // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 4(54). – С. 115–123.
239. О предельных соотношениях при отрыве для анизотропного материала // Математические модели и методы механики сплошных сред : сб. науч. тр. к 60-летию А. А. Буренина. – Владивосток, 2007. – С. 106–107 (совм. с А. Н. Роштовой).

2008

240. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с. (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным, Ю. Н. Радаевым, С. И. Сенашевым, Е. И. Шемякиным).
241. Черные страницы // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2008. – № 1(4). – С. 40–47.

2009

242. Коэффициент интенсивности статистической неопределимости и достижение состояния полной пластичности // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2009. – № 1(6). – С. 76–80.
243. Из воспоминаний. 1. До Воронежа // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. – № 1(6). – С. 195–202.
244. О коэффициенте интенсивности статической неопределимости в теории пластичности в / Успехи механики сплошных сред: к 70-летию академика В. А. Левина, Дальнаука: Владивосток, 2009. – С. 254–256

2010

245. Об одном вопросе в теории предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. – № 2(66). – С. 19–24.
246. Из воспоминаний. 2. До и после // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. – № 2(66). – С. 139–146.
247. Двусное растяжение тонкой упругопластической анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием // Успехи строительной механики и теории сооружений, научный сборник к 75-летию В.В.Петрова. СГТУ. – Саратов, 2010. – С. 81–90 (совм. с Т. Н. Павловой).
248. Давление плоского штампа на ортотропное идеальнопластическое полупространство // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – 2(8). – С. 182–190 (совм. с Р. И. Непершиным).
249. Об условиях анизотропии идеальнопластических тел // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – 2(8). – С. 571–575 (совм. с Л. А. Максимовой)
250. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – 2(8). – С. 576–579 (совм. с Б. Г. Мироновым)
251. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – 2(8). – С. 580–582 (совм. с Л. А. Максимовой, Б. Г. Мироновым)
252. О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – 2(8). – С. 583–584 (совм. с Л. А. Максимовой)

2011

253. О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 2. – С. 41–43 (совм. с Л. А. Максимовой, Б. Г. Мироновым)

254. Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1(9). – С. 101–106
255. К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 107–110 (совм. с Л. А. Максимовой, Б. Г. Мироновым)
- 2012**
256. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 60–62 (совм. с Л. А. Максимовой, Б. Г. Мироновым)
257. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 63–66. (совм. с Л. А. Максимовой, С. В. Тихоновым)
258. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1(11). – С. 67–69. (совм. с Б. Г. Мироновым)
259. О статически определенных состояниях в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1(11). – С. 70–74 (совм. с А. В. Ковалевым, С. В. Тихоновым)
260. О предельном состоянии взаимопроникающих твердых деформируемых тел // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 2(12). – С. 3–6 (совм. с Л. А. Максимовой)
261. О наложении напряженных состояний при предельном сопротивлении тел // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 2(12). – С. 151–154. (совм. с Б. Г. Мироновым)
262. Пластическое деформирование многогранной призмы плоским инструментом // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4(14). – С. 56–65. (совм. с Р. И. Непершиным)
263. О наложении усилий для достижения предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4(14). – С. 205–207. (совм. с Л. А. Максимовой, Б. Г. Мироновым)

О. Д. Горбенко, А. И. Шашкин

Д. Д. ИВЛЕВ И ЕГО НАУЧНАЯ ШКОЛА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

DOI: 10.37972/chgpu.2020.99.38.002

Д.Д. Ивлев родился 6 сентября 1930 года в г. Чебоксары. После окончания средней школы в 1948 г. поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который окончил в 1953 г. В 1956 г., после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ, он успешно защитил диссертацию "Приближенное решение упруго-пластических задач методом малого параметра". В 1959 г. после защиты диссертации "Пространственная задача теории идеальной пластичности Д.Д. Ивлев получает степень доктора физико-математических наук.

Д.Д. Ивлев принадлежит к ученым, включившимся в работу по механике неупругого деформирования во второй половине пятидесятых годов, в их числе были В.Д. Ключников, С.А. Шестериков, Б.А. Друянов, Л.В. Ершов, М.И. Ерхов, М.А. Задоян, О.В. Соснин и др. В области теории идеальной пластичности Д.Д. Ивлев развил построение теории, распространяющей на общий случай свойства соотношений, предложенных Сен-Венаном для плоской задачи теории идеальной пластичности: статическая определенность, гиперболический тип уравнений. Д.Д. Ивлевым было показано, что соотношения, соответствующие ребру призмы Треска, принадлежат к гиперболическому типу; существуют площадки скольжения, вдоль которых касательные напряжения максимальны, что отражает механизм пластического деформирования и лежит в основе теории идеальной пластичности.

Уравнения пространственной задачи теории пластичности, соответствующие пересечению двух гладких поверхностей текучести, были сформулированы А.Ю. Ишлинским (1944 г.). Д.Д. Ивлев (1959 г.) показал, что соотношения, соответствующие условию полной пластичности, являются статически определенными, соответствующие уравнения принадлежат к гиперболическому типу. Были определены уравнения,

© Горбенко О. Д., Шашкин А. И. 2020

Горбенко Олег Данилович

e-mail: oleg_dan@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия,

Шашкин Александр Иванович

e-mail: dean@amm.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, декан, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 21.07.2020

определяющие кинематику пластического течения, показано, что они также принадлежат к гиперболическому типу. Установлено, что характеристические многообразия уравнений, определяющих напряженное и деформированное состояние, совпадают. Эти результаты были распространены на случай анизотропных и сжимаемых сред.

Использование условий изотропии пространственного состояния сплошных сред, предложенное А.Ю. Ишлинским, позволило установить с кинематических позиций максимальную свободу течения сред при условии равенства двух главных напряжений, т.е. при условии полной пластичности (Д.Д. Ивлев, А.Ю. Ишлинский).

Д.Д. Ивлевым выполнен ряд исследований по стационарному и нестационарному течению идеально-пластического материала. Исследованы разрывы напряжений и скоростей деформаций для пространственного состояния идеально-пластических тел, предложены уравнения обобщенной плоской задачи теории идеальной пластичности, полученные соотношения обобщают известные соотношения Г. Генки и Х. Гейрингер.

Ряд исследований Д.Д. Ивлева посвящен определению точных решений, определяющих пространственное пластическое течение идеально-пластического материала между шероховатыми плитами.

Многие исследования Д.Д. Ивлева посвящены деформационной теории пластичности, вопросам построения моделей теории упругости и гидродинамике, предельному состоянию конструкций, статике и динамике сыпучих сред, механике квазихрупкого разрушения и др.

Цикл работ Д.Д. Ивлева посвящен линеаризованным задачам жестко-пластического и упруго-пластического состояния тел. Метод малого параметра, развитый в работах Д.Д. Ивлева, позволил получить решение ряда плоских, осесимметричных, пространственных задач упруго-пластического состояния тел и определить неизвестную границу, отделяющую область пластического состояния материала, описываемую уравнениями гиперболического типа, от области упругого состояния тела, описываемой уравнениями эллиптического типа. На примере разложения в ряд классических решений Л.А. Галина и Г.П. Черепанова было установлено их совпадение с решениями, полученными непосредственно методом малого параметра и показана достаточно быстрая сходимость приближений.

В биографии Дюиса Даниловича Ивлева особое место занимает период его пребывания в Воронеже. Именно в этот период в полную меру раскрылся его талант ученого, педагога и организатора.

В Воронеж он приехал в 1959 году уже сложившимся, известным широкой мировой научной общественности 29-летним ученым. Известность и авторитет Д.Д. Ивлеву принесли результаты, полученные в области математической теории пластичности. Наряду с А.Ю.Ишлинским, В.Прагером, Ф.Ходжем и другими учеными Д.Д. Ивлев принадлежит к числу основоположников нового направления в построении теории пластичности — теории течения.

Воронеж принял Д.Д. Ивлева приветливо. В университет он был принят по приглашению ректора Б.И.Михантьева, ему была предоставлена хорошая квартира в университетском доме в центре города, куда вскоре переехала его семья – жена Юлия Дмитриевна и двое маленьких детей, сын Саша и дочь Аня. Тогда же ему была предоставлена возможность создать на математико-механическом факультете и возглавить новую кафедру – кафедру теории упругости и пластичности. Новые условия позволили Д.Д. Ивлеву в полной мере развернуть научную и образовательную деятельность, проявить небывалый потенциал творчества. На новой кафедре Д.Д. Ивлев занялся

постановкой новых учебных курсов, содержание которых отвечало современным направлениям механики деформируемого твердого тела. Причем, каждый из курсов он разрабатывал и читал студентам сначала сам, таким образом в течение первых двух-трех лет он прочитал все курсы учебного плана кафедры. Этот задел позволил ему выработать методические рекомендации по каждому курсу и, поручая кому-либо из сотрудников новый курс, Дюис Данилович со знанием дела давал методические советы по организации этого курса. Все аспиранты и молодые преподаватели посещали лекции профессора Д.Д. Ивлева и брали их за основу курсов, которые впоследствии читали сами. Дюис Данилович был требователен и к себе и к своим ученикам: каждый курс обязательно должен был регулярно обновляться, пополняясь самыми последними научными результатами. Следует заметить, что практически все базовые курсы современной кафедры механики и компьютерного моделирования – наследницы кафедры теории упругости и пластичности – были поставлены и отточены профессором Д.Д. Ивлевым.

Талантливый ученый, прекрасный организатор и превосходный педагог Дюис Данилович сумел в короткий срок осуществить перестройку работы механиков Воронежского университета, активизировать их научную и методическую работу. Лекции и научные семинары проф. Д.Д. Ивлева оставляли незабываемые впечатления, восхищали ясностью мышления и способностью глубоко проникать в суть обсуждаемых вопросов. Под влиянием Д.Д. Ивлева наступили годы расцвета механики как в Воронежском университете, так и в других вузах г. Воронежа. Созданная профессором Д.Д. Ивлевым воронежская научная школа механики деформируемого твердого тела быстро получила союзное, а затем и мировое признание.

Одновременно Дюис Данилович начал руководство научной работой студентов и аспирантов. Семинары, организованные Д.Д. Ивлевым, проходили 1 – 2 раза в неделю. Появление публикации с новыми результатами или новой книги с близкой тематикой сразу же выносилось на семинар для изучения и обсуждения. Таким образом Д.Д. Ивлев держал своих учеников на острие современной науки. Дюис Данилович умел вселить уверенность в своих учеников, вдохновить их на научный поиск, поддержать в трудную минуту. Участие в научно-исследовательской работе стало каждодневной потребностью сотрудников и аспирантов. На рис.1 – Д.Д. Ивлев (второй слева) с коллегами и учениками на первомайской демонстрации, 1960 год.

В исследованиях, проводимых проф. Д.Д. Ивлевым и его учениками, большое внимание было уделено развитию нового логического или, как говорил Д.Д. Ивлев, модельного построения теории пластичности. В работах Д.Д. Ивлева получили развитие вопросы двойственного, эквивалентного построения теории пластичности: исходя из формулировки условия пластичности и ассоциированного закона пластического течения и исходя из определения диссипативной функции и ассоциированного закона нагружения. Значительные результаты получены в области построения моделей для сред, обладающих сложными реологическими свойствами. Именно в воронежский период деятельности Д.Д. Ивлева им была написана и издана монография «Теория идеальной пластичности», ставшая настольной книгой многих ученых, аспирантов и студентов.

«Несомненно, что в теории пластичности имя Ивлева должно быть в одном ряду с именами Прандтля, Ильюшина, Хилла, Соколовского, Ходжа, Быковцева, а теория пластичности наряду с газовой динамикой и механикой разрушения была в основе прогресса механики в прошлом, двадцатом веке. Подобно Гуку и Эйлеру, Ивлев –



Рис. 1.

честный труженик науки, мало заботящийся о продаже своей продукции. Подобно Эйлеру, роль и научные результаты Ивлева недооцениваются или вовсе умалчиваются в западной печати. Подобно La Fayette, профессор Ивлев всегда руководствовался принципом справедливости в научной борьбе, от которой он не уклонялся как многие, а решительно вмешивался, чтобы помочь правой стороне.» [1]

В те годы в Воронеже работали известные математики, среди них М.А. Красносельский, деятельность и личность которого, по словам Д.Д. Ивлева, произвели на него большое впечатление. Сотрудничество с математиками было весьма плодотворным, в то время Д.Д. Ивлев общался также с С.Г. Крейном, Ю.Г. Борисовичем, В.И. Соболевым и другими. Возглавляемая Д.Д. Ивлевым кафедра стала центром организации научной работы ученых-механиков Воронежа. В работе кафедрального семинара участвовали преподаватели вузов города, научные работники институтов, работники промышленных предприятий города. Кафедральный семинар стал общегородским. Под руководством профессора Д.Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и др. городов. На семинары и конференции «к Д.Д. Ивлеву» приезжали такие известные ученые, как академики Ю.Н. Работнов, Л.А. Галин, профессора Л.М. Качанов, В.Д. Ключников, Г.П. Черепанов, Л.В. Ершов, Ю.Р. Лепник, Ю.В. Немировский, М.И. Ерхов, Н.А. Талицких (участник создания и редактор всех журналов АН СССР по механике), Зенон Мруз (Польша) и др. Работы Д.Д. Ивлева и его учеников вызывали повышенный интерес у ученых нашей страны и зарубежья, их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным.

На факультете начал работать диссертационный совет, и ученики Д.Д. Ивлева становились «остепененными» исследователями и преподавателями. Авторитет Д.Д. Ивлева, как талантливого исследователя и организатора науки, умелого руководителя коллектива, прекрасного педагога, продолжал расти. Начали поступать предложения из Москвы, но Дюис Данилович не торопился принять решение – он понимал, что в Москве у него не будет таких возможностей и свободы действий, которыми он обладал в Воронеже.

Нужно также отметить пристальное внимание, которое Д.Д. Ивлев уделял проявившим исследовательский талант ученикам. Среди них Д.Д. Ивлев выделял Г.И. Быковцева: «Среди моих аспирантов был Геннадий Иванович Быковцев, он обладал всеми теми качествами, которыми характеризуется слово – талант. Геннадий Иванович стал крупным ученым.» («Опыт автобиографии», 2000 г.). Дюис Данилович заметил талантливого юношу, с первых дней общения с ним сумел оценить его потенциал и всячески способствовал развитию его творческой активности. Совместно с Г.И. Быковцевым, ставшим в скором времени профессором, Д.Д. Ивлев проводил фундаментальные исследования общих соотношений теории упрочняющегося пластического материала. В 1971 году в издательстве «Наука» вышла совместная с Г.И. Быковцевым монография «Теория упрочняющегося пластического тела», также получившая самую высокую оценку научной общественности. С именем Г.И. Быковцева связано и создание в Воронежском университете факультета прикладной математики и механики, а также создание кафедры технической кибернетики и теории автоматического регулирования. Вместе со своими учениками профессорами Г.И. Быковцевым и И.А. Бережным Д.Д. Ивлев активно участвовал в создании научных школ механики деформируемого твердого тела в Куйбышеве (Самаре) и Владивостоке. Д.Д. Ивлев оказывал всяческую поддержку всем молодым талантливым ученым, поручая им ответственные дела: Г.И. Быковцев был избран заведующим кафедрой гидроаэромеханики и теоретической механики, В.В. Дудукаленко – заведующим кафедрой теории упругости и пластичности. Многие из его первых учеников достигли замечательных результатов в научных исследованиях, стали известными учеными, руководителями коллективов: И.Д. Легеня возглавлял математико-механический факультет университета, Г.И. Быковцев был организатором и первым руководителем нового факультета в университете – прикладной математики и механики, он же организовал и возглавил новую кафедру – технической кибернетики и теории автоматического регулирования, В.А. Жалнин был заместителем декана, деканом факультета прикладной математики и механики, А.Н. Спорыхин стал заслуженным деятелем науки РФ, заведующим кафедрой теоретической и прикладной механики, Ю.П. Листрова возглавляла кафедру теории упругости и пластичности, В.М. Зеленев возглавляет в Воронежском педагогическом университете кафедру физики, В.Д. Коробкин возглавлял долгое время кафедру теоретической механики в Воронежском архитектурно-строительном университете, И.А. Бережной был генеральным конструктором одного из закрытых авиационных КБ, А.В. Чигарев многие годы возглавлял кафедру в Белорусском национальном техническом университете, Т.Д. Семькина, Ю.М. Мяснянкин, В.А. Баскаков, Г.Ф. Филатов и многие другие ученики Д.Д. Ивлева первого поколения стали докторами наук, профессорами.

Воспитанник научной школы профессора Д.Д. Ивлева Г.И. Быковцев продолжил ее новаторские традиции и на новом факультете Воронежского университета, и впоследствии в Самарском и Дальневосточном университетах, а в начале двухтысячных

годов – в качестве заместителя директора Института автоматки и процессов управления (ИАПУ) Дальневосточного отделения Российской Академии наук.

Наряду с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в университете Д.Д. Ивлев некоторое время заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, поставив курс сопротивления материалов на современный для того времени уровень. Как и в университете лекции, которые он читал для студентов, посещали все преподаватели кафедры. В Воронежском педагогическом институте Д.Д. Ивлев преподавал по приглашению ректора института В.С. Постникова курс математики. Кроме того в политехническом и педагогическом институтах он руководил аспирантурой, из которой впоследствии также выходили высококвалифицированные педагоги и ученые. В своей научной деятельности профессор Д.Д. Ивлев не ограничивался чистой теорией. Он устанавливает и развивает связи с механиками-практиками. Именно в годы его работы в Воронежском университете на факультете заключаются первые хозяйственные соглашения с производственными предприятиями Воронежа – КБ «Химвтоматика», завод «Эникмаш». Ряд исследований профессора Д.Д. Ивлева посвящен определению точных решений задач, имеющих прикладное значение.

В эти же годы Д.Д. Ивлев был избран председателем профсоюзного комитета преподавателей Воронежского университета. Можно только догадываться, как много времени Д.Д. Ивлев уделял работе в университете. Может быть поэтому он часто любил работать по выходным и праздничным дням, приглашая домой своих аспирантов и дипломников.

Нельзя не отметить весьма важную роль, как в воронежском, так и в других периодах жизни Д.Д. Ивлева, его супруги Юлии Дмитриевны: на ее плечи легли все домашние заботы, к которым добавились и приемы гостей. Несмотря на признанный и непререкаемый среди учеников авторитет Д.Д. Ивлева, в коллективе сложились очень дружеские отношения. Замечательный рассказчик, наделенный обаянием, тактом и остроумием, Дюис Данилович всегда являлся центром притяжения коллектива. Дом Дюиса Даниловича становился рабочим кабинетом, куда постоянно приходили аспиранты, коллеги, приезжие гости. Юлия Дмитриевна всегда была готова принять и накормить всех, кто бывал в доме Ивлевых, а гостей каждый день было достаточно. Бывало и так, что приехавшие на семинар «к Д.Д. Ивлеву» размещались в квартире Дюиса Даниловича, и их тоже брала под свою опеку Юлия Дмитриевна.

Нужно вспомнить еще об одной черте Д.Д. Ивлева. И сам Дюис Данилович, и многие из его учеников оказались не только заядлыми футбольными болельщиками, но и любителями самим сразиться на футбольном поле. Тренировки и матчи проводились по всем правилам спортивного этикета. Регулярные футбольные баталии, которые Д.Д. Ивлев организовывал вместе со своими аспирантами и коллегами в городском парке, стали не просто развлечением, разрядкой после напряженной умственной работы. Каждая такая встреча заканчивалась бурным обсуждением тактики и стратегии игроков, анализом ситуаций, возникших на футбольном поле, и зачастую это горячее обсуждение продолжалось уже в стенах кафедры перед семинаром... и тут же назначались «принципиалки». Так назывались дополнительно назначаемые матчи в тех случаях, когда участники дискуссии не могли прийти к единому мнению в оценке действий игроков. Несмотря на небольшую разницу в возрасте Дюиса Даниловича и его первых учеников, масштаб его личности был таков, что ученики относились к нему с безоговорочным почтением.

Так в короткий по времени воронежский период своей деятельности Д.Д. Ивлев сумел собрать вокруг себя команду единомышленников, которые и составили ядро структуры, получившей в научной среде название воронежской научной школы математической теории пластичности профессора Д.Д. Ивлева В своем «Опыте автобиографии» Дюис Данилович писал: «Мне нравятся слова, принадлежащие Уильяму Фолкнеру: «Каждого человека может спасти не масса человеческая, не система, не общество, а только он сам, наделенный способностью и желанием отличать добро от зла. Только он сам, не допустивший, чтобы его страхом, обманом или подачками заставили отказаться от права и долга отличать справедливость от несправедливости, мужество от трусости, жертвенность от алчности, сострадание от эгоизма.

Если вы не будете бояться замечать эти различия и делать свой выбор, тогда вы измените мир»».

В 1965 году Д.Д. Ивлев возвращается в Москву, но связь с Воронежем, с воронежскими механиками не прерывается. Он продолжает руководить аспирантами, ежегодно приезжает в Воронеж с лекциями по современным проблемам механики пластичности, продолжает оказывать влияние на развитие механики в Воронежском университете. При деятельном участии профессора Д.Д. Ивлева в Воронежском университете были открыты новые диссертационные советы. Его ученики теперь возглавляют ученые советы по защите кандидатских и докторских диссертаций, работают доцентами и профессорами во многих учебных заведениях Воронежа, Самары, Минска и Владивостока.

Профессор Д.Д. Ивлев поддерживал тесную научную связь с учеными-механиками и других городов, внимательно следил за жизнью каждого воспитанника созданной им замечательной научной школы. Каждый приезд Дюиса Даниловича в Воронеж являлся крупным событием в научной жизни города. Коллеги, друзья, ученики проф. Д.Д. Ивлева высоко ценили в нем научную смелость и талант, испытывали к нему любовь и благодарность за щедрость, сопереживание, доброжелательность и душевное благородство. На рис.2 – Д.Д. Ивлев (верхний ряд, седьмой справа) в Воронеже в кругу своих учеников, 2007 год.

Вся последующая научная деятельность проф. Д.Д. Ивлева также связана с механикой деформируемого твердого тела и ее важнейшей составляющей – теорией пластичности.

Весомый вклад внесен им в теорию упрочняющегося пластического материала: проф. Д.Д. Ивлев развил представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения, предложенные в исследованиях А.Ю. Ишлинского и В. Прагера. Им предложено построение моделей сложных сред, основанных на использовании внутренних механизмов пластичности, вязкости и упругости.

В этой области механики сплошных сред проф. Д.Д. Ивлев совместно со своим учеником проф. Г.И. Быковцевым выполнил фундаментальные исследования общих соотношений теории упрочняющегося пластического материала.

Д.Д. Ивлеву принадлежит около 300 опубликованных работ, в том числе 7 монографий. В наши дни настольными книгами наших механиков являются уже упомянутые выше монографии Д.Д. Ивлева "Теория идеальной пластичности М.: Наука, 1966 г., Д.Д. Ивлева и Г.И. Быковцева "Теория упрочняющегося пластического тела" – М.: Наука, 1971 г., а также монография Д.Д. Ивлева и Л.В. Ершова "Метод возмущений в теории упруго-пластического тела М.: Наука, 1978. В 1998 году Дальневосточное отделение РАН опубликовало совместную монографию профессоров Г.И. Быковцева



Рис. 2.

и Д.Д. Ивлева "Теория пластичности являющуюся одним из фундаментальных трудов по математической теории пластичности. В 2001 и 2003 годах в издательстве Физматлит вышла книга Д.Д. Ивлева и А.Ю. Ишлинского «Математическая теория пластичности», в 2008 году в этом же издательстве – книга «Предельное состояние деформируемых тел и горных пород», в авторский коллектив вошли Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Р.И. Непершин, Ю.Н. Радаев, С.И. Сенашов, Е.И. Шемякин.

Перечисленные исследования далеко неполно охватывают проблематику научной деятельности профессора Д.Д. Ивлева и его учеников. В созданной им научной школе защищены более двух десятков докторских диссертаций и около ста кандидатских. Результаты, полученные Д.Д. Ивлевым, имеют фундаментальный характер для механики деформируемого твердого тела.

Д.Д. Ивлев был председателем диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук, членом экспертного совета ВАК РФ, членом Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, ответственным редактором журнала «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния»». Д.Д. Ивлеву было присвоено звание заслуженного деятеля науки РФ, он был избран действительным членом Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, академиком Международной инженерной академии и Инженерно-технологической академии Чувашской Республики. Д.Д. Ивлев – лауреат Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники (2006 г.).

Ю. Н. Радаев

МЕТАГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В МЕХАНИКЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются дифференциальные уравнения для потенциалов перемещений и микровращений, замещающие связанные векторные дифференциальные уравнения линейной теории микрополярной упругости. Исследуются только гармонические зависимости от времени. Опираясь на представление векторов перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторов, обеспечивающее выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости, получены новые представления в терминах двух метагармонических векторных полей. Проблема нахождения вихревых составляющих перемещений и микровращений приводится к решению двух несвязанных между собой векторных метагармонических уравнений. Часто указанные уравнения могут быть решены разделением пространственных переменных. Поэтому полученные представления могут находить применение в прикладных задачах механики деформируемого твердого тела, связанных с распространением гармонических волн перемещений и микровращений, характеризующихся заданным азимутальным числом, вдоль длинных цилиндрических волноводов.

Ключевые слова: микрополярная теория упругости, вектор перемещения, вектор микровращения, связанный, векторный потенциал, вихревая часть, винтовое уравнение, винтовое поле, уравнение Гельмгольца, метагармоническое уравнение, волновод

DOI: 10.37972/chgpu.2020.86.27.003

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Истоки микрополярных теорий следует искать в трудах В. Фойгта (W. Voigt, 1887 г.). Микрополярная теория упругости, впервые с необходимой полнотой изложенная в [1], может рассматриваться

© Радаев Ю. Н., 2020

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 01.06.2020

как дальнейшее обобщение теории упругости. Теория упругости, как известно, давно сформировалась сначала как инженерная, а затем и как физическая наука [2]. Классическая теория упругости довольно хорошо объясняет механическое поведение реальных твердых деформируемых тел во всех случаях, когда «зернистость» строения тел не является существенной для объяснения их деформаций, т.е. когда внутренний характерный размер «зерна» заметно меньше геометрических размеров самого тела.

Моделирование состояний подобных «зернистых» структур основывается на предположении о том, что положение элемента тела задается его местом в пространстве, а его пространственная ориентация — при помощи трех ортонормированных векторов, которые называются директорами. В микрополярных теориях положения и ориентации считаются кинематически независимыми. В линейной теории вместо одного тензора деформаций необходимо использовать два асимметричных тензора второго ранга. В этих моделях напряженное состояние представляется асимметричным тензором силовых напряжений и дополнительно — асимметричным тензором моментных напряжений, поэтому упругие тела в любой несимметричной теории характеризуются весьма значительным числом определяющих постоянных.

Уравнения микрополярной теории упругости достаточно хорошо известны [3–5] (см. также более ранние первоисточники [6–9]). Их вывод, основанный на принципе виртуальных перемещений, имеется в статье [10].

Целью работы является изучение связанной системы векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории изотропного упругого тела в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени. Их внимательный анализ и различные преобразования с помощью потенциалов перемещений и микровращений (безвихревых и вихревых) позволяют получить новые системы векторных дифференциальных уравнений (как связанные, так и не связанные). Естественно, что наиболее интересны только те, которые обеспечивают переход от связанных уравнений к несвязанным. Ясно, что несвязанные уравнения лучше поддаются дальнейшему исследованию.

Весьма похожие постановки задач возникают также в прикладных задачах связанной линейной термоупругости [11]. Особенно это относится к вопросам распространения гармонических волн в *гиперболических* термоупругих средах [12]. Представляемая работа может рассматриваться как развитие подхода, изложенного в нашей предыдущей работе [13], где выполнено расщепление основной связанной системы векторных дифференциальных уравнений гармонической микрополярной теории упругости на несвязанные уравнения. В этой же работе показано фундаментальное значение винтовых уравнений в теории гармонических задач механики упругих тел. Заметим, что минимально необходимые сведения, относящиеся к винтовым уравнениям, могут быть найдены, например, в книге [14]. Полученные в настоящей работе результаты могут найти применение в прикладных задачах механики деформируемого твердого тела, связанных с распространением гармонических волн перемещений и микровращений, характеризующихся заданным азимутальным числом, вдоль длинных цилиндрических волноводов. С другой стороны они выступают как дальнейшее развитие методов и результатов, изложенных в книге [12].

Содержание представляемой работы может быть охарактеризовано следующим образом. После вводного раздела рассматриваются линейные связанные дифференциальные уравнения микрополярной теории упругости, сформулированные в терминах

вектора перемещений и вектора микровращений. Приводится ряд форм таких уравнений. Затем, в третьем разделе, вводятся потенциалы перемещений и микровращений, исходя из разложения векторного поля на вихревую и безвихревую составляющие. Для потенциалов (двух скалярных и двух векторных) получена несвязанная система для скалярных потенциалов и связанная система дифференциальных уравнений для векторных потенциалов, которые замещают исходную систему уравнений линейной микрополярной теории упругости в том смысле, что обеспечивают выполнимость основных уравнений микрополярной теории. В следующем, четвертом разделе вводится вихревое векторное поле, удовлетворяющее естественному калибровочному условию, которое само по себе оказывается в состоянии выступить как полная реализация вихревых частей перемещений и микровращений. Указанное векторное поле на самом деле складывается из четырех винтовых векторных полей. В пятом разделе получено представление четырех винтовых векторных полей в терминах двух метагармонических векторов. Шестой раздел посвящен тем соотношениям микрополярной теории, которые необходимы для представления асимметричного тензора деформации, тензора изгиба—кручения, векторов и тензоров напряжений и моментных напряжений в терминах метагармонических потенциалов. Аккуратное оперирование с этими формулами подразумевает введение фундаментальных антисимметричных псевдотензоров и символов.

2. Связанные уравнения линейной теории микрополярной упругости в терминах перемещений и микровращений. Связанные векторные дифференциальные уравнения линейной микрополярной теории упругости, сформулированные в терминах перемещений и микровращений, имеют вид [10]:

$$\begin{cases} G[(1 + c_1)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2c_1 \nabla \times \boldsymbol{\phi}] = \rho \partial^2 \mathbf{u}, \\ GL^2[(1 + c_2)\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} + (1 - c_2 + 2c_3)\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi}] - 2Gc_1(2\boldsymbol{\phi} - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathfrak{J} \partial^2 \boldsymbol{\phi}. \end{cases} \quad (1)$$

где ρ — плотность; \mathfrak{J} — коэффициент микроинерции; \mathbf{u} — вектор перемещения; $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращения; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная длина микрополярной теории упругости; c_1, c_2, c_3 — физически безразмерные определяющие постоянные; ∇ — трехмерный оператор Гамильтона; ∂ — частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных.

Система векторных дифференциальных уравнений с частными производными (1) в современной литературе обычно заменяется другой. Достаточно ввести определяющие постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \varepsilon$ согласно

$$\begin{aligned} G = \mu, \quad \frac{2\nu}{1 - 2\nu} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad GL^2 = \gamma, \\ c_1 = \frac{\alpha}{\mu}, \quad c_2 = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad c_3 = \frac{\beta}{2\gamma} \end{aligned}$$

после чего система (1) преобразуется к следующей более или менее общепринятой форме [3, 4]:

$$\begin{cases} (\mu + \alpha)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (\mu - \alpha + \lambda)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\phi} = \rho \partial^2 \mathbf{u}, \\ (\gamma + \varepsilon)\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} + (\gamma - \varepsilon + \beta)\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} - 2\alpha(2\boldsymbol{\phi} - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathfrak{J} \partial^2 \boldsymbol{\phi}, \end{cases} \quad (2)$$

которая без труда преобразуется в

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times \phi = \rho\partial_t^2 \mathbf{u}, \\ (\beta + 2\gamma)\nabla\nabla \cdot \phi - (\gamma + \varepsilon)\nabla \times (\nabla \times \phi) - 2\alpha(2\phi - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathfrak{I}\partial_t^2 \phi. \end{cases} \quad (3)$$

В настоящей работе векторное дифференциальное уравнение (3) будет рассматриваться в областях трехмерного пространства, обладающих свойством поверхностной односвязности: любая замкнутая поверхность, целиком расположенная в области может быть стянута в точку, не выходя за границу области.

Зависимость от времени в дальнейшем исследовании предполагается гармонической, т.е. любое физическое поле $\mathbf{\Gamma}$ представляется как произведение комплексной амплитуды (за которой мы сохраним то же самое обозначение $\mathbf{\Gamma}$, что и для самого поля) на комплексную гармоническую экспоненту $e^{i\omega t}$, где ω — циклическая частота.

3. Связанные уравнения для потенциалов перемещений и микровращений. Воспользуемся хорошо известными разложениями Гельмгольца для векторов перемещений и микровращений на вихревые и безвихревые части

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}, \\ \phi = \nabla\Sigma + \nabla \times \mathbf{H}, \end{cases} \quad (4)$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных потенциалов Φ , Σ и векторных потенциалов $\mathbf{\Psi}$, \mathbf{H} .

Присоединим к (4) (хотя по-существу в этом нет никакой необходимости) калибровочные соотношения

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Подстановка разложений Гельмгольца (4) в систему дифференциальных уравнений (3) позволяет после ряда преобразований (не использующих калибровочные условия) получить уравнения для скалярных и векторных потенциалов.

Дифференциальные уравнения для скалярных потенциалов Φ , Σ не связаны между собой и поэтому рассматриваются как два независимых уравнения

$$\begin{cases} \Delta\Phi - \frac{1}{c_{\parallel}^2}(\partial_t)^2\Phi = 0, \\ \Delta\Sigma - \frac{1}{\mu c_{\parallel}^2}(\partial_t)^2\Sigma - \frac{\Omega^2}{\mu c_{\parallel}^2}\Sigma = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь постоянные c_{\parallel}^2 , ${}_{\mu}c_{\parallel}^2$ и Ω^2 выражаются в терминах определяющих постоянных согласно

$$c_{\parallel}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad {}_{\mu}c_{\parallel}^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{\mathfrak{I}}, \quad \Omega^2 = \frac{4\alpha}{\mathfrak{I}}.$$

Для векторных потенциалов $\mathbf{\Psi}$, \mathbf{H} получаются два связанных между собой векторных дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\perp} \mathbf{\Psi} + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ \mathcal{B}_{\perp} \mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2{}_{\mu}c_{\perp}^2} \nabla \times \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (7)$$

где были введены постоянные

$$d_{\perp}^2 = \frac{\backslash c_{\perp}^2}{\backslash\backslash c_{\perp}^2}, \quad \backslash c_{\perp}^2 = \frac{\alpha}{\rho}, \quad \backslash\backslash c_{\perp}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad \backslash\backslash_{\mu} c_{\perp}^2 = \frac{\gamma + \epsilon}{\mathfrak{J}}; \quad (8)$$

и, кроме того, — два дифференциальных оператора второго порядка

$$\mathcal{A}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{\backslash\backslash c_{\perp}^2}(\partial.)^2, \quad \mathcal{B}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{\backslash\backslash_{\mu} c_{\perp}^2}(\partial.)^2 - \frac{\Omega^2}{\backslash\backslash_{\mu} c_{\perp}^2}. \quad (9)$$

Исследование связанных уравнений для векторных потенциалов перемещений и микровращений вызывает значительные трудности и поэтому мы сосредоточимся именно на этих уравнениях.

Прежде всего заметим, что дифференциальные операторы \mathcal{A}_{\perp} и \mathcal{B}_{\perp} в условиях гармонической зависимости от времени сводятся к

$$\mathcal{A}_{\perp} = \Delta + \frac{\omega^2}{\backslash\backslash c_{\perp}^2}, \quad \mathcal{B}_{\perp} = \Delta + \frac{\omega^2}{\backslash\backslash_{\mu} c_{\perp}^2} - \frac{\Omega^2}{\backslash\backslash_{\mu} c_{\perp}^2}. \quad (10)$$

Далее введем следующие две постоянные:

$$\alpha_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{\backslash\backslash c_{\perp}^2}, \quad \beta_{\perp}^2 = \text{Abs} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\backslash\backslash_{\mu} c_{\perp}^2},$$

после чего операторы \mathcal{A}_{\perp} и \mathcal{B}_{\perp} преобразуются к следующему виду:

$$\mathcal{A}_{\perp} = \Delta + \alpha_{\perp}^2, \quad \mathcal{B}_{\perp} = \Delta \pm \beta_{\perp}^2, \quad (11)$$

где выбор того или иного знака в выражении для \mathcal{B}_{\perp} зависит от величины циклической частоты изменения гармонических полей

$$\omega^2 - \Omega^2 \geq 0.$$

В итоге в гармоническом случае связанная система уравнений для потенциалов приобретает вид

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^2)\Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta \pm \beta_{\perp}^2)\mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2 \backslash\backslash_{\mu} c_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (12)$$

Ограничимся исследованием высокочастотных гармонических волн, когда циклическая частота ω оказывается выше порогового значения, определяемого постоянной Ω . Тогда система уравнений (12) приводится к

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^2)\Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_{\perp}^2)\mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2 \backslash\backslash_{\mu} c_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (13)$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$g_{\perp}^2 = \frac{\Omega^2}{\backslash\backslash_{\mu} c_{\perp}^2} d_{\perp}^2.$$

Окончательно приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^2)\Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_{\perp}^2)\mathbf{H} + \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (14)$$

Внимательный анализ проведенных рассуждений показывает, что связанная система уравнений для потенциалов (14) получается также и в несколько иной форме (и снова без учета калибровки потенциалов):

$$\begin{cases} -\nabla \times (\nabla \times \Psi) + \alpha_{\perp}^2 \Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \beta_{\perp}^2 \mathbf{H} + \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (15)$$

Для скалярных потенциалов Φ , Σ в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени на основании (6) приходим к уравнениям

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \nabla) \Phi + \alpha_{\parallel}^2 \Phi = 0, \\ (\nabla \cdot \nabla) \Sigma + \beta_{\parallel}^2 \Sigma = 0, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$\alpha_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c_{\parallel}^2}, \quad \beta_{\parallel}^2 = \text{Abs} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\mu c_{\parallel}^2}.$$

4. Фундаментальное винтовое векторное поле микрополярной теории упругости. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений с помощью винтовых векторных полей решает главную задачу настоящего исследования: переход от связанной системы дифференциальных уравнений (15) к несвязанным уравнениям, что в конечном итоге должно позволить найти аналитические подходы к решению прикладных задач механики микрополярных континуумов.

Достижение этой цели начинается с рассмотрения вихревых составляющих перемещений и микровращений как одного и того же вихревого векторного поля Υ , но с различными масштабными факторами:

$$\begin{cases} \nabla \times \Psi = a\Upsilon, \\ \nabla \times \mathbf{H} = b\Upsilon; \end{cases} \quad (17)$$

при этом а priori будет выполнено *естественное* калибровочное условие

$$\nabla \cdot \Upsilon = 0.$$

Векторное поле Υ играет центральную роль во всем дальнейшем исследовании, поэтому мы будем называть его фундаментальным винтовым полем микрополярной теории.

Подстановка (17) в систему векторных дифференциальных уравнений (15) позволяет получить следующую систему уравнений относительно поля Υ :

$$\begin{cases} -a\nabla \times (\nabla \times \Upsilon) + \alpha_{\perp}^2 a\Upsilon + 2d_{\perp}^2 b\nabla \times \Upsilon = \mathbf{0}, \\ -b\nabla \times (\nabla \times \Upsilon) + \beta_{\perp}^2 b\Upsilon + \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} a\nabla \times \Upsilon = \mathbf{0}. \end{cases}$$

В левой части первого из уравнений приведенной выше системы добавим и отнимем одно и то же слагаемое (c — некоторая постоянная)

$$c\nabla \times \mathbf{\Upsilon};$$

то же самое выполним и со вторым уравнением и слагаемым (d — некоторая постоянная)

$$d\nabla \times \mathbf{\Upsilon}.$$

После ряда преобразований убеждаемся в том, что, если положить

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2d_{\perp}^2 b}{a\alpha_{\perp}^2}, \quad \frac{b}{d} = \frac{d + (2d_{\perp}^2)^{-1} g_{\perp}^2 a}{b\beta_{\perp}^2},$$

то связанные уравнения для потенциалов будут удовлетворяться, когда

$$\begin{cases} -c\nabla \times \mathbf{\Upsilon} + a\alpha_{\perp}^2 \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -d\nabla \times \mathbf{\Upsilon} + b\beta_{\perp}^2 \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Получить одно независимое уравнение для определения векторного поля $\mathbf{\Upsilon}$ удастся, если принять, что

$$\frac{c}{d} = \frac{\alpha_{\perp}^2 a}{\beta_{\perp}^2 b};$$

тогда оказывается достаточной выполнимость следующего *винтового* уравнения

$$-\nabla \times \mathbf{\Upsilon} + p\alpha_{\perp}^2 \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}, \quad (18)$$

где p представляет собой отношение

$$p = \frac{a}{c}.$$

Обратимся далее к нахождению постоянных. Всего их четыре: a , b , c , d . Из них можно образовать три независимых отношения:

$$p = \frac{a}{c}, \quad q = \frac{b}{c}, \quad s = \frac{d}{c}.$$

Для указанных отношений из предыдущих рассуждений получаются ровно три независимых уравнения

$$\begin{cases} p^2 \alpha_{\perp}^2 = 1 + 2qd_{\perp}^2, \\ q^2 \beta_{\perp}^2 = s^2 + ps \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2}, \\ ps \frac{\alpha_{\perp}^2}{\beta_{\perp}^2} = q. \end{cases}$$

Из данной выше системы уравнений можно определить постоянную q , получив сначала квадратное уравнение

$$2d_{\perp}^2 \alpha_{\perp}^2 q^2 + (\alpha_{\perp}^2 - \beta_{\perp}^2 - g_{\perp}^2)q - \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} = 0,$$

из которого находят два различных вещественных значения для q :

$$4d_{\perp}^2 \alpha_{\perp}^2 q = \beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2)^2 + 4g_{\perp}^2 \alpha_{\perp}^2}.$$

Для постоянной p^2 также получаются два различных вещественных значения согласно

$$2\alpha_{\perp}^4 p^2 = \beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2)^2 - 4\alpha_{\perp}^2 \beta_{\perp}^2}.$$

Начиная с этого момента, введем два значения p_1, p_2 , которые соответствуют положительному и отрицательному знакам в приведенной только что формуле, и введем также два *положительных* значения K_1, K_2 с помощью соотношений

$$\alpha_{\perp}^4 p_{1,2}^2 = K_{2,1}^2, \quad \alpha_{\perp}^2 p_1 = \mp K_2, \quad \alpha_{\perp}^2 p_2 = \mp K_1.$$

Ясно, что постоянные (волновые числа) K_1, K_2 могут быть вычислены на основании

$$\begin{aligned} \sqrt{2}K_2 &= \sqrt{\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2 + \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2)^2 - 4\alpha_{\perp}^2 \beta_{\perp}^2}}, \\ \sqrt{2}K_1 &= \sqrt{\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2 - \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2)^2 - 4\alpha_{\perp}^2 \beta_{\perp}^2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что волновые числа K_1, K_2 в силу своего определения упорядочены согласно

$$K_2 > K_1 > 0.$$

Таким образом, всего для параметра p имеется *четыре* различных вещественных значения

$$\mp K_1, \quad \mp K_2;$$

в результате векторное поле Υ должно удовлетворять одному из *четырёх* винтовых уравнений

$$-\nabla \times \Upsilon \mp K_{2,1} \Upsilon = \mathbf{0}, \quad (20)$$

где знаки \mp и индексы 1, 2 между собой никак не согласованы.

Таким образом, имеется ровно четыре независимых поля¹

$$\Upsilon_{2-}, \quad \Upsilon_{2+}, \quad \Upsilon_{1-}, \quad \Upsilon_{1+},$$

которые должны быть интегралами несвязанных векторных уравнений (20) и линейные комбинации которых будут определять вихревые части векторов перемещений и микровращений в соответствии с (17). При этом следует учитывать, что однозначно определяется лишь отношение b/a и, поскольку

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p},$$

то отношение b/a имеет четыре различных значения, которые без труда находятся из данных выше формул.

Обозначая четыре указанных значения отношения b/a через

$$\frac{b}{a} = \mp g_{2,1},$$

в итоге приходим к формуле для вихревых частей перемещений и микровращений

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -g_2 \end{pmatrix} \Upsilon_{2-} + \begin{pmatrix} 1 \\ g_2 \end{pmatrix} \Upsilon_{2+} + \begin{pmatrix} 1 \\ -g_1 \end{pmatrix} \Upsilon_{1-} + \begin{pmatrix} 1 \\ g_1 \end{pmatrix} \Upsilon_{1+}. \quad (21)$$

¹Приводимые ниже обозначения для четырех различных вариантов векторного поля Υ согласованы с четырьмя уравнениями (20), выписанными в сокращенной форме.

В этой формуле мы полагаем

$$g_{2,1} = \frac{\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2)^2 + 4\alpha_{\perp}^2 g_{\perp}^2}}{4d_{\perp}^2 K_{2,1}}. \quad (22)$$

Заметим, что здесь знаки \pm согласованы с индексами 2, 1, т.е. последняя формула на самом деле определяет два вещественных значения параметра g .

5. Представление вихревых частей перемещений и микровращений в терминах двух метагармонических векторов. Следуя [13], винтовые уравнения (20) будем решать, вводя два новых вихревых векторных потенциала $\mathbf{\Pi}_1$ и $\mathbf{\Pi}_2$ в соответствии с

$$\begin{aligned} \mathbf{\Upsilon}_{\mp}^1 &= \nabla \times \mathbf{\Pi}_1 \mp K_1 \mathbf{\Pi}_1, \\ \mathbf{\Upsilon}_{\mp}^2 &= \nabla \times \mathbf{\Pi}_2 \mp K_2 \mathbf{\Pi}_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Эти два потенциала предполагаются вихревыми, т.е.

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_2 = 0.$$

Для того, чтобы векторные поля $\mathbf{\Upsilon}_2^-, \mathbf{\Upsilon}_2^+, \mathbf{\Upsilon}_1^-, \mathbf{\Upsilon}_1^+$ удовлетворяли винтовым уравнениям (20) потенциалы $\mathbf{\Pi}_1$ и $\mathbf{\Pi}_2$, в свою очередь, должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца²

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{\Pi}_1 + K_1^2 \mathbf{\Pi}_1 &= \mathbf{0}, \\ (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{\Pi}_2 + K_2^2 \mathbf{\Pi}_2 &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя в формулу (21) представления (23) для векторных полей $\mathbf{\Upsilon}_2^-, \mathbf{\Upsilon}_2^+, \mathbf{\Upsilon}_1^-, \mathbf{\Upsilon}_1^+$, пренебрегая затем несущественным множителем 2, после ряда преобразований получаем

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \times \mathbf{\Pi}_1 + \nabla \times \mathbf{\Pi}_2 \\ g_1 K_1 \mathbf{\Pi}_1 + g_2 K_2 \mathbf{\Pi}_2 \end{pmatrix}$$

или также

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \times & \nabla \times \\ g_1 K_1 & g_2 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_1 \\ \mathbf{\Pi}_2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Заметим, что

$$g_{2,1} K_{2,1} = \frac{\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2)^2 + 4\alpha_{\perp}^2 g_{\perp}^2}}{4d_{\perp}^2}$$

и справедливы неравенства

$$g_2 > 0 > g_1.$$

²В современной научной литературе уравнения Гельмгольца часто называют метагармоническими уравнениями (metaharmonic equations), а их регулярные решения — метагармоническими функциями (в данном случае — метагармоническими векторными полями).

Принимая во внимание разложения (4) и (25), приходим к следующему представлению перемещений и микровращений в терминах двух метагармонических потенциалов:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{pmatrix} = \nabla \begin{pmatrix} \Phi \\ \Sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \times \mathbf{\Pi} + \nabla \times \mathbf{\Pi} \\ g_1 K_1 \mathbf{\Pi}_1 + g_2 K_2 \mathbf{\Pi}_2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Здесь скалярные и векторные потенциалы должны удовлетворять метагармоническим уравнениям (см. (16) и (24)) с волновыми числами α_{\parallel} , β_{\parallel} , K_1 , K_2 :

$$\begin{aligned} ((\nabla \cdot \nabla) + \alpha_{\parallel}^2) \Phi &= 0, \\ ((\nabla \cdot \nabla) + \beta_{\parallel}^2) \Sigma &= 0; \\ ((\nabla \cdot \nabla) + K_1^2) \mathbf{\Pi}_1 &= \mathbf{0}, \\ ((\nabla \cdot \nabla) + K_2^2) \mathbf{\Pi}_2 &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (27)$$

6. Представления для деформаций, силовых и моментных напряжений. На основании представлений (26) могут быть получены также выражения для деформаций, силовых и моментных напряжений в терминах метагармонических потенциалов. Сначала нам потребуются некоторые вспомогательные представления и формулы микрополярной теории упругости.

Определим имеющие фундаментальное значение в микрополярных теориях символы перестановок ϵ^{ijk} , ϵ_{ijk} соотношениями

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } i, j, k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{если } i, j, k = 132, 213, 321; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Символы перестановок — относительные тензоры (псевдотензоры) весов $+1$ и -1 соответственно.

Далее рассмотрим локальные базисные триэдры, связанные с выбранной координатной системой в трехмерном пространстве: \mathbf{e}_s ($s = 1, 2, 3$) — локальный ковариантный базис; \mathbf{e}^s ($s = 1, 2, 3$) — локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению: $\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}^k = \delta_s^k$ ($k = 1, 2, 3$; $s = 1, 2, 3$).

Наряду с символами перестановок определим ориентирующий псевдоскаляр (относительный скаляр веса $+1$)

$$e = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3).$$

Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированной координатной системы, $e < 0$ для левоориентированной координатной системы.

Введем также следующий относительный скаляр отрицательного веса -1 :

$$e^{-1} = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3).$$

Наконец, рассмотрим истинные e -тензоры (тензоры перестановок) e^{ijk} , e_{ijk} :

$$\begin{aligned} e_{ijk} &= e \epsilon_{ijk}, \\ e^{ijk} &= e^{-1} \epsilon^{ijk}, \end{aligned}$$

т.е.

$$e_{skl} = \begin{cases} +\sqrt{g}\epsilon_{skl}, & \text{если } e > 0; \\ -\sqrt{g}\epsilon_{skl}, & \text{если } e < 0; \end{cases}$$

$$e^{skl} = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{skl}, & \text{если } e > 0; \\ -\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{skl}, & \text{если } e < 0. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_k = e_{skl} \mathbf{i}_l,$$

$$\mathbf{i}^s \times \mathbf{i}^k = e^{skl} \mathbf{i}_l,$$

$$e_{skl} = \mathbf{i}_s \cdot (\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l),$$

$$e^{skl} = \mathbf{i}^s \cdot (\mathbf{i}^k \times \mathbf{i}^l).$$

Учитывая изложенное выше, для e -тензора

$$\mathbf{e} = e^{skl} \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l$$

нетрудно получить формулу

$$-\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \mathbf{e},$$

где \mathbf{I} — единичный тензор.

Далее рассмотрим асимметричный тензор деформации линейной микрополярной теории упругости

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\phi},$$

или

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{e},$$

а также

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{I} \times \mathbf{I})$$

и

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\phi}.$$

Тензор изгиба—кручения представляет собой градиент поля микроповоротов, т.е. он представляет собой тензор второго ранга

$$\boldsymbol{\kappa} = \nabla \otimes \boldsymbol{\phi}$$

Следующие фундаментальные соотношения позволяют определить тензоры силовых и моментных напряжений

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu},$$

где \mathbf{t} , \mathbf{m} — векторы сил и моментов, действующих на плоский элемент, нормальный единичному директору \mathbf{n} .

В случае изотропной среды определяющие уравнения линейного микрополярного упругого тела будут иметь вид

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mu + \alpha)\boldsymbol{\epsilon} + (\mu - \alpha)\boldsymbol{\epsilon}^T + \lambda \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\gamma + \epsilon)\boldsymbol{\kappa} + (\gamma - \epsilon)\boldsymbol{\kappa}^T + \beta \operatorname{tr} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{I}.$$

С их помощью без труда получаются формулы для векторов силовых и моментных напряжений \mathbf{t} и \mathbf{m}

$$\begin{cases} \mathbf{t} = 2\mu(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mu - \alpha)\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \lambda\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\alpha\mathbf{n} \times \boldsymbol{\phi}, \\ \mathbf{m} = \beta\mathbf{n}(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) + 2\gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{\phi} + (\gamma - \epsilon)\mathbf{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{\phi}). \end{cases}$$

Они используются в прикладных задачах микрополярной теории упругости при постановке граничных условий.

Метагармонические потенциалы вводятся в данные выше формулы на основании

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= -\alpha_{\parallel}^2 \Phi, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} &= -\beta_{\parallel}^2 \Sigma; \\ \nabla \times \mathbf{u} &= -(\nabla \cdot \nabla) \Pi_1 - (\nabla \cdot \nabla) \Pi_2 = K_1^2 \Pi_1 + K_2^2 \Pi_2, \\ \nabla \times \boldsymbol{\phi} &= g_1 K_1 \nabla \times \Pi_1 + g_2 K_2 \nabla \times \Pi_2. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в некоторых случаях метагармонические уравнения (27) могут быть решены разделением пространственных переменных. Это справедливо, в частности, в случае цилиндрической области. Поэтому полученные представления (26) могут находить применение в прикладных задачах механики деформируемого твердого тела, связанных с распространением гармонических волн перемещений и микровращений, характеризующихся заданным азимутальным числом, вдоль длинных цилиндрических волноводов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
- [2] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.
- [3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
- [4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [5] Dyzlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.) Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv+345 pp.
- [6] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 10. 1958. S. 195–213.
- [7] Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 16. 1964. S. 1–22.
- [8] Palmov V.A. Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity// Prikl. Math. Mech. Vol. 28, No. 3. 1964. Pp. 401–408.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper// Acta Mechanica. Vol. 2. 1966. pp. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729
- [10] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.
- [11] Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. In: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Eds. H.A. Lauwerier, W.T. Koiter. Vol. 16. Amsterdam, London: North-Holland; New York: American Elsevier, 1973. xiv+425 pp.
- [12] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
- [13] Радаев Ю.Н. Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. №6. 2020. (в печати)

- [14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories/ In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226–902.

Y. N. Radayev

МЕТАHARMONIC POTENTIALS IN MECHANICS OF MICROPOLAR MEDIA

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The coupled vector differential equations of the linear theory of micropolar elasticity formulated in terms of displacements and micro-rotations are studied. A harmonic dependence of the physical fields on time is assumed. By employing the displacements and micro-rotations representation formula in the terms of four screw vectors a new representation based on two metaharmonic vectors are obtained. Thus the problem of determination of the vortex parts of the displacement and micro-rotation fields is reduced to solution of two uncoupled vector metaharmonic equations. The latter can be oftenly solved by the separation of variables technique. For this reason obtained results can be applied to various problems of the micropolar elasticity related to harmonic wave propagation in waveguides. In particular this is true for waves of a given azimuthal number in a long cylindrical waveguide.

Keywords: micropolar elasticity, displacement vector, micro-rotation vector, coupled, vector potential, vortex part, screw equation, screw field, Helmholtz equation, metaharmonic equation, waveguide

REFERENCES

- [1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
- [2] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.
- [3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
- [4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [5] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.) Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv+345 pp.
- [6] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 10. 1958. S. 195–213.
- [7] Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 16. 1964. S. 1–22.
- [8] Palmov V.A. Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity// Prikl. Math. Mech. Vol. 28, No. 3. 1964. Pp. 401–408.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper// Acta Mechanica. Vol. 2. 1966. pp. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729
- [10] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.
- [11] Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. In: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Eds. H.A. Lauwerier, W.T. Koiter. Vol. 16. Amsterdam, London: North-Holland; New York: American Elsevier, 1973. xiv+425 pp.

Radayev Yuri Nickolaevich

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

- [12] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
- [13] Радаев Ю.Н. Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. №6. 2020. (в печати)
- [14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories/ In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226–902.

А. В. Чигарев¹, Ю. В. Чигарев²

СТОХАСТИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

¹Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

²Белорусский государственный агротехнический университет, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматриваются колебания заполненного жидкостью трубопровода относительно горизонтальной оси, опирающегося на две опоры — одна из которых неподвижна, другая может смещаться в горизонтальном направлении. Начальное движение трубы характеризуется её изгибным отклонением в вертикальной плоскости, угловым во вращательном движении вокруг горизонтальной оси и гидравлическим ударом, при действии которого внутреннее давление на стенки трубы приобретает вид δ -толчков. Исходная система уравнений колебаний трубопровода приводится к уравнению Дуффинга. В переменных «действие-угол» получена граница стохастичности, которая отделяет детерминированную область решения от стохастической. Получено диффузионное уравнение типа Фоккера–Планка–Колмогорова, решение которого определяет функцию плотности вероятности, с помощью которой можно находить случайные параметры колебаний трубы для оценки её движения.

Ключевые слова: трубопровод, колебания, уравнение Дуффинга, переменные действие-угол, граница стохастичности, стохастическое уравнение.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.84.77.004

УДК: 539.3

Введение. Трубопроводы являются одним из ключевых компонентов современной промышленности, энергетики, сельского хозяйства и других многих развиваемых технологических процессов, связанных с транспортировкой жидкости и газа. Прокладка трубопроводов проходит в разных климатических и ландшафтных условиях, которые вместе с переменными внутренними нагрузками могут вызывать на его отдельных участках колебательные движения. Колебания могут носить регулярный и нерегулярный характер. Вопросами деформирования труб и шлангов при статическом и динамическом нагружении занимались многие ученые. Ссылки на некоторые из них можно найти в работе [1]. В работах [1, 2] рассмотрены пространственные колебания

© Чигарев А. В., Чигарев Ю. В., 2020

Чигарев Анатолий Власович

e-mail: chigarev@ Rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь.

Чигарев Юрий Власович

e-mail: yuri.chigarev.44@bk.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный агротехнический университет, г. Минск, Беларусь.

Поступила 29.06.2020

трубопровода под действием переменного внутреннего давления с учётом гидравлического удара и сил инерции. В [2] исследованы свободные колебания трубопровода. Показано, что при учёте сил Архимеда и сил инерции Кориолиса происходит рост вращательных и изгибных колебаний. В работе [1] на примере стального трубопровода с учетом окружной и продольной деформаций трубы исследована инерционная и инерционно-упругая стадия колебаний. В данной работе, используя условия нагружения трубопровода работ [1, 2], приводится условие, при котором колебательный процесс стохастизируется без априорных предположений о наличии в системе случайных параметров [3–6].

Постановка задачи. Рассматриваются пространственные колебания трубы, закрепленной по концам к неподвижной и подвижной опорам [1, 2]. В начальный момент времени под действием собственного веса и внутреннего давления на стенки со стороны жидкости труба имеет прогиб w_0 и отклонена на угол ϑ_0 от вертикальной плоскости. Предполагается, что с одновременным отпуском без начальной скорости трубы ($t_0 = 0$) происходит гидравлический удар, который приводит к изменению внутреннего давления — появлению δ -толчков. Колебательный процесс учитывает силу сопротивления, инерционные силы переносного и относительного движения, силу Архимеда.

Главная часть. Пусть длина трубы l , внутренний радиус r , толщина стенки трубы h и суммарная масса трубы и жидкости m .

На элемент трубы длины dx и массой $dm = (m/l) dx$ действуют силы сопротивления [1, 2]

$$d\vec{F}_c = -\mu\vec{V}_a dx, \quad (1)$$

где μ — коэффициент сопротивления; \vec{V}_a — абсолютная скорость, равная сумме переносной \vec{V}_e и относительной \vec{V}_r скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \quad (2)$$

Здесь

$$V_r = \frac{dw}{dt} = \dot{w}, \quad V_e = \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}. \quad (3)$$

Сила сопротивления (1) с учетом (2) распадается на две силы:

$$d\vec{F}_c = d\vec{F}_{ce} + d\vec{F}_{cr}, \quad (4)$$

где

$$dF_{ce} = \mu w \theta dx, \quad dF_{cr} = \mu w dx. \quad (5)$$

Силы инерции нормальная, касательная и Кориолисова соответственно будут

$$dF_n^i = w \dot{\vartheta}^2 dm, \quad dF_\tau^i = w \ddot{\vartheta} dm, \quad dF_k^i = 2 \dot{\vartheta} \dot{w} dm. \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы с учетом окружной и осевой деформаций будет [1, 2]

$$\ddot{w} + \frac{EI}{m} w^{IV} - \frac{(K - PS)\vartheta}{m} w'' - w \dot{\vartheta}^2 + \mu \frac{l}{m} w - g + \frac{B}{m} = 0; \quad (7)$$

здесь штрихами обозначены производные по x ; E — модуль Юнга среды; S — площадь поперечного сечения трубы; I — осевой момент инерции; K — сила продольного

натяжения трубы [1, 2]:

$$K = \frac{ES}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx;$$

B — сила Архимеда, действующая на всю трубу: $B = \pi \rho l g (r + h)$, где ρ — плотность среды.

Решение задачи запишем в одномодовом приближении в виде

$$w(x, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (8)$$

С помощью метода Бубнова–Галеркина получим уравнения, которые можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \ddot{\vartheta} f^2 + \frac{\mu l^3}{m} \dot{\vartheta} + f \left(\frac{2(gm - K)}{m\pi} \sin \vartheta + \dot{\vartheta} f \right) = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{f} + \frac{\mu l}{m} \dot{f} + \frac{EI\pi^4}{ml^3} f = \frac{4}{\pi} \left(g - \frac{K}{m} \right) - \left[\frac{ES\pi^4}{4ml^3} f^3 - S \frac{\pi^2}{ml} (P_0 + P_1 \sin(\varphi t + \varphi_0)) f \right]. \quad (10)$$

Полагая в (9)–(10) угловые перемещения и затухание малыми, приходим к уравнению изгибных колебаний типа Дуффинга:

$$\ddot{f} + \frac{EI\pi^4}{ml^3} f + \frac{ES\pi^4}{4ml^3} f^3 = \frac{4}{\pi} \left(g - \frac{K}{m} \right) + S \frac{\pi^2}{ml} (P_0 + P_1 \sin(\varphi t + \varphi_0)) f. \quad (11)$$

Правую часть данного уравнения, состоящую из двух переменных слагаемых, представим в виде функциональных δ -толчков, длящихся бесконечно малое время и следующих периодически с периодом $T = 2\pi/\Omega$ [3, 4]:

$$\Phi(t) = \omega_0 f \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (12)$$

Здесь ω_0 — собственная частота; Ω — частота возмущающей силы, $n = 1, 2, \dots$.

Предполагается δ -образность какой-либо производной, что соответствует присутствию большого числа гармоник в спектральном составе внешнего возмущения.

Между двумя толчками решение запишем в виде [4]

$$f = A \cos \left[\left(1 + \frac{3}{32} \frac{S}{I} A^2 \right) \omega_0 t + \varphi \right]. \quad (13)$$

С помощью комплексного вектора и оператора сдвига аналогично работам [3, 5] можно получить уравнения в конечных разностях для амплитуды и фазы колебаний трубопровода:

$$A_{n+1} = 0,5 A_n (2 + \epsilon \sin 2\varphi), \quad (14)$$

$$\varphi_{n+1} = \left\{ \varphi_n + 2\pi \frac{\omega}{\Omega} + (2\Gamma_n \cos \varphi_n - \epsilon \sin \varphi_n) + \epsilon \cos^2 \varphi_n \right\}, \quad (15)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть аргумента;

$$\Gamma_n = \frac{3SA_n^2}{32I\Omega} \epsilon \omega. \quad (16)$$

Если вычисление корреляционной функции $U(\varphi)$ приводит к соотношению

$$U_n = \frac{1}{\Gamma_n}, \quad (17)$$

то условие выполнения некоррелированности фаз $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ будет, когда

$$\Gamma_n \gg 1. \quad (18)$$

Выполнение (18) эквивалентно закону релаксации (расцеплению корреляций). Затухание корреляций ведет к стохастизации процесса [5, 6].

Вычислим корреляционную функцию U_n для фазы φ . Для $n = 1$ имеем

$$U_1 = 6 \left[2 \int_0^1 \varphi \{ \Gamma \varphi \} d\varphi - \int_0^1 \{ \Gamma \varphi \} d\varphi \right]. \quad (19)$$

Аналогичные выкладки приводят к формуле

$$U_n \approx \frac{c_n}{\Gamma_n} = c_n e^{-n \lg \Gamma}, \quad (20)$$

где c_n — медленно меняющаяся предэкспонента. Формула выражает расцепление фазовых корреляций, что приводит к случайной последовательности фаз. Расцепление корреляций происходит за время $t' = (\lg \Gamma)^{-1}$, которое намного меньше единицы и много меньше периода изменения последовательных значений фаз. При выполнении условия $\Gamma_n \gg 1$ для изучения процесса колебаний трубопровода нужно привлекать методы теории вероятностей. $\Gamma_n = 1$ будет границей стохастичности [3, 4]. Гамильтониан H для переменных $p(t) = \dot{f}(t)$, $f(t)$, где $\dot{f} = \partial H / \partial p$, $\text{dot} p = -\partial H / \partial f$, будет

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad (21)$$

$$H_0 = 0,5 \left(p^2 + \omega_0^2 f^2 - \frac{S\omega_0^2}{8I} f^4 \right), \quad H_1 = 0,5 f^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

В переменных действие-угол (I, θ) уравнение движения можно записать в виде [3]

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta}, \quad (22)$$

$$\dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}. \quad (23)$$

В дальнейшем членом $\varepsilon \partial H_1 / \partial I$ в силу малости можно пренебречь.

Введем функцию плотности вероятности $G(I, \theta, t)$ и запишем уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial G}{\partial t} = (M_0 + \varepsilon \delta M) w, \quad (24)$$

где

$$M_0 = -\omega \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \delta M = \left(\frac{\partial H_1}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial I} - \frac{\partial H_1}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Разложим функции $G(I, \theta, t)$, $R(I, \theta, t) = \frac{\partial H_1}{\partial \theta}(I, \theta, t)$ в ряды Фурье:

$$G(I, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(I, t) \exp(in\theta), \quad (25)$$

$$R(I, \theta, t) = \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} R_{n,k}(I) \exp[i(n\omega + k\Omega t)]. \quad (26)$$

Подставляя (25)–(26) в (24), получим уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова [3–6]:

$$\frac{\partial G_n}{\partial t} + in\dot{\theta}w_n + \varepsilon \frac{\partial}{\partial I} \left[\sum_{n,k} R_{n,k}(I)w_{n-k} \right] = 0. \quad (27)$$

Для начального распределения $\Gamma_n(I, 0) = \Gamma_0(I, 0)\delta_{n,0}$, где $\delta_{n,0}$ — символ Кронекера, уравнение (27) приводится к виду

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial I} [\gamma I w_0] - 0,5 \frac{\partial^2}{\partial I^2} [2\gamma I^2 G_0] = 0. \quad (28)$$

Здесь $\gamma = 8\varepsilon^2\pi\Omega$. По данному уравнению можно составить единственным образом дифференциальное уравнение, описывающее случайный процесс, особенностью которого является наличие внешней возмущающей силы в виде «белого шума» $\sqrt{v}(t)$:

$$\langle \sqrt{v}(t) \rangle = 0, \quad \langle \sqrt{v}(t)\sqrt{v}(t + \Delta t) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(\Delta t), \quad (29)$$

где N_0 — постоянная спектральная плотность белого шума.

Стохастическое дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (28), будет

$$\dot{I} = 2I \sqrt{\frac{\gamma}{N_0}} \sqrt{v}(t). \quad (30)$$

В старых переменных колебания трубы будут

$$\dot{f} = 0,5f \sqrt{2\gamma} \sqrt{v_0}(t). \quad (31)$$

В (31) сделано предположение, что белый шум имеет единичную спектральную плотность на всей оси частот.

Уравнение ФПК, соответствующее уравнению (31), имеет вид

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{\gamma}{4} + G_0 \right) + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial f^2} (\gamma f^2 G_0). \quad (32)$$

Решение (32) дает значение функции плотности состояния, с помощью которой можно проводить исследования в стохастической области случайных колебаний трубопровода, в частности, оценивать устойчивость колебаний в среднем квадратическом и по вероятности.

Заключение. Рассмотрены пространственные колебания трубы, закрепленной по концам к неподвижной и подвижной опорам, под действием собственного веса, внутреннего давления с учётом силы сопротивления, инерционных сил и гидравлического удара. Сложное динамическое нагружение трубы дает возможность выделения возмущающей силы в виде функциональных δ -толчков. Получена граница стохастичности, отделяющая детерминированную область решения от стохастической.

Приводится стохастическое диффузионное уравнение типа Фоккера–Планка–Колмогорова, решение которого определяет функцию плотности вероятности, с помощью которой можно находить случайные параметры колебаний трубы для оценки её состояния.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пространственные колебания трубопровода с упруго-смещающейся опорой при действии внутреннего ударного давления / Р. Ф. Ганиев, М. А. Ильгамов, А. Г. Хакимов [и др.] // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 6. С. 3–12.
- [2] Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные параметрические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2011. № 6. С. 130–146.
- [3] Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. Москва: Наука, 1970. 270 с.
- [4] Чигарев А. В., Чигарев Ю. В. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах // Акустический журнал. 1978. Т. 24, № 5. С. 765–771.
- [5] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. Москва: Наука, 1988. 368 с.
- [6] Чигарев А. В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. Минск: УП «Техно-принт», 2000. 426 с.

A. V. Chigarev¹, Y. V. Chigarev²

STOCHASTICS OF PIPELINE VIBRATIONS UNDER DYNAMIC INTERNA

¹*Belarusian state University, Minsk, Belarus*

²*Belarusian state agrotechnical University, Minsk, Belarus*

Abstract. Vibrations of a liquid-filled pipeline relative to the horizontal axis are considered. The pipe is supported by two supports — a movable and a fixed one. The initial movement of the pipe is characterized by its bending, angular deflection and hydraulic shock, after which the internal pressure on the pipe walls takes the form of δ -shocks. The system of equations for pipeline vibrations is reduced to the Duffing equation. A stochasticity boundary is obtained that divides the deterministic domain of the solution from the stochastic one. The Fokker–Plank–Kolmogorov diffusion equation is obtained, which makes it possible to determine the standard deviation of the bending vibrations of the pipe.

Keywords: pipeline, oscillation, Duffing equation, action-angle variables, stochastic boundary, stochastic equation.

REFERENCES

- [1] Spatial vibrations of the pipeline with up -py -th-change -shaya -shaya -shaya support at the action of internal shock pressure / P. F. Ganiev, M. A. Ilgamov, A. G. Khakimov et al. // Problems of mechanical engineering and machine reliability. 2018. no. 6. P. 3–12.
- [2] Khakimov A. G., Shakiryaynov M. M. Spatial parametric vibrations of the pipeline under the action of variable internal pressure // Oil and Gas Business. 2011. no. 6. P. 130–146.
- [3] Zaslavsky G. M. Statistical irreversibility in nonlinear systems. Moscow: Nauka, 1970. 270 p.
- [4] Chigarev A. V., Chigarev Y. V. On the possibility of the appearance of stochastic instability of rays in inhomogeneous media // Acoustic journal. 1978. Vol. 24, no. 5. P. 765–771.
- [5] Zaslavsky G. M., Sagdeev R. Z. Introduction to nonlinear physics. From a pendulum to turbulence and chaos. Moscow: Nauka, 1988. 368 p.
- [6] Chigarev A. V. Stochastic and regular dynamics of inhomogeneous media. Minsk: Technoprint, 2000. 426 p.

Chigarev Anatoly Vlasovich, Doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Belarusian state University, Minsk, Belarus.

Chigarev Yuri Vlasovich, Doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Belarusian state agrotechnical University, Minsk, Belarus.

В. Г. Баженов, М. Н. Жестков

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОРИСТЫХ МЕТАЛЛОВ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

*Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород,
Россия*

Аннотация. С использованием принципа трехмерного подобия напряженно-деформированного состояния в структурных элементах конструкции осуществлено численное моделирование статического сжатия образцов из пористого алюминия. Принцип позволяет учесть неоднородность распределения напряжений и деформаций, вызванных наличием пор, и варьировать количеством структурных элементов (представительных объемов) при сохранении коэффициента пористости и характерных размеров образца. Расчетно-экспериментальным методом осуществлена идентификация диаграмма деформирования материала основы пористого алюминия. На основании сравнения численных и экспериментальных данных о сжатии пористых образцов оценена эффективность применения принципа трехмерного подобия для этого класса задач.

Ключевые слова: пористый металл, принцип трехмерного подобия, метод конечных элементов, сжатие, диаграмма деформирования.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.58.44.005

УДК: 539.3

Введение

В современной технике все большее применение находят пористые металлы, которые, сохраняя достоинства материала основы, обладают малым весом, низкой тепло-

© Баженов В. Г., Жестков М. Н., 2020

Баженов Валентин Георгиевич

e-mail: vazhenov@mech.unn.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия,

Жестков Максим Николаевич

e-mail: mnzhestkov@yandex.ru, младший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-08-00667-а).

Поступила 23.06.2020

и электропроводностью и имеют отличные демпфирующие свойства. Определение напряженно–деформированного состояния является актуальной задачей при проектировании конструкций из пористых металлов. На механические свойства пористых материалов в основном влияют коэффициент пористости [1–3], форма полостей [4–6] и характеристики материала основы [7, 8]. На практике влияние этих факторов учитывают посредством усреднения механических свойств и переходят к рассмотрению сплошного материала [9]. В этом случае не учитывается неоднородность напряженно–деформированного состояния в представительном объеме. Использование точной геометрической структуры пористого материала позволяет численно смоделировать особенности распределения напряжений и деформаций [10], но подобный расчет требует огромного количества вычислительных ресурсов. Неоднородность напряженно–деформированного состояния при наличии пор можно оценить при помощи принципа трехмерного подобия, сформулированного следующим образом: при деформировании в подобных условиях нагружения геометрически подобных тел из одинакового материала напряжения и деформации, возникающие в конструкции, идентичны. Этот принцип позволяет заменить набор одинаковых представительных объемов на один геометрически подобный им структурный элемент, в котором при моделировании реализуется среднее по этому набору напряженно–деформированное состояние. Такой подход учитывает неоднородность напряженно–деформированного состояния в структурном элементе при сохранении величины пористости и характерных размеров деформируемого тела. Появляется возможность управлять объемом вычислительных ресурсов посредством варьирования количеством структурных элементов. В работах [11, 12] показана эффективность принципа двумерного подобия при численном моделировании упругопластического изгиба и устойчивости густо перфорированных пластин и оболочек. В данной работе описан экспериментально расчетный метод идентификации диаграммы деформирования основы пористого материала и представлены результаты исследования эффективности принципа трехмерного подобия для задач статического сжатия пористых образцов.

Идентификация диаграммы деформирования материала основы

Восстановление диаграммы деформирования материала основы осуществляется на базе экспериментальных данных о статическом сжатии пористого образца в жесткой обойме. При испытании использовался цилиндрический образец диаметром 30 мм и высотой 20 мм. Начальная пористость образца в эксперименте составляла 0,64. Максимальные значения условной деформации образца при сжатии достигали 45%. При этом контактного взаимодействия берегов пор не наблюдалось. Восстановление диаграммы деформирования материала основы осуществлялось посредством методики, предложенной в работе [13]. Пористый алюминий из–за наличия полостей имеет геометрически сложную внутреннюю структуру, и вследствие этого — переменное поперечное сечение, как в недеформированном состоянии, так и в процессе сжатия. Построение истинной диаграммы деформирования материала основы производилось итерационным путем. В каждой итерации осуществлялась коррекция зависимости интенсивности истинных напряжений σ_i от интенсивности логарифмических деформаций e_i таким образом, чтобы удовлетворить с заданной точностью экспериментальной зависимости сжимающей силы от перемещения захватного приспособления испытательной машины. С этой целью строится корректировочная функция $\alpha(e) = \frac{F_3(e)}{F_{\text{чм}}(e)}$, $F_3(e)$, $F_{\text{чм}}(e)$ — экспериментальная и численно полученная зависимости сжимающей

силы от относительного изменения длины образца. По результатам численного моделирования определяется зависимость максимального значения интенсивности деформаций $e_i^{max}(e)$ от относительного изменения длины образца. Корректировка истинной диаграммы деформирования осуществляется по формуле: $\bar{\sigma}_i(e_i^{max}) = \alpha(e)\sigma_i(e_i^{max})$. Итерационный процесс корректировки продолжается до тех пор, пока зависимости $F_3(e)$ и $F_{чм}(e)$ не совпадут с точностью 5%. Для первой итерации корректировки можно использовать любую выпуклую диаграмму деформирования упрочняющегося материала [13]. В данном исследовании в качестве начальной была принята диаграмма деформирования для пористого образца, полученная из экспериментальных данных в предположении, что образец состоит из сплошного материала. Для численного моделирования выбран кубический структурный элемент с шаровидной порой внутри. Коэффициент пористости определялся, как отношение объемов полости и куба, ограничивающего структурный элемент. При испытаниях на сжатие начальная пористость образца составляла 0,64. Необходимого значения пористости возможно достичь, если взять полость в виде куба со скругленными ребрами и вершинами. На рисунке 1 представлена геометрическая модель структурного элемента, которая позволяет учесть возможную локальную потерю устойчивости в перегородках между порами.

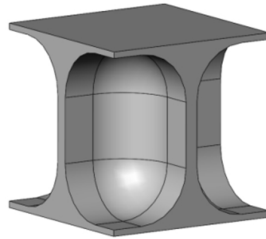


Рис. 1. Структурный элемент

При моделировании статического сжатия пористого образца в жесткой обойме предполагалось, что все структурные элементы деформируются одинаково. Поэтому для проведения вычислений использовался один столбец высотой 20 мм, состоящий из пяти представительных объёмов. Моделирование сжатия пористой структуры осуществлено методом конечных элементов с использованием программного комплекса Abaqus [14]. Конечно-элементная модель одного структурного элемента состояла из 14240 расчетных ячеек. Для моделирования использован лагранжев конечный элемент с восемью узлами. В программном комплексе Abaqus такой тип конечного элемента имеет обозначение C3D8R. На нижнем торце рассмотренного столбца из структурных элементов задавалось нулевое значение вертикальных перемещений, на верхнем торце — постоянная скорость вертикальных перемещений. Величина скорости сжатия равнялась 1 мм/с, что позволяло пренебречь нестационарными эффектами. В расчёте на боковых поверхностях задавались нулевые значения нормальных перемещений и касательных напряжений. При интегрировании по времени использована явная схема типа «крест».

Используемая методика позволила за 4 итерации получить истинную диаграмму деформирования материала основы с точностью менее 5%. Описанный способ позволяет осуществлять идентификацию диаграммы деформирования материала основы

для пористых образцов первоначально однородной структуры при больших деформациях и неоднородном напряженно-деформированном состоянии различного вида (растяжение, сжатие, сдвиг).

Для проверки достаточной точности построенной диаграммы деформирования с использованием 5 структурных элементов было проведено численное моделирование сжатия столбцов высотой 20 мм из 10 и 20 представительных объемов. Связь между истинными напряжениями и деформациями в материале основы описывалась восстановленной диаграммой деформирования. Постановка задачи численного моделирования аналогична постановке для столбца из 5 структурных элементов в жесткой обойме. Расчеты показали, что результаты для 5, 10 и 20 структурных элементов различаются менее чем на 1%, при этом отличие усилий не превышает 5% от экспериментальных данных. Таким образом, для восстановления диаграммы деформирования материала основы достаточно столбца из 5 структурных элементов. При моделировании сжатия напряженно-деформированное состояние во всех структурных элементах одинаково кроме граничных, в которых нарушается принцип трехмерного подобия из-за задания на их торцах постоянных скоростей перемещения. В представительных объемах происходит локальная потеря устойчивости перегородок между порами при относительном перемещении подвижного торца 0,1. Локальная потеря устойчивости происходит во всех внутренних структурных элементах одновременно.

Для моделирования сжатия пористого образца в жесткой обойме с учетом реального размера структурного элемента, который равнялся 0,3 мм, понадобилось бы рассмотреть столбец из 67 структурных элементов. Применение принципа трехмерного подобия для пористого материала позволило осуществить процедуру идентификации диаграммы деформирования материала основы с использованием столбца из 5 структурных элементов.

Использование принципа трехмерного подобия при моделировании сжатия пористых образцов со свободными боковыми поверхностями

При экспериментальном исследовании статического сжатия пористого тела со свободными боковыми поверхностями использовался цилиндрический образец высотой 20 мм и диаметром 70 мм. С использованием принципа трехмерного подобия и восстановленной диаграммы деформирования материала основы исследовано статическое сжатие пористого образца со свободными боковыми поверхностями. В качестве геометрических моделей рассмотрены параллелепипеды с одним и пятью представительными объёмами по высоте и с различным количеством структурных элементов в горизонтальной плоскости. На рисунке 2 продемонстрированы геометрические модели пористого образца. Для снижения вычислительных затрат учтена геометрическая симметрия сжимаемой структуры и рассмотрена $\frac{1}{4}$ часть конструкции. На поверхностях, вырезающих $\frac{1}{4}$ часть расчетной области, задавалось равенство нулю нормальных перемещений и касательных напряжений.

Как и в задаче сжатия пористого образца в жесткой обойме, на нижнем торце задавалось нулевое значение вертикальных перемещений, на верхнем торце — скорость вертикальных перемещений, равная 1 мм/с.

На рисунке 3 представлена зависимость сжимающей силы, приведенной к площади поперечного сечения экспериментального образца, от относительного перемещения верхнего торца и количества структурных элементов.

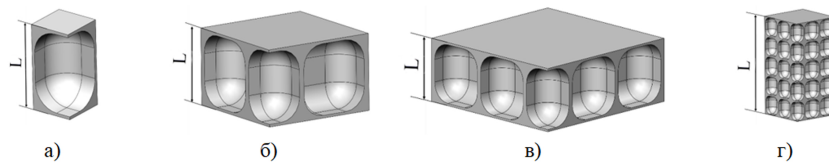


Рис. 2. Геометрические модели пористой структуры: а — 1 элемент, б — 9 элементов, в — 25 элементов, г — 125 элементов

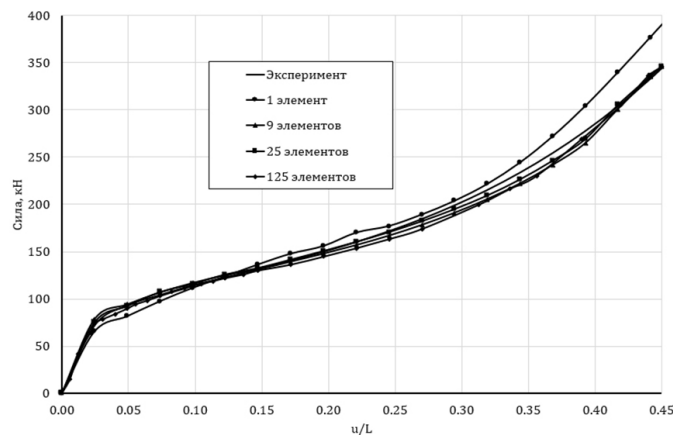


Рис. 3. Изменение сжимающей силы от относительного перемещения верхнего торца образца в зависимости от количества структурных элементов

Максимальные погрешности наблюдаются для одного структурного элемента при относительном перемещении верхнего торца более 0,4. Связано это с тем, что осреднение одним структурным элементом неоднородных вдоль радиуса напряженно-деформированных состояний в структурных элементах недостаточно для получения результатов с приемлемой точностью. Численное моделирование показало, что для геометрических моделей с 9, 25 и 125 представительными объемами наблюдаются различия напряженно-деформированного состояния в структурных элементах по мере удаления от центра геометрической модели. Локальная потеря устойчивости в перегородках происходит при относительном перемещении подвижного торца 0,06. Сначала теряют устойчивость перегородки в структурных элементах, прилежащих к боковым свободным поверхностям. При дальнейшем сжатии образца наблюдается потеря устойчивости во внутренних структурных элементах. В последний момент теряют устойчивость перегородки в структурных элементах, расположенных в центре геометрической модели. Результаты расчетов с 9, 25 и 125 структурными элементами различаются менее чем на 1%, при этом отличие усилий от экспериментальных данных не превышает 6%.

Для проведения численного расчета сжатия пористого образца со свободными боковыми поверхностями с учетом реального размера представительного объема, равного

0,3 мм, потребовалось бы порядка 187 тыс. структурных элементов. Принцип трехмерного подобия позволил смоделировать сжатие пористого образца со свободными боковыми поверхностями с использованием 9 структурных элементов.

Заключение

Исследована эффективность применения принципа трехмерного подобия при численном моделировании сжатия образцов из пористого алюминия. Данный принцип позволяет учесть неоднородность распределения напряжений, деформаций при наличии полостей и сократить объем вычислительных ресурсов путем варьирования количеством структурных элементов, сохраняя коэффициент пористости и характерные размеры конструкции. С использованием принципа трехмерного подобия разработан экспериментально–расчётный метод идентификации диаграммы деформирования материала основы пористого образца. При численном моделировании сжатия цилиндрического образца из пористого алюминия в жесткой обойме с использованием явной схемы интегрирования по времени применение принципа трехмерного подобия сократило на два порядка объем вычислительных ресурсов, а при моделировании сжатия образца со свободными боковыми поверхностями — на 5 порядков. Это позволило за 4 часа осуществить расчеты неоднородного напряженно–деформированного состояния образцов из пористого алюминия на локальном четырехъядерном персональном компьютере.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Черемской П. Г. Методы исследования пористости твердых тел. М.: Энергоатомиздат, 1985. 112 с.
- [2] Витязь А. А., Капщевич В. М., Косторнов А. Г. Формирование структуры и свойств пористых порошковых материалов. М.: Металлургия, 1993. 240 с.
- [3] Andrews E., Sanders W., Gibson L. G. Compressive and tensile behavior of aluminum foams // *Materials Science and Engineering: A*. 1999. Vol. 270. p. 113–124.
- [4] Поляков В.В., Головин А.А. Модули упругости пористых материалов // *Физика Металлов и Металловедение*. 1995. Т. 79. с. 57–60.
- [5] Bamhart J., Baumeister J. Deformation characteristics of metal foams // *Journal of Mat. Science*. 1998. Vol. 33. p. 1431–1440.
- [6] Compressive deformation and yielding mechanisms in cellular Al alloys determined using X-ray tomography and surface strain mapping / Bart-Smith, A. F. Bastawros, A. G. Evans et al. // *Acta mat*. 1998. Vol. 46. p. 3583–3592.
- [7] Kriszt B., Foroughi B., K. F. Behaviour of aluminium foam under uniaxial compression // *Degischer Materials Science and Technology*. 2000. Vol. 16, no. 7/8. p. 792–796.
- [8] ff vv ll, jj at al. // *MetfoamVerlag MIT Publishing*. 2003. p. 387.
- [9] Nakajima H. F. Mechanical and Physical Properties, and Its Application of Lotus-Type Porous Metals // *Materials Transactions*. 2019. Vol. 60, no. 12. p. 2481–2489.
- [10] Dorozhko M., Seweryn A. Finite Element Modeling of Anisotropic Deformation Behavior of the Porous Materials Based on Microtomographic Images // *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1780. 2016. p. 060001.
- [11] Баженов В. Г., Жестков М. Н. Исследование применимости принципа подобия в задачах упругопластического изгиба и устойчивости при осевом сжатии густо перфорированных пластин и оболочек // *Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018)*. 2018. с. 326–328.
- [12] Bazhenov V., Zhestkov M. About the applicability limits of the Tymoshenko model and the principle of two-dimensional similarities in problems of elastic plastic bending and stability of densely perforated plates and shells // *Journal of physics: Conference series*. 2019. Vol. 1158. p. 022022.
- [13] Экспериментально–расчетный метод исследования больших упругопластических деформаций цилиндрических оболочек при растяжении до разрыва и построение диаграмм деформирования при неоднородном напряженно–деформированном состоянии / В.Г. Баженов, В.К. Ломунов, С.Л. Осетров [и др.]. 2013. Т. 54, № 1. с. 116–124.
- [14] Abaqus Analysis User's Guide. Abaqus Theory Guide // *Simulia Abaqus*.

V. G. Bazhenov, M. N. Zhestkov

THREE-DIMENSIONAL MODELING OF LARGE DEFORMATIONS FOR POROUS METALS AND DEFINITION OF THEIRS STRESS–STRAIN DIAGRAMS

National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia

Abstract. Using the principle of three-dimensional similarity of the stress–strain state in structural elements of the construction, a numerical simulation of static compression of specimen made of porous aluminum was performed. The principle allows us to take into account the heterogeneity of the distribution of stresses and deformations caused by the presence of pores, and to vary the number of structural elements (representative volumes) while maintaining the porosity coefficient and the characteristic size of the specimen. The numerical and experimental method was used to identify the stress–strain diagram of the carcass material. Based on the comparison of numerical and experimental data on the compression of porous specimen, the effectiveness of applying the three-dimensional similarity principle for this class of problems is estimated.

Keywords: porous metals, three-dimensional similarity principle, finite element method, compression, strain diagram.

REFERENCES

- [1] Cheremskoy P. Methods for studying the porosity of solids. M.: Energoatomizdat, 1985. 112 p.
- [2] Vityaz A. A., Kaptsevich V. M., Kostornov A. G. Formation of the structure and properties of porous powder materials. M.: Metallurgy, 1993. 240 p.
- [3] Andrews E., Sanders W., Gibson L. G. Compressive and tensile behavior of aluminum foams // *Materials Science and Engineering: A*. 1999. Vol. 270. p. 113–124.
- [4] Polyakov V., Golovin A. Modules of elasticity of porous materials // *Physics of Metals and Metallurgy*. 1995. Vol. 79. P. 57–60.
- [5] Bamhart J., Baumeister J. Deformation characteristics of metal foams // *Journal of Mat. Science*. 1998. Vol. 33. P. 1431–1440.
- [6] Compressive deformation and yielding mechanisms in cellular Al alloys determined using X - ray tomography and surface strain mapping / H. Bart-Smith, A. F. Bastawros, A. G. Evans et al. // *Acta mat*. 1998. Vol. 46. p. 3583–3592.
- [7] Kriszt B., Foroughi B., K. F. Behavior of aluminum foam under uniaxial compression // *Degischer Materials Science and Technology*. 2000. Vol. 16, no. 7/8. p. 792–796.
- [8] ff vv ll, jj at al. // *MetfoamVerlag MIT Publishing*. 2003. p. 387.
- [9] Nakajima H. F. Mechanical and Physical Properties, and Its Application of Lotus - Type Porous Metals // *Materials Transactions*. 2019. Vol. 60, no. 12. p. 2481–2489.
- [10] Dorozhko M., Seweryn A. Finite Element Modeling of Anisotropic Deformation Behavior of the Porous Materials Based on Microtomographic Images // *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1780. 2016. p. 060001.
- [11] Bazhenov V. G., Zhestkov M. N. Investigation of the applicability of the principle of similarity in the problems of elastoplastic bending and stability under axial compression of densely perforated plates and shells // *Proceedings of the XII International Conference on Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry (NPNJ'2018)*. 2018. p. 326–328.

Bazhenov, Valentin Georgievich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Chief Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Research Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia,

Zhestkov, Maksim Nikolaevich, Junior Researcher, Research Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia.

- [12] Bazhenov V., Zhestkov M. About the applicability limits of the Tymoshenko model and the principle of two-dimensional similarities in problems of elastic plastic bending and stability of densely perforated plates and shells // *Journal of physics: Conference series*. 2019. Vol. 1158. p. 022022.
- [13] Experimental and computational method for studying large elastoplastic deformations of cylindrical shells under tension to rupture and plotting deformation diagrams in a nonuniform stress-strain state / V.G. Bazhenov, V.K. Lomunov, S.L. Osetrov [и др.]. 2013. Т. 54, № 1. с. 116–124.
- [14] *Abaqus Analysis User's Guide. Abaqus Theory Guide* // Simulia Abaqus.

А. А. Алексеев, В. Г. Зубчанинов, В. И. Гультяев

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО НЕКОТОРЫМ МНОГОЗВЕННЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Тверской государственной технической университета, г. Тверь, Россия

Аннотация. Представлена верификация математической модели теории процессов путем сравнения численных расчетов с экспериментальными данными при сложном упругопластическом деформировании стали 45 по некоторым многозвенным ломаным траекториям.

Ключевые слова: пластичность, теория процессов, сложное нагружение, многозвенная траектория деформирования, моделирование процессов, экспериментальные данные.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.65.81.006

УДК: 539.374

При численном моделировании процессов сложного неупругого деформирования материалов по плоским неаналитическим траекториям в девиаторном пространстве формоизменения А.А. Ильюшина [1] использованы определяющие соотношения теории упругопластических процессов, которые в скалярной форме имеют вид [2]

$$\frac{dS_k}{ds} = M_1 \frac{d\mathcal{E}_k}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{S_k}{\sigma}, \quad \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, \quad (1)$$

где $S_k, \mathcal{E}_k (k = 1, 3)$ – координаты векторов напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\mathcal{E}}$ формоизменения соответственно; s – длина дуги траектории деформирования; ϑ_1 – угол

© Алексеев А. А., Зубчанинов В. Г., Гультяев В. И., 2020

Алексеев Андрей Алексеевич

e-mail: alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия,

Зубчанинов Владимир Георгиевич

e-mail: vlgzub@gmail.com, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия,

Гультяев Вадим Иванович

e-mail: vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильные дороги, основания и фундаменты, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 20.06.2020

сближения, функционал векторных свойств материала; ϑ_1^0 – значение ϑ_1 в начальной точке аналитического участка траектории; σ – функционал процесса скалярных свойств материала; κ_1 – кривизна, $M_1, d\sigma/ds$ – функционалы процесса, зависящие от параметров внутренней геометрии траектории деформаций: $s, \kappa_1, \vartheta_1^0$. Определяющие соотношениями (1) в соответствии с частным постулатом изотропии А.А. Ильюшина [1] учитывают как скалярные свойства материалов, характеризующие связь между инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, так и векторные свойства, характеризующие несоосность девиаторов напряжений, деформаций и их приращений. Угол сближения ϑ_1 характеризует отклонение вектора напряжений от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке и отражает влияние векторных свойств материала на процесс деформирования.

В качестве закона упрочнения для процессов, близких к простому нагружению может быть использован приближенный закон упрочнения Одквиста–Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$, который мало отличается от универсального закона Роша и Эйхингера $\sigma = \Phi(\Theta)$ при простом нагружении и не учитывает историю нагружения в явном виде. Такое пренебрежение параметрами внутренней геометрии траектории деформирования κ_1 и ϑ_1^0 может приводить к недостоверным результатам при практических расчетах, особенно для траекторий большой кривизны и траекторий с $\vartheta_1^0 > 90^\circ$. Поэтому создание новых математических моделей, описывающих неупругое деформирование материалов и построение на их базе более точных аппроксимаций функционалов, учитывающих все параметры сложности процесса, является важной задачей теории пластичности.

Для многозвенных прямолинейных траекторий, имеющих сложную историю нагружения, предложены аппроксимации функционалов

$$\sigma(s) = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s) - \Delta\sigma_k, \quad (2)$$

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q, \quad (3)$$

где $\Delta s = s - s_k^T$ – приращение длины дуги траектории после ее первого излома в некоторой точке K ; $\Delta\sigma_k = \Phi(s_k^T) - \sigma_k^T$ – разница в точках излома между значениями универсальной функции Одквиста–Ильюшина и расчетным значением модуля вектора напряжений σ_k^T ; G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига); $2G_p = \Phi(s)/s$ – удвоенный пластический модуль при простом нагружении; индекс «нолик» у пластического модуля сдвига G_p соответствует его значению в точке излома траектории;

$$\Omega(\Delta s) = - [\gamma\Delta s e^{-\gamma\Delta s} + b(1 - e^{-\gamma\Delta s})]$$

– функция, описывающая после излома траектории скалярный нырок напряжений при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании;

$$f = \frac{1 - \cos\vartheta_1}{2}; \quad f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos\vartheta_1^0}{2}$$

– функция, учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования и ее значение в точке излома для каждого из участков неаналитической траектории; A, b, γ, p, q – параметры аппроксимаций, которые определялись по предложенной методике на основе базовых опытов по двузвенным ломаным [3], для которых имеется

уже достаточно большой банк экспериментальных данных. Для аппроксимации универсальной функции упрочнения Одквиста–Ильюшина использовались выражения

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha}(1 - e^{-\alpha s}), & \text{если } 0 < s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_*(1 - e^{-\beta(s-s^T)}), & \text{если } s > s^T, \end{cases}$$

где $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$; σ_T – предел текучести при растяжении; s^T – граница участков диаграммы деформирования, разделяющая упругую часть и площадку текучести ($0 \leq s \leq s^T$) от участка самоупрочнения материала ($s > s^T$); σ_* , G_* , α , β – экспериментально определяемые параметры материала из опытов на простое нагружение.

Для определения параметров аппроксимаций функционалов [3] использован базовый опыт для двузвенной ломаной с углом 135 градусов. Общая диаграмма прослеживания процесса деформирования $\sigma(s)$ такой траектории в сравнении с универсальной функцией $\sigma = \Phi(s)$ представлена на рис. 1.

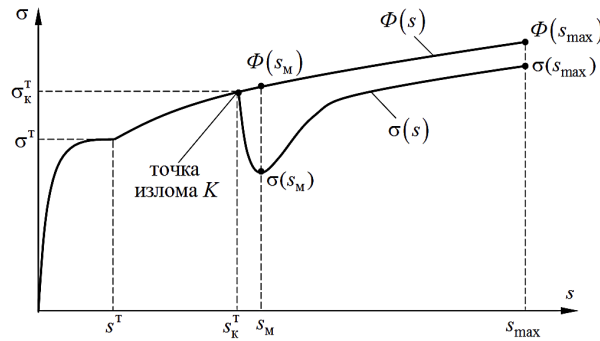


Рис. 1. К определению параметров аппроксимаций функционалов.

Для вычисления параметров были получены формулы

$$\omega = \frac{\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max})}{\Phi(s_M) - \sigma(s_M)} = \frac{b}{b + e^{-(1+b)}}, \quad b = \text{LambertW}\left(-\frac{\omega e^{-1}}{\omega - 1}\right);$$

$$A = \frac{\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max})}{b f_0^p}, \quad \gamma = \frac{\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G}{A(1+b)} = \frac{b f_0^p \left(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G\right)}{[\Phi(s_{\max}) - \sigma(s_{\max})](1+b)},$$

позволяющие при найденном значении параметра b и различных показателях степени p найти спектр значений параметров A , b , γ , выбор которых определяется наилучшим соответствием данным базового опыта.

При заданных начальных условиях для координат вектора деформаций \mathcal{E}_k ($k = 1, 3$) и угла сближения ϑ_1^0 определяющие соотношения (1) с конкретизированными функционалами (2), (3) сведены к задаче Коши, для численного решения которой и определения координат вектора напряжений S_k ($k = 1, 3$) и угла ϑ_1 для каждого участка неаналитической траектории использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности в программном приложении MathWorks MATLAB. То есть, для моделирования процессов задаются экспериментальные траектории деформаций, а траектории напряжений получаются в результате интегрирования определяющих соотношений.

Экспериментальное исследование было выполнено на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета. В качестве образцов для макроэкспериментальных исследований были использованы тонкостенные цилиндрические оболочки из стали 45, имеющие в рабочей части длину $l = 110$ мм, толщину $h = 1$ мм и диаметр срединной поверхности $d = 31$ мм, в стенках которых при достаточно большом отношении радиуса к толщине реализуется плоское напряженное состояние. Процесс нагружения предполагался изотермическим, а деформации – малыми. Начальная изотропия материала образцов с достаточной степенью точности была подтверждена в опытах при простом (пропорциональном) нагружении. Эксперименты реализованы при непрерывном деформировании образцов с постоянной скоростью 10^{-6} сек $^{-1}$, которая позволяет выбрать кратковременную ползучесть материала при нормальной температуре и исследовать процессы упругопластического деформирования без эффектов ползучести.

Для оценки достоверности расчетных результатов по предлагаемой математической модели на плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ девиаторного пространства деформаций E_5 реализованы неаналитические многозвенные кусочно-ломаные траектории. Программа первого эксперимента [3] при жестком (кинематическом) нагружении по траектории деформаций, состоящей из четырех звеньев с углами излома $\theta = 135^\circ$, представлена на рис. 2, а экспериментальные и расчетные результаты – на рис. 3–5. Экспериментальные данные на рисунках обозначены точками, модельные данные – сплошной линией.

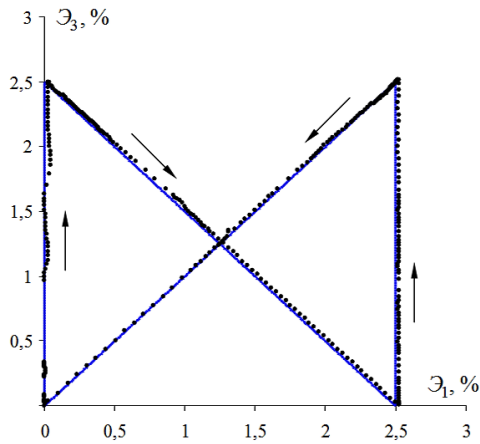


Рис. 2. Четырехзвенная траектория деформаций.

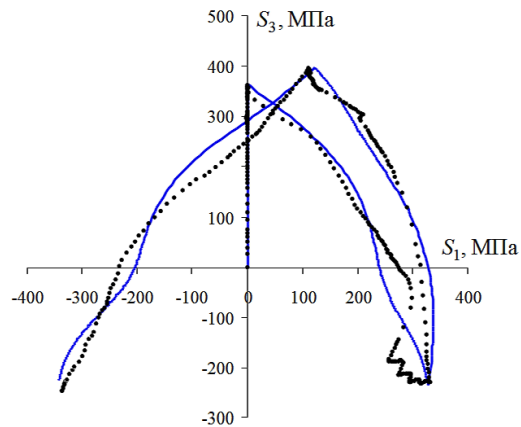
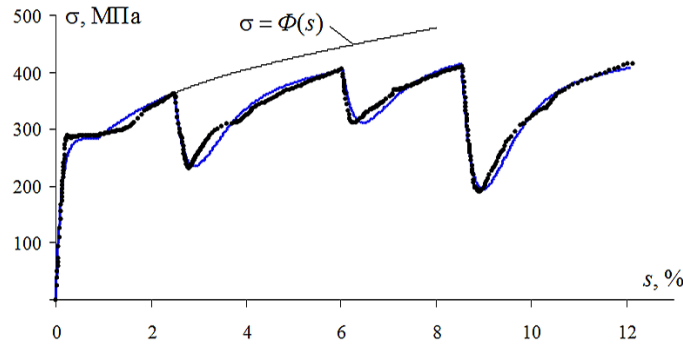
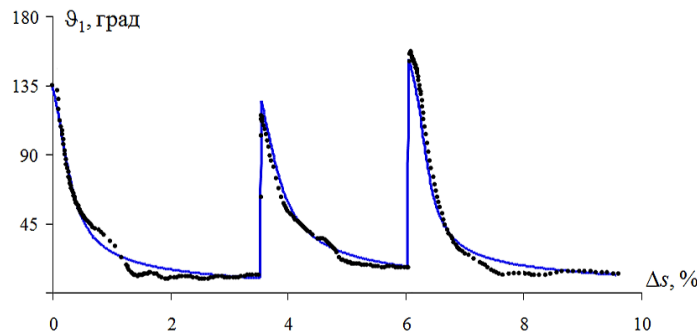


Рис. 3. Отклик по напряжениям.

Эксперименты показывают, что начальное отклонение ϑ_1^0 вектора напряжений при изломе траектории соответствует углу излома $\vartheta_1^0 \approx \theta$ только в случае предшествующего простого нагружения, то есть при первом изломе многозвенной траектории или для двузвенных ломаных [4]. Поэтому, например, для траектории деформаций на рис. 2 углы излома одинаковые $\theta = 135^\circ$, но величины скалярных «нырков» напряжений различны (см. рис. 4). Значение ϑ_1^0 уменьшается (см. рис. 5), если излом траектории

Рис. 4. Диаграмма деформирования $\sigma - s$.Рис. 5. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$.

происходит в сторону отклонения вектора напряжений (второй излом для траектории на рис. 2), и увеличивается когда излом происходит в сторону противоположную отклонению вектора напряжений (третий излом). Таким образом, на величины «нырков» напряжений влияют не углы излома траектории θ , одинаковые в данном опыте, а начальное отклонение ϑ_1^0 вектора напряжений. Это необходимо учитывать в численных расчетах, поэтому в модели при последующих изломах для начального отклонения вектора напряжений принималось $\vartheta_1^0 = \theta \pm \vartheta_1^k$, где ϑ_1^k - расчетное значение угла сближения в конце предшествующего участка перед изломом траектории деформаций.

Программа второго эксперимента (рис. 6) представляет пятизвенную траекторию деформаций [5] с углами излома $56, 3^\circ, 33, 7^\circ, 90^\circ, 121^\circ$, причем в этой траектории все изломы производились в сторону противоположную от отклонения вектора напряжений, то есть значение ϑ_1^0 увеличивалось. Экспериментальные и модельные данные для данной траектории изображены на рис. 7–9.

Для рассмотренных траекторий деформаций сопоставление модельных данных с экспериментальными показывает их качественное и удовлетворительное количественное соответствие по скалярным свойствам, в том числе модельные данные адекватно описывают нырки напряжений (см рис. 4, 8) после изломов траектории на различные

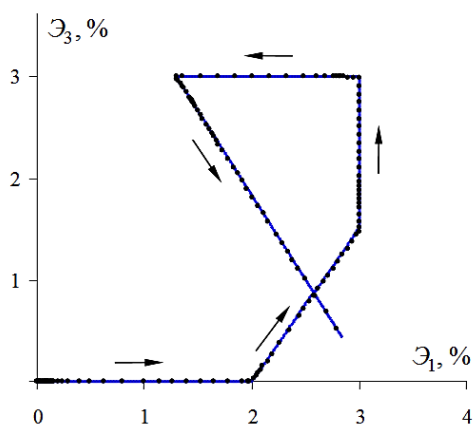


Рис. 6. Пятизвенная траектория деформаций.

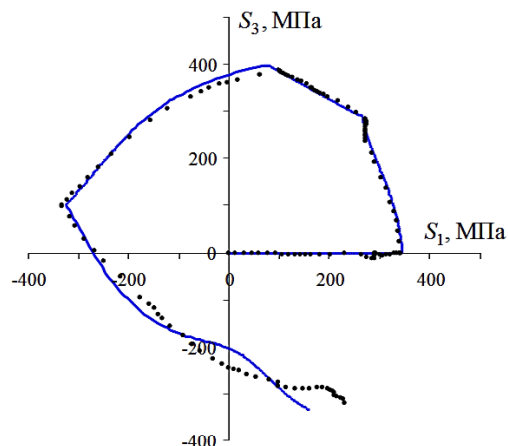


Рис. 7. Отклик по напряжениям.

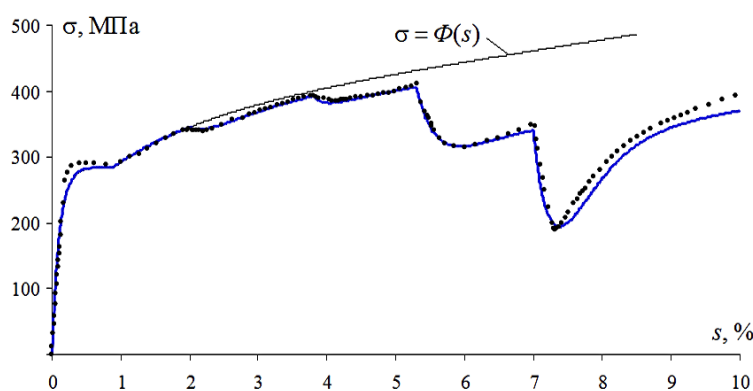


Рис. 8. Диаграмма деформирования $\sigma - s$.

по величине углы. Также наблюдается хорошее соответствие расчетной и экспериментальных кривых, характеризующих векторные свойства материала (см. рис. 5, 9). Это показывает достаточную для практических задач точность построенных аппроксимаций функционалов используемой математической модели теории процессов.

Таким образом, проведенная верификация математической модели теории процессов при сопоставлении результатов расчета и экспериментальных данных при упругопластическом деформировании материала сталь 45 по плоским многозвенным кусочно-ломаным траекториям подтверждает правильность моделирования процессов сложного нагружения материала для данного класса траекторий деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
- [2] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.

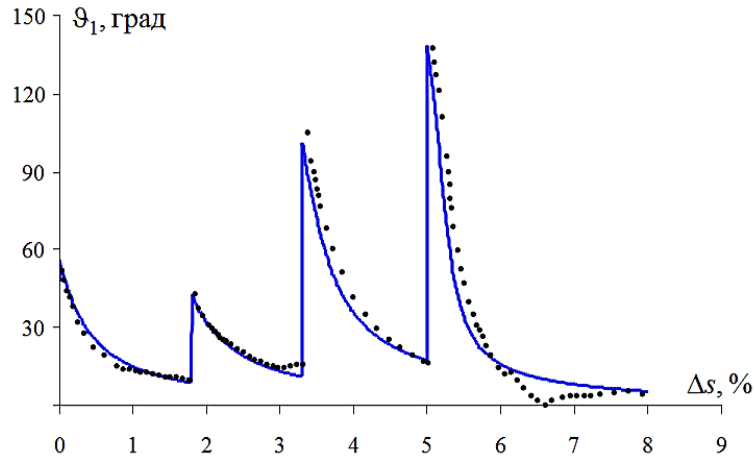


Рис. 9. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$.

- [3] Зубчанинов В. Г., Алексеев А.А., Гультяев В.И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 3. с. 203–215.
- [4] Modeling of elastoplastic steel deformation in two-link broken trajectories and delaying of vector and scalar material properties / V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva, A. A. Alekseev et al. // Mater.Phys.Mech.(MPM). 2019. Vol. 42, no. 4. p. 436–444.
- [5] Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования / В. Г. Зубчанинов, А. А. Алексеев, В. И. Гультяев [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. Т. 61. с. 32–44.

A. A. Alekseev, V. G. Zubchaninov, V. I. Gultiaev

**EXPERIMENTAL STUDY AND NUMERICAL CALCULATION OF THE
PROCESSES OF COMPLEX ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF
MATERIALS ALONG SOME MULTI-LINK STRAIN PATHS**

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The verification of the mathematical model of the theory of processes by comparing numerical calculations with experimental data for complex elastoplastic deformation of steel 45 along some multi-link broken paths is presented.

Keywords: plasticity, theory of elastoplastic processes, complex loading, multi-link strain path, modeling of processes, experimental data.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory. M.: Publishing house of the USSR Academy of Sciences, 1963. 271 p.
- [2] Zubchaninov V. Mechanics of plastic media processes. M.: Fizmatlit, 2010. 352 p.
- [3] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultyaev V. Modeling of processes of elastoplastic deformation of materials along multi-link piecewise-broken rectilinear trajectories // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2017. no. 3. P. 203–215.
- [4] Modeling of elastoplastic steel deformation in two-link broken trajectories and delaying of vector and scalar material properties / V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva, A. A. Alekseev et al. // Mater.Phys.Mech. (MPM). 2019. Vol. 42, no. 4. p. 436–444.
- [5] Processes of complex loading of structural steel along a five-bar piecewise-broken path of deformation / V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, V. I. Gultyaev et al. // Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics. 2019. Vol. 61. p. 32–44.

Alekseev, Andrey Alekseevich, Ph.D. (Technical Sciences), Associate Professor, Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

Zubchaninov, Vladimir Georgievich, Doctor of technical sciences, Professor, Department of Strength of materials, theory of elasticity and plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

Gulyaev, Vadim Ivanovich, Doctor of technical sciences, Head of Department of Automobile roads, bases and foundations, Tver State Technical University, Tver, Russia.

А. А. Буренин¹, Л. В. Ковтанюк², Г. Л. Панченко²

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА ТОЛСТОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ВСЛЕДСТВИЕ ДЕЙСТВИЯ РАВНОМЕРНОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

¹Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН,
г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

²Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
г. Владивосток, Россия

Аннотация. В данной работе представлено решение краевой задачи о ползучести и пластическом течении материала толстостенной цилиндрической трубы в условиях приложения возрастающего со временем равномерного внутреннего давления. При определении механизма накопления необратимых деформаций используется критерий Ивлева – Ишлинского. Рассчитаны все параметры напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, пластичность, необратимые деформации, критерий Ивлева – Ишлинского.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.91.51.007

УДК: 539.37

Толстостенные трубы нашли широкое применение в технологических трубопроводах нефтехимической и нефтегазоперерабатывающей промышленности. Таким образом, задачи о деформировании и разрушении труб являются актуальными как для

© Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., 2020

Буренин Анатолий Александрович

e-mail: burenin@iacr.dvo.ru, главный научный сотрудник, член-корреспондент РАН, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iacr.dvo.ru, главный научный сотрудник, член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия,

Панченко Галина Леонидовна

e-mail: ranchenko.21@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, и.о. старшего научного сотрудника, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00038).

Поступила 26.06.2020

технологической практики, так и для фундаментальной механики деформируемого твердого тела.

На трубах, подверженных внутреннему давлению, тестировались различные теории ползучести [1]. Задача о деформировании трубы интересна тем, что напряженное состояние в ней является трехосным и все главные значения тензора напряжений отличны от нуля. При этом задача является простейшей одномерной задачей.

Здесь в рамках теории малых деформаций рассматривается краевая задача о деформировании толстостенной цилиндрической трубы вследствие действия равномерного внутреннего давления, когда накапливаемые материалом необратимые деформации могут быть как деформациями ползучести, так и пластичности.

1. Основные соотношения модели. Полные деформации d_{ij} в рамках модели малых деформаций представляют собой сумму обратимой e_{ij} и необратимой p_{ij} составляемых

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1)$$

В зависимостях (1) u_i — компоненты вектора перемещений, x_i — пространственные координаты точек деформируемого тела.

Для тензора напряжений в теории малых деформаций справедлив закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (2)$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе.

Предполагается, что необратимые деформации p_{ij} нарастают в деформируемом материале с самого начала процесса деформирования. При этом необратимые деформации могут быть двух видов: необратимыми деформациями ползучести и пластическими деформациями. Моделирование поведения материала при накоплении им сначала необратимых деформаций ползучести, а затем пластических деформаций будем проводить, используя подход, впервые предложенный в [2, 3]. Этот подход заключается в том, что первоначальное накопление необратимых деформаций материала связано с его вязкими свойствами. Затем с ростом напряжений и при выходе их на поверхность текучести механизм производства необратимых деформаций меняется с медленного вязкого на быстрый пластический. На продвигающихся по деформируемому телу упругопластических границах изменяются механизмы накопления необратимых деформаций с ползучести на пластичность и наоборот. Условие непрерывности необратимых деформаций на упругопластических границах приводит к необходимости согласования законов ползучести и пластичности.

На примере рассматриваемой здесь краевой задачи покажем согласование в законе ползучести Нортон [4] и в условии пластичности максимального приведенного напряжения (критерий Ивлева – Ишлинского) [5] в условиях активного нагружения. Условие Ивлева – Ишлинского является кусочно-линейным. Использование кусочно-линейных потенциалов при построении моделей необратимого деформирования стало классическим в теории идеальной пластичности. Помимо условия Ивлева – Ишлинского можно отметить условие пластичности максимального касательного напряжения (условие Треска) и некоторые другие. Благодаря такому подходу при исследовании необратимого деформирования удалось получить ряд фундаментальных результатов теории идеальной пластичности.

Диссипативный механизм деформирования свяжем только с вязкими и пластическими свойствами материалов. Если напряженное состояние деформируемого материала еще не достигло поверхности текучести, диссипативный механизм деформирования определяется степенным законом ползучести Нортонна [4]

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \frac{3}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3)$$

В зависимостях (3) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, ε_{ij}^v — тензор скоростей деформаций ползучести, B, n — заданные параметры ползучести материала.

Когда возрастающие с ростом нагрузки напряжения достигают поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования изменяется с вязкого на пластический и инициируется процесс пластического течения. Выберем условие пластичности максимального приведенного напряжения (критерий Ивлева – Ишлинского) [5] в качестве поверхности текучести.

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = \frac{4}{3}k. \quad (4)$$

Здесь k — предел текучести.

Для скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p выполняется ассоциированный закон пластического течения

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \xi_k \frac{\partial f^{(k)}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi > 0, \quad \xi_k > 0. \quad (5)$$

Первая форма ассоциированного закона соответствует грани условия пластичности (4), а вторая — ребру этого же условия.

К моменту времени, когда начинается процесс пластического течения, в деформируемом материале уже имеются накопленные необратимые деформации ползучести. Они становятся начальными для последующего роста пластических деформаций.

2. Постановка краевой задачи и ее решение до пластического течения.

Рассмотрим цилиндрический слой вязкоупругопластического материала, расположенный между двумя соосными цилиндрами с радиусами $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$). Этот слой находится под воздействием возрастающего со временем давления, равномерно приложенного к его внутренней поверхности. Таким образом, краевые условия задачи в цилиндрической системе координат r, φ, z можно представить в виде

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad (6)$$

где $p(t)$ — задаваемая функция давления.

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций в рассматриваемом случае из формул (1) получим

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz} = 0. \quad (7)$$

В зависимостях (7) через u обозначена единственная отличная от нуля компонента u_r вектора перемещений.

Согласно закону Гука (2) получим соотношения для диагональных компонент тензора напряжений, все остальные компоненты которого равны нулю,

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)e_{rr} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{zz}), & \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)e_{\varphi\varphi} + \lambda(e_{rr} + e_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}).\end{aligned}\quad (8)$$

Решение поставленной краевой задачи будем искать в рамках квазистатического подхода. Для этого запишем единственное для рассматриваемого случая уравнение равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (9)$$

Из соотношений (3) имеем

$$\begin{aligned}V &= B \left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}\sigma_{rr} - \frac{1}{2}\sigma_{zz} \right)^n, & \varepsilon_{rr}^v &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = \varepsilon_{zz}^v = \\ &= \frac{\partial p_{zz}}{\partial t} = -\frac{1}{2}Bn \left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}\sigma_{rr} - \frac{1}{2}\sigma_{zz} \right)^{n-1}, & & \\ \varepsilon_{rr}^v + \varepsilon_{\varphi\varphi}^v + \varepsilon_{zz}^v &= 0, & p_{rr} + p_{\varphi\varphi} + p_{zz} &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Используя зависимости (7) и (10) получим:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} - p_{rr}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} + 2p_{rr}, \quad e_{zz} = -p_{rr}. \quad (11)$$

Подставляя соотношения (11) в зависимости (8), найдем

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\frac{u}{r} - 2\mu p_{rr}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\frac{u}{r} + 4\mu p_{rr}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\frac{u}{r} - 2\mu p_{rr}.\end{aligned}\quad (12)$$

Перепишем уравнение равновесия (9) с учетом зависимостей (12)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + 3\frac{p_{rr}}{r} \right). \quad (13)$$

Компонента тензора необратимых деформаций $p_{rr}(r, t) = -p_{\varphi\varphi}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, следующему из второй формулы (10) и зависимостей (12),

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -\frac{1}{2}Bn\mu^{n-1} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} + 6p_{rr} \right)^{n-1}. \quad (14)$$

К системе уравнений (13) и (14) с краевыми условиями (6) добавим начальное условие $p_{rr}(r, 0) = 0$. Для решения полученной системы дифференциальных уравнений была разработана конечно-разностная схема.

3. Пластическое течение. Увеличение давления со временем приводит к тому, что в момент времени $t = t_0$ выполняется условие пластичности (4) на внутренней границе $r = r_0$ цилиндрического слоя. В дальнейшем от внутренней границы $r = r_0$ цилиндрического слоя происходит разрастание области $r_0 \leq r \leq m(t)$, в которой накапливаются необратимые деформации за счет пластического течения. В вязкоупругой области $m(t) \leq r \leq R$ материал продолжает накапливать необратимые деформации

ползучести. Упругопластическая граница $r = m(t)$ движется от внутренней границы слоя к внешней и отделяет растущую пластическую область от уменьшающейся вязкоупругой области.

Перепишем условие пластичности Ивлева – Ишлинского (4) в следующей форме

$$\sigma_{\varphi\varphi} - 1/2\sigma_{rr} - 1/2\sigma_{zz} = 2k. \quad (15)$$

Отметим, что соотношения (11) и (12) остаются верными в обеих областях деформирования $r_0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$.

Сделав несложные арифметические вычисления над зависимостями (12) и (15) найдем компоненту p_{rr} тензора необратимых деформаций в области пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$

$$p_{rr} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - 2\frac{u}{r} + 2\frac{k}{\mu} \right). \quad (16)$$

Учитывая соотношения (12) и (16) уравнение равновесия в области пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$ примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - a^2 \frac{u}{r^2} = \frac{6k}{3\lambda + 5\mu} \frac{1}{r}, \quad a = \sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{3\lambda + 5\mu}}. \quad (17)$$

Решив дифференциальное уравнение (17), получим перемещение в области $r_0 \leq r \leq m(t)$

$$u = C_1(t)r^a + C_2(t)r^{-a} + 2kr/\mu, \quad (18)$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$ – неизвестные функции интегрирования.

В области $m(t) \leq r \leq R$ остаются верными уравнения (13) и (14). К данным уравнениям добавим краевые условия (6) и условия непрерывности перемещений и компоненты p_{rr} тензора необратимых деформаций на упругопластической границе $r = m(t)$. Таким образом получается система уравнений, из которой методом конечных разностей находятся следующие величины: перемещение u и компонента необратимых деформаций p_{rr} в вязкоупругой области $m(t) \leq r \leq R$; функции интегрирования $C_1(t)$, $C_2(t)$; упругопластическая граница $m(t)$.

В некоторый последующий момент времени $t = t_1$ напряженное состояние деформируемого материала в окрестности внутреннего цилиндра $r = r_0$ достигает ребра призмы Ивлева – Ишлинского (4):

$$\sigma_{\varphi\varphi} - 1/2\sigma_{rr} - 1/2\sigma_{zz} = -\sigma_{rr} + 1/2\sigma_{\varphi\varphi} + 1/2\sigma_{zz} = 2k. \quad (19)$$

Начиная с момента времени $t = t_1$ от внутренней границы цилиндрического слоя $r = r_0$ разрастается еще одна область пластического течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$, в которой напряжения удовлетворяют условию (19). В области $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ пластическое течение осуществляется при выполнении условия (15). В уменьшающейся вязкоупругой области $m(t) \leq r \leq R$ продолжают накапливаться необратимые деформации ползучести. Теперь в материале цилиндрического слоя движутся две упругопластические границы $r = m(t)$ и $r = m_1(t)$. Упругопластическая граница $r = m(t)$ отделяет область вязкоупругого деформирования $m(t) \leq r \leq R$ от области течения $m_1(t) \leq r \leq m(t)$. А упругопластическая граница $r = m_1(t)$ отделяет пластические области $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ и $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ друг от друга.

В вязкоупругой области $m(t) \leq r \leq R$ продолжают выполняться зависимости (13) и (14). Выражения (16) и (18) справедливы в области пластического течения $m_1(t) \leq r \leq m(t)$.

Из второй формы ассоциированного закона (5) и условия пластичности (19) для области пластического течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p &= -1/2\xi_1 - \xi_2, & \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \xi_1 + 1/2\xi_2, & \varepsilon_{zz}^p &= -1/2\xi_1 + \xi_2, \\ \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{zz}^p &= 0, & p_{rr} + p_{\varphi\varphi} + p_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из условия (19) и соотношений (8) следует, что

$$e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2e_{zz} = 0. \quad (21)$$

С учетом зависимостей (20) и (21) из соотношений (7) в области течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ получим

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} - p_{rr}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{3} \left(2\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + p_{rr}, \quad e_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right). \quad (22)$$

Подставив соотношения (22) в (8), найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - 2\mu p_{rr}, & \sigma_{zz} &= \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \left(\lambda - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\lambda + \frac{4\mu}{3} \right) \frac{u}{r} + 2\mu p_{rr}. \end{aligned} \quad (23)$$

В пластической области $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ из (19) и (23) найдем компоненту p_{rr} тензора необратимых деформаций

$$p_{rr} = \frac{1}{3} \left(2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + 2\frac{k}{\mu} \right). \quad (24)$$

Из уравнения равновесия (9) в области течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ с учетом (23) и (24) следует дифференциальное уравнение для перемещения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{8k}{3\lambda + 2\mu} \frac{1}{r}. \quad (25)$$

Учитывая первое краевое условие из (6), получим решение уравнения (25) в виде

$$u = \frac{4k}{3\lambda + 2\mu} r \ln \frac{r}{r_0} + \frac{C_3(t)}{r} - \frac{3}{2} \frac{p(t)}{3\lambda + 2\mu} r. \quad (26)$$

Уравнения (13) и (14), выполняющиеся в вязкоупругой области $m(t) \leq r \leq R$, вместе со вторым условием из (6) и условиями непрерывности перемещений и компоненты p_{rr} тензора необратимых деформаций на упругопластических границах $r = m(t)$ и $r = m_1(t)$ являются системой уравнений для следующих величин: u , p_{rr} в области $m(t) \leq r \leq R$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, $m(t)$ и $m_1(t)$.

При расчетах использовалась линейная функция $p(t) = \alpha t$ и значения постоянных: $n = 3$, $Vn\mu^3/\alpha = 82.12$, $\lambda/\mu = 3.9$, $r_0/R = 0.1$, $k/\mu = 0.003$. Распределение ненулевых компонент p_{rr} , $p_{\varphi\varphi}$ и p_{zz} тензора необратимых деформаций в зависимости от безразмерного радиуса r/R в момент времени $\tau = \alpha t/\mu = 0.015$ показано на рис. 1. На рис. 2 представлены графики напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} и обратимых деформаций e_{rr} , $e_{\varphi\varphi}$ и e_{zz} в этот же момент времени.

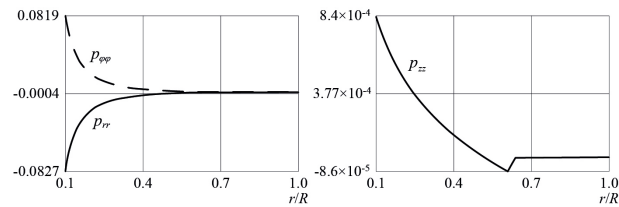


Рис. 1. Распределение компонент тензора необратимых деформаций по слою

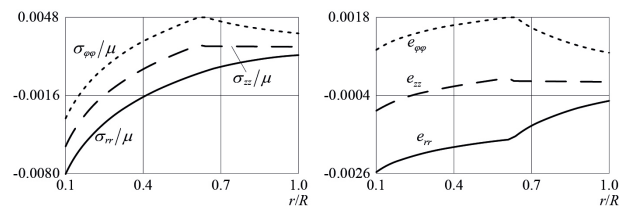


Рис. 2. Распределение компонент тензоров напряжений и обратимых деформаций по слою

Здесь решена одномерная краевая задача о необратимом деформировании материала толстостенной цилиндрической трубы. Предварительно материал накапливает необратимые деформации ползучести. Затем они становятся начальными для последующего накопления пластических деформаций. Сначала напряженное состояние в процессе пластического течения удовлетворяет грани условия пластичности Ивлева – Ишлинского, а потом выходит на ребро указанного условия. В прошлом году авторами решена подобная задача, в которой вместо условия пластичности Ивлева – Ишлинского рассматривалось условие пластичности Треска [6]. В полученном здесь решении область пластического течения, соответствующая грани условия Ивлева – Ишлинского, оказалась очень узкой в отличие от области течения, соответствующей грани условия Треска. Также имеются отличия во внешнем виде компонент e_{zz} , p_{zz} и σ_{zz} . Это связано с тем, что при условии Ивлева – Ишлинского все эти компоненты присутствуют изначально, а при условии Треска они сначала равны нулю и начинают изменяться только при выходе напряженного состояния на ребро призмы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. 1966.
- [2] Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // Доклады академии наук. 2016. Т. 470, № 3. с. 275–278.
- [3] Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1. с. 103–112.
- [4] Norton F. H. The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
- [5] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. 1998.
- [6] Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Всестороннее гидростатическое сжатие цилиндрического слоя в условиях ползучести и пластического течения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3 (41). с. 76–84.

A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko

**CREEP AND PLASTIC FLOW OF A MATERIAL OF A THICK-WALLED
CYLINDRICAL PIPE UNDER THE ACTION OF UNIFORM INTERNAL
PRESSURE**

*Institute of Metallurgy and Mechanical Engineering Far-Eastern Branch of RAS,
Konsomolsk-on-Amur, Russia*

Institute of Automation and Control Processes Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. This paper presents a solution to the boundary value problem of creep and plastic flow of a material of a thick-walled cylindrical pipe under conditions of application of uniform internal pressure increasing with time. In determining the mechanism of accumulation of irreversible deformations, the Ivlev-Ishlinsky criterion is used. All parameters of the stress-strain are calculated.

Keywords: elasticity, creep, plasticity, irreversible deformations, Ivlev – Ishlinsky criterion.

REFERENCES

- [1] Rabotnov Y. N. Creep of structural elements. 1966.
- [2] Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible deformations under conditions of changing mechanisms of their formation and the problem of definition of plastic potentials // Doklady Physics. 2016. Vol. 61, no. 9. P. 463–466.
- [3] Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. Change of accumulation mechanisms of irreversible deformations of materials in an example of viscometric deformation // Mechanics of Solids. 2018. Vol. 53, no. 1. P. 85–92.
- [4] Norton F. H. The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
- [5] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of Plasticity. 1998.
- [6] Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Comprehensive hydrostatic compression of cylindrical layer in conditions of creep and plastic flow // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2019. № 3 (41). c. 76–84.

Burenin Anatoly Alexandrovich, Chief Scientific Employee, Corresponding Member of RAS, Institute of Metallurgy and Mechanical Engineering Far-Eastern Branch of RAS, Konsomolsk-on-Amur, Russia,

Kovtanyuk Larisa Valentinovna, Chief Scientific Employee, Corresponding Member of RAS, Institute of Automation and Control Processes Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia,
Panchenko Galina Leonidovna, Acting Senior Researcher, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Institute of Automation and Control Processes Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia.

Э. С. Велизаде

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ФРИКЦИОННОЙ ПАРЫ ТОРМОЗНОГО МЕХАНИЗМА С РАВНОМЕРНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. В работе теоретически найдена микрогеометрия поверхности трения фрикционной пары тормозного механизма, соответствующая равномерному распределению контактного давления на поверхности. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования пары трения «барабан-накладка» тормозного механизма грузового автомобиля в зависимости от геометрических и механических характеристик его элементов.

Ключевые слова: фрикционная пара, накладка, барабан, износ, равномерное распределение контактного давления.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.56.69.008

УДК: 621.891:622.87

Введение. Исследования напряженно-деформированного состояния в деталях фрикционной пары тормозного механизма «барабан-накладка», широко используемых в различных грузовых автомобилях, показывают, что деформации и контактное давление распределяются неравномерно по трущимся поверхностям. Неравномерное распределение контактного давления на поверхности трения служит причиной неравномерного износа накладки и барабана. В связи с этим необходимо, чтобы проектируемая фрикционная пара «барабан-накладка» обладала минимальной неравномерностью распределения давления на трущихся поверхностях барабана и накладки. Повысить работоспособность фрикционной пары тормозного механизма «барабан-накладка» возможно конструкторско-технологическими методами, в частности, изменяя микрогеометрию узла трения. В настоящее время имеется недостаточно решений задач по определению микрогеометрии поверхности трения [1–12], при которой созданное поле напряжений препятствует разрушению элементов пары трения. Решение этой проблемы будет способствовать повышению работоспособности фрикционной пары «барабан-накладка» тормозного механизма.

© Велизаде Э. С., 2020

Велизаде Эверен Сахиб оглы

e-mail: evve2525@gmail.com, докторант, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 05.05.2020

Цель работы — разработка математической модели контактного взаимодействия и изнашивания для фрикционной пары «барабан-накладка», позволяющей рассчитать оптимальную микрогеометрию поверхности трения, при которой распределение контактного давления близко к равномерному для заданных режимах торможения автомобиля.

Постановка задачи. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние фрикционной накладки при торможении автомобиля. При многократном повторно-кратковременном режиме торможения происходит взаимодействие между контактирующими поверхностями накладки и барабана, возникают силы трения, приводящие к изнашиванию материалов сопряжения. Для определения контактного давления необходимо рассмотреть износоконтактную задачу о вдавливании накладки в поверхность тормозного барабана [13].

Считается, что к внутренней поверхности барабана с механическими характеристиками G_1 (модуль упругости) и μ_1 (коэффициент Пуассона материала) прижимается накладка с характеристиками G и μ . При этом область контакта занимает всю ширину накладки и не меняется при торможении.

Полагаем, что выполняются условия плоской деформации. Отнесем наладку к полярной системе координат $r\theta$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_0 и L с радиусами R_0 и R соответственно. Представим неизвестную границу наружного контура накладки L' в виде

$$r = \rho(\theta); \quad \rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta), \quad H(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^0 \cos k\theta + b_k^0 \sin k\theta),$$

в которой функция $H(\theta)$ подлежит определению. Здесь $\varepsilon = R_{\max}/R$ — малый параметр; R_{\max} — наибольшая высота впадины (выступа) неровности профиля накладки.

Аналогично, неизвестный заранее внутренний контур барабана близок круговому и может быть представлен в виде

$$\rho_1(\theta) = R'_1 + \varepsilon H_1(\theta); \quad H_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^1 \cos k\theta + b_k^1 \sin k\theta),$$

в которой функция $H_1(\theta)$ также подлежит определению при решении задачи оптимизации.

Требуется определить микрогеометрию поверхности трения (функции $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$), при которых распределенное контактное давление трущейся пары было бы близко к равномерному для заданных режимах торможения автомобиля. Это дополнительное условие позволяет определить искомые функции $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$.

Метод решения. Для решения поставленной задачи оптимизации вначале решается износоконтактная задача о вдавливании накладки в поверхность барабана [13].

Условие, связывающее перемещения накладки и барабана, имеет вид

$$v_1 + v_2 = \delta(\theta), \quad (|\theta| \leq \theta_0), \quad (1)$$

где $\delta(\theta)$ — осадка точек поверхности накладки и барабана, определяемая формой поверхности накладки и барабана, а также величиной прижимающей силы P ; $2\theta_0$ — угол обхвата фрикционных накладок.

В зоне контакта, помимо нормального давления $p(\theta, t)$, действует касательное усилие, связанное с контактным давлением по закону Амонтона–Кулона.

Усилия трения $\tau_{r\theta}(\theta, t)$ способствуют тепловыделению в области контакта. Общее количество тепла в единицу времени пропорционально мощности сил трения. Количество тепла, выделяемое в единицу времени на единичной площади контакта с координатой θ , будет

$$Q(\theta, t) = Vfp(\theta, t),$$

где V — скорость движения автомобиля в момент торможения; f — коэффициент трения пары.

Общее количество тепла $Q(\theta, t)$ будет расходоваться следующим образом: поток тепла в накладку $Q_1(\theta, t)$ и поток тепла на повышение температуры барабана $Q_b(\theta, t)$.

Для перемещений накладки и барабана имеем

$$v_1 = v_{1e} + v_{1r} + v_{1w}, \quad v_2 = v_{2e} + v_{2r} + v_{2w}.$$

Здесь v_{1e} — термоупругие перемещения точек контактной поверхности накладки; v_{1r} — перемещения, вызванные смятием микровыступов поверхности накладки; v_{1w} — перемещения, вызванные изнашиванием поверхности накладки; v_{2e}, v_{2r}, v_{2w} — то же для тормозного барабана.

Для определения v_{1e}, v_{1r} и v_{2e}, v_{2r} решаются задачи термоупругости для накладки и барабана соответственно. Коэффициенты теплопроводности материалов накладки и барабана в осевом, окружном и радиальном направлении приняты одинаковыми и независимыми от координат и температуры. Накладку будем моделировать круговым (кривым) бруском с сечением, близким к узкому прямоугольнику (рис. 1).

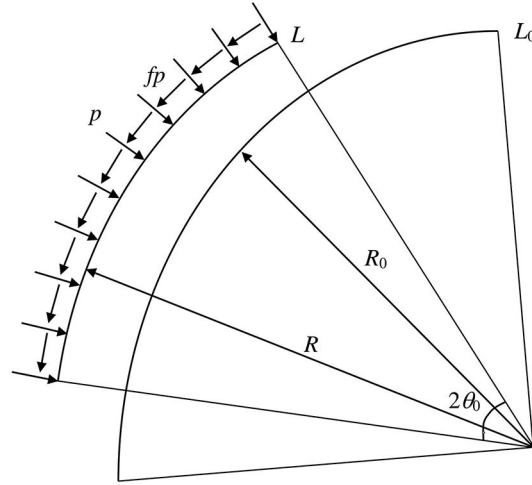


Рис. 1. Схема расчета оптимальной микрогеометрии поверхности трения фрикционной накладки

Для накладки имеет место

$$\begin{aligned} \Delta T = 0, \quad \text{при } r = \rho(\theta) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -Q, \quad T = T_c \quad \text{при } r = R_0, \\ T = T_c \quad \text{при } \theta = 0; \quad T = T_c \quad \text{при } \theta = 2\theta_0, \\ \text{при } r = \rho(\theta) \quad \sigma_n = -p(\theta), \quad \tau_{nt} = -fp(\theta), \quad \text{при } r = R_0 \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 0. \end{aligned}$$

На прямолинейных концах накладки граничные условия принимаются в виде

$$\int_{R_0}^R \sigma_\theta dr = 0, \quad \int_{R_0}^R \tau_{r\theta} dr = 0, \quad \int_{R_0}^R \sigma_\theta r dr = 0 \quad \text{при } \theta = \pm\theta_0.$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности материала накладки; Δ — оператор Лапласа; T — температурная функция; T_c — температура окружающей среды; n , t — нормаль и касательная к наружной поверхности накладки; v_r , v_θ — радиальная и касательная составляющие вектора перемещений точек L соответственно; σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений.

Аналогично ставится задача термоупругости для определения перемещений v_{2e} , v_{2r} контактной поверхности барабана.

Для определения v_{1w} и v_{2w} используется кинетическое уравнение изнашивания материала для накладки и барабана [14, 15].

Температурные функции, напряжения и перемещения в накладке и тормозном барабане, а также контактное давление ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими степени выше первой:

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \dots, \quad \sigma_t = \sigma_t^{(0)} + \varepsilon \sigma_t^{(1)} + \dots, \quad \tau_{nt} = \tau_{nt}^{(0)} + \varepsilon \tau_{nt}^1 + \dots,$$

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \dots, \quad v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \dots, \quad p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \dots$$

Значения температуры и компонент напряжений при $r = \rho(\theta)$ найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R$. С помощью метода возмущений для граничной задачи термоупругости получаем последовательность краевых задач для накладки с круговыми границами для внутренней и наружной поверхности [16]. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской термоупругости. Решение краевой задачи теории теплопроводности в каждом приближении ищется методом разделения переменных. При решении задачи термоупругости в каждом приближении используется термоупругий потенциал перемещений и метод степенных рядов.

На основе полученного решения задачи термоупругости и интегрирования кинетического уравнения изнашивания материала накладки в нулевом приближении находим перемещения v_1^0 ее контактной поверхности. Аналогично решается задача термоупругости для тормозного барабана. На основе полученного решения задачи термоупругости для барабана и кинетического уравнения изнашивания материала тормозного барабана в нулевом приближении находится перемещение v_2^0 его контактной поверхности. Найденные величины v_1^0 и v_2^0 подставляются в основное контактное условие (1) в нулевом приближении.

Алгебраизацию основного контактного уравнения проводим аналогично [1]. В результате получаем бесконечную алгебраическую систему относительно α_k^0 ($k = 0, 1, 2, \dots$), β_k^0 ($k = 1, 2, \dots$) и α_k^1 , β_k^1 и т.д. Полученные системы позволяют численными методами найти контактное давление в нулевом приближении.

Далее аналогично строится решение износостойкой задачи в первом приближении. Повторяя процедуру построения алгебраических систем для нахождения искомым коэффициентов, получаем бесконечную алгебраическую систему относительно $\alpha_{k,0}^1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $\beta_{k,0}^1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и $\alpha_{k,1}^1$, $\beta_{k,1}^1$ и т.д.

В правые части бесконечных алгебраических систем входят коэффициенты $a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1$ разложения функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$. При известных функциях $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$ полученные системы дают возможность найти контактное давление $p^1(\theta, t)$. Полученная алгебраическая система уравнений пока не является замкнутой.

В правые части полученных алгебраических систем входят коэффициенты $a_0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1$ разложения функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$. Для построения недостающих уравнений используем критерий равномерного распределения контактного давления на поверхности трения накладки и барабана. Пусть \bar{p} будет оптимальное значения контактного давления на поверхности трения. Величину \bar{p} требуется определить в процессе решения задачи оптимального проектирования.

Формула для контактного давления, которую символически можно записать в виде

$$p(\theta, t) = F(\theta, t, a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1) \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

показывает, что контактное давление линейно зависит от искомых коэффициентов $a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1$ рядов Фурье функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$.

Таким образом, функции $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$, описывающие профиль поверхности трения, должны быть выбраны так, чтобы обеспечивалось равномерное распределение контактного давления наилучшим образом.

Для построения недостающих алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов $a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1$ функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$ используем принцип наименьших квадратов.

Контактное давление p узла трения является независимой переменной θ и $(4m + 2)$ параметра $a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1$. Время считается свободным параметром. Параметры $a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1$ постоянны (в общем случае зависят от времени), но заранее неизвестны и подлежат определению. Для отыскания неизвестных параметров производим ряд вычислений.

Разобьем отрезок $[-\theta_0, \theta_0]$ изменения θ на M частей, где $M > 4m + 2$:

$$\theta_i = -\theta_0 + i\Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{2\theta_0}{M}, \quad (3)$$

$$p(\theta_i, t) = F(\theta_i, t, a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1) \quad (i = 1, 2, \dots, M).$$

Найдем такие значения неизвестных параметров, которые будут обеспечивать значения функции контактного давления (3) постоянное значение наилучшим образом.

Принцип наименьших квадратов утверждает, что наиболее вероятными значениями параметров будут такие, при которых сумма квадратов отклонений ε_i будет наименьшей:

$$U = \sum_{m=1}^M [F(\theta_i, t, a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1) - \bar{p}]^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

Для любого момента времени рассматриваем $a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1$ ($k = 1, 2, \dots, m$) как независимые переменные и приравниваем нулю частные производные от левой части (4) по этим переменным. В результате получим $(4m + 3)$ уравнений с $(4m + 3)$ неизвестными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_0^0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_k^0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial b_k^0} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \\ \frac{\partial U}{\partial a_0^1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_k^1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial b_k^1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{p}} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Составление и решение системы (5) значительно упрощается, так как функция $F(\theta_i, t, a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1)$ линейна относительно неизвестных параметров. Эта система уравнений замыкает бесконечную алгебраическую систему износосоcontactной задачи и совместно с ней должна решаться для фиксированных значений времени.

Анализ результатов моделирования. Совместное решение полученных систем уравнений позволяет найти приближенные значения коэффициентов $a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1, \bar{p}$ и α_k, β_k . В рассматриваемой задаче имеется много свободных параметров, таких как различные теплофизические и механические характеристики материалов, геометрические размеры накладки и тормозного барабана, скорость движения автомобиля. Для численной реализации предложенного метода были проведены расчеты применительно к тормозным механизмам грузовых автомобилей КамАЗ-5320. В качестве постоянных параметров были приняты: $R = 0,19$ м; $h_H = 0,016$ м — толщина накладки; $b_H = 0,14$ — ширина накладки; $R_\delta = 0,2$ м; $R_\delta^H = 0,25$ м — наружный радиус барабана; $f = 0,35$; $K_1 = 1,5 \cdot 10^{-6}$; $K_2 = 2 \cdot 10^{-8}$ — коэффициенты износостойкости материала накладки и барабана; $E = 6,9 \cdot 10^3$ МПа; $E_1 = 1,8 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,4$; $\mu_1 = 0,3$ для серого чугуна материала барабана.

Были найдены значения параметров управления (коэффициенты $a_0^0, a_k^0, b_k^0, a_0^1, a_k^1, b_k^1$) в зависимости от физико-механических характеристик фрикционной пары «барабан-накладка» для разных моментов времени. В разложении искомых функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$ ограничивались $k = 5$ членами.

Результаты расчета по определению микрогеометрии контактной поверхности трения в начальный момент $t = 0$ (для различных скоростей движения автомобиля при торможении) приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения коэффициентов Фурье для оптимальной шероховатости (мкм)
(строка 1 относится к шероховатости накладки)

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$V = 50$ км/ч											
1	0,432	0,345	-0,273	0,226	0,128	0,080	0,459	0,319	-0,147	0,108	0,072
2	0,304	0,221	0,202	-0,188	0,104	0,076	0,265	0,231	0,126	0,079	0,066
$V = 80$ км/ч											
1	0,499	0,433	-0,347	0,268	0,155	0,083	0,479	0,329	-0,218	0,137	0,082
2	0,332	0,219	0,149	-0,121	0,103	0,080	0,284	0,249	0,153	0,012	0,079

Заключение. Знание коэффициентов $a_k^0, b_k^0, a_k^1, b_k^1$ функций $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$ позволяет на стадиях проектирования и изготовления выбирать класс шероховатости обработанной внешней поверхности накладки и внутренней поверхности тормозного барабана, обеспечивающий повышение износостойкости фрикционной пары тормозной системы грузового автомобиля за счет равномерного распределения контактного давления.

Обозначения: $p(\theta, t)$ — контактное давление между накладкой и барабаном при торможении; ε — малый параметр; $H(\theta)$ — функция, описывающая микрогеометрию наружной поверхности накладки; $H_1(\theta)$ — функция, описывающая микрогеометрию внутренней поверхности тормозного барабана; R и R_0 — радиусы окружностей контуров L и L_0 соответственно; a_k^0, b_k^0 — коэффициенты ряда Фурье функции $H(\theta)$;

a_k^1, b_k^1 — коэффициенты ряда Фурье функции $H_1(\theta)$; $\rho(\theta)$ — функция, описывающая наружную поверхность накладки; f — коэффициент трения фрикционной пары; t — время; V — скорость движения автомобиля в момент торможения; $\alpha_k^0, \beta_k^0, \alpha_{k,0}^0, \beta_{k,0}^0, \alpha_k^1, \beta_k^1, \alpha_{k,1}^0, \beta_{k,1}^0$ — коэффициенты ряда Фурье для функций, определяющих контактное давление; $T(r, \theta)$ — температурная функция; λ — коэффициент теплопроводности материала накладки; τ^0 — предельная удельная сила трения, ниже которой истирание поверхности фрикционной пары практически не происходит; R_{\max} — наибольшая высота неровности поверхности накладки; Δ — оператор Лапласа; $Q_*(\theta, t)$ — поток тепла на повышение температуры накладки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мирсалимов В. М. Обратная износоконтактная задача для фрикционной пары // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. Т. 37, № 1. С. 62–69.
- [2] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Минимизация контактного давления для фрикционной пары «втулка-вал» // Трение и износ. 2015. Т. 36, № 5. С. 529–535.
- [3] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Минимизация абразивного износа внутренней поверхности втулки фрикционной пары // Трение и износ. 2016. Т. 37, № 5. С. 551–557.
- [4] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Оптимальное проектирование фрикционной пары втулка-плунжер // Трение и износ. 2017. Т. 38, № 5. С. 454–460.
- [5] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Inverse problems of damage mechanics for a hub of a friction pair // International Journal of Damage Mechanics. 2018. Vol. 27, Issue 1. P. 82–96.
- [6] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Минимизация теплового состояния втулки фрикционной пары с помощью критерия равномерного распределения температуры на поверхности трения // Трение и износ. 2018. Т. 39, № 5. С. 514–522.
- [7] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Minimization of the thermal state of the hub of a friction pair // Engineering Optimization. 2018. Vol. 50, Issue 4. P. 651–670.
- [8] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Minimization of stress state of a hub of friction pair // Advances in Mathematical Physics. 2018. Vol. 2018. Article ID 8242614.
- [9] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Inverse wear contact problem of the friction unit // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2018. Vol. 232, Issue 22. P. 4216–4226.
- [10] Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Оптимальное проектирование узла трения с равномерным контактным давлением // Трение и износ. 2019. Т. 40, № 6. С. 740–749.
- [11] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Inverse problem of contact fracture mechanics for a hub of friction pair taking into account thermal stresses // Mathematics and Mechanics of Solids. 2019. Vol. 24, Issue 6. P. 1763–1781.
- [12] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Optimum problem on wear decrease for a hub of friction pair // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020. Vol. 27, Issue 5. P. 353–363.
- [13] Мирсалимов В. М., Гасанов Ш. Г., Гейдаров Ш. Г. Износоконтактная задача о вдавливании колодки с фрикционной накладкой в поверхность барабана // Тр. XII Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 80-летию ИМАШ РАН «Трибология — машиностроению». Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018. С. 341–344.
- [14] Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. Москва: Машиностроение, 1988. 256 с.
- [15] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва: Наука, 2001. 478 с.
- [16] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 2001. 707 с.

*E. S. Velizade***OPTIMUM DESIGN OF FRICTION PAIR WITH UNIFORM PRESSURE
FOR A BRAKE MECHANISM***Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan*

Abstract. In the present work a microgeometry of friction surface for friction pair of a brake mechanism is theoretically found. The obtained microgeometry corresponds to uniform distribution of contact pressure on the surface. A closed system of algebraic equations is constructed. It allows one to obtain the solution of the optimal design problem for a “drum-lining” friction pair of the truck’s brake mechanism depending on geometric and mechanical characteristics of brake mechanism elements.

Keywords: friction pair, lining, drum, wear, uniform distribution of contact pressure.

REFERENCES

- [1] Mirsalimov V. M. An inverse wear contact problem for a friction couple // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2008. Vol. 37, no. 1. P. 53–59. <https://doi.org/10.1007/s12001-008-1011-2>.
- [2] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Minimization of contact pressure for hub-shaft friction pair // *Journal of Friction and Wear*. 2015. Vol. 36, no. 5. P. 404–408. <https://doi.org/10.3103/S1068366615050116>.
- [3] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Minimization of abrasive wear for the internal surface of the hub of a friction pair // *Journal of Friction and Wear*. 2016. Vol. 37, no. 5. P. 424–429. <https://doi.org/10.3103/S1068366616050135>.
- [4] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Optimal design of a frictional pair of a hub-plunger // *Journal of Friction and Wear*. 2017. Vol. 38, no. 5. P. 384–389. <https://doi.org/10.3103/S1068366617050075>.
- [5] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Inverse problems of damage mechanics for a hub of a friction pair // *International Journal of Damage Mechanics*. 2018. Vol. 27, Issue 1. P. 82–96. <https://doi.org/10.1177/1056789516662698>.
- [6] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Minimization of the thermal state of the hub of a frictional pair using the criterion of uniform temperature distribution on a friction surface // *Journal of Friction and Wear*. 2018. Vol. 39, no. 5. P. 405–411. <https://doi.org/10.3103/S1068366618050112>.
- [7] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Minimization of the thermal state of the hub of a friction pair // *Engineering Optimization*. 2018. Vol. 50, Issue 4. P. 651–670. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2017.1328062>.
- [8] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Minimization of stress state of a hub of friction pair // *Advances in Mathematical Physics*. 2018. Vol. 2018. Article ID 8242614. <https://doi.org/10.1155/2018/8242614>.
- [9] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Inverse wear contact problem of the friction unit // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2018. Vol. 232, Issue 22. P. 4216–4226. <https://doi.org/10.1177/0954406217749267>.
- [10] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. The optimal design of a friction unit with uniform contact pressure // *Journal of Friction and Wear*. 2019. Vol. 40, no. 6. P. 562–568. <https://doi.org/10.3103/S1068366619060187>.
- [11] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Inverse problem of contact fracture mechanics for a hub of friction pair taking into account thermal stresses // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 24, Issue 6. P. 1763–1781. <https://doi.org/10.1177/1081286518805525>.

Evren Sahib oglu Velizade, Post-graduate Student, Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan.

-
- [12] Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Optimum problem on wear decrease for a hub of friction pair // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2020. Vol. 27, Issue 5. P. 353–363. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1472827>.
- [13] Mirsalimov V. M., Hasanov S. G., Heidarov S. G. Wear-contact problem of pressing of brake shoe with friction lining into drum surface // XII International scientific conference “Tribology for Mechanical Engineering” dedicated to the 80th anniversary of IMASH RAS. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Research, 2018. P. 341–344. (in Russian).
- [14] Goryacheva I. G., Dobychin M. N. Contact problems in tribology. Moscow: Mashinostroyeniye, 1988. 256 p. (in Russian).
- [15] Goryacheva I. G. Mechanics of frictional interaction. Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian).
- [16] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Dordrecht: Springer, 1977. 732 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1>.

Л. В. Фомин

О ПРИМЕНЕНИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДЛИТЕЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Аннотация. Исследуется длительное разрушение оболочки и пластины при ползучести в активной среде в условиях нестационарного сложного напряженного состояния. Учет влияния среды на время до разрушения осуществляется с помощью введения в определяющие и кинетические дробно-линейные соотношения функции от интегрально средней концентрации среды. Проведено сравнение времен до разрушения при использовании скалярного и векторного параметров поврежденности. Определены особенности использования дробно-линейной модели для описания процессов длительного разрушения.

Ключевые слова: ползучесть, нестационарное нагружение, длительное разрушение, дробно-линейная модель, скалярный параметр поврежденности, векторный параметр поврежденности, оболочка, пластина.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.28.60.009

УДК: 539.376

Введение. Актуальность решения вопросов о безопасной эксплуатации материалов и элементов конструкций несомненна. Наиболее часто ответственные элементы конструкций во время длительной эксплуатации подлежат воздействию ряда деструктивных факторов, среди них надо отметить следующие: высокая температура и активная рабочая и/или окружающая среда в сочетании с продолжительным действием внешних нагрузок. Таким воздействиям, например, подвергаются типовые элементы конструкций как оболочка и пластина. Влияние активной среды может определяться

© Фомин Л. В., 2020

Фомин Леонид Викторович

e-mail: fleonid1975@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00387).

Автор статьи выражает благодарность профессору А. М. Локощенко за внимание к проведенной работе и полезные обсуждения.

Поступила 01.03.2020

как диффузионным проникновением ее элементов внутрь материала, так и коррозионно-активным влиянием, которому присуще активные химические процессы взаимодействия рабочих и/или окружающих сред с материалами элементов конструкций. Особое значение приобретает изучение таких процессов при высокотемпературном длительном нагружении металлических материалов и конструкций в условиях ползучести [1–7].

В настоящей статье рассматривается диффузионное влияние активной среды на оболочку и пластину, которые изготовлены из металлических материалов. Указанные типовые элементы находятся в условиях нестационарного длительного нагружения при воздействии на них высоких температур, которые вызывают в металлическом материале процессы ползучести. С учетом накопления повреждений такие процессы с течением времени приводят к разрушению элементов конструкций.

Исследования по этим направлениям актуальны и имеют как фундаментальный, так и прикладной характер при расчете элементов конструкций энергетического и авиационно-космического назначения.

1. Дробно-линейная модель ползучести. Для описания ползучести металлов и сплавов в одномерном случае наибольшее распространение получила степенная зависимость скорости установившейся ползучести $\dot{\rho}$ от напряжения σ , которая имеет вид

$$\dot{\rho} = \alpha \sigma^n, \quad \alpha = \text{const}.$$

Она достаточно хорошо аппроксимирует экспериментальные данные в выбранном узком диапазоне напряжений для широкого класса металлических материалов и сплавов, но, как отмечал Ю. Н. Работнов [1], если брать достаточно широкий диапазон напряжений, то показатель степени n становится зависящим от напряжения σ .

Одним из возможных вариантов соотношений для описания процессов ползучести является дробно-линейная зависимость [8], которая в ряде случаев позволяет достаточно хорошо выразить скорость ползучести как функцию от напряжения в широком диапазоне напряжений. С. А. Шестериков и М. А. Юмашева предложили использовать такую зависимость в следующем виде:

$$\dot{\rho} = \beta \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_b - \sigma}, \quad \sigma > 0, \quad \beta = \text{const},$$

где σ_0 — предел ползучести (при $\sigma < \sigma_0$ деформация ползучести практически отсутствует), во многих случаях можно принять $\sigma_0 = 0$; σ_b — предел кратковременной прочности при соответствующей температуре испытания.

При напряжениях, близких к σ_b , скорость деформации ползучести $\dot{\rho}$ существенно возрастает, и в рассматриваемые времена наступает разрушение. Таким образом, в указанном дробно-линейном соотношении напряжение σ_b выполняет роль предельного напряжения. В отличие от стандартной степенной зависимости, где напряжение может выбираться сколь угодно большим, в данной сингулярной зависимости напряжение ограничено величиной σ_b , что является более обоснованным с физической и механической точек зрения.

Качественный график зависимости, предложенной С. А. Шестериковым и М. А. Юмашевой, при $\sigma_0 = 0$ представлен на рис. 1.

2. Диффузия активной среды. Приближенный метод решения уравнения диффузии. Для анализа процесса диффузии активной окружающей среды внутрь

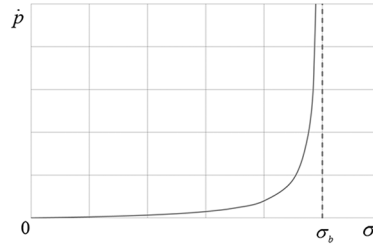


Рис. 1. Дробно-линейная зависимость скорости деформации ползучести от напряжения при $\sigma_0 = 0$

материала предлагается приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта, распространяющегося от поверхности пластины или оболочки (далее по тексту пластина и оболочка обозначены как типовой элемент) [2, 5, 6]. Такой подход позволяет разделить все поперечное сечение типового элемента на возмущенную (где среда уже проникла в материал) и невозмущенную (где еще нет проникновения среды) области и затем отслеживать во времени движение границы между этими областями. Зависимость концентрации c активной среды в материале типового элемента от времени аппроксимируется в виде полинома, причем граничные и начальные условия выполняются точно, а уравнение диффузии удовлетворяется интегрально во всем поперечном сечении типового элемента.

В дальнейшем для анализа влияния агрессивной среды на время до разрушения типового элемента будет использована безразмерная интегрально средняя концентрация $\bar{c}_m(\bar{t})$, которая получена с использованием указанного приближенного метода и имеет вид

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \int_0^1 \bar{c}(\bar{z}, \bar{t}) dz = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{\bar{t}} & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 1, \\ 1 - \frac{2}{3} \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] & \text{при } \bar{t} > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь введены безразмерные переменные $\bar{z} = 2z/H$, $\bar{t} = 48Dt/H^2$, $\bar{c} = c/c_0$, где z — координата вдоль толщины стенки типового элемента ($z = 0$ на срединной линии поперечного сечения пластины или оболочки, $z > 0$ на выпуклой стороне пластины); t — время; c_0 — постоянная концентрация на границе материала типового элемента и внешней активной среды; $D = \text{const}$ — коэффициент диффузии.

3. Цилиндрическая оболочка. Постановка задачи. Рассмотрим длинную тонкостенную цилиндрическую оболочку без дна с радиусом срединной поверхности R и толщиной стенки H . Пусть эта оболочка находится под действием растягивающей осевой силы P и внутреннего давления Q . Оболочка находится в активной среде. Влияние активной среды определяется диффузионным проникновением ее элементов внутрь материала. Рассматривается одномерный диффузионный процесс. Кривизна тонкостенной оболочки мала и отношение толщины стенки оболочки к ее радиусу много меньше единицы. Этот факт позволяет с высокой степенью точности рассматривать диффузию среды в стенку оболочки как диффузию в плоскую пластину.

Задача является статически определимой и напряженное состояние определяется только внешними нагрузками. Напряженное состояние в оболочке является плоским

(с нулевым радиальным напряжением σ_{rr}) и однородным (напряженное состояние одно и то же и не зависит от пространственных координат).

3.1. Дробно-линейная модель ползучести. Учет влияния активной среды. Определение компонент напряженно-деформированного состояния. Компоненты тензора напряжений получены из уравнений равновесия элементарного объема тела (уравнения теории оболочек [9]):

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2\pi RH}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{RQ}{H}. \quad (2)$$

Учет влияния активной среды произведен путем введения в дробно-линейное определяющее соотношение функции от интегрально средней концентрации активной среды $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ в материале оболочки [6, 8]:

$$\dot{p}_u = \frac{A\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad (3)$$

где \dot{p}_u — интенсивность скоростей деформаций ползучести, здесь и далее точка над соответствующим символом означает производную по времени \bar{t} ; σ_u — интенсивность напряжений; A — материальная константа. В дальнейших расчетах будем использовать линейный вид функции $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$:

$$f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + a\bar{c}_m(\bar{t}), \quad f(0) = 1, \quad (4)$$

где a — константа, определяемая из экспериментов по длительной прочности с учетом влияния окружающей активной среды [4, 10].

Примем следующие гипотезы: деформации малы, несжимаемость материала, упругопластическими деформациями пренебрегаем по сравнению с деформациями ползучести. С дополнительным учетом гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести для несжимаемого тела [1, 2] получим выражения для компонент скоростей осевой \dot{p}_{zz} и окружной $\dot{p}_{\theta\theta}$ деформации ползучести:

$$\dot{p}_{zz} = \frac{Af(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b - \sigma_u} \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{2}\sigma_{\theta\theta} \right), \quad \dot{p}_{\theta\theta} = \frac{Af(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b - \sigma_u} \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}\sigma_{zz} \right). \quad (5)$$

В результате соотношения (2) и (5) определяют напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки с учетом использования дробно-линейной модели ползучести.

3.2. Дробно-линейная модель длительного разрушения. Учет влияния активной среды. Скалярный и векторный параметры поврежденности. Критерии разрушения. Для определения времени до разрушения оболочки используем кинетическую теорию ползучести и длительной прочности Ю. Н. Работнова [1] и введем в кинетические уравнения функцию от интегрально среднего уровня концентрации $\bar{c}_m(\bar{t})$. Кинетическое уравнение при учете скалярного параметра поврежденности рассмотрим в следующем виде [6]:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\bar{t}} = \frac{C\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad \omega(\bar{t} = 0) = 0. \quad (6)$$

Критерием разрушения является достижение параметром поврежденности $\omega^*(\bar{t} = \bar{t}_\omega^*) = 1$ значения, равного единице в момент времени $\bar{t} = \bar{t}_\omega^*$.

Как вариант развития моделирования накопления повреждений в условиях длительного высокотемпературного нагружения можно в качестве параметра поврежденности взять вектор $\mathbf{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ [11, 12], компоненты которого связаны с пространством

главных напряжений σ_i ($i = 1, 2, 3$). В настоящей работе оси введенной цилиндрической системы координат (z, θ, r) являются главными осями напряженно-деформированного состояния. Поскольку в рассматриваемой оболочке напряженное состояние плоское и однородное, кинетические уравнения при учете векторного параметра поврежденности Ω [11, 12] примем в следующем виде [6]:

$$\dot{\Omega}_i = \frac{d\Omega}{dt} = \begin{cases} \frac{C\sigma_i}{\sigma_b - \sigma_i} f(\bar{c}_m(\bar{t})) \text{ при } \sigma_i > 0, \\ 0 \text{ при } \sigma_i \leq 0, \end{cases} \quad i = z, \theta, \quad (7)$$

где Ω_i — проекция вектора поврежденности на i -ю ось системы координат.

Критерием разрушения является достижение длиной Ω вектора Ω значения, равного единице:

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_z)^2 + (\Omega_\theta)^2}, \quad \Omega(\bar{t} = 0) = 0, \quad \Omega^* = \Omega(\bar{t} = \bar{t}_\Omega^*) = 1.$$

В настоящей работе рассмотрены две программы нестационарного нагружения оболочки: раздельная и комбинированная во времени.

В раздельной программе сначала к рассматриваемой длинной цилиндрической оболочке прикладывается внутреннее давление $Q > 0$ в течение времени $0 < \bar{t} \leq \bar{t}_1$. Примем $\bar{t}_1 = 0,5\bar{t}_1^*$ (где \bar{t}_1^* — время до разрушения рассматриваемой оболочки при действии только этого внутреннего давления Q), при этом осевая растягивающая сила $P = 0$. Затем в течение времени $\bar{t}_1 < \bar{t} < \bar{t}^*$ (где \bar{t}^* — время до разрушения оболочки в конце программы нагружения) к рассматриваемой оболочке прикладывается осевая растягивающая сила $P > 0$, при этом внутреннее давление равно нулю (т.е. выполняются условия $Q = 0, P > 0$).

Комбинированная программа отличается тем, что осевая сила $P > 0$ действует на обеих стадиях нагружения, при этом действие внутреннего давления аналогично по стадиям раздельной программы нагружения. Дополнительно принимается условие $P = 2\pi R^2 Q$.

3.3. Анализ полученных результатов. В результате расчета были получены безразмерные времена до разрушения при раздельной и комбинированной программах нагружения с использованием скалярного параметра поврежденности $\bar{t}_\Omega^* = 0,614$ и с использованием векторного параметра поврежденности $\bar{t}_\Omega^* = 0,817$. Отношение времен до разрушения равно $\xi = \bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^* = 1,33$. Таким образом, время до разрушения при использовании векторного параметра поврежденности превышает время до разрушения, полученное при использовании скалярного параметра поврежденности.

При выбранном условии $P = 2\pi R^2 Q$ времена до разрушения цилиндрической оболочки при раздельной и комбинированной программах нагружения совпадают. Это справедливо как при применении скалярного, так и векторного параметров поврежденности. При таком как $P = 2\pi R^2 Q$ зависимом друг от друга задании внешних нагрузок безразмерные параметры $\bar{C} = (\sigma_b H - RQ)/(RQ)$ и $\bar{P} = P/(2\pi R H \sigma_b - P)$ должны удовлетворять условию $\bar{C}\bar{P} = 1$.

При независимом задании рассматриваемых внешних нагрузок безразмерные параметры \bar{C} и \bar{P} задаются независимо друг от друга.

4. Пластина при нестационарном сложном напряженном состоянии. Дробно-линейная модель ползучести и длительной прочности с учетом влияния активной среды. Определение времени до разрушения. Аналогичные гипотезы, подходы (дробно-линейная модель, приближенный метод решения уравнения

диффузии, скалярный и векторный параметры поврежденности) были применены при исследовании длительного разрушения пластины в активной среде. В соответствии с постановкой задачи пластина находится в условиях нестационарного сложного напряженного состояния при кусочно-постоянном действии изгибающих моментов M_1 и M_2 , распределенных по взаимно ортогональным краям пластины [6]. В табл. 1 приведены результаты расчета времен до разрушения \bar{t}_ω^* и \bar{t}_Ω^* при использовании скалярного и векторного параметров поврежденности соответственно для различных значений $\zeta = M_2/M_1$.

Таблица 1. Времена до разрушения для различных значений ζ

$\zeta = M_2/M_1$	\bar{t}_ω^*	\bar{t}_Ω^*
1,5	0,107	0,123
1	0,160	0,205
0,5	0,292	0,407

На рис. 2 приведены зависимости поврежденности от времени при значениях $\zeta = 0,5, 1, 1,5$, полученные при скалярном $\omega(\bar{t})$ (сплошные кривые) и векторном $\Omega(\bar{t})$ (штриховые кривые) параметрах поврежденности. В интервале времени $0 < \bar{t} < \bar{t}_1$ (в результате расчета получено значение $\bar{t}_1 = 0,08$) графики для поврежденности, полученные с использованием скалярного и векторного подходов, совпадают.

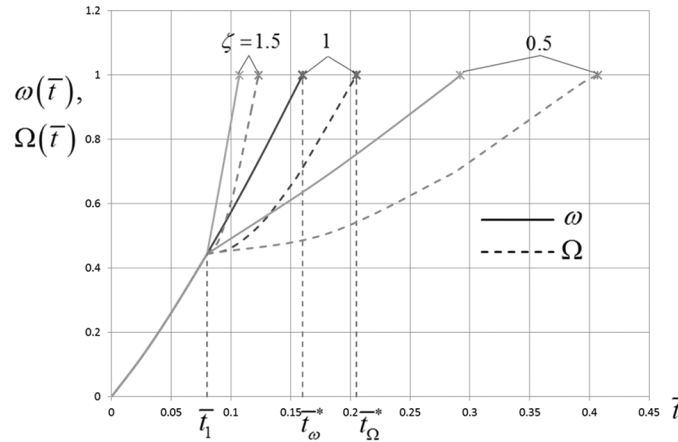


Рис. 2. Зависимости поврежденности от времени при скалярном и векторном подходах

5. Заключение. Проведено сравнение времен до разрушения типовых элементов конструкций (оболочки и пластины) при использовании скалярного и векторного параметров поврежденности. Время \bar{t}_Ω^* до разрушения при использовании векторного параметра поврежденности превышает время \bar{t}_ω^* до разрушения, полученное при использовании скалярного параметра поврежденности. Отношение времен до разрушения оболочки равно $\xi = \bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^* = 1,33$.

Проведенное исследование показывает различие механизмов накопления повреждений при длительном высокотемпературном нагружении. Полученный результат подтверждает аналогичные результаты, полученные авторами статьи [6] и показанными

в п. 4 настоящей статьи при исследовании длительного нестационарного нагружения пластины во взаимно ортогональных плоскостях. В указанной работе [6] отношения времен до разрушения $\bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^*$ в зависимости от соотношения величин изгибающих моментов находятся в диапазоне $\bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^* = 1,15 \div 1,39$.

Настоящее исследование имеет как фундаментальный характер, так и прикладной аспект. Предлагаемые подходы и результаты исследования могут быть применены в энергетической, химической и авиационно-космической отраслях промышленности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
- [2] Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. Москва: Физматлит, 2016. 504 с. [Перевод: Lokoshchenko A. M. Creep and Long-Term Strength of Metals. Boca-Raton, London, New York: CISP; CRC Press; Taylor & Francis Group, 2018. 546 p.].
- [3] Локощенко А. М., Фомин Л. В. Моделирование поведения материалов и элементов конструкций, находящихся под воздействием агрессивных сред (обзор) // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т. 80, № 2. С. 145–179.
- [4] Фомин Л. В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. “Физ.-мат. науки”. 2013. № 3(32). С. 87–97.
- [5] Fomin L. V. Steady-state creep of a composite rod in tension in the presence of an aggressive environment // Mechanics of Composite Materials. 2017. Vol. 52(6). P. 741–750.
- [6] Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 60. P. 478–489.
- [7] Фомин Л. В., Басалов Ю. Г., Локощенко А. М. Об учете влияния коррозионных процессов на длительное разрушение стержня, находящегося в условиях ползучести // Механика композиционных материалов и конструкций. 2019. Т. 25, № 3. С. 327–335.
- [8] Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–92.
- [9] Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells: 2th edition. New York: McGraw-Hill, 1959. 595 p.
- [10] Одинг И. А., Фридман З. Г. Роль поверхностных слоев при длительном разрушении металлов в условиях ползучести // Заводская лаборатория. 1959. Т. 25, № 3. С. 329–332.
- [11] Качанов Л. М. Основы механики разрушения. Москва: Наука, 1974. 312 с.
- [12] Наместникова И. В., Шестериков С. А. Векторное представление параметра поврежденности // Деформирование и разрушение твердых тел: сб. трудов Института механики МГУ. Москва: Изд-во Московского университета, 1985. С. 43–52.

L. V. Fomin

**ON APPLICATION OF A LINEAR FRACTIONAL CREEP AND CREEP
RUPTURE STRENGTH MODEL IN SIMULATION OF LONG-TERM
DESTRUCTION OF TYPICAL STRUCTURAL ELEMENTS IN AN ACTIVE
MEDIUM**

Research Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. The long-term destruction of the shell and plate during creep in the active medium under the conditions of an unsteady complex stress state is investigated. The influence of the medium on the time to fracture is taken into account by introducing a function of the integral average concentration of the medium into the constitutive and kinetic linear-fractional relationships. Comparison of the times to failure using the scalar and vector damage parameters is carried out. The features of using a linear-fractional model to describe long-term fracture processes are determined.

Keywords: creep, unsteady loading, long-term fracture, linear fractional model, scalar damage parameter, vector damage parameter, shell, plate.

REFERENCES

- [1] Rabotnov Y. N. Creep Problems in Structural Members. Amsterdam: North-Holland, 1969.
- [2] Lokoshchenko A. M. Creep and Long-Term Strength of Metals. London. New York: CISP. CRC Press. Taylor Francis Group. Boca. Raton., 2018. 546 p.
- [3] Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Modeling the behavior of materials and structural elements exposed to aggressive media (review) // Strength Plast. Prob. 2018. Vol. 80, no. 2. P. 145–179.
- [4] Fomin L. V. Description of the long-term strength of stretchable rods of rectangular and round cross-sections in high-temperature air // J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci. 2013. no. 3(32). P. 87–97.
- [5] Fomin L. V. Steady-state creep of a composite rod in tension in the presence of an aggressive environment // Mechanics of Composite Materials. 2017. Vol. 52(6). P. 741–750.
- [6] Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 60. P. 478–489.
- [7] Fomin L. V., Basalov Y. G., Lokoshchenko A. M. On taking into account the influence of corrosion processes on the long-term fracture of a rod under creep conditions // Mech. Compos. Mater. Struct. 2019. Vol. 25, no. 3. P. 327–335.
- [8] Shesterikov S. A., Yumasheva M. A. More precise specification of the equation of state in creep theory // Mechanics of Solids. 1984. Vol. 19, no. 1. P. 81–85.
- [9] Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells: 2th edition. New York: McGraw-Hill, 1959. 595 p.
- [10] Oding I. A., Fridman Z. G. Role of surface layers during delayed fracture of metals under creep condition // Industrial Laboratory. 1959. Vol. 25, no. 3. P. 329–332.
- [11] Kachanov L. M. Foundations of the Mechanics of Damage. Moscow: Nauka, 1974. 312 p.
- [12] Namestnikova I. V., Shesterikov S. A. Vector representation of damage parameter. Deformation and destruction of solids // Proceedings of the Institute of Mechanics of Moscow State University. Moscow: Publishing House of Moscow University, 1985. P. 43–52.

Fomin Leonid Victorovich, Candidate Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher, Research Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

Б. Г. Миронов¹, А. В. Никитин²

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ НЕЛИНЕЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается деформированное состояние анизотропной нелинейно-неоднородной трубы. Примем неоднородность материала как зависимость предела текучести от координат. На неоднородность материала способны влиять различные факторы, такие как: ударные воздействия, температура, радиационное облучение и другие. Вдоль эллиптических кривых предел текучести считается неизменным. Результаты, учитывающие влияние анизотропии на напряженно-деформированное состояние различных конструкций и тел являются востребованными в современном мире.

Ключевые слова: неоднородность, труба, анизотропия, деформированное состояние.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.34.54.010

УДК: 539.374

Пусть имеется труба, внутри которой действует давление p (рис. 1), а r_a — внутренний радиус трубы, r_b — внешний радиус трубы.

Допустим, что решение задачи будет зависеть от параметра δ . Пусть

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^I \delta + \sigma_{ij}^{II} \delta^2 + \dots, \quad u = u^0 + u^I \delta + u^{II} \delta^2 + \dots, \quad v = v^0 + v^I \delta + v^{II} \delta^2 + \dots,$$

где σ_{ij} — компоненты напряжений; u, v — компоненты перемещений вдоль осей x и y соответственно. Обозначим

$$\frac{r_b}{r_a} = \beta, \quad \frac{r}{r_a} = \rho, \quad \frac{r_s^0}{r_a} = \alpha,$$

где r_s^0 — граница раздела пластической и упругой области в нулевом приближении.

© Миронов Б. Г., Никитин А. В., 2020

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Никитин Андрей Витальевич

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.07.2020

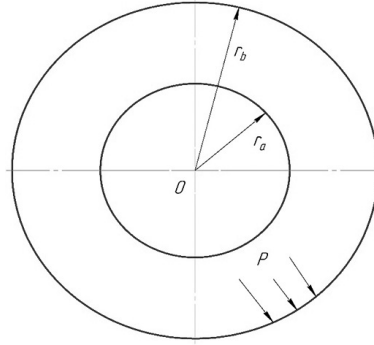


Рис. 1. Толстостенная труба

Предполагается, что в пластической области имеет место условие пластичности следующего вида [1]:

$$\left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right)^2 + \left(\tau_{\rho\theta}^p\right)^2 - 2R\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\cos(2\theta + \eta) - 2\tau_{\rho\theta}^p\sin(2\theta + \eta)R + R^2 - 1 - 2\delta\left(\frac{(\rho\cos\theta + A)^2}{a^2} + \frac{(\rho\sin\theta + B)^2}{b^2}\right) = 0. \quad (1)$$

Допустим, что в упругой области материал обладает свойством несжимаемости, коэффициент Пуассона $\mu = 1/2$.

Согласно [2] компоненты перемещений в нулевом приближении представлены в виде:

$$u^{(0)e} = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left(p - 2\ln\frac{1}{\alpha} + 3\left(p - 2\ln\frac{1}{\alpha}\right)\beta^2 \right), \quad v^{(0)e} = 0. \quad (2)$$

Найдем компоненты перемещений в приближении №1. При $r = 1$ на границе раздела пластической и упругой зон, в соответствии с [2] имеет место

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)\rho} &= a_0'' + a_1'' \cos\theta + b_1'' \sin\theta + a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)\rho} &= a_0''' + a_1''' \cos\theta + b_1''' \sin\theta + a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с [3] возможны случаи:

1)

$$\begin{aligned} a_0'' &= -\frac{2}{a^2 b^2} (b^2 A^2 + a^2 B^2) \ln \alpha, \\ a_0''' &= a_1''' = a_1'' = a_2''' = a_2'' = b_1''' = b_1'' = b_2''' = b_2'' = 0. \end{aligned}$$

Перемещения примут вид

$$u^{(I)e} = \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2) \ln \alpha (\rho^2 + 3\beta^2)}{\rho(\beta^2 - 1)E a^2 b^2}, \quad v^{(I)e} = 0; \quad (4)$$

2)

$$\begin{aligned} a_1'' &= \frac{2A}{a^2} (1 - \alpha^2), \quad b_1''' = -\frac{2A}{a^2} (\alpha^2 - 1), \\ a_0''' &= a_0'' = a_1''' = a_2''' = a_2'' = b_1''' = b_1'' = b_2''' = b_2'' = 0. \end{aligned}$$

Получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} \hat{c}_1 \ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{3\beta^2}{2\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \cos \theta, \\ v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(-\frac{15}{14} \hat{c}_1 \left[\ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{3}{5} \right] + \frac{3\beta^2}{2\rho^2} \hat{c}_2 + \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \frac{(\alpha^2 - 1)\beta B}{\beta^4 - 1} \frac{1}{b^2};$$

3)

$$\begin{aligned} b_1'' &= \frac{2\beta}{b^2} (1 - \alpha^2), \quad a_1''' = \frac{2\beta}{b^2} (\alpha^2 - 1), \\ a_0''' &= a_0'' = a_1'' = a_2'' = b_1''' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} \hat{c}_1 \ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{3\beta^2}{2\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \sin \theta, \\ v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} \hat{c}_1 \left[\ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{3}{5} \right] + \frac{3\beta^2}{2\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \cos \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \frac{(\alpha^2 - 1)\beta B}{\beta^4 - 1} \frac{1}{b^2};$$

4)

$$\begin{aligned} a_2'' &= \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \cos \eta - \sqrt{3} \alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos \eta - \frac{a^3(b^2 - a^2)}{3a^2b^2}, \\ b_2'' &= \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) (-\sin \eta) - \sqrt{3} \alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \sin \eta, \\ a_0''' &= a_0'' = a_1''' = b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_2''' = b_2''' = 0. \end{aligned}$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(-3\check{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\check{c}_2 - 2\check{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^2 + 4\check{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)), \\ v^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(3\check{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\check{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\check{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \check{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \sin(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \check{c}_1 &= \frac{-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}}{2N}, \quad \check{c}_2 = \left(\frac{-3 + 2\beta^2 + \beta^4}{6N} \right) \beta^{-4}, \\ \check{c}_3 &= \left(\frac{-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}}{6N} \right) \beta^2, \quad \check{c}_4 = \left(\frac{-1 + 2\beta^2 - \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}; \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} a_2''' &= R'\alpha \sin \eta \left[\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right], \\ b_2''' &= R'\alpha \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \cos \eta + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha^3(a^2 - b^2)}{6a^2b^2} 3 \left(\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) + \frac{b^2 - a^2}{2a^2b^2},$$

$$a_0''' = a_0'' = a_1''' = b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_2''' = b_2'' = 0.$$

Тогда получим

$$u^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left(-3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\bar{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\bar{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)),$$

$$v^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left(3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\bar{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \bar{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)),$$
(8)

где

$$\bar{c}_1 = \frac{4 - 4\beta^2}{4N}, \quad \bar{c}_2 = \left(\frac{4\beta^2 - 4\beta^4}{12N} \right) \beta^{-4},$$

$$\bar{c}_3 = \left(\frac{3 - 4\beta^{-2} - 4\beta^{-4}}{12N} \right) \beta^2, \quad \bar{c}_4 = \left(\frac{-1 + \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}.$$

Сумма перемещений (4), (5), (6), (7), (8) даст результирующее перемещение в упругой зоне:

$$u^{(I)e} = - \frac{(\alpha^2 - 1)(\rho^4 - 3\beta^4)(Ab^2 \cos \theta + Ba^2 \sin \theta)}{2\rho^2 a^2 \beta^4 - Eb^2} +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left(-3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\bar{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\bar{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)) +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left(-3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\bar{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\bar{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)) +$$

$$+ \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2)(b^3 + 3\beta^2) \ln \alpha}{\rho(\beta^2 - 1)Ea^2b^2},$$

$$v^{(I)e} = \frac{(\alpha^2 - 1)(11\rho^4 + 3\beta^4)(Ab^2 \sin \theta - Ba^2 \cos \theta)}{2\rho^2 a^2 (\beta^4 - 1)Eb^2} +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left(3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\bar{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \bar{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)) +$$

$$+ \frac{\beta}{E} \left(3\bar{c}_1 \frac{\rho}{\beta} + 3\bar{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\bar{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \bar{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta)). \quad (9)$$

Ассоциированный закон течения в пластической зоне:

$$\varepsilon_p^p = \frac{de_p^p}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\rho} = \lambda \left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} - R' \cos(2\theta + \eta) \right),$$

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{de_\theta^p}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta} = \lambda \left(-\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} + R' \cos(2\theta + \eta) \right),$$
(10)

$$\varepsilon_{p\theta}^p = \frac{de_{p\theta}^p}{dt} = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{p\theta}} = \lambda (\tau_{p\theta} - R' \cos(2\theta + \eta)),$$

где ε_{ij}^p — компоненты скоростей деформации; e_{ij}^p — компоненты деформации. В соответствии (10) имеем [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_p^p + \varepsilon_\theta^p &= 0, \\ (\varepsilon_p^p - \varepsilon_\theta^p)\tau_{\rho\theta}^p - \delta R' \cos(2\theta + \eta) &= \varepsilon_{\rho\theta}^p ((\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) - 2\delta R' \cos(2\theta + \eta)). \end{aligned} \quad (11)$$

Составляющие напряжений в каждой точке пластической зоны являются фиксированными. Вследствие этого, когда даны малые деформации, соотношения (11) могут быть проинтегрированы по времени. После этого (11) примет вид

$$\begin{aligned} e_\rho^p + e_\theta^p &= 0, \\ (e_p^p - e_\theta^p) \left(\tau_{\rho\theta}^p - \delta R' \cos(2\theta + \eta) \right) &= \varepsilon_{\rho\theta}^p (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) - 2\delta R' \cos(2\theta + \eta). \end{aligned} \quad (12)$$

Соотношения Коши имеют вид

$$e_p^p = \frac{\partial u^p}{\partial \rho}, \quad e_\theta^p = \frac{u^p}{\rho} + \frac{\partial v^p}{\partial \theta}, \quad e_{\rho\theta}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^p}{\partial \rho} - \frac{v^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^p}{\partial \theta} \right). \quad (13)$$

В нулевом приближении (12) примет вид

$$\begin{aligned} e_\rho^{(0)p} + e_\theta^{(0)p} &= 0, \\ (e_\rho^{(0)p} - e_\theta^{(0)p}) \tau_{\rho\theta}^{(0)p} &= e_{\rho\theta}^{(0)p} (\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}). \end{aligned} \quad (14)$$

В исходном нулевом состоянии осесимметрическое состояние трубы задано соотношениями:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)p} = v^{(0)p} = e_{\rho\theta}^{(0)p} = 0, \quad (15)$$

где $\tau_{\rho\theta}^{(0)p}$ — часть касательного напряжения в нулевом приближении; $v^{(0)p}$ — часть перемещения вдоль θ в нулевом приближении; $e_{\rho\theta}^{(0)p}$ — компонента деформации в нулевом приближении [5].

Из (13) в приближении нулевом имеем:

$$e_p^{(0)p} = \frac{\partial u^{(0)p}}{\partial \rho}, \quad e_\theta^{(0)p} = \frac{u^{(0)p}}{\rho}. \quad (16)$$

Из (13),(16):

$$e_\rho^{(0)p} + e_\theta^{(0)p} = \frac{du^{(0)p}}{d\rho} + \frac{u^{(0)p}}{\rho} = 0, \quad (17)$$

где $u^{(0)p}$ — составляющая перемещений вдоль радиуса ρ . В соответствии с (2) решение уравнения (17) имеет вид

$$u^{(0)p} = \frac{c}{p}, \quad c = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[\left(p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) + 3 \left(p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) \beta^2 \right]. \quad (18)$$

Из (16), (18) имеем:

$$e_p^{(0)p} = \frac{du^{(0)p}}{d\rho} = -\frac{c}{\rho^2}, \quad e_\theta^{(0)p} = \frac{u^{(0)p}}{\rho} = \frac{c}{\rho^2}. \quad (19)$$

Из (12) в первом приближении получим:

$$e_\rho^{(I)p} + e_\theta^{(I)p} = 0, \quad (20)$$

$$(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p})e_{\rho\theta}^{(I)p} = (e_\rho^{(0)p} - e_\theta^{(0)p})(\tau_{\rho\theta}^{(I)p} - R' \sin(2\theta + \eta)). \quad (21)$$

Из (15), (20) справедливо:

$$e_{\rho}^{(I)p} + e_{\theta}^{(I)p} = \frac{\partial u^{(I)p}}{\partial \rho} + \frac{u^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(I)p}}{\partial \theta} = 0. \quad (22)$$

Перепишем (22) в виде

$$e_{\rho\theta}^{(I)p} = \frac{(e_{\rho}^{(0)p} - e_{\theta}^{(0)p})(\tau_{\rho\theta}^{(I)p} - R' \sin(2\theta + \eta))}{\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p}}, \quad (23)$$

где $u^{(I)p}$, $v^{(I)p}$ — части перемещений в первом приближении.

Из (15), (23), а также [1] имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(I)p}}{\partial \rho} - \frac{v^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(I)p}}{\partial \theta} &= \frac{4c}{a^2 b^2 \rho^3} (Ba^2 \cos \theta - Ab^2 \sin \theta)(\alpha^2 - \rho^2) + \\ &+ \frac{2cR'}{\rho^2} \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) \right) - 1 \right\} \sin(2\theta + \eta) + \\ &+ \frac{2c\alpha^3(a^2 - b^2)}{6\rho^3 a^2 b^2} \left[3 \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) \right] \sin(2\theta) + \\ &+ \frac{c}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение несжимаемости (20) определим, предполагая

$$u^{(I)p} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v^{(I)p} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (25)$$

Из (24), (25) получим

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= \frac{4c}{a^2 b^2 \rho} (Ba^2 \cos \theta - Ab^2 \sin \theta)(\alpha^2 - \rho^2) + \\ &+ 2cR' \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) \right) - 1 \right\} \sin(2\theta + \eta) + \\ &+ \frac{c\alpha^3(a^2 - b^2)}{3\rho a^2 b^2} \left[3 \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} \right) \right] \sin(2\theta) + \\ &+ \frac{\rho^2 c}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (26)$$

Сумма решения общего решения уравнения и частного решения неоднородного уравнения даст формулу (26). Частное решение неоднородного уравнения (26):

$$\begin{aligned} \psi_{\text{частн}} &= \frac{c\alpha^2}{\rho} \left(\frac{B}{b^2} \cos \theta - \frac{A}{a^2} \sin \theta \right) + 2c\rho \ln^2 \rho \left(\frac{A}{a^2} \sin \theta - \frac{B}{b^2} \cos \theta \right) + \\ &+ (d_2 \ln \rho + d_1) \rho (\sin \theta - \cos \theta) + \frac{c}{4a^2 b^2} (b^2 - a^2) \rho^2 \sin(2\theta) + \\ &+ \left(\frac{1}{\rho} [S \sin \omega + T \cos \omega] + Q \right) \sin(2\theta + \eta) + \\ &+ \frac{1}{\rho} [S_1 \sin \omega + T_1 \cos \omega] \frac{a^2 - b^2 \alpha^3 \sin(2\theta)}{3a^2 b^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\omega = \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad D = 2cR', \quad S = -\frac{\sqrt{3}\alpha D}{8}, \quad Q = -4, \quad c, d_2, d_1 = \text{const},$$

$$T = -\frac{\alpha D}{8}, \quad D_1 = -\frac{c}{8}, \quad S_1 = \sqrt{3}D_1, \quad T_1 = -3D_1.$$

Из (25), (27) имеем

$$u_{\text{частн}}^{(I)p} = \frac{1}{6\rho^2 b^2 a^2} \left([-12 \cos(2\theta) + \eta a^2 b^2 T - 4T_1 \alpha^3 (a^2 - b^2) \cos(2\theta)] \cos \omega + \right.$$

$$+ [-12 \cos(2\theta) + \eta a^2 b^2 S - 4S_1 \alpha^3 (a^2 - b^2) \cos(2\theta)] \sin \omega -$$

$$- 12 \cos(2\theta) + \eta a^2 b^2 Q \rho + 3c\rho^3 (a^2 - b^2) \cos(2\theta) -$$

$$- 12b^2 \left(-\frac{c\alpha^2 A}{2} + c\rho^2 A \ln^2 \rho + \frac{1}{2}\rho^2 a^2 d_2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 a^2 d_1 \right) \cos \theta -$$

$$\left. - 12a^2 \left(-\frac{c\alpha^2 A}{2} + c\rho^2 B \ln^2 \rho + \frac{1}{2}\rho^2 b^2 d_2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 b^2 d_1 \right) \sin \theta \right),$$

$$v_{\text{частн}}^{(I)p} = \frac{1}{6\rho^2 b^2 a^2} \left([6a^2 b^2 (S\sqrt{3} - T) \sin(2\theta + \eta) - 2\alpha^3 (a^2 - b^2) (\sqrt{3}S_1 - T_1) \sin(2\theta)] \sin \omega - \right.$$

$$- 3c\rho^3 (a^2 - b^2) \sin(2\theta) -$$

$$- 12a^2 \left(c\rho^2 B \ln^2 \rho + 2 \left(cB + \frac{1}{4}d_2 b^2 \right) \rho^2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 b^2 (d_1 + d_2) - \frac{1}{2}c\alpha^2 B \right) \cos \theta +$$

$$\left. + 12b^2 \left(c\rho^2 A \ln^2 \rho + 2 \left(cA + \frac{1}{4}d_2 a^2 \right) \rho^2 \ln \rho + \frac{1}{2}\rho^2 a^2 (d_1 + d_2) - \frac{1}{2}c\alpha^2 A \right) \sin \theta \right). \quad (28)$$

Согласно (28) компоненты перемещений в пластической области, соответствующие решению однородного уравнения (32), имеют вид

$$u_{\text{одн}}^{(I)p} = \frac{c_{00}}{\rho} - \check{c}_{11} + \check{c}_{12} \ln \rho \cos \theta - \bar{c}_{11} + \bar{c}_{11} \ln \rho \sin \theta -$$

$$- 2 \left[c_{11} \cos \sqrt{3} \ln \rho + c_{12} \sin \sqrt{3} \ln \rho \right] \sin(2\theta) - \left[c_{21} \cos \sqrt{3} \ln \rho + c_{22} \sin \sqrt{3} \ln \rho \right] \cos(2\theta),$$

$$v_{\text{одн}}^{(I)p} = \check{c}_{11} + \check{c}_{12} \ln \rho \sin \theta + \bar{c}_{11} + \bar{c}_{11} \ln \rho \cos \theta +$$

$$+ \left[c_{11} \sin \sqrt{3} \ln \rho - \sqrt{3} \sin \sqrt{3} \ln \rho + c_{12} \sin \sqrt{3} \ln \rho - \sqrt{3} \cos \sqrt{3} \ln \rho \right] \sin(2\theta) +$$

$$+ \left[c_{21} \cos \sqrt{3} \ln \rho - \sqrt{3} \sin \sqrt{3} \ln \rho + c_{12} \sin \sqrt{3} \ln \rho - \sqrt{3} \cos \sqrt{3} \ln \rho \right] \cos(2\theta). \quad (29)$$

На упругопластической границе имеют место условия сопряжения [6]

$$u^{(I)p} = u^{(I)e}, \quad v^{(I)p} = v^{(I)e} \quad \text{при } \rho = 1. \quad (30)$$

Из (9), (28)–(30) имеем

$$\begin{aligned}\check{c}_{11} &= \frac{0,5(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2E + 2c\alpha^2E\beta^4 - 1 + \alpha^2A + 0,5 \cdot 2Ea^2d_1 - 2Ea^2d_1\beta^4)}{a^2(\beta^4 - 1)E}, \\ \check{c}_{12} &= \frac{-3(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2E + 2c\alpha^2E\beta^4 + 5 - 5\alpha^2A - Ea^2d_2 - Ea^2d_1\beta^4)}{a^2(\beta^4 - 1)E}, \\ \check{\bar{c}}_{11} &= \frac{0,5(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2E + 2c\alpha^2E\beta^4 - 1 + \alpha^2A + 0,5 \cdot 2Ea^2d_1 - 2Ea^2d_1\beta^4)}{b^2(\beta^4 - 1)E}, \\ \check{\bar{c}}_{12} &= \frac{-(6\alpha^2 - 6)B - (2Eb^2d_1 - d_2b^2E\beta^4 - 2Eb^2d_1\beta^4 + d_2b^2E)}{b^2(\beta^4 - 1)E};\end{aligned}\tag{31}$$

$$c_{21} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5,\tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{\left(a^4b^4S \cos \mu + \frac{1}{3}\alpha^3S_1a^2 - b^2\right) \sin \sqrt{3} \ln \alpha}{a^2b^2}, \\ A_2 &= \frac{-a(T_1(a^2 - b^2) + 3b^4Ta \cos \mu) \cos \sqrt{3} \ln \alpha}{3b^2}, \\ A_3 &= \frac{b_2'''(3\beta^6\bar{c}_2 + 4\beta^4\bar{c}_4 - 3\beta^2\bar{c}_1 - 2\bar{c}_3)}{2\beta^2E}, \\ A_4 &= \frac{a_2''(-3\beta^6c_2 - 4\beta^4c_4 - 3\beta^2c_1 - 2c_3)}{2\beta^2E}, \\ A_5 &= \frac{-(4a^4b^4Q \cos \mu + c(b^2 - a^2))}{4a^2b^2}; \\ c_{22} &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 + B_9,\end{aligned}\tag{33}$$

где

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{\sqrt{3}aT_1(a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)}{9b^2}, \quad B_2 = \frac{\sqrt{3}\alpha^3S_1(b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)}{9a^2b^2}, \\ B_3 &= \frac{\sqrt{3}T \left([a^2b^2 \cos \eta - \sin \eta] \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - [\sqrt{3} \sin \eta] \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)}{3}, \\ B_4 &= \frac{\sqrt{3}S \left(- [a^2b^2 \cos \eta + \sin \eta] \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - [\sqrt{3} \sin \eta] \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)}{3}, \\ B_5 &= \frac{-\sqrt{3}b_2''(3\beta^6\bar{c}_2 + 4\beta^4\bar{c}_4 - 3\bar{c}_1 - 2\bar{c}_3)}{6\beta^2E}, \quad B_6 = \frac{\sqrt{3}b_2''(-3\beta^6\bar{c}_2 + \beta^4\bar{c}_4 - 3\bar{c}_1\beta^2 - 7\bar{c}_3)}{3\beta^2E}, \\ B_7 &= \frac{-\sqrt{3}a_2''' \left(-7\bar{c}_3 - 3\bar{c}_1\beta^2 + \bar{c}_4\beta^4c_2\frac{1}{\beta^3} - 3\beta^3 \right)}{3\beta^2Ec_2\frac{1}{\beta^3}}, \\ B_8 &= \frac{-\sqrt{3}a_2''(-3c_2\beta^6 - 4c_4\beta^4 + 2c_3 + 3c_1\beta^2)}{6\beta^2E}, \quad B_9 = \frac{\sqrt{3}(4a^4b^4Q \cos \eta + cb^2 - a^2)}{12a^2b^2}; \\ c_{11} &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5,\end{aligned}\tag{34}$$

где

$$Z_1 = a^2b^2 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)T \sin \eta, \quad Z_2 = -a^2b^2 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)S \sin \eta,$$

$$Z_3 = \frac{0,5b_2''(-4c_4\beta^4 - 3c_2\beta^6 + 3c_1\beta^2 + 2c_3)}{\beta^2 E},$$

$$Z_4 = \frac{0,5(a_2'''(4\bar{c}_4\beta^4 + 3\bar{c}_2\beta^6 - 3\bar{c}_1\beta^2 - 2\bar{c}_3))}{\beta^2 E}, \quad Z_5 = a^2 b^2 Q \sin \eta;$$

$$c_{12} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7, \quad (35)$$

где

$$L_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}T \left((\cos \eta + a^2 b^2 \sin \eta) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \cos \eta \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right),$$

$$L_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}S \left((\cos \eta - a^2 b^2 \sin \eta) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \cos \eta \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right),$$

$$L_3 = \frac{0,1924T_1\alpha^3 \left((a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3}(a^2 - b^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)}{a^2 b^2},$$

$$L_4 = \frac{-0,333S_1\alpha^3 \left((a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 0,577(a^2 - b^2) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)}{a^2 b^2},$$

$$L_5 = \frac{\sqrt{3}\bar{c}_2 b_2''' \beta^4}{E} - \frac{0,577\bar{c}_4 b_2''' \beta^2}{E} + \frac{1,73\bar{c}_1 b_2'''}{E} + \frac{4,04\bar{c}_3 b_2'''}{E\beta^2},$$

$$L_6 = \frac{0,866c_2 b_2'' \beta^4}{E} + \frac{1,154c_4 b_2'' \beta^2}{E} - \frac{0,866c_1 b_2''}{E} - \frac{0,577c_3 b_2''}{E\beta^2},$$

$$L_7 = -\frac{0,866\bar{c}_2 b_2''' \beta^4}{E} - \frac{1,154\bar{c}_4 b_2''' \beta^2}{E} + \frac{0,866\bar{c}_1 b_2'''}{E} + \frac{0,577\bar{c}_3 b_2'''}{E\beta^2},$$

$$L_8 = \frac{1,732c_2 a_2'' \beta^4}{E} - \frac{0,577c_4 a_2'' \beta^2}{E} + \frac{1,732c_1 a_2''}{E} + \frac{4,04c_3 a_2''}{E\beta^2},$$

$$L_9 = -0,577a^2 b^2 Q \sin \eta + 0,2886c \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$c_{11} = \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2)(\rho^3 + 3\beta^2) \ln \alpha}{(\beta^2 - 1)E a^2 b^2}. \quad (36)$$

Согласно (9), (28)–(36) компоненты перемещений в первом приближении определены.

Таким образом, было рассмотрено деформированное состояние неоднородной трубы, являющейся в то же время анизотропной. В будущем данный класс задач можно расширить, принимая во внимания различные условия пластичности, неоднородности и анизотропии. Результаты расчётов имеет большое прикладное значение, в том числе и для военной отрасли.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Никитин А. В., Тихонов С. В. Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давлений при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4(80).
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Миронов Б. Г., Никитин А. В. Об определении предельного состояния неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2019. № 2(40). С. 24–27.
- [4] Никитин А. В. Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 60–70.
- [5] Никитин А. В. Упругопластическое состояние нелинейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии // Сб. ст. по мат. XVII междунар. науч.-практ. конф. «Естественные и математические науки в современном мире». 2014. С. 31–44.
- [6] Ивлев Д. Д. Об анизотропии пластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2(66). С. 64–68.

B. G. Mironov¹, A. V. Nikitin²

**ON THE QUESTION OF DETERMINING THE DEFORMED STATE
OF AN ANISOTROPIC NONLINEAR INHOMOGENEOUS PIPE**

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia*

Abstract. The deformed state of an anisotropic nonlinear inhomogeneous pipe is considered. Let us take the material inhomogeneity as the dependence of the yield stress on coordinates. For material heterogeneity are capable of influencing factors such as: shock effects, temperature, radiation exposure and others. Along the elliptical curves, the yield stress is assumed to be constant. Results taking into account the effect of anisotropy on stress-strain state of various structures and physicality in demand in the modern world.

Keywords: inhomogeneity, pipe, anisotropy, deformed state.

REFERENCES

- [1] Nikitin A. V., Tikhonov S. V. Influence of nonlinear inhomogeneity of the material on the elastic-plastic state of a thick-walled pipe under the influence of internal pressure under translational anisotropy // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. 2013. no. 4(80). (In Russian).
- [2] Ivlev D. D., Yershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (In Russian).
- [3] Mironov B. G., Nikitin A. V. On determining the limit state of an inhomogeneous pipe under the action of internal pressure // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. 2019. no. 2(40). P. 24–27. (In Russian).
- [4] Nikitin A. V. Limit state of an inhomogeneous pipe under the action of internal pressure // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2015. no. 1(23). P. 60–70. (In Russian).
- [5] Nikitin A. V. Elastic-plastic state of a nonlinear inhomogeneous pipe under translational anisotropy // Collection of articles based on the materials of the XVII int. scientific and practical conf. “Natural and Mathematical Sciences in the modern world”. 2014. P. 31–44. (In Russian).
- [6] Ivlev D. D. On the anisotropy of plastic bodies // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. 2010. no. 2(66). P. 64–68. (In Russian).

Mironov Boris Gurjevich, Dr. of Sci. Phys. & Math., Professor, Department Chair, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Nikitin Andrej Vitaljevich, Candidate of Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.

М. Ю. Соколова, Ю. В. Астапов

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЕ ГЕНКИ-МУРНАГАНА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассмотрены динамические методы идентификации модели нелинейно упругого деформируемого тела. По эффективным фазовым скоростям продольных и поперечных волн, распространяющихся вдоль и поперек оси сжимаемого стержня, возможно определить пять констант упругости второго и третьего порядков, входящих в соотношения модели. В статье получены расчетные формулы и приведен пример определения зависимости фазовых скоростей для полиамида 6.

Ключевые слова: конечные деформации, тензор Генки, модель Генки-Мурнагана, однородное сжатие, акустические волны, идентификация соотношений.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.26.33.011

УДК: 539.3

Введение. Нелинейные упругие модели деформируемых твердых тел получили широкое распространение как в сфере фундаментальных исследований [1, 2], так и в области их приложений к решению задач механики эластомеров, биомеханики, механики грунтов [3]. Как известно [1], такие модели могут учитывать как геометрическую нелинейность путем использования различных мер конечных деформаций, так и «физическую» нелинейность поведения реальных материалов, когда закон связи между напряжениями и деформациями отличается от линейного (квазилинейного). Наиболее актуальными являются модели, в которых учитываются оба типа нелинейности [1, 2], часто имеющие один порядок относительно градиента перемещений.

Для изотропного материала линейная упругость описывается с помощью двух констант материала. В случае нелинейной связи между напряжениями и деформациями

© Соколова М. Ю., Астапов Ю. В., 2020

Соколова Марина Юрьевна

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Астапов Юрий Владимирович

e-mail: ast3x3@gmail.com,

аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1) и РФФИ (проект № 18-31-20053)

Поступила 25.06.2020

количество материальных констант для изотропного материала может увеличиваться. Например, известная модель Мурнагана [4] содержит пять констант упругости: две второго порядка и три третьего порядка. Возникает вопрос о достоверном экспериментальном определении этих констант нелинейной упругости. Методы определения констант можно разделить на статические (квазистатические) и динамические. К статическим экспериментам относят макромеханические эксперименты по однородному деформированию специальным образом подготовленных образцов (растяжение, сжатие, изгиб, кручение цилиндрических, призматических или плоских образцов). Преимущество таких экспериментов заключается в доступности требуемого оборудования и отработанности методики их проведения. Существенным недостатком этих экспериментов является невозможность достижения в таких опытах больших деформаций из-за потери ими устойчивости или появления неоднородности напряженно-деформированного состояния.

Макромеханические эксперименты могут проводиться при создании в образцах заведомо неоднородного напряженно-деформированного состояния, например, при кручении сплошных цилиндров [2, 5] или индентировании [6, 7]. Опыты по индентированию получили в последнее время широкое распространение благодаря относительной простоте постановки эксперимента и возможности осуществления опытов с образцами, обладающими малым представительным объемом. В таких опытах большие деформации достигаются без потери устойчивости, однако обработка этих экспериментов предполагает построение сложной математической модели процесса (часто численной) и решение обратных задач [6, 7].

К динамическим методам определения постоянных упругости относятся эксперименты, связанные с прохождением через образец из рассматриваемого материала звуковых волн. Такой подход хорошо известен и широко применяется [8-13], в том числе и для определения свойств горных пород [3].

В настоящей работе рассматривается вопрос о распространении акустических волн в нелинейно упругой среде, описываемой соотношениями модели Генки-Мурнагана, предложенными в работах [6, 7, 14]. Предлагается программа экспериментов для определения констант этой модели по скоростям распространения продольных и поперечных волн в предварительно деформированном образце. Будет проведен сравнительный анализ скоростей распространения звуковых волн в полиамиде 6 (Ertalon), полученных вычислениями в рамках моделей Генки-Мурнагана и Мурнагана, с данными экспериментов [13].

Основные соотношения модели Генки-Мурнагана. Одной из наиболее широко используемой моделью нелинейно упругого материала является модель Мурнагана [4], в которой постулировано существование упругого потенциала, в качестве которого используется удельная элементарная потенциальная энергия деформаций. В терминах тензора деформаций Коши-Грина ϵ выражение для удельной потенциальной энергии деформаций для модели Мурнагана имеет вид [15, 16]

$$W = \frac{1}{2} \lambda J_1^2(\epsilon) + G J_2(\epsilon) + \frac{1}{6} (\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3) J_1^3(\epsilon) - 2(\nu_2 + 2\nu_3) J_1(\epsilon) J_2(\epsilon) + 4\nu_3 J_3(\epsilon), \quad (1)$$

где λ , G – константы упругости Ламе, ν_1, ν_2, ν_3 – константы упругости третьего порядка, $J_1(\epsilon)$, $J_2(\epsilon)$, $J_3(\epsilon)$ – алгебраические инварианты тензора деформаций Коши-Грина.

Если обозначить $\nu_1/2 + \nu_2 = l$, $\nu_2 + 2\nu_3 = m$, $4\nu_3 = n$, то выражение (1) принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\lambda J_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + GJ_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{3}(l + 2m)J_1^3(\boldsymbol{\varepsilon}) - 2mJ_1(\boldsymbol{\varepsilon})J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + nJ_3(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

где l , m , n – константы Мурнагана.

В работах [6, 7, 14] была предложена модель нелинейно упругого материала, названная моделью Генки-Мурнагана, в которой удельная потенциальная энергия деформаций записывается через инварианты тензора логарифмических деформаций Генки $\boldsymbol{\Gamma}$ в виде, аналогичном (1)

$$W = \frac{1}{2}\lambda J_1^2(\boldsymbol{\Gamma}) + GJ_2(\boldsymbol{\Gamma}) + \frac{1}{6}(\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)J_1^3(\boldsymbol{\Gamma}) - 2(\nu_2 + 2\nu_3)J_1(\boldsymbol{\Gamma})J_2(\boldsymbol{\Gamma}) + 4\nu_3J_3(\boldsymbol{\Gamma}), \quad (2)$$

где $J_1(\boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{E}$, $J_2(\boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma}$, $J_3(\boldsymbol{\Gamma}) = \det \boldsymbol{\Gamma}$ – алгебраические инварианты тензора деформаций Генки.

В рассматриваемых моделях рассматриваются тензоры напряжений: \mathbf{T} , второй тензор Пиолы-Кирхгоффа, и $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^{-1}$, обобщенный «повернутый» тензор напряжений, связанные с тензором истинных напряжений Коши \mathbf{S} . Тензоры \mathbf{T} и $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}}$ являются энергетически сопряженными с тензорами деформаций Коши-Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$ и Генки $\boldsymbol{\Gamma}$ соответственно. Для гиперупругих материалов эти тензоры определяются по выражениям (1) и (2):

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}. \quad (3)$$

В работах [1, 6, 7, 14] было показано, что выражения (1) и (2) формально могут быть записаны в виде:

$$W = \frac{1}{2}\mathbf{N} \cdots \cdots \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{6}\mathbf{L} \cdots \cdots \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad W = \frac{1}{2}\mathbf{N} \cdots \cdots \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} + \frac{1}{6}\mathbf{L} \cdots \cdots \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma}, \quad (4)$$

где тензоры четвертого ранга \mathbf{N} и шестого ранга \mathbf{L} имеют компоненты (в ортонормированном базисе \mathbf{e}_i), выражающиеся через упругие постоянные второго и третьего порядков соответственно:

$$\begin{aligned} N_{1111} &= N_{2222} = N_{3333} = \lambda + 2G, \\ N_{1122} &= N_{3311} = N_{2233} = \lambda, N_{1212} = N_{3131} = N_{2323} = 2G; \\ L_{111111} &= L_{222222} = L_{333333} = \nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3, \\ L_{112222} &= L_{111122} = L_{113333} = L_{111133} = L_{222233} = L_{223333} = \nu_1 + 2\nu_2, \\ L_{111212} &= L_{221212} = L_{332323} = L_{333131} = L_{113131} = L_{222323} = \nu_2 + 2\nu_3, \\ L_{232311} &= L_{313122} = L_{121233} = \nu_2, L_{233112} = L_{123123} = L_{122331} = \nu_3, \\ L_{112233} &= \nu_1 \text{ (остальные нули)}. \end{aligned}$$

В работе [17] было предложено тензоры \mathbf{N} и \mathbf{L} представлять разложениями по базисным тензорам $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ и $\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}$, где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5$, построенным по тензорам канонического базиса А.А. Ильюшина:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2), \\
\mathbf{I}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \\
\mathbf{I}^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3); \\
\mathbf{I}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha), \\
\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{6}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha).
\end{aligned} \tag{5}$$

Такие представления для изотропного материала имеют вид:

$$\mathbf{N} = 3K\mathbf{I}^{00} + 2G(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}), \tag{6}$$

где $K = \lambda + 2G/3$ и G – модуль объемной упругости и модуль сдвига соответственно;

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= C_1\mathbf{I}^{000} + C_2(\mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}) + \\
&+ C_3\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{I}^{111} - \frac{6}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + \frac{3}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + \frac{3}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244} + 2\mathbf{I}^{345})\right),
\end{aligned} \tag{7}$$

а выражение для удельной потенциальной энергии деформаций в соответствии с (4) может быть представлено через естественные инварианты тензора Генки в виде:

$$W = \frac{1}{2}K\theta^2 + Ge^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{C_1}{3\sqrt{3}}\theta^3 + \frac{C_2}{\sqrt{3}}\theta e^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}C_3e^3 \cos 3\gamma\right), \tag{8}$$

где естественные инварианты $\theta = \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}$ – относительное изменение объема, $e^2 = \tilde{\mathbf{\Gamma}} \cdot \tilde{\mathbf{\Gamma}}$ – интенсивность формоизменения, и угол вида деформированного состояния γ , который определяется из соотношения $|\tilde{\mathbf{\Gamma}}| = \frac{1}{3\sqrt{6}}e^3 \cos 3\gamma$, $\tilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{E}$ – девиатор тензора Генки.

Константы, входящие в соотношения (6)-(8), связаны с константами упругости третьего порядка ν_1, ν_2, ν_3 и константами Мурнагана l, m, n соотношениями:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 3\sqrt{3}\nu_1 + 6\sqrt{3}\nu_2 + 8\nu_3/\sqrt{3} = 6\sqrt{3}l + 2n/\sqrt{3}, \\
C_2 &= 6\sqrt{3}\nu_2 + 8\sqrt{3}\nu_3 = 6\sqrt{3}m - \sqrt{3}n, \quad C_3 = 4\nu_3 = n.
\end{aligned} \tag{9}$$

Связь между тензорами напряжений и деформаций получим, используя соотношения (3) и (4):

$$\mathbf{\Sigma}_R = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{\Gamma}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Gamma} + \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{\Gamma}. \tag{10}$$

Соотношение (10) с учетом разложений (6) и (7) может быть представлено в виде

$$\mathbf{\Sigma}_R = \sigma_0\mathbf{E} + \tau_e\tilde{\mathbf{\Gamma}} + \tau_q\tilde{\mathbf{Q}}, \tag{11}$$

где σ_0, τ_e, τ_q – материальные функции: $\sigma_0 = K\theta + \frac{C_1}{6\sqrt{3}}\theta^2 + \frac{C_2}{6\sqrt{3}}e^2$, $\tau_e = 2G + \frac{C_2}{3\sqrt{3}}\theta$, $\tau_q = C_3$. Тензор $\tilde{\mathbf{Q}}$ определяется как девиатор тензора $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^2$.

Идентификация модели (11) состоит в определении входящих в эти соотношения констант материала K, G и C_1, C_2, C_3 . В отличие от работ [6, 7], предлагается для этого использовать динамический метод, предварительно установив связь между скоростями распространения упругих волн и упругими константами.

Уравнение распространения звуковых волн в нелинейно упругом теле. Общие принципы решения задачи о распространении волн в нелинейно упругих телах заложены в работах [1, 18-20]. Эта задача решается в рамках теории наложения

малых деформаций на первоначальные большие деформации [18, 19]. В работе [20] распространение волн рассматривается в рамках теории многократного наложения больших деформаций. В работе [3] отмечается, что опыт применения динамического метода к определению упругих постоянных грунтов показывает, что наиболее достоверные результаты решения задачи о распространении упругих волн получаются «в случаях использования теории больших начальных деформаций и учета изменения расстояния в формах упругих колебаний». В связи с этим при выводе уравнения распространения волн в нелинейно упругой среде будем исходить из того, что среда до возникновения в ней волнового поля подвержена конечным деформациям, которые моделируются соотношениями модели Генки-Мурнагана.

Будем считать, что в нелинейно упругом образце в начальный момент времени t_0 отсутствуют деформации и напряжения, а к моменту времени t_1 создано однородное напряженно-деформированное состояние, которому соответствует поле перемещений $u^{(1)}(\mathbf{x}, t_1)$, конечные деформации $\mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{x}, t_1)$ и поле напряжений $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}^{(1)}(\mathbf{x}, t_1)$, вычисляемых по соотношениям (10). Будем рассматривать процессы деформаций, в которых главные оси тензора Генки совпадают с одними и теми же материальными волокнами, тогда тензор напряжений $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}}$ связан с тензором истинных напряжений соотношением $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{S} = \frac{\rho_0}{\rho} \mathbf{S}$, поэтому тензор истинных напряжений

$$\mathbf{S}^{(1)} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(1)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} \right). \quad (12)$$

Переход от момента времени t_0 к моменту t_1 считаем квазистатическим, так что напряжения $\mathbf{S}^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям равновесия $\nabla \cdot \mathbf{S}^{(1)} = \rho \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} = 0$.

В момент времени t_1 в образце возбуждается плоская звуковая волна с полем перемещений

$$\mathbf{u}^{(2)} = A \mathbf{p} e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)}, \quad (13)$$

где A – амплитуда, \mathbf{p} , $|\mathbf{p}| = 1$, – вектор поляризации, l – длина волны, c – фазовая скорость волны, \mathbf{n} , $|\mathbf{n}| = 1$ – волновая нормаль.

В момент времени $t > t_1$ поле перемещений определяется выражением

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t_1) + \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t),$$

поле деформаций

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{x}, t_1) + \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{x}, t). \quad (14)$$

Считаем, что деформации, определяемые полем перемещений (12), малы, так что

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{u}^{(2)} \nabla \right). \quad (15)$$

При $t > t_1$ поле напряжений определяется в соответствии с (12) и (14)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{\rho}{\rho_0} \left(\mathbf{N} \cdot \cdot (\mathbf{\Gamma}^{(1)} + \mathbf{\Gamma}^{(2)}) + \frac{1}{2} (\mathbf{\Gamma}^{(1)} + \mathbf{\Gamma}^{(2)}) \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot (\mathbf{\Gamma}^{(1)} + \mathbf{\Gamma}^{(2)}) \right) = \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} \left(\mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(1)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} + \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(1)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} \right). \end{aligned}$$

В последнем выражении первые два слагаемых совпадают с (12), четвертое и пятое слагаемые равны в силу внутренней симметрии тензора \mathbf{L} , а шестое слагаемое имеет

более высокий порядок малости по сравнению с $\nabla \mathbf{u}^{(2)}$, и им можно пренебречь. В соответствии с этим напряжения определяются выражением

$$\mathbf{S} = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{S}^{(1)} + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)}, \quad (16)$$

где $\mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) = \mathbf{N} + \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)} = \frac{\partial \Sigma_{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{\Gamma}}$ – обобщенный тензор жесткости, и ρ , ρ_0 – плотность материала в моменты времени t и t_0 соответственно.

Используя представление тензора \mathbf{N} в виде (6) и \mathbf{L} в виде (7), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) = & 3K\mathbf{I}^{00} + 2G \left(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55} \right) + C_1 \varepsilon_0 \mathbf{I}^{00} + \\ & + \frac{C_2}{3} \left(\mathbf{I}^0 \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{(1)} \mathbf{I}^0 + \varepsilon_0 \left(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55} \right) \right) + \\ & + C_3 \left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{6}} \left(2\mathbf{I}^{11} - 2\mathbf{I}^{22} - 2\mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55} \right) + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{I}^{55} - \mathbf{I}^{44} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{6}} \left(-2\varepsilon_2 \mathbf{I}^{12} - 2\varepsilon_3 \mathbf{I}^{13} + \varepsilon_4 \mathbf{I}^{14} + \varepsilon_5 \mathbf{I}^{15} \right) + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(-\varepsilon_4 \mathbf{I}^{24} + \varepsilon_5 \mathbf{I}^{25} + \varepsilon_3 \mathbf{I}^{45} + \varepsilon_4 \mathbf{I}^{35} + \varepsilon_5 \mathbf{I}^{34} \right) \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где обозначено $\varepsilon_\alpha = \mathbf{I}^\alpha \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(1)}$, $\alpha = 0..5$.

Запишем уравнения движения при отсутствии массовых сил: $\nabla \cdot \mathbf{S} = \rho \left(\ddot{\mathbf{u}}^{(1)} + \ddot{\mathbf{u}}^{(2)} \right)$ и после подстановки соотношений (16) получим

$$\nabla \cdot \mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^{(2)}, \quad (18)$$

поскольку $\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\rho}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{S}^{(1)} + \frac{\rho}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{C} \left(\mathbf{\Gamma}^{(1)} \right) \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)}$ и $\nabla \cdot \mathbf{S}^{(1)} = \rho \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} = 0$.

В силу принятого допущения (15) о малости деформаций, появляющихся вследствие прохождения звуковой волны, найдем выражение для $\mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{x}, t)$, исходя из представления для перемещений (13):

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\pi i}{l} A e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} (\mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{p}). \quad (19)$$

Вычислим дивергенцию в левой части (18). Легко показать, что в силу внутренней симметрии тензора обобщенной жесткости $\nabla \cdot (\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)}) = \nabla \cdot (\mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{C}) = \nabla \mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{C}$, тогда уравнения движения преобразуются к виду $\nabla \mathbf{\Gamma}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{C} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}$, причем, исходя из (19), $\nabla \mathbf{\Gamma}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi i}{l} \right)^2 A e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \mathbf{n} (\mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{p})$. Вычислим свертку $\frac{1}{2} \mathbf{n} (\mathbf{p}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{p}) \cdot \cdot \mathbf{C} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})$, тогда левая часть уравнений движения (18) может быть представлена в виде $\left(\frac{2\pi i}{l} \right)^2 A e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})$. Учитывая, что $\ddot{\mathbf{u}}^{(2)} = c^2 \left(\frac{2\pi i}{l} \right)^2 A e^{\frac{2\pi i}{l}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \mathbf{p}$, запишем уравнение (18) в виде

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) = \rho_0 c^2 \mathbf{p}. \quad (20)$$

Обозначим $\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{A}^{(\mathbf{n})}$. Тензор $\mathbf{A}^{(\mathbf{n})}$ называют акустическим тензором. В соответствии с представлением (17) для тензора обобщенной жесткости выпишем выражения для компонент акустического тензора, определенных в главных осях тензора деформаций $\mathbf{\Gamma}^{(1)} = \Gamma_i^{(1)} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$, где $\Gamma_i^{(1)}$ – главные значения тензора Генки:

$$\begin{aligned}
A_{ii}^{(n)} &= \left(K + \frac{4}{3}G + C_1 \frac{\theta}{3\sqrt{3}} + C_2 \frac{2\Gamma_i^{(1)}}{3\sqrt{3}} + C_3 \frac{2\tilde{\Gamma}_i^{(1)}}{3} \right) n_i^2 + \\
&+ \left(G + C_2 \frac{\theta}{6\sqrt{3}} - C_3 \frac{\tilde{\Gamma}_k^{(1)}}{2} \right) n_j^2 + \left(G + C_2 \frac{\theta}{6\sqrt{3}} - C_3 \frac{\tilde{\Gamma}_j^{(1)}}{2} \right) n_k^2; \\
A_{ij}^{(n)} = A_{ji}^{(n)} &= \left(K + \frac{G}{3} + C_1 \frac{\theta}{3\sqrt{3}} + C_2 \frac{\Gamma_i + \Gamma_j - \Gamma_k}{6\sqrt{3}} + C_3 \frac{\tilde{\Gamma}_k}{6} \right) n_i n_j.
\end{aligned} \tag{21}$$

В формулах (21) все компоненты тензора $\mathbf{A}^{(n)}$ получаются путем круговой перестановки индексов $i, j, k = 1, 2, 3$. Отметим также, что тензор $\mathbf{A}^{(n)}$ зависит не только от материальных констант K, G, C_1, C_2, C_3 , предварительных деформаций $\Gamma_i^{(1)}$, но и направления распространения волны, задающегося вектором волновой нормали $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$.

Уравнение распространения волны получим из (20) в виде, совпадающем по форме с соотношением, приведенным в [1]:

$$\mathbf{A}^{(n)} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}. \tag{22}$$

Из уравнения (22) следует, что вектор поляризации звуковой волны является собственным вектором, а $\rho_0 c^2$ – собственным значением акустического тензора $\mathbf{A}^{(n)}$. Для определения фазовых скоростей распространения волн следует задать тензор предварительных деформаций $\Gamma^{(1)}$ и направление волнового вектора, вычислить компоненты акустического тензора (21), и решить задачу об определении его собственных значений. Найденные фазовые скорости будут выражены через константы модели. Выбирая различные предварительные состояния и различные направления распространения волн, можно получить достаточное количество соотношений для определения констант.

Главные волны. В [1] главными волнами названы упругие волны, волновая нормаль которых совпадает с одной из главных осей тензора напряжений (деформаций). В этом случае вычисление фазовых скоростей значительно упрощается. Рассмотрим два частных случая предварительного деформирования: чисто объемное сжатие и растяжение-сжатие в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. В первом из этих случаев в качестве главных осей тензора деформаций может быть взята любая ортонормированная тройка векторов, а во втором – векторы, в направлении которых производится растяжение и сжатие, и вектор, им перпендикулярный.

Пусть предварительным напряженно-деформированным состоянием образца является чисто объемное деформирование. В этом случае все три главных значения тензора деформаций равны $\Gamma_i^{(1)} = \Gamma$, а объемная деформация $\theta = 3\Gamma$. Если волновая нормаль совпадает с одним из базисных векторов, например $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, ненулевыми оказываются только диагональные компоненты акустического тензора (21). Задача об определении его собственных значений решается тривиально. Тогда фазовые скорости звуковых волн определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned}
&\text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_1, \quad \rho_0 c_{(1)}^2 = K + \frac{4G}{3} + (3C_1 + 2C_2) \frac{\Gamma}{3\sqrt{3}}, \\
&\text{для поперечных волн } \left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{(2)} &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_{(3)} &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\}, \quad \rho_0 c_{(2)}^2 = \rho_0 c_{(3)}^2 = G + C_2 \frac{\Gamma}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned} \right\} \tag{23}$$

Измерения скоростей распространения волн при таком предварительном деформировании не позволят определить все константы модели, так как соотношения (23) не содержат константу C_3 .

Рассмотрим в качестве предварительного деформированного состояния двухосное растяжение-сжатие. При таком предварительном состоянии тензор деформаций в главных осях имеет представление $\Gamma^{(1)} = \Gamma(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)$, объемная деформация $\theta = 0$. Если волна распространяется вдоль первого главного направления, т.е. нормальный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, то фазовые скорости распространения

$$\left. \begin{array}{l} \text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_1, \\ \text{для поперечных волн } \left. \begin{array}{l} \mathbf{p}_{(2)} = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{e}_3 \end{array} \right\}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho_0 c_{(1)}^2 = K + \frac{4G}{3} + (C_2 + \sqrt{3}C_3)\frac{2\Gamma}{3\sqrt{3}}, \\ \rho_0 c_{(2)}^2 = G, \\ \rho_0 c_{(3)}^2 = G + 0,5C_3\Gamma. \end{array} \quad (24)$$

Если волновая нормаль направлена вдоль второго главного направления, т.е. $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, то скорости распространения волн определяются

$$\left. \begin{array}{l} \text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_2, \\ \text{для поперечных волн } \left. \begin{array}{l} \mathbf{p}_{(2)} = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{e}_3 \end{array} \right\}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho_0 c_{(1)}^2 = K + \frac{4G}{3} - (C_2 + \sqrt{3}C_3)\frac{2\Gamma}{3\sqrt{3}}, \\ \rho_0 c_{(2)}^2 = G, \\ \rho_0 c_{(3)}^2 = G - 0,5C_3\Gamma. \end{array} \quad (25)$$

Если волновая нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, то скорости распространения волн определяются выражениями

$$\left. \begin{array}{l} \text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_3, \\ \text{для поперечных волн } \left. \begin{array}{l} \mathbf{p}_{(2)} = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{e}_2 \end{array} \right\}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho_0 c_{(1)}^2 = K + \frac{4G}{3}, \\ \rho_0 c_{(2)}^2 = G + 0,5C_3\Gamma, \\ \rho_0 c_{(3)}^2 = G - 0,5C_3\Gamma. \end{array} \quad (26)$$

Отметим, что в последнем случае скорость распространения продольной волны не зависит от предварительных деформаций, а в случаях (24) и (25) от достигнутых деформаций не зависит скорость распространения одной из поперечных волн. По величине эти скорости равны скоростям распространения волн в линейно упругом материале без предварительных деформаций.

Измерение скоростей распространения продольных и поперечных волн при рассмотренном предварительном деформированном состоянии также не позволяет идентифицировать модель, т.к. соотношения (24) – (25) не содержат константу C_1 . Далее рассмотрим главные волны в задаче об одноосном сжатии.

Идентификация модели Генки-Мурнагана в опыте на одноосное сжатие. Рассмотрим главные волны в задаче об одноосном сжатии. В работе [13] предложена схема эксперимента на одноосное сжатие, в соответствии с которой в предварительно сжатом стержне, рабочая часть которого имеет поперечное сечение в форме квадрата, распространяются волны в направлении оси стержня и в перпендикулярном направлении. Материал стержня – полиамид 6 (Ertalon). Результатами исследования являются экспериментальные кривые зависимости скоростей распространения продольных и поперечных волн от величины предварительного сжатия. Величина максимальной деформации сжатия в экспериментах составляла 0,02. Для рассмотренного материала из результатов экспериментов определены упругие константы материала:

константы Ламе: $\lambda = 4,77$ ГПа, $G = 1,37$ ГПа, константы Мурнагана: $l = -9,99$ ГПа, $m = -8,23$ ГПа, $n = -5,77$ ГПа, плотность материала $\rho_0 = 1073,4$ кг/м³.

При одноосном сжатии тензор истинных напряжений имеет вид $\mathbf{S} = S_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, тензор деформаций $\mathbf{\Gamma} = \Gamma_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \Gamma_2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)$. Связь между напряжениями и деформациями определяется соотношением (10). Поперечные деформации Γ_2 определяются из условия равенства нулю напряжений S_{22} и могут быть найдены из выражения

$$\Gamma_2(\lambda) = \frac{6}{2A_2 - A_1} \left(- \left(2 \left(K + \frac{G}{3} \right) + \frac{A_1 + A_2}{6} \ln \lambda \right) + \sqrt{\frac{1}{36} \left((A_1 + A_2)^2 + 3A_3(A_1 - 2A_2) \right) \ln^2 \lambda + (KA_1 + \frac{2}{3}GA_2) \ln \lambda + 4 \left(K + \frac{G}{3} \right)^2} \right), \quad (27)$$

где комбинации нелинейных упругих констант C_1, C_2, C_3 обозначены следующим образом: $A_1 = \frac{4}{3} \left(C_3 - \frac{2}{\sqrt{3}}C_2 \right)$, $A_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(C_1 + \frac{C_2}{6} \right)$, $A_3 = \frac{4}{9} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_1 - C_3 \right)$. Константы C_1, C_2, C_3 вычисляются через константы Мурнагана по формулам (9).

Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси сжимаемого стержня, с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, тогда фазовые скорости распространения

$$\text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_1, \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 c_{11}^2 &= K + \frac{4G}{3} + \\ &+ \left(\frac{C_1}{3\sqrt{3}} + \frac{2C_2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{9}C_3 \right) \Gamma_1 + \\ &+ \left(\frac{2C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{4}{9}C_3 \right) \Gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\text{для поперечных волн } \left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{(2)} &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_{(3)} &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 c_{12}^2 &= \rho_0 c_{13}^2 = G + \\ &+ \left(\frac{C_2}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6}C_3 \right) \Gamma_1 + \left(\frac{C_2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{6}C_3 \right) \Gamma_2. \end{aligned} \right\}$$

Если волна распространяется перпендикулярно оси сжимаемого стержня, с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, то фазовые скорости распространения

$$\text{для продольной волны } \mathbf{p}_{(1)} = \mathbf{e}_2, \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 c_{22}^2 &= K + \frac{4G}{3} + \left(\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{9}C_3 \right) \Gamma_1 + \\ &+ \left(\frac{2C_1}{3\sqrt{3}} + \frac{2C_2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{9}C_3 \right) \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\text{для поперечных волн } \left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{(2)} &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{p}_{(3)} &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 c_{21}^2 &= G + \left(\frac{C_2}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{3}C_3 \right) \Gamma_1 + \\ &+ \left(\frac{C_2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}C_3 \right) \Gamma_2, \\ \rho_0 c_{23}^2 &= G + \left(\frac{C_2}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6}C_3 \right) \Gamma_1 + \\ &+ \left(\frac{C_2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{6}C_3 \right) \Gamma_2. \end{aligned} \right\}$$

Однако в экспериментах измеряется так называемая эффективная скорость распространения волны $W_{ij} = c_{ij} \frac{L}{L_0}$ [11], в выражении для которой учитывается изменение размера образца в направлении распространения волны. Отметим, что в обозначении скорости первый индекс означает направление волновой нормали, а второй индекс – направление вектора поляризации.

Пять соотношений (28), (29) позволяют определить все пять констант модели по измеренным в эксперименте величинам эффективных скоростей распространения волн.

На рисунке 1 приведены графики изменения эффективной скорости продольной и поперечной волн, распространяющихся вдоль оси стержня. На рисунке 2 приведены зависимости эффективных скоростей продольной и поперечных волн, распространяющихся перпендикулярно оси сжимаемого стержня. На графиках аргументом является величина $\lambda = \frac{L}{L_0}$, характеризующая величину деформаций сжатия. На этих рисунках для сравнения приведены эффективные скорости распространения волн V_{ij} , определенные по модели Мурнагана (1), когда в качестве меры деформаций используется тензор Коши-Грина. При одинаковых значениях констант отличия между скоростями W_{ij} и V_{ij} , определенными по различным потенциалам, становятся существенными при деформациях порядка 10%.

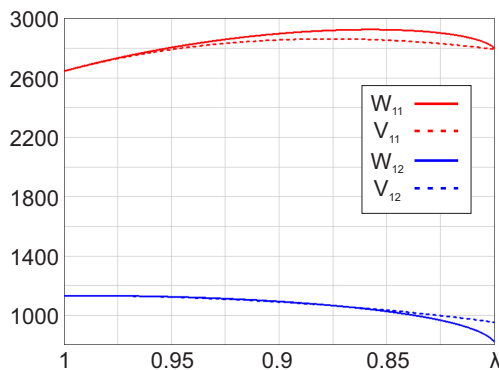


Рис. 1 Эффективные скорости распространения волн вдоль оси стержня

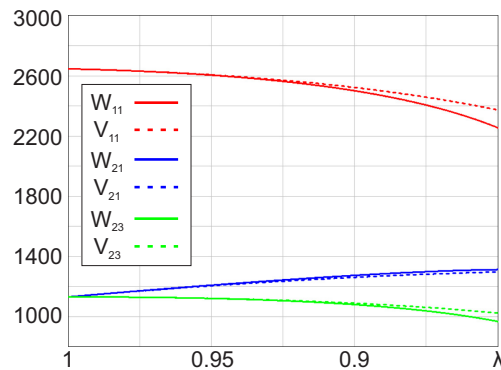


Рис. 2 Эффективные скорости распространения волн в поперечном направлении

Сопоставление результатов расчетов с опытными данными, приведенными в [13], затруднительно, поскольку в этой работе деформации не превышают 2%, а относительное изменение фазовой скорости не превышает 1% от величин, определяемых линейной теорией упругости. Однако приведенные на рисунках зависимости эффективных скоростей распространения продольных и поперечных волн качественно подтверждают экспериментальный факт, приведенный в работе [3]. В этой работе отмечается, что с ростом степени сжатия фазовая скорость продольной волны, распространяющейся в направлении сжатия, возрастает (см. рис. 1).

Выводы. В работе в инвариантной форме получено уравнение распространения акустических волн и выписано выражение для акустического тензора, соответствующего модели нелинейной упругости Генки-Мурнагана. Рассмотрены возможные программы определения констант модели по величинам скоростей распространения продольных и поперечных волн, возбуждаемых в образцах с различными предварительными деформациями. Показано, что все пять констант модели можно определить из динамических экспериментов, если в образце создать предварительное объемное деформирование и деформации растяжения-сжатия в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Другой вариант идентификации материала состоит в определении констант модели из опыта на одноосное растяжение образца с поперечным сечением в форме квадрата. Сравнение результатов расчетов фазовых скоростей распространения волн по моделям Генки-Мурнагана и Мурнагана показало, что до деформаций 10% эти результаты практически совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [2] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [3] Кулиев Г. Г., Ахаев Х. Б., Гасанова Г. Г. Определение модулей упругости третьего порядка для осадочных пород на основе скважинных геофизических данных // Физика Земли. 2013. № 6. С. 54–60.
- [4] Murnaghan F. D. Finite deformations of an elastic solid // American Journal of Mathematics. 1937. Vol. 59, no. 2. P. 235–260.
- [5] Астапов В. Ф., Маркин А. А., Соколова М. Ю. Определение упругих свойств материалов из опытов на сплошных цилиндрах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 104–111.
- [6] Астапов Ю. В., Христич Д. В. Численное и экспериментальное моделирование процесса индентирования резиновых образцов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 36, № 2. С. 65–73.
- [7] Astapov Y., Khristich D. Experimental determination of the parameters of the nonlinearly elastic Hencky model // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203.
- [8] Определение упругих модулей 3-го порядка по параметрам объемных солитонов деформаций / Ф. Е. Гарбузов, А. М. Самсонов, А. А. Семенов [и др.] // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, № 3. С. 16–22.
- [9] Минин С. И. Определение модулей упругости третьего порядка для определения напряженно-деформированного состояния металла элементов конструкций АЭС // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2018. № 1. С. 15–22.
- [10] Коробов А. И., Прохоров В. М., Мехедов Д. М. Упругие постоянные второго и третьего порядков алюминиевого сплава В95 и композита В95/наноалмаз // Физика твердого тела. 2013. Т. 55, № 1. С. 10–13.
- [11] Секоян С. С. О вычислении констант упругости третьего порядка по результатам ультразвуковых измерений // Акустический журнал. 1970. Т. 16, № 3. С. 453–457.
- [12] Toupin R. A., Bernstein B. Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // The Journal of the Acoustical Society of America. 1961. Vol. 33, no. 2. P. 216–225.
- [13] Zhu Q., Burtin C., Binetruy C. Acoustoelastic effect in polyamide 6: Linear and nonlinear behavior // Polymer Testing. 2014. Vol. 40. P. 178–186.
- [14] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 68–75.
- [15] Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 270 с.
- [16] Козлов В. В., Маркин А. А. Анализ определяющих соотношений нелинейно-упругих сжимаемых материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. № 1. С. 133–143.
- [17] The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals / Y. Astapov, D. Khristich, A. Markin et al. // International Journal of Applied Mechanics. 2017. Vol. 9, no. 6.
- [18] Han L. M. Wave propagation in composite layered materials with large initial deformations // Soviet Applied Mechanics. 1976. no. 12. P. 1258–1262.
- [19] Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T. General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations // Proc. R. Soc. Lond. A. 1952. Vol. 211, no. 1104. p. 128–154.
- [20] Распространение упругих волн в нелинейно-упругих средах с начальными деформациями. Компьютерное моделирование с использованием программного комплекса прочностного инженерного анализа Fidesys / В. А. Левин, А. В. Вершинин, И. А. Мишин [и др.] // Технологии сейсморазведки. 2012. № 4. С. 29–32.

M. Iu. Sokolova, Iu. V. Astapov

ELASTIC WAVES IN THE HENCKY-MURNAGHAN MATERIAL

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The dynamic methods for selecting models of a nonlinear elastic deformable body are considered. Depending on the model, five elastic constants of the second and third orders, which are available in the relations of the models, can be determined. The calculation formulas and the given example of determining the dependence of phase velocities for polyamide 6 are obtained in the article.

Keywords: finite deformations, Hencky tensor, Hencky-Murnaghan model, uniform compression, acoustic waves, identification of constitutive relations.

REFERENCES

- [1] Lurie A. I. *Nonlinear Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka, 1980. 512 c.
- [2] Markin A. A., Sokolova M. Iu. *Thermomechanics of elastoplastic deformation*. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 c.
- [3] Guliyev H., Aghayev Kh. B., Hasanova G. Determining the elastic moduli of the third order for sedimentary rocks based on borehole geophysical data // *Izvestiya Physics of the Solid Earth*. 2013. № 6. C. 54–60. (in Russian).
- [4] Murnaghan F. D. *Finite deformations of an elastic solid* // *American Journal of Mathematics*. 1937. Vol. 59, no. 2. P. 235–260.
- [5] Astapov V. F., Markin A. A., Sokolova M. Iu. Determination of the elastic properties of materials from experiments on solid cylinders // *Mechanics of Solids*. 2002. № 1. C. 104–111. (in Russian).
- [6] Astapov Iu. V., Khristich D. V. Numerical and experimental modeling of indentation process of resin specimens // *Vestnik ChGPU Yakovleva. Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2018. T. 36, № 2. C. 65–73. (in Russian).
- [7] Astapov Y., Khristich D. Experimental determination of the parameters of the nonlinearly elastic Hencky model // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1203.
- [8] Determination of 3rd order elastic moduli by the parameters of bulk strain solitons / F. E. Garbuzov, A. M. Samsonov, A. A. Semenov [и др.] // *Applied Physics Letters*. 2016. T. 42, № 3. C. 16–22. (in Russian).
- [9] Minin S. I. Determination of third order elastic moduli to measure stressed strained states in metal structural components of nuclear power plants // *Nuclear Energy and Technology*. 2018. № 1. C. 15–22. (in Russian).
- [10] Korobov A. I., Prohorov V. M., Mehedov D. M. Elastic constants of the second and third orders of the aluminum alloy B95 and composite B95/nanodiamond // *Physics of the Solid State*. 2013. T. 55, № 1. C. 10–13. (in Russian).
- [11] Sekoian S. S. On the calculation of elastic constants of the third order according to the results of ultrasonic measurements // *Acoustic journal*. 1970. T. 16, № 3. C. 453–457. (in Russian).
- [12] Toupin R. A., Bernstein B. Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1961. Vol. 33, no. 2. P. 216–225.
- [13] Zhu Q., Burtin C., Binetruy C. Acoustoelastic effect in polyamide 6: Linear and nonlinear behavior // *Polymer Testing*. 2014. Vol. 40. P. 178–186.

Sokolova Marina Iurevna

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Astapov Iurii Vladimirovich

e-mail: ast3x3@gmail.com, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

- [14] Markin A. A., Sokolova M. Iu. Variant of the relations of nonlinear elasticity // *Mechanics of Solids*. 2019. № 6. С. 68–75. (in Russian).
- [15] Guz A. N. *Stability of elastic bodies at finite strains*. Kiev: Naukova dumka, 1973. 270 с.
- [16] Kozlov V. V., Markin A. A. The analyze of defining relationship for isotropic nonlinear-elastic compressible materials // *Izvestiya TulGU. Natural sciences*. 2014. № 1. С. 133–143. (in Russian).
- [17] The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals / Y. Astapov, D. Khristich, A. Markin et al. // *International Journal of Applied Mechanics*. 2017. Vol. 9, no. 6.
- [18] Han L. M. Wave propagation in composite layered materials with large initial deformations // *Soviet Applied Mechanics*. 1976. no. 12. P. 1258–1262.
- [19] Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T. General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1952. Vol. 211, no. 1104. P. 128–154.
- [20] Elastic wave propagation in the non-linear media with initial stresses. Computer modeling using computer-aided engineering software Fidesys / V. A. Levin, A. V. Vershinin, I. A. Mishin [и др.] // *Seismic technology*. 2012. № 4. С. 29–32. (in Russian).

Ю. В. Немировский

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПЛАСТИН С ПРЯМЫМ УГЛОМ КОНТУРА

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Для класса гибридных полигональных пластин с контурами, имеющими прямой угол при различных условиях нагружения и закрепления, разработан инженерный метод определения первых (предельно упругих) и вторых (предразрушение) предельных нагрузок. Определены критерии их достижения, получены необходимые системы разрешающих уравнений и описан метод их решения.

Ключевые слова: гибридные, слоистые, полигональные пластинки, прямой угол, шарнирное закрепление, защемление контура, концепция слабейшего звена, первая и вторая предельные нагрузки, подклассы рациональных и не вполне рациональных гибридных структур.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.81.60.012

УДК: 539.374

Введение. Полигональные пластинки различных видов широко используются во многих отраслях современного машиностроения, судостроения, в авиационной и космической технике и на предприятиях стройиндустрии. Расчеты напряженно-деформированного состояния и несущей способности (за редким исключением) касаются прямоугольных и трапециевидных пластин на основе моделей упругих сред [1, 2] или модели идеальных жестко-пластических материалов по схеме А. А. Гвоздева [3–5]. Эти модели давно демонстрируют невозможность выполнения всё возрастающих экономических и эксплуатационных требований к изделиям при использовании конструкций из однородных материалов.

© Немировский Ю. В., 2020

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiyu@mail.ru, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск; профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-01-00038.

Поступила 03.06.2020

К настоящему времени разработано множество эффективных и надежных технологических приемов (склейка, различные типы сварок, плазменного и холодного газодинамического напыления, электронной наплавки и др.), позволяющих создавать различные гибридные конструкции из практически любых наборов материалов. Разрабатываемые в настоящее время методы исследования напряженного состояния и оценки несущей способности таких композитных конструкций основываются, как правило, на моделях упругих сред и не позволяют надежно и адекватно оценивать их реальное поведение. Проблема здесь состоит в том, что от вновь разрабатываемых материалов требуют, обычно, как можно большего увеличения прочностных и пластических характеристик, что приводит к иным перераспределениям напряжений и деформаций в гибридных конструкциях, чем предсказываемые в рамках упругих расчетов. Кроме того, возникающие нелинейные начально-краевые задачи приводят к серьезным аналитическим и численным проблемам при реализации процедур их решения [6–13].

В представленной работе разработан новый подход к расчету и анализу предельных состояний определенного класса полигональных гибридных и однородных пластин, позволяющий с единых позиций анализировать два принципиально разных состояния: первое (предельно-упругое), когда во всех составляющих материалах не будет превышен предел упругости, и второе предельное состояние (состояние предразрушения), когда все материалы или некоторые из них деформируются пластически, но ни один из них не разрушается.

Формулировка проблемы и основные разрешающие уравнения. Будем рассматривать упругое и неупругое деформирование слоистых пластин симметричной структуры из несжимаемых материалов, подчиняющихся деформационной теории пластичности в рамках постановки, изложенной в [14]. Выделим подкласс полигональных пластин с выпуклым контуром, имеющим прямой угол (треугольных, четырехугольных, пятиугольных). Некоторые из них изображены на рис. 1–4.

Будем использовать декартову систему координат с началом в вершине прямого угла и осями x и y , направленными вдоль его сторон. Относительно закрепления контуров рассматриваемых пластин будем считать, что стороны, образующие прямой угол, могут быть закреплены шарнирно или жестко, а остальные стороны — жестко защемлены.

В рамках гипотез, сформулированных в [14], основные соотношения для задач поперечного изгиба пластин определяются следующим набором выражений. Деформации ε_x , ε_y , ε_{xy} связаны с прогибом $w(x, y)$ пластины выражениями

$$\varepsilon_x = -z\kappa_x, \quad \varepsilon_y = -z\kappa_y, \quad \varepsilon_{xy} = -z\kappa_{xy}, \quad (1)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

где z — координата, отсчитываемая от срединной поверхности вдоль нормали к ней. Напряжения в слоях в соответствии с законом Генки–Ильюшина

$$\sigma_{xj} = \frac{\Phi_j(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \left(\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y \right), \quad \sigma_{yj} = \frac{\Phi_j(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \left(\varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_x \right),$$

$$\tau_j = \frac{\Phi(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \varepsilon_{xy}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

$$\varepsilon_u = |z|\kappa_u = |z|(\kappa_x^2 + \kappa_x\kappa_y + \kappa_y^2 + \kappa_{xy}^2)^{1/2}. \quad (4)$$

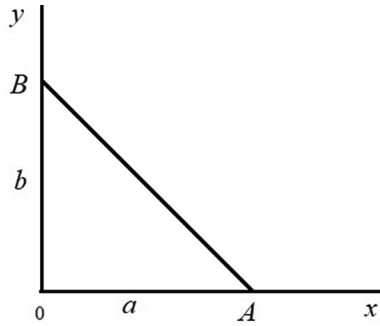


Рис. 1

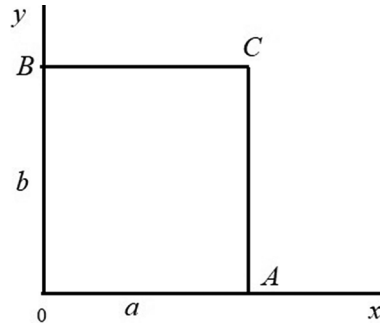


Рис. 2

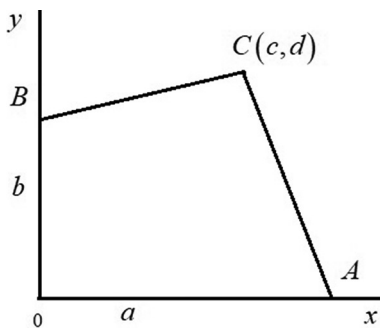


Рис. 3

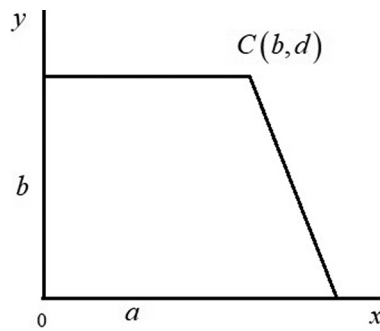


Рис. 4

Изгибающие M_x , M_y и крутящий M_{xy} моменты определяются выражениями

$$M_x = 2 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \sigma_{xj} z dz, \quad M_y = 2 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \sigma_{yj} z dz,$$

$$M_{xy} = 2 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \tau_j z dz, \quad h_0 = 0, \quad (5)$$

h_j — координаты границ раздела слоев. Уравнение равновесия при поперечном изгибе имеет вид

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q_0 \phi_1(x, y) = 0, \quad (6)$$

q_0 — амплитуда нагрузки, $\phi_1(x, y)$ — функция ее распределения по поверхности пластинки. Для материалов, равносопротивляющихся растяжению и сжатию, диаграммы деформирования достаточно надежно могут быть аппроксимированы кубическими параболой [6, 7] и, таким образом, можно принять зависимости

$$\Phi_j(\varepsilon_u) = A_j \varepsilon_u + B_j \varepsilon_u^3, \quad (0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_j^*), \quad B_j = -\frac{A_j}{3(\varepsilon_j^*)^2}, \quad \varepsilon_j^* = \frac{3\sigma_j^*}{2A_j}, \quad (7)$$

A_j , σ_j^* , ε_j^* — модуль Юнга, предел прочности и предельная деформация предразрушения материала j -го слоя. Зависимости (7) позволяют рассматривать как упругое ($B_j = 0$), так и неупругое при $B_j \neq 0$ состояние материала j -го слоя. Для слоистых

конструкций по требованиям эксплуатации важно рассматривать два предельных состояния [15]: первое — предельно упругое (когда для всех составляющих материалов $B_j = 0$ и $\varepsilon_u \leq \varepsilon_0 \leq \min(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots, \varepsilon_n^0)$, где $\varepsilon_j^0 = \sigma_{0j}/A_j$ и σ_{0j} — предел упругости материала j -го слоя), и второе состояние — состояние предразрушения (когда $B_j \neq 0$, $\varepsilon_u \leq \varepsilon_* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*)$, σ_j^* — предельная деформация предразрушения j -го слоя материала слоистой пластинки). Эти предельные состояния, разумеется, не характеризуют мгновенного опасного состояния эксплуатации, но указывают на определенные надёжные эксплуатационные состояния несущей способности и жесткости рассматриваемых слоистых пластин, после превышения которых может достаточно быстро наступить опасность их реальной эксплуатации вследствие случайных отклонений от режимов эксплуатации или ускоренной деградации свойств материалов.

Цель работы заключается в разработке относительно простой инженерной методики установления первого и второго предельных состояний для рассматриваемых конструкций, а также возможно большего их расширения за счет подбора структуры и расстановки материала слоев в конструкциях. Для реализации указанной цели, наряду со слоистыми конструкциями, будут одновременно рассматриваться эталонные однослойные пластинки тех же геометрических форм и условий нагружения с толщиной $2H_0$ и характеристиками материала $A_0, B_0, \sigma_0^0, \sigma_0^*, \varepsilon_0^0, \varepsilon_0^*$.

Методика расчета. Для всех рассматриваемых пластин решение будем искать в единообразной форме

$$w_k(x, y) = W_k \Psi_k(x, y), \quad w^0(x, y) = W_0 \Psi_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где для слоистых и однородных (эталонных) пластин W_k, W_0 — константы, а функции $\Psi_k(x, y)$ для k -й пластинки подбираются так, чтобы были выполнены соответствующие граничные условия закрепления на контуре. Например, если все три стороны треугольной пластинки на рис. 1 будут защемлены, то можно принять

$$\Psi_1(x, y) = x^2 y^2 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)^2. \quad (9)$$

Если стороны OA и OB на рис. 1 шарнирно-оперты, а сторона AB защемлена, то

$$\Psi_2(x, y) = x^3 y^3 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)^2. \quad (10)$$

Если стороны OA и AB на рис. 1 защемлены, а сторона OB шарнирно-оперта, то

$$\Psi_3(x, y) = x^3 y^2 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)^2, \quad (11)$$

и если стороны OB и AB защемлены, а сторона OA шарнирно-оперта, то

$$\Psi_4(x, y) = x^2 y^3 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)^2. \quad (12)$$

Если все стороны прямоугольника $OACB$ на рис. 2 защемлены, то

$$\Psi_5(x, y) = x^2 y^2 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^2 \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^2. \quad (13)$$

Если же все они шарнирно-оперты, то

$$\Psi_6(x, y) = x^3 y^3 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^3 \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^3. \quad (14)$$

Если стороны AC и BC на рис. 2 защемлены, а стороны OA и OB шарнирно-оперты, то

$$\Psi_7(x, y) = x^3 y^3 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^2 \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^2. \quad (15)$$

Если три стороны OA , OB и AC на рис. 2 шарнирно-оперты, а сторона BC защемлена, то

$$\Psi_8(x, y) = x^3 y^3 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^3 \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^2. \quad (16)$$

Если параллельные стороны OB и AC на рис. 2 шарнирно оперты, а две других OA и BC защемлены, то

$$\Psi_9(x, y) = x^3 y^2 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^3 \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^2. \quad (17)$$

Если все стороны четырехугольника $OACB$ на рис. 3 защемлены, то

$$\Psi_{10}(x, y) = x^2 y^2 [(b-d)x - cy - bc]^2 [dx - (a-c)y - ad]^2. \quad (18)$$

Если стороны OB и OA на рис. 3 шарнирно закреплены, а остальные защемлены, то

$$\Psi_{11}(x, y) = x^3 y^3 [(b-d)x - cy - bc]^2 [dx - (a-c)y - d]^2. \quad (19)$$

Если лишь одна сторона OA на рис. 3 шарнирно-оперта, а остальные защемлены, то будем иметь

$$\Psi_{12}(x, y) = x^3 y^2 [(b-d)x - cy - bc]^2 [dx - (a-c)y - ad]^2. \quad (20)$$

Аналогичные выражения получим для трапеции $OACB$ на рис. 4, если в выражениях (18)–(20) принять $d = b$.

Используя аппроксимацию (7) и выражения для прогибов (8), получим для изгибающих и крутящих моментов эталонных и слоистых пластин выражения

$$\begin{aligned} M_x &= D_1 R_1(w) + D_2 R_2(w), \\ M_y &= D_1 R_3(w) + D_2 R_4(w), \\ M_{xy} &= D_1 R_5(w) + D_2 R_6(w), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(w) &= 2\kappa_x + \kappa_y, & R_2(w) &= (2\kappa_x + \kappa_y)\kappa_u^2, \\ R_3(w) &= 2\kappa_y + \kappa_x, & R_4(w) &= (2\kappa_y + \kappa_x)\kappa_u^2, \\ R_5(w) &= \kappa_{xy}, & R_6(w) &= \kappa_{xy}\kappa_u^2, \\ \kappa_u^2 &= \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_x\kappa_y + \kappa_{xy}^2, \end{aligned} \quad (22)$$

$$D_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n A_j (h_j^3 - h_{j-1}^3), \quad D_2 = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^n B_j (h_j^5 - h_{j-1}^5). \quad (23)$$

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, диаграммы деформирования достаточно надежно могут быть аппроксимированы кубическими параболой [7], и, таким образом, можно принять зависимости

$$\Phi_j(\varepsilon_u) = A_j \varepsilon_u + B_j \varepsilon_u^3, \quad (0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_j^*), \quad B_j = \frac{A_j}{3(\varepsilon_j^*)^2}, \quad \varepsilon_j^* = \frac{3\sigma_j^*}{2A_j}, \quad (24)$$

A_j , σ_j^* , ε_j^* — модуль Юнга, предел прочности и предельная деформация предразрушения материала j -го слоя гибридной пластинки. Зависимости (24) позволяют рассматривать как упругое (при $B_j = 0$), так и неупругое (при $B_j \neq 0$) состояния материала

j -го слоя. Для слоистых конструкций по требованиям эксплуатации важно рассматривать два предельных состояния [5, 15]. Первое — предельно упругое, когда для всех составляющих материалов $B_j = 0$ и $\varepsilon_u \leq \varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots, \varepsilon_n^0)$, где $\varepsilon_j^0 = \sigma_j^0/A_j$ и σ_j^0 — предел упругости материала j -го слоя. Второе (состояние предразрушения), когда $B_j \neq 0$, $\varepsilon_u \leq \varepsilon_* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*)$, ε_k — предельная деформация предразрушения k -го слоя пластинки. При этом, по характеру расположения материалов и геометрическим параметрам слоев, будем выделять подклассы рациональных гибридных конструкций и гибридных не вполне рациональных конструкций.

Под гибридными рациональными будем понимать такие слоистые гибридные пластинки, в которых при заданном типе нагружения и закрепления первое или второе предельное состояние реализуется одновременно во всех материалах. Это означает, с учетом равенств (4), что для таких пластин в случае первого предельного состояния расположение материалов и геометрические параметры слоев должны удовлетворять соотношениям

$$h_j \kappa_u^0 = \varepsilon_j^0, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (25)$$

$$\kappa_u^0 = \frac{\varepsilon_1^0}{h_1}, \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{\varepsilon_2^0}{\varepsilon_1^0}, \quad \frac{h_3}{h_1} = \frac{\varepsilon_3^0}{\varepsilon_1^0}, \quad \dots, \quad \frac{h_n}{h_1} = \frac{\varepsilon_n^0}{\varepsilon_1^0}, \quad (26)$$

$$\varepsilon_n^0 > \varepsilon_{n-1}^0 > \dots > \varepsilon_1^0. \quad (27)$$

Аналогично для второго предельного состояния гибридных рациональных пластин должны выполняться соотношения

$$\kappa_u^* = \frac{\varepsilon_1^*}{h_1}, \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^*}, \quad \frac{h_3}{h_1} = \frac{\varepsilon_3^*}{\varepsilon_1^*}, \quad \dots, \quad \frac{h_n}{h_1} = \frac{\varepsilon_n^*}{\varepsilon_1^*}, \quad (28)$$

$$\varepsilon_n^* > \varepsilon_{n-1}^* > \dots > \varepsilon_1^*, \quad (29)$$

которые определяют порядок расстановки материалов по толщине и соотношение между геометрическими размерами слоев.

Существенно более широкий подкласс «не вполне рациональных проектов» при отсутствии ограничивающих требований на порядок расстановки слоев и взаимосвязи их геометрических параметров можно анализировать, опираясь на концепцию «слабейшего звена» в конкретных случаях. Из заданного множества материалов рассматриваемых слоистых пластин «слабейшее звено» по первому предельному состоянию определяется требованием

$$\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_0^n), \quad (30)$$

а второму предельному состоянию — требованием

$$\varepsilon_* = \min(\varepsilon_0^*, \varepsilon_0^*, \dots, \varepsilon_0^*). \quad (31)$$

Тогда, если в рассматриваемой пластине k -й слой материала является слабейшим звеном по первому предельному состоянию, то для этого случая

$$B_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \kappa_u^0 = \frac{\varepsilon_0}{h_k}, \quad \kappa_u^0 = \max_{x,y \in S} \kappa_u(x, y). \quad (32)$$

Для второго предельного состояния аналогичные выражения будут иметь вид

$$\sigma_k^* = A_k h_k \left[1 + \frac{B_k}{A_k} (h_k \kappa_u)^2 \right], \quad h_m < \frac{\varepsilon_m^*}{\varepsilon_k} h_k, \quad \kappa_u = \max_{x,y \in S} \kappa_u(x, y). \quad (33)$$

Пользуясь выражениями (1)–(5) и (7) для M_x , M_y , M_{xy} , получим

$$\begin{aligned} M_x &= D_1 R_1(w) + D_2 R_2(w), \\ M_y &= D_1 R_3(w) + D_2 R_4(w), \\ M_{xy} &= D_1 R_5(w) + D_2 R_6(w), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} R_1(w) &= 2\kappa_x + \kappa_y, & R_2(w) &= (2\kappa_x + \kappa_y)\kappa_u^2, \\ R_3(w) &= 2\kappa_y + \kappa_x, & R_4(w) &= (2\kappa_y + \kappa_x)\kappa_u^2, \\ R_5(w) &= \kappa_{xy}, & R_6(w) &= \kappa_{xy}\kappa_u^2, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\kappa_u^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_x\kappa_y + \kappa_{xy}^2,$$

$$D_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n A_j (h_j^3 - h_{j-1}^3), \quad D_2 = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^n B_j (h_j^5 - h_{j-1}^5).$$

И для прогиба $w(x, y)$ из уравнения (6) получим

$$L_1(w) + L_2(w) + q_0\phi(x, y) = 0, \quad (36)$$

$$L_1(w) = D_1 \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial R_5}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R_3}{\partial y^2} \right], \quad L_2(w) = D_2 \left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial R_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R_4}{\partial y^2} \right].$$

Необходимые граничные условия для уравнения (2) формулируются в зависимости от условий закрепления на контуре, формулируются на основе граничных условий классической Кирхгофовой теории пластин.

Учитывая сложный нелинейный характер разрешающего уравнения (36), дальнейшее численное решение соответствующих задач будем строить на основе удобных модификаций метода Бубнова–Галеркина [16]. В первом приближении прогиб для соответствующих пластин будем искать в форме

$$w(x, y) = C_i \Psi_i(x, y), \quad (37)$$

где $C_i = \text{const}$, а функция $\Psi_i(x, y)$ подбирается так, чтобы были выполнены соответствующие граничные условия закрепления на контуре рассматриваемой пластины.

В частности, можно использовать, например, функции (9)–(20). Тогда, используя для уравнения (37) процедуру приближенного решения задачи по методу Бубнова–Галеркина [16], для соответствующих коэффициентов C_i будем получать линейные для первых предельных состояний и кубические для вторых предельных состояний алгебраические уравнения связи этих коэффициентов с амплитудами действующих нагрузок. Аналитические решения этих уравнений можно выписать, пользуясь справочной литературой [17]. Пользуясь этими решениями с известными выражениями для прогибов, далее необходимо решить задачу о поиске экстремума функции двух переменных $x, y \in S$ (S — поверхность рассматриваемой пластинки). Определить $\max_{x, y \in S} \kappa_u(x, y)$.

Процедура решения такой задачи $x, y \in S$ также известна из справочной литературы [17]. Для нахождения соответствующих значений предельных нагрузок далее необходимо использовать формулы (25)–(30) в зависимости от структур расположения материалов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы. Москва: Госстройиздат, 1958. 502 с.
- [2] Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. 784 с.
- [3] Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Москва: Стройиздат, 1949.
- [4] Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Москва: Госстройиздат, 1954. 304 с.
- [5] Немировский Ю. В. Предельное динамическое состояние слоистых металлических преград // Безопасность и живучесть технических систем: тр. IV Всероссийской конф. (9–13 окт. 2012 г., г. Красноярск). Красноярск: СКТБ, «Наука», КНЦ СО РАН, 2012. Т. 1. С. 171–181.
- [6] Кошур В. Д., Немировский Ю. В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1990. 190 с.
- [7] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформирования твердого тела: тр. второй Междунар. конф. Казань: Казанский госуниверситет, 2009.
- [8] Немировский Ю. В., Мезенцев С. Г. Начальное разрушение и рациональные структуры армирования многослойных пологих полиармированных оболочек // Механика композитных материалов. 1989. № 3. С. 466–474.
- [9] Немировский Ю. В., Пятаев С. Ф. Определение предельного упругого сопротивления композитов при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности и пластичности. 2000. № 62. С. 5–18.
- [10] Немировский Ю. В., Пятаев С. Ф. Граница упругого поведения композитных материалов с полыми сферическими включениями и переходной зоной // Механика композитных материалов. 1988. № 4. С. 636–643.
- [11] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Численное интегрирование двумерных краевых задач с большими градиентами решения // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 82–96.
- [12] Немировский Ю. В., Янковский А. П. Численное интегрирование динамических задач теории оболочек методом Рунге–Кутты // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: тр. 16-й Межреспубликанской конф. (Новосибирск, 6–8 июля 1999 г.) / под ред. акад. В. М. Фомина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. С. 117–124.
- [13] Nemirovsky Y. V., Yankovsky A. P. Numerical integration the problem MDSB with strongly expressed and quickly varying edge effects // Proc. Third Russian-Korean Intern. Sympos. of science and technology (KORUS 99, June 22–25, 1999, Novosibirsk, Russia). Novosibirsk, 1999. Vol. 1. P. 368–373.
- [14] Немировский Ю. В. Динамика пластических слоисто-волоконистых пластин // Мат. X Всероссийской конф. по механике деформируемого твердого тела (г. Самара). Самара: Самарский государственный технический университет, 2017. Т. 1. С. 106–110.
- [15] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние полиметаллических круглых и кольцевых пластин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 189–195.
- [16] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 353 с.
- [17] Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. Восьмое изд. Москва: Наука, 1966. 870 с.

Yu. V. Nemirovsky

**ULTIMATE STATES OF LAYERED POLYGONAL REJECTED PLATES
WITH DIRECT ANGLE CONTOUR**

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Khristianovich SB RAS, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

Abstract. For a class of hybrid polygonal plates with contours having a right angle under various loading and securing conditions, an engineering method has been developed for determining the first (extremely elastic) and second (pre-fracture) ultimate loads. The criteria for their achievement were determined, the necessary systems of resolving equations were obtained, and the method for solving them was described.

Keywords: hybrid, layered, polygonal plates, right angle, articulation, pinching contour, the concept of the weakest link, the first and second limit loads, subclasses of rational and not quite rational hybrid structures.

REFERENCES

- [1] Vlasov V. Z. Thin Walled Spatial Systems. Moscow: Gosstroyizdat, 1958. 502 p. (in Russian).
- [2] Vlasov V. Z. General theory of shells and its applications in technology. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 784 p. (in Russian).
- [3] Gvozdev A. A. Calculation of the bearing capacity of structures using the ultimate equilibrium method. Moscow: Stroyizdat, 1949. (in Russian).
- [4] Rzhantitsyn A. R. Design of structures taking into account the plastic properties of materials. Moscow: Gosstroyizdat, 1954. 304 p. (in Russian).
- [5] Nemirovsky Y. V. Limiting dynamic state of layered metal barriers // Safety and survivability of technical systems: Proceedings IV All-Russian Conf. (Oct 9-13, 2012 , Krasnoyarsk). Krasnoyarsk: SKTB, «Nauka», KNC SO RAN, 2012. Vol. 1. P. 171–181. (in Russian).
- [6] Koshur V. D., Nemirovskii Y. V. Continuous and discrete models of dynamic deformation of structural elements. Novosibirsk: Nauka, 1990. 190 p. (in Russian).
- [7] Nemirovskii Y. V. Predicting Nonlinear Deformation of Hybrid Composite Materials // Problems of nonlinear mechanics of deformation of a rigid body: Proceedings second Intern. conf. Kazan: Kazan State University, 2009. (in Russian).
- [8] Nemirovskii Y. V., Mezentsev S. G. Initial failure and rational reinforcement structures of multi-layer shallow poly-reinforced shells // Mechanics of Composite Materials. 1989. no. 3. P. 466–474. (in Russian).
- [9] Nemirovsky Y. V., Pyataev S. F. Determination of the ultimate elastic resistance of composites under complex stress conditions // Problems of strength and ductility. 2000. no. 62. P. 5–18. (in Russian).
- [10] Nemirovsky Y. V., Pyataev S. F. The boundary of elastic behavior of composite materials with hollow spherical inclusions and transition zone // Mechanics of Composite Materials. 1988. no. 4. P. 636–643. (in Russian).
- [11] Nemirovskii Y. V., Yankovskii A. P. Numerical integration of two-dimensional boundary value problems with large solution gradients // Computational Technologies. 2000. Vol. 5, no. 4. P. 82–96. (in Russian).
- [12] Nemirovskii Y. V., Yankovskii A. P. Numerical integration of dynamic problems of shell theory by the Runge - Kutta method // Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity

Yuri Vladimirovich Nemirovsky, Dr. Sci. Phys. & Math., Chief Researcher, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Khristianovich SB RAS, Novosibirsk; Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

- and plasticity: Proceedings 16th Inter-Republican conf. (Novosibirsk, July 6-8, 1999) / Ed. by academic V. M. Fomin. Novosibirsk: Publishing house of the SB RAS, 1999. P. 117–124. (in Russian).
- [13] Nemirovskii Y. V., Yankovskii A. P. Numerical integration the problem MDSB with strongly expressed and quickly varying edge effects // Proceedings Third Russian-Korean Intern. Sympos. of science and technology (KORUS 99, June 22-25, 1999, Novosibirsk, Russia). Novosibirsk, 1999. Vol. 1. P. 368–373.
- [14] Nemirovskii Y. V. Dynamics of plastic layered fibrous layers // Proceedings X All-Russian Conf. on solid mechanics. Samara: Samara State Technical University, 2017. Vol. 1. P. 106–110. (in Russian).
- [15] Nemirovsky Y. V. Second limit state of polymetallic circular and annular plates // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. no. 1 (23). P. 189–195. (in Russian).
- [16] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. Moscow: Mir, 1988. 353 p. (in Russian).
- [17] Vygodskii M. J. Handbook of Higher Mathematics. Eighth edition. Moscow: Science, 1966. 870 p. (in Russian).

А. А. Адамов, И. Э. Келлер, Н. С. Подкина

БАЗОВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ КЭП-МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОСТИ ГИБКОГО ГРАФИТА

Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

Аннотация. Разработка методики экспериментального определения пластических свойств листового материала из терморасширенного графита (гибкого графита) в условиях сжимающих средних напряжений является предметом настоящего исследования. С учетом условий производства и эксплуатации уплотнительных элементов и требований однородности напряженного и деформированного состояний в образце выделен ряд испытаний (всестороннее, трехосное, свободное или стесненное сжатие цилиндра, сжатие цилиндра в упругой трубе и сжатие параллелепипеда в канале), образцы для которых имеют форму сплошного цилиндра либо куба и собираются из дисков или квадратов, вырезанных из листа. Для колец, изготавливаемых навивкой графитовой фольги на цилиндрический сердечник с последующим осевым прессованием в матрице, дополнительно предлагаются испытания всесторонним сжатием, осевым сжатием в зазоре между внешней и внутренней упругими цилиндрическими оболочками, а также растяжением в полудисках. Пластические деформации гибкого графита сопровождаются дилатансией — связанностью сдвиговых и объемных компонент. Обзор подходящих моделей выделил кэп-модель Димаджио и Сэндлера, для материальных функций и констант которой получены выражения через измеряемые и контролируемые в перечисленных испытаниях величины. Избыточное количество данных может служить для проверки адекватности применения кэп-модели для описания пластических свойств гибкого графита.

Ключевые слова: гибкий графит, кэп-модели пластичности, уплотняемые среды, идентификация, базовые эксперименты.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.20.13.013

УДК: 539.374

© Адамов А. А., Келлер И. Э., Подкина Н. С., 2020

Адамов Анатолий Арсангалеевич

e-mail: adamov@icmm.ru, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Келлер Илья Эрнстович

e-mail: kie@icmm.ru, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Подкина Наталья Сергеевна

e-mail: podkina_ns@mail.ru, начальник испытательного участка, ООО “Силур”, г. Пермь, Россия.

Поступила 20.06.2020

Введение

Гибкие графитовые листы и фольги получают прокаткой терморасширенного графита до плотностей массы около трети плотности кристаллического графита и применяют для изготовления химически инертных прокладок, электродов, датчиков, устройств вибродемпфирования, теплоизоляции, защиты от электромагнитных полей [1]. В литературе предлагается определять механические и прочностные свойства данного материала исключительно из испытаний на одноосное растяжение [2], [3], [4] и индентирование [5]. Воспроизводимые в подобных испытаниях напряженно-деформированные состояния не характеризуются сжимающими средними напряжениями и уплотнением и потому не подходят для расчетов процессов производства и эксплуатации прокладок из гибкого графита, в которых подобные состояния реализуются во всем объеме изделия. Проектирование подходящих базовых экспериментов и методики калибровки моделей пластичности поэтому представляется необходимой и актуальной задачей.

Необратимое уплотнение гибкого графита при сжатии изменяет его упругие, пластические и предельные свойства. Подходящие модели материала встречаются среди уравнений состояния пористых, порошковых, геологических и других некомпактных сред и характеризуются связанностью сдвиговых и объемных деформаций (дилатансией). Первый раздел работы посвящен обзору моделей пластического течения подобных сред с целью анализа их гибкости при аппроксимации экспериментальных данных и удобства использования в численных расчетах. Предложен набор базовых экспериментов, в которых реализуются различные напряженные и деформированные состояния со сжимающим средним напряжением, достаточный для калибровки многоконстантных моделей пластичности уплотняемых сред. Все рассматриваемые эксперименты рассчитаны на испытания многослойных образцов, изготовленных из пластин или фольг гибкого графита: цилиндрических, кубических либо кольцевых. Для каждого из испытаний дается вывод соотношений между константами и функциями простейшей кэп-модели, реализованной в пакете программ LS-DYNA[®], и измеряемыми в экспериментах величинами.

Обзор моделей пластического течения уплотняемых сред

Главной характеристикой критериев текучести некомпактных сред является диаграмма Бужинского — предельная кривая в полуплоскости $\{p, s \geq 0\}$, где $p = -J_1$, $J_1 = \sigma_{ii}$, а $s = J_2^{1/2}$, $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, и ее эволюция при деформационном упрочнении. Переменная p есть утроенное среднее напряжение, взятое с противоположным знаком, положительная при сжимающих средних напряжениях и традиционно используется в механике грунтов и порошков. Другой характеристикой подобных критериев является сечение поверхности текучести в пространстве главных напряжений $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ девиаторной плоскостью, геометрия которого отражает зависимость от угла вида напряженного состояния ϑ : $\sqrt{3} \operatorname{tg} \vartheta = \mu$, где $\mu = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$, $-1 \leq \mu \leq 1$ — параметр Лоде. Для рассматриваемого класса сред характерен переход в состояние текучести при определенном значении сжимающего среднего напряжения и следующее за ним деформационное упрочнение за счет необратимого уплотнения при сжатии. Условия текучести дилатирующих сред, отражающие эти особенности, описываются замкнутыми поверхностями в пространстве главных напряжений и представляют собой модификации критериев Друкера — Прагера и Кулона — Мора предельного состояния грунтов либо обобщения критерия Мизеса. Описание множества подобных условий

текучести в рамках ассоциированного закона пластического течения содержится в обзорах [6], [7], [8].

Простейшая модель Димаджо и Сэндлера [9] была получена замыканием правильного кругового конуса текучести Друкера – Прагера эллиптической «крышкой». В координатах полуплоскости $\{p, s \geq 0\}$ соответствующие предельные контуры несколько более общей модификации модели задаются уравнениями

$$f_1(s, p) = s - F_1(p) = 0, \quad F_1(p) = \beta + \alpha p - \gamma \exp(-\delta p), \quad p < L(\kappa) \quad (1)$$

и

$$f_2(s, p, \kappa) = s - F_2(p, \kappa) = 0, \quad F_2(p, \kappa) = \sqrt{(X(\kappa) - L(\kappa))^2 - (p - L(\kappa))^2}/R, \quad L \leq p \leq X, \quad (2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, R$ — положительные константы, а $L = L(\kappa), X = X(\kappa)$ — положительные функции параметра упрочнения κ , задающие отрезок на оси p , на котором располагается крышка,

$$L(\kappa) = \{\kappa, \kappa > 0; 0, \kappa \leq 0\}, \quad X(\kappa) = L(\kappa) + RF_1(L(\kappa)), \quad (3)$$

$$\epsilon_v^p = -\omega(1 - \exp(-\chi(X(\kappa) - X_0))), \quad \epsilon_v^p = \int_0^t \dot{\epsilon}_{kk}^p dt, \quad (4)$$

где ω, χ, X_0 — положительные константы. Ассоциированный с функциями (1), (2) закон пластического течения $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \partial f_{1,2} / \partial \sigma_{ij}$ при условии текучести прогнозирует различные виды дилатансии: пластическое разрыхление $\dot{\epsilon}_v^p = 3(\alpha + \gamma \delta \exp(-\delta p)) \dot{e}^p > 0$, где $\dot{e}^p = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p - \dot{\epsilon}_{kk}^p \delta_{ij}/3$ при $p < L$ (течение на конической поверхности) и пластическое уплотнение $\dot{\epsilon}_v^p = -3(p - L)\dot{e}^p/(R^2 s) < 0$ при $L \leq p \leq X$ (течение на эллиптической поверхности) при накоплении сдвиговых деформаций $e^p = \int_0^t \dot{e}^p dt$. Модель реализована в пакете программ LS-DYNA® под именем MAT_025 [10].

Описанная выше «кэп-модель» имеет негладкое сопряжение конической и эллиптической частей поверхности текучести. Простейшее гладкое обобщение модели, предложенное Швером и Мюррей [11], построено заменой функций f_1 и f_2 в (1) и (2) на следующую

$$f(s, p, \kappa) = s^2 - F_1^2(p)F_3(p, \kappa) = 0, \quad (5)$$

где

$$F_3(p, \kappa) = \begin{cases} 1, & p \leq L \\ 1 - \frac{(p-L(\kappa))^2}{(X(\kappa)-L(\kappa))^2}, & p > L \end{cases} \quad (6)$$

Для учета зависимости от угла вида напряженного состояния ϑ критерий (5) предложено модифицировать следующим образом:

$$f(s, p, \vartheta, \kappa) = s^2 - \Lambda(\vartheta)F_1^2(p)F_3(p, \kappa) = 0, \quad (7)$$

где $\Lambda(\vartheta)$ — гладкая материальная функция. Функция (7) аппроксимирует коническую часть поверхности текучести более гибко, чем это позволяют конус Друкера – Прагера или пирамиды Кулона – Мора и Треска – Кулона. Данная гладкая кэп-модель также присутствует в библиотеке моделей материалов пакета программ LS-DYNA® под именем MAT_145 [10].

Другие гладкие многоконстантные обобщения кэп-модели, учитывающие зависимость от угла вида, предложены в работах [12] применительно к порошковой металлургии, [13] для описания предельного состояния бетона, [14] для геоматериалов с изменяемой пористостью.

Отдельно от кэп-моделей располагаются различные обобщения критерия Мизеса. Модель Грина [15]

$$s^2 + \alpha p^2 = \beta \sigma_u^2, \quad (8)$$

предназначенная для описания пластичности пористых материалов и популярная в порошковой металлургии, имеет эллиптический вид предельной кривой и в девиаторной плоскости, и в плоскости Бужинского. В (8) σ_u — предел текучести материала при отсутствии пористости $\eta = v_p/(v_p + v_m) = 0$, где v_p , v_m — объем пор и материала в элементарном объеме среды. Оценка несущей способности пористого материала при сдвиге и гидростатическом давлении позволила вывести зависимость коэффициентов функции текучести от параметра пористости

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{3(1 - \eta^{1/3})}{(3 - 2\eta^{1/4}) \ln \eta} \right)^2, \quad \beta = \left(\frac{3(1 - \eta^{1/3})}{(3 - 2\eta^{1/4})} \right)^2. \quad (9)$$

Модель прогнозирует предел текучести при всестороннем растяжении, не являющийся независимым от пределов текучести на сдвиг и гидростатическое сжатие.

Модель Гарсона – Твергарда – Нидлемана (GTN) [16], [17], предназначенная для металлов вблизи предельного состояния, использует гладкую неэллиптическую поверхность текучести

$$\frac{s^2}{\sigma_u^2} + 2\eta^* q_1 \operatorname{ch}(-q_2 p) - 1 - (q_1 \eta^*)^2 = 0, \quad (10)$$

где

$$\eta^* = \begin{cases} \eta, & \eta \leq \eta_c \\ \eta_c + \frac{1/q_1 - \eta_c}{\eta_f - \eta_c} (\eta - \eta_c), & \eta > \eta_c \end{cases} \quad (11)$$

К (10)-(11) добавляется уравнение эволюции параметра пористости

$$\dot{\eta}^* = (1 - \eta) \dot{e}_v^p + (\Omega(\vartheta) \eta (1 - \eta) + \Gamma(e^p) \frac{\sigma_u^2}{s}) \dot{e}^p, \quad (12)$$

где $e^p = \int_0^t \dot{e}^p dt$ — накопленная сдвиговая пластическая деформация, а Ω и Γ — материальные функции. Модель GTN также присутствует в пакете программ LS-DYNA[®] под именем MAT_120 [10].

Существуют и гораздо более сложные модели, не использующие ассоциированный закон. В работе [18] для описания пластичности пористых металлов использована формулировка модели Кэйси и Нагди с поверхностями текучести и нагружения в пространствах напряжений и полных деформаций. Авторы работы [19] применительно к задачам порошковой металлургии использовали предельную поверхность, составленную из пирамиды Кулона – Мора и эллиптической крышки с неассоциированным законом пластического течения для описания разрыхления и ассоциированным — для описания уплотнения. В работе [20] развиваются кэп-модели пластичности с неассоциированными законами пластического течения для моделирования деформационных

процессов в горных породах. Авторами [21] для описания сложного нагружения порошковых материалов сформулирована модель пластического течения с комбинированным упрочнением, где за трансляцию поверхности текучести отвечает тензорный параметр пористости.

Задача идентификации модели по базовым экспериментам

Для идентификации какой-либо из описанных выше моделей пластичности необходимо выбрать набор базовых экспериментов, подходящих по условиям нагружения, по регистрируемым данным которых определяются константы и функции модели. Данная обратная задача в большинстве известных работ решается с помощью аналитического либо численного решения прямых задач [22], [21], [12].

Для определения пластических свойств гибкого графита в условиях сжимающих средних напряжений (при наличии сдвиговых) в качестве базовых экспериментов рассматриваются всестороннее и трехосное сжатие цилиндра, свободное и стесненное сжатие цилиндра, сжатие цилиндра в упругой трубе и сжатие параллелепипеда в канале. Пластины имеют толщину 0.8-1.5 мм и плотность 0.6-0.8 г/см³ (плотность кристаллического графита 2.1-2.2 г/см³). Испытуемые образцы представляют собой цилиндры диаметром и высотой 20 мм либо кубы с длиной ребра 20 мм, составленные из дисков или квадратов, вырезанных из листа. Испытания на сжатие осуществляются на универсальной испытательной машине, снабженной контактными датчиками продольных перемещений. Приспособления для сжатия цилиндрических образцов описаны в [23]. Испытания на всестороннее и трехосное сжатие по схеме Кармана осуществляются в камере высокого давления. Еще одним объектом, удобным для испытаний, являются уплотнительные кольца, которые изготавливают навивкой фольги толщиной 0.4-0.6 мм на цилиндрический сердечник с последующим осевым прессованием в матрице до плотностей 1.2-1.8 г/см³. Такие кольца можно подвергать испытаниям всесторонним сжатием, осевым сжатием в зазоре между внешней и внутренней упругими цилиндрическими оболочками, а также растяжением полудисками по стандарту ASTM D2290.

Поскольку в перечисленных испытаниях реализуется уплотнение материала, в первом приближении рассматривается кэп-модель (1)-(4), в рамках которой уплотнению соответствует течение на эллиптической части поверхности текучести. Для ее описания модель имеет три независимых параметра, задающих на плоскости Бужинского центр L , размер X и форму R эллиптической поверхности текучести, причем первые два являются функциями пластического уплотнения. Величины, измеримые в ходе эксперимента, далее теоретически связываются с функциями и константой модели. Поскольку интересующие пластические свойства соответствуют состояниям с пластическими деформациями существенно превосходящими упругие, последними при получении оценок мы будем пренебрегать.

Всестороннее сжатие

Ненулевые компоненты тензора напряжений имеют вид $\sigma_{33} = \sigma_{22} = \sigma_{11}$, поэтому $J_1 = 3\sigma_{11}$, $J_2' = 0$ и из критерия текучести (2) следует $X = -3\sigma_{11}$. Испытание осуществляется в камере высокого давления; при этом поверхность образца защищается от проникновения внутрь рабочей жидкости. После испытания с рабочим давлением $-\sigma_{11}$ определяется необратимое относительное изменение объема ϵ_v^p . Совокупность испытаний при различных последовательных значениях давления при ее аппроксимации даст материальную функцию $X(\epsilon_v^p)$.

Поперечное сжатие с фиксированными концами

Если ось цилиндрического образца связать с координатой 3, тензор напряжений имеет следующие ненулевые компоненты: $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, σ_{33} , откуда $s_{11} = s_{22} = (\sigma_{11} - \sigma_{33})/3 > 0$, $s_{33} = -2(\sigma_{11} - \sigma_{33})/3$, $J_1 = 2\sigma_{11} + \sigma_{33}$, $J_2' = (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2/3$. Из ассоциированного закона пластического течения $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}(R^2 s_{ij} - 2(p - L)\delta_{ij})$ с учетом условия стеснения $\dot{\epsilon}_{33}^p = 0$ следует равенство $(R^2 + 3)\sigma_{33} = (R^2 - 6)\sigma_{11} - 3L$, подстановка которого в критерий текучести (2) ведет к соотношению

$$L = \left(\sqrt{R^2 + 3X} - 3R\sigma_{11} \right) / \left(R + \sqrt{R^2 + 3} \right). \quad (13)$$

После каждого испытания с рабочим давлением из заданного ряда определяется необратимое относительное изменение объема ϵ_v^p . С использованием этих данных и данных испытания на всестороннее сжатие по соотношению (13) определяется зависимость $L(\epsilon_v^p)$ (константа R должна быть известна).

Трехосное сжатие

Испытание проводится в установке [24], реализующей схему Кармана, снабженной камерой высокого давления. Структура тензора напряжений совпадает с предыдущим случаем, но его компоненты в данном испытании контролируются. Для примера будем предполагать пропорциональное изменение компонент напряжений $\sigma_{33} = \chi\sigma_{11}$, причем $\sigma_{11} < \sigma_{33} < 0$. Критерий текучести

$$R^2(1 - \chi)^2\sigma_{11}^2 + 3((2 + \chi)\sigma_{11} + L)^2 = 3(X - L)^2 \quad (14)$$

позволяет связать константы и функции модели с контролируемыми параметрами σ_{11} , χ . Ассоциированный закон пластического течения позволяет получить выражение для отношений скоростей поперечной к осевой и осевой к объемной пластических деформаций

$$\frac{\dot{\epsilon}_{11}^p}{\dot{\epsilon}_{33}^p} = \frac{(12 + R^2)\sigma_{11} + (6 - R^2)\sigma_{33} + 6L}{2(6 - R^2)\sigma_{11} + 2(3 + R^2)\sigma_{33} + 6L}, \quad \frac{\dot{\epsilon}_{33}^p}{\dot{\epsilon}_v^p} = \frac{(6 - R^2)\sigma_{11} + (3 + R^2)\sigma_{33} + 3L}{9(2\sigma_{11} + \sigma_{33} + L)}, \quad (15)$$

которые измеряются после каждого эксперимента с контролируемыми σ_{11} и σ_{33} . Соотношение (15) может служить для определения функции $L(\epsilon_v^p)$. Если нельзя подобрать такую R , что функция $L(\epsilon_v^p)$ не будет зависеть от отношения σ_{11}/σ_{33} (в статистическом смысле), рассматриваемая модель требует усложнения.

Свободное сжатие

Отождествим радиальную и окружную координаты цилиндра с осями 1 и 2, а направление сжатия — с осью 3. В таком случае $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, $J_1 = \sigma_{33}$, $s_{11} = s_{22} = -\sigma_{33}/3$, $s_{33} = 2\sigma_{33}/3$, $J_2' = J_1^2/3$. На диаграмме Бужинского данному нагружению соответствует прямая, составляющая угол $\pi/6$ с осью J_1 . В зависимости от материала в момент текучести она может достигнуть сечения эллиптической либо конической

составляющей предельной поверхности. В первом случае из условия (2) равносильно соотношению

$$X - L = \sqrt{(\sigma_{33} - L)^2 + R^2 \sigma_{33}^2 / 3}, \quad (16)$$

справедливому при σ_{33} , отвечающем моменту начала текучести. При возможности измерения осевой деформации и поперечной деформации либо относительного изменения объема образца, отношение приращений соответствующих величин может быть получено из ассоциированного закона течения и имеет вид

$$\frac{\dot{\epsilon}_{11}^p}{\dot{\epsilon}_{33}^p} = \frac{(6 - R^2)\sigma_{33} + 6L}{2(3 + R^2)\sigma_{33} + 6L}, \quad \frac{\dot{\epsilon}_{33}^p}{\dot{\epsilon}_v^p} = \frac{(3 + R^2)\sigma_{33} + 3L}{3(2\sigma_{33} + 3L)}. \quad (17)$$

Выражение (2) справедливо как в момент начала текучести, так и для любого момента деформационного упрочнения.

Растяжение тонкого кольца полудискаами

В этом испытании течение происходит на конической части поверхности текучести в соответствии с законом $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}(s_{ij}/s + 2F'_1 \delta_{ij})$, а вместо выражений (16), (17) появляются

$$(\alpha + \sqrt{3}/3)\sigma_{33} + \gamma \exp(\delta\sigma_{33}) = \beta, \quad (18)$$

$$\dot{\epsilon}_{11}^p / \dot{\epsilon}_{33}^p = (\alpha + \gamma\delta \exp(\delta\sigma_{33}) - \sqrt{3}/6) / (\alpha + \gamma\delta \exp(\delta\sigma_{33}) + \sqrt{3}/3). \quad (19)$$

Здесь оси 1 и 3 соответствуют радиальной и окружной координатам. Если в эксперименте регистрируется различие деформаций по толщине и ширине кольца, возникает основание выбора более сложной модели, поскольку потенциал (1) подразумевает $\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\epsilon}_{22}^p$.

Условия стыковки контуров (1) (2) в точке $p = L$, $s = (X - L)/R$ дает следующую связь материальных функций и констант:

$$X = \beta R + (1 + \alpha R)L - \gamma R \exp(-\delta L). \quad (20)$$

Стесненное сжатие

Для данного испытания контролируется напряжение σ_{33} , $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $J_1 = 2\sigma_{11} + \sigma_{33}$. Из условия стеснения $\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\epsilon}_{22}^p = 0$ течение на эллиптической крышке сопровождается напряжениями $s_{11} = s_{22} = -2(J_1 + L)/R^2$, $s_{33} = 4(J_1 + L)/R^2$, $J'_2 = 12(J_1 + L)^2/R^4$, и из критерия текучести (2) следует $\sqrt{12/R^2 + 1}(J_1 + L) = L - X$. Учитывая, что $s_{11} = \sigma_{11} - J_1/3$, можно получить связь компонент $(R^2 + 12)\sigma_{11} = (R^2 - 6)\sigma_{33} - 6L$, откуда $(R^2 + 12)J_1 = 3R^2\sigma_{33} - 12L$ и следует соотношение

$$\sigma_{33} = -L/3 - \sqrt{R^2 + 12}(X - L)/R, \quad (21)$$

которое можно использовать для идентификации материальных констант и функций. Траектория нагружения на диаграмме Бужинского зависит от закона упрочнения, который заранее не известен.

Если течение развивается на конической части поверхности текучести, то вследствие однородности первой степени функции (1) по s следует, что $s_{11} = s_{22} \propto s$, откуда и из определения s , $s_{33} \propto s$. Для стесненного сжатия компоненты девиатора напряжений соотносятся между собой как $s_{11} = s_{33}/2$, поэтому в общем случае необходимо $s = 0$, что соответствует вершине конуса, растягивающему среднему напряжению и разрыхлению. Поскольку такое поведение маловероятно для рассматриваемого материала, этот случай не будет приниматься во внимание.

Сжатие в упругой цилиндрической оболочке

В отличие от предыдущих данное испытание позволяет измерять тангенциальные деформации упругой цилиндрической оболочки, внутри которой происходит осевое сжатие сплошного цилиндрического образца. Для этого на внешнюю поверхность цилиндрической оболочки наклеиваются тензодатчики. В рамках безмоментной теории упругих оболочек [25] и предположений об однородности деформаций оболочки вдоль образующей и свободы концов трубы от продольных усилий можно получить следующую связь компонент σ_{11} и ϵ_{11} :

$$\epsilon_{11} = \frac{a}{h} \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad (22)$$

где a , h — радиус и толщина цилиндрической оболочки, E — модуль Юнга ее материала. Эти же компоненты реализуются в испытываемом образце.

Тензор напряжений имеет ту же структуру, как и в эксперименте на стесненное сжатие, однако для тензора пластических деформаций $\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\epsilon}_{22}^p \neq 0$. Из соотношений ассоциированного закона течения $\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\lambda}(R^2 s_{11} + 2(J_1 + L))$, $\dot{\epsilon}_{33}^p = \dot{\lambda}(R^2 s_{33} + 2(J_1 + L))$ и определений $\dot{\epsilon}_v^p = 2\dot{\epsilon}_{11}^p + \dot{\epsilon}_{33}^p$, $J_1 = 2\sigma_{11} + \sigma_{33}$ и компонент девиатора напряжений $s_{11} = (\sigma_{11} - \sigma_{33})/3$, $s_{33} = -2(\sigma_{11} - \sigma_{33})/3$ можно получить следующие равенства:

$$\frac{\dot{\epsilon}_{11}^p}{\dot{\epsilon}_{33}^p} = \frac{(12 + R^2)\sigma_{11} + (6 - R^2)\sigma_{33} + 6L}{2(6 - R^2)\sigma_{11} + 2(3 + R^2)\sigma_{33} + 6L}, \quad \frac{\dot{\epsilon}_{11}^p}{\dot{\epsilon}_v^p} = \frac{(12 + R^2)\sigma_{11} + (6 - R^2)\sigma_{33} + 6L}{18(2\sigma_{11} + \sigma_{33} + L)}. \quad (23)$$

Совместное применение соотношений (22), (23) позволяет определить зависимость $L(\epsilon_v^p)$ по измерениям σ_{33} , ϵ_{11}^p и $d\epsilon_{11}^p/d\epsilon_{33}^p$ при известных значениях объемной пластической деформации и константе R .

Если в качестве образца рассматривается полый цилиндр, его внутренняя поверхность также должна опираться на упругую цилиндрическую оболочку, а осевое сжатие образца происходить в пространстве между внутренней и внешней оболочками, обеспечивая свободное перемещение образца относительно них. Для обеспечения однородности распределения деформаций и напряжений по радиусу образца толщина стенки внутренней оболочки h_1 должна соотноситься с толщиной стенки внешней оболочки h_2 и радиусами обеих a_1 , a_2 согласно следующему соотношению:

$$\frac{a_1}{h_1} = \frac{a_2}{h_2}. \quad (24)$$

Это требование следует из (22).

Сжатие в канале

Направим координаты 1 и 2 вдоль оси канала и в поперечном направлении, а координату 3 — вдоль оси сжатия. В таком случае $\sigma_{11} = 0$, а из условия $\dot{\epsilon}_{22}^p = 0$ следует $s_{22} = -2(J_1 + L)/R^2$. С учетом определений компонент девиатора напряжений последовательно получаем $\sigma_{22} = ((R^2 - 6)\sigma_{33} - 6L)/(2R^2 + 6)$, $J_1 = (3R^2\sigma_{33} - 6L)/(2R^2 + 6)$, $J_1 + L = (3\sigma_{33} + 2L)R^2/(2R^2 + 6)$, $J_2 = ((\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)/6 = ((R^4 + 6R^2 + 36)\sigma_{33}^2 + 36\sigma_{33}L + 12L^2)/(2R^2 + 6)^2$. Подставляя данные выражения в критерий текучести (2), можно получить соотношение

$$((R^2 + 12)\sigma_{33}^2 + 12\sigma_{33}L + 4L^2) R^2 = 4(R^2 + 3)(X - L)^2, \quad (25)$$

которое можно использовать с целью идентификации материальных констант и функций модели. При возможности измерения сжимающих и поперечных либо объемных пластических деформаций образца в последовательные моменты времени отношения

соответствующих скоростей могут быть получены из ассоциированного закона течения и имеют вид

$$\frac{\dot{\epsilon}_{11}^p}{\dot{\epsilon}_{33}^p} = \frac{(6 - R^2)\sigma_{33} + 6L}{(12 + R^2)\sigma_{33} + 6L}, \quad \frac{\dot{\epsilon}_{33}^p}{\dot{\epsilon}_v^p} = \frac{(12 + R^2)\sigma_{33} + 6L}{6(3\sigma_{33} + 2L)}. \quad (26)$$

Выражение (26) справедливо как в момент начала текучести, так и для любого момента деформационного упрочнения.

Заключение

Для возможности экспериментального определения пластических свойств гибкого графита в условиях сжимающих средних напряжений предложен ряд стандартных и нестандартных испытаний, существенно расширяющий эксперименты на одноосное растяжение и индентирование, предлагаемые для этого в немногих существующих работах. Выполнен обзор моделей пластичности дилатирующих сред, к которым относится гибкий графит, и выбрана простейшая модель, присутствующая в пакете программ LS-DYNA®. Для всех видов испытаний получены соотношения между константами и функциями модели и измеряемыми и контролируруемыми в экспериментах величинами. Результаты требуются для идентификации рассматриваемой модели и нуждаются в практической апробации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Chung D. Flexible graphite for gasketing, adsorption, electromagnetic interference shielding, vibration damping, electrochemical applications, and stress sensing // *Journal of Materials Engineering and Performance*. 2000. no. 9. P. 161–163.
- [2] Dowell M., Howard R. Tensile and compressive properties of flexible graphite foils // *Carbon*. 1986. no. 24. P. 311–323.
- [3] Influences of density and flake size on the mechanical properties of flexible graphite / Y. Leng, J. Gu, W. Cao et al. // *Carbon*. 1998. no. 36. P. 875–881.
- [4] Калашник Н. А., Ионов С. Г. Механические и теплофизические свойства фольг на основе низкоплотных углеродных материалов // *Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология*. 2017. № 9 (60). С. 11–16.
- [5] Nanoindentation of flexible graphite: Experimental versus simulation studies / M. Khelifa, V. Fierro, J. Macutkevici et al. // *Advanced Material Science*. 2018. no. 3 (2). P. 2–11.
- [6] Aubertin M., Li L. A porosity-dependent inelastic criterion for engineering materials // *International Journal of Plasticity*. 2004. no. 12 (20). P. 2179–2208.
- [7] Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V. A. Phenomenological Yield and Failure Criteria // *Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials* / Ed. by A. Öchsner, H. Altenbach. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. P. 49–152.
- [8] Kolupaev V., Yu M.-H., Altenbach H. Fitting of the strength hypotheses // *Acta Mechanica*. 2016. no. 6 (227). p. 1533–1556.
- [9] DiMaggio F., Sandler I. Material models for granular soils // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1971. no. 97. p. 935–950.
- [10] Livermore Software Technology Corporation. LS-DYNA® Keyword User's Manual. Volume II. Material Models. Version R10.0. 2017.
- [11] Schwer L., Murray Y. A three-invariant smooth cap model with mixed hardening // *International Journal for Numerical and Analytical Methods In Geomechanics*. 1994. no. 18. P. 657–688.
- [12] Khoei A., Azami A. A single cone-cap plasticity with an isotropic hardening rule for powder materials // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005. no. 1 (47). P. 94–109.
- [13] Ottosen N. A Failure Criterion for Concrete // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1977. no. 103. P. 527–535.
- [14] Mahnken R. Theoretical, numerical and identification aspects of a new model class for ductile damage // *International Journal of Plasticity*. 2002. № 7 (18). с. 801–831.

- [15] Green R. A plasticity theory for porous solids // International Journal of Mechanical Sciences. 1972. no. 4 (14). P. 215–224.
- [16] Gurson A. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media // Journal of Engineering Materials and Technologies. 1977. no. 1 (99). P. 2–15.
- [17] Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup–cone fracture in a round tensile bar // Acta Metallurgica. 1984. no. 32. p. 157–169.
- [18] Kim K. Elasto-plastic response of porous metals under triaxial loading // International Journal of Solids and Structures. 1988. no. 9 (24). P. 937–945.
- [19] Gu C., Kim M., Anand L. Constitutive equations for metal powders: application to powder forming processes // International Journal of Plasticity. 2001. no. 2 (17). P. 147–209.
- [20] Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Неассоциированные законы течения и локализация пластической деформации // Успехи механики. 1989. № 1 (12). С. 131–183.
- [21] Шестаков Н.А., Субич В.Н., Демин В.А. Уплотнение, консолидация и разрушение пористых материалов. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 264 с.
- [22] Цеменко В.Н. Деформирование порошковых сред. Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского государственного технического университета, 2001. 104 с.
- [23] Адамов А.А. Сравнительный анализ двухконстантных обобщений закона Гука для изотропных упругих материалов при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2001. № 5 (42). с. 183–192.
- [24] High Pressure Triaxial Cell for Metal Powder / P. Doremus, C. Geindreau, A. Martin et al. // Powder Metallurgy. 1995. no. 4 (38). P. 284–287.
- [25] Елисеев В.В. Механика упругих тел. Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского государственного технического университета, 1999. 341 с.

A. A. Adamov, I. E. Keller, N. S. Podkina

BASIC EXPERIMENTS FOR IDENTIFICATION OF THE CAP MODEL OF FLEXIBLE GRAPHITE PLASTICITY

Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia

Abstract. The development of a method for experimental determination of the plastic properties of thermally expanded graphite sheets (flexible graphite) under compressive medium stresses is the subject of this study. This problem is practically not reflected in publications, with the exception of several that offer uniaxial tension and indentation tests for its solution. The conditions of manufacture and operation of sealing elements and uniformity of stress-strain state in the specimen is allowed to allocate a range of suitable tests (all-round and triaxial compression of cylinder, free and constrained compression of cylinder, compression of cylinder in an elastic pipe and compression of parallelepiped in the channel), the samples which have the form of a solid cylinder or cube and is made of discs or squares cut from the sheet. For rings made by winding graphite foil on a cylindrical core with subsequent axial compression in the matrix, tests are additionally offered for all-round compression, axial compression in the gap between the outer and inner elastic cylindrical shells, as well as stretching in half-disks. A feature of the plastic properties of flexible graphite is its dilatancy, that is coupling of shear and volumetric plastic strains. A review of the relevant models was performed, as a result of which DiMaggio and Sandler cap model was selected, its material functions and constants were associated with the values measured and controlled in the above tests. The excessive amount of data allows us to check the adequacy of the application of the cap model to describe the plastic properties of flexible graphite.

Keywords: flexible graphite, cap plasticity models, compacted media, identification, basic experiments

REFERENCES

- [1] Chung D. Flexible graphite for gasketing, adsorption, electromagnetic interference shielding, vibration damping, electrochemical applications, and stress sensing // *Journal of Materials Engineering and Performance*. 2000. no. 9. P. 161–163.
- [2] Dowell M., Howard R. Tensile and compressive properties of flexible graphite foils // *Carbon*. 1986. no. 24. P. 311–323.
- [3] Influences of density and flake size on the mechanical properties of flexible graphite / Y. Leng, J. Gu, W. Cao et al. // *Carbon*. 1998. no. 36. P. 875–881.
- [4] Kalashnik N., Ionov S. Mechanical and thermophysical properties of graphite foils based on low-density carbon materials // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2017. no. 9 (60). P. 11–16. (in Russian).
- [5] Nanoindentation of flexible graphite: Experimental versus simulation studies / M. Khelifa, V. Fierro, J. Macutkevicius et al. // *Advanced Material Science*. 2018. no. 3 (2). P. 2–11.
- [6] Aubertin M., Li L. A porosity-dependent inelastic criterion for engineering materials // *International Journal of Plasticity*. 2004. no. 12 (20). P. 2179–2208.
- [7] Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V. A. Phenomenological Yield and Failure Criteria // *Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials* / Ed. by A. Öchsner, H. Altenbach. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. P. 49–152.
- [8] Kolupaev V., Yu M.-H., Altenbach H. Fitting of the strength hypotheses // *Acta Mechanica*. 2016. no. 6 (227). p. 1533–1556.
- [9] DiMaggio F., Sandler I. Material models for granular soils // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1971. no. 97. p. 935–950.
- [10] Livermore Software Technology Corporation. LS-DYNA® Keyword User’s Manual. Volume II. Material Models. Version R10.0. 2017.
- [11] Schwer L., Murray Y. A three-invariant smooth cap model with mixed hardening // *International Journal for Numerical and Analytical Methods In Geomechanics*. 1994. no. 18. P. 657–688.
- [12] Khoei A., Azami A. A single cone-cap plasticity with an isotropic hardening rule for powder materials // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005. no. 1 (47). P. 94–109.
- [13] Ottosen N. A Failure Criterion for Concrete // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1977. no. 103. P. 527–535.
- [14] Mahnken R. Theoretical, numerical and identification aspects of a new model class for ductile damage // *International Journal of Plasticity*. 2002. no. 7 (18). p. 801–831.
- [15] Green R. A plasticity theory for porous solids // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1972. no. 4 (14). P. 215–224.
- [16] Gurson A. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media // *Journal of Engineering Materials and Technologies*. 1977. no. 1 (99). P. 2–15.
- [17] Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup–cone fracture in a round tensile bar // *Acta Metallurgica*. 1984. no. 32. p. 157–169.
- [18] Kim K. Elasto-plastic response of porous metals under triaxial loading // *International Journal of Solids and Structures*. 1988. no. 9 (24). P. 937–945.
- [19] Gu C., Kim M., Anand L. Constitutive equations for metal powders: application to powder forming processes // *International Journal of Plasticity*. 2001. no. 2 (17). P. 147–209.
- [20] Garagash I., Nikolaevskiy V. Nonassociated flow laws and plastic strain localization // *Advances in Mechanics*. 1989. no. 1 (12). P. 131–183. (in Russian).
- [21] Shestakov N., Subich V., Demin V. Compaction, consolidation and failure of porous materials. Moscow: FIZMATLIT, 2011. 264 p. (in Russian).

Adamov Anatolij Arsangaleevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Leading Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia.

Keller Ilya Ernstovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Associated Professor, Head of laboratory, Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia.

Podkina Nataliya Sergeevna, Head of the test area, JSC “Sealur”, Perm, Russia.

- [22] Tsemenko V. Deformation of powder media. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Technical University Press, 2001. 104 p. (in Russian).
- [23] Adamov A. Comparative analysis of the two-constant generalizations of Hooke's law for isotropic elastic materials at finite strains // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2001. no. 5 (42). p. 890–897.
- [24] High Pressure Triaxial Cell for Metal Powder / P. Doremus, C. Geindreau, A. Martin et al. // Powder Metallurgy. 1995. no. 4 (38). P. 284–287.
- [25] Eliseev V. Mechanics of elastic bodies. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Technical University Press, 1999. 341 p. (in Russian).

А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ДИСКА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ С УСКОРЕНИЕМ

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук,
г. Владивосток, Россия*

Аннотация. Рассматривается деформирование вязкоупругого диска, вращающегося с изменяющейся скоростью (разгон, торможение и вращение с постоянной скоростью). Для математического моделирования процесса деформирования используется теория течения. При предположении плоского напряженного состояния получена система дифференциальных уравнений для определения полей напряжений, обратимых и необратимых деформаций и перемещений. Численное решение этой системы уравнений найдено с помощью конечно-разностного метода. В случае решения осесимметричной задачи используется метод конечных элементов, реализованный в пакете Freefem++. Рассмотрено деформирование полого диска и диска с жестким включением, как постоянной толщины, так и переменной.

Ключевые слова: вязкоупругость, вращающийся диск, необратимое деформирование, остаточные напряжения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.66.88.014

УДК: 539.374

Расчету ползучести вращающихся дисков посвящено множество публикаций [1–8] и др., поскольку во многих механизмах и машинах вращающиеся диски являются одними из важных элементов. В процессе эксплуатации дисков может происходить их необратимое деформирование с нежелательными изменениями их функциональных свойств. Как правило [1–6], при математическом моделировании необратимого деформирования вращающихся дисков предполагают, что скорость вращения сохраняется постоянной. Однако в большинстве случаев диски работают при изменяющихся

© Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., 2020

Бегун Александра Сергеевна

e-mail: asustinova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Россия, *Ковтанюк Лариса Валентиновна*

e-mail: asustinova@mail.ru, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия,

Поступила 28.06.2020

режимах эксплуатации. В работах [7, 8] исследовано деформирование упругого неоднородного диска, вращающегося с уменьшающейся скоростью. Настоящая работа посвящена расчету напряженно-деформированного состояния вязкоупругого диска, вращающегося с изменяющейся скоростью. Последовательно рассматриваются разгон, вращение с постоянной скоростью и торможение диска. В данном случае наряду с центробежными силами инерции также учитываются силы инерции, связанные с угловым ускорением.

Определяющие соотношения. При математическом моделировании исследуемого процесса деформации будем считать малыми. Компоненты тензора полных деформаций d_{ij} в данном случае определяются как сумма упругих деформаций e_{ij} и деформаций ползучести p_{ij}

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1)$$

здесь u_i — компоненты вектора перемещений.

Предполагаем, что напряжения в среде определяются упругими деформациями согласно закону Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (2)$$

где (2) λ, μ — параметры Ламе.

Считаем, что в процессе деформирования напряженное состояние не достигает поверхности текучести, а накопление необратимых деформаций свяжем с механизмом ползучести. Для моделирования процесса ползучести воспользуемся теорией течения. Тогда связь напряжений со скоростями необратимых деформаций ε_{ij}^v примем в виде степенного закона ползучести Нортон:

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \quad V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (3)$$

В соотношениях (3) B, n постоянные материала, $V(\sigma_{ij})$ — потенциал ползучести, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений.

Использование кусочно-линейных потенциалов в (3) приводит к необходимости производить расчеты в нескольких областях, соответствующих определенным граням и ребрам. В то же время в рассматриваемом случае вид кусочно-линейного потенциала сравним по сложности с непрерывным, поэтому в качестве Σ будем использовать

$$\Sigma = \sqrt{3/2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2}, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4)$$

Плоское напряженное состояние. Пусть кольцевой диск, механические свойства которого описаны выше, вращается с переменной угловой скоростью $\omega(t)$. Внешний радиус диска $r = R$, внутренний — $r = r_0$. Предполагая диск достаточно тонким, считаем, что реализуется плоское напряженное состояние. Тогда отличными от нуля будут компоненты напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$.

Рассмотрим два вида граничных условий: свободный диск

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

и диск с жестким включением

$$u_r|_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

Считаем, что до начала вращения диска напряжения и деформации в материале отсутствуют.

Полные деформации в рассматриваемом случае связаны с перемещениями соотношениями:

$$d_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}. \quad (7)$$

Для отличных от нуля компонент тензора скоростей упругих деформаций, используя закон Гука (2), найдем

$$\varepsilon_{rr}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr} - \lambda\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\varphi\varphi} - \lambda\dot{\sigma}_{rr}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\varphi}}{2\mu}. \quad (8)$$

Здесь и далее $(\dot{})$ обозначена производная по времени.

С началом процесса необратимые деформации увеличиваются за счет ползучести. Тогда, воспользовавшись законом ползучести (3), найдем компоненты скоростей необратимых деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^\nu &= \frac{Bn}{2} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^\nu = \frac{Bn}{2} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^\nu = \frac{3Bn}{2} \sigma_{r\varphi} Q^{\frac{n}{2}-1}, \\ \varepsilon_{zz}^\nu &= -\frac{Bn}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad Q = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае вращения диска с переменной скоростью на диск будут действовать две системы инерционных сил, связанные с наличием центростремительного $r\omega^2$ и углового ускорений $r\frac{d\omega}{dt}$. Тогда уравнения равновесия для диска с переменной толщиной $h(r)$ запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\sigma_{rr}) - \sigma_{\varphi\varphi}h(r) = -\rho r^2\omega^2h(r), \quad \frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\sigma_{r\varphi}) + \sigma_{r\varphi}h(r) = \rho r^2h(r)\frac{d\omega}{dt}. \quad (10)$$

Компоненту тензора напряжений $\sigma_{r\varphi}$ найдем интегрируя второе уравнение равновесия (10) и используя граничное условие (5)

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{\rho}{r^2} \frac{d\omega}{dt} \left(\int_r^R r^3 h(r) dr \right). \quad (11)$$

Согласно соотношениям (1) и (7) для скоростей деформаций получим

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^e}{\partial r} + r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial r} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p = 0. \quad (12)$$

При интегрировании первого уравнения равновесия (10) введем функцию напряжений $\varphi(r, t)$

$$\sigma_{rr} = \frac{\varphi}{rh(r)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{h(r)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \rho\omega^2 r^2. \quad (13)$$

Тогда для определения этой функции напряжений $\varphi(r, t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{r^3(7\lambda + 6\mu)\rho\omega^2 + 2(\lambda + \mu) \left(r \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + r \frac{\partial^3 \varphi}{\partial^2 r \partial t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{2r\mu(3\lambda + 2\mu)} + BnQ^{\frac{n}{2}-1} \times$$

$$\times \frac{\left(7r^2\rho\omega^2 - \frac{2\varphi}{r} + 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \right)}{2} + r \frac{Bn}{2} \left(2 \left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\varphi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left[Q^{\frac{n}{2}-1} \right], \quad (14)$$

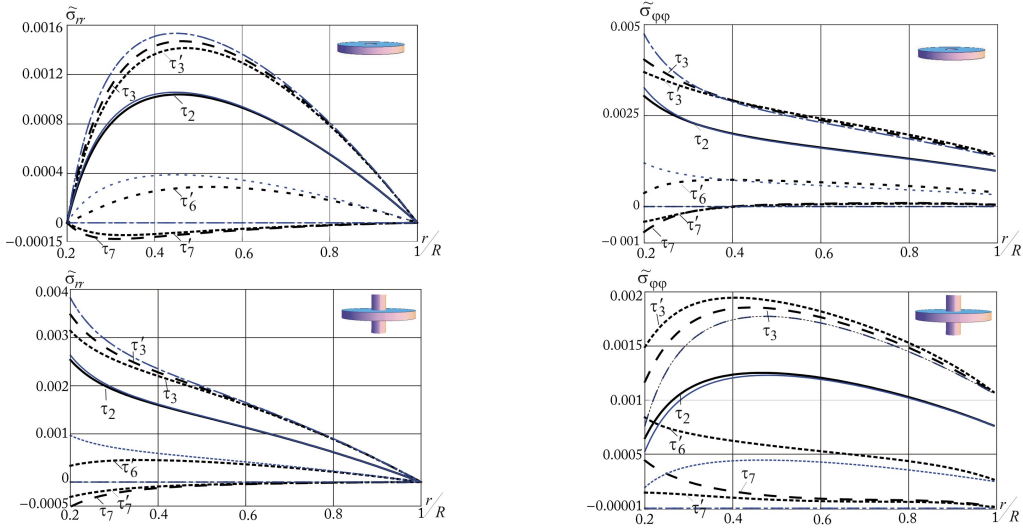


Рис. 1. Распределение напряжений $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$

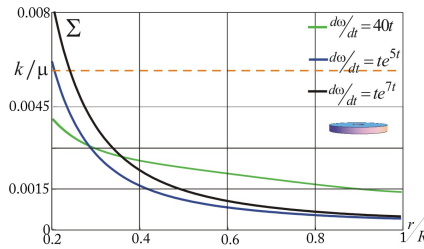


Рис. 2. Распределения Σ при различных режимах разгона диска

Для численного решения данного уравнения воспользуемся конечно-разностным методом. Граничные и начальные условия для функции напряжений $\varphi(r, t)$ для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(r_0, t) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0; \quad (15)$$

для диска с жестким включением:

$$\begin{aligned} \varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(R, t) = 0, \\ 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \Big|_{r=r_0} + 2\rho r_0^2 \omega(t) \omega'(t) \right) - \frac{\lambda}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=r_0} + \\ + \mu(3\lambda + 2\mu) B n \left(2 \left(r_0^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right) - \frac{\varphi(r_0)}{r_0} \right) \left[Q(\varphi(r_0, t), r_0, t) \right]^{\frac{n}{2}-1} = 0. \end{aligned}$$

По известной функции напряжений $\varphi(r, t)$ можно найти компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$, компоненты обратимых $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}$ и необратимых $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}$ деформаций. Для нахождения перемещения u_r воспользуемся соотношением $u_r = r(e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi})$. Компоненту перемещений u_φ получим решая дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 2(e_{r\varphi} + p_{r\varphi}), \quad e_{r\varphi} = \frac{\rho}{2\mu r^2} \frac{d\omega}{dt} \left(\int_r^R r^3 h(r) dr \right), \quad p_{r\varphi} = \int_0^t \varepsilon_{r\varphi}^\nu dt, \quad u_\varphi \Big|_{r=r_0} = r_0 \sin \theta(t).$$

Считаем, что угловая скорость в промежутке времени $0 \leq t \leq t_3$ возрастает, затем при $t_3 \leq t \leq t_4$ поддерживается постоянной, и далее уменьшается до нуля $t_4 \leq t \leq t_7$.

Результаты расчетов приведены в безразмерных переменных $\tilde{r} = \frac{r}{R}$, $\tau = t\sqrt{\alpha}$, $\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}$, $\tilde{u}_i = \frac{u_i}{R}$ при значении постоянных

$$\begin{aligned} \lambda = 79.61 \text{ ГПа}, \quad \mu = 119.42 \text{ ГПа}, \quad B = 3.5 \cdot 10^{-25} \text{ с}^{-1} \text{ Па}^{n-1}, \quad n = 3, \\ \rho = 8000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \frac{r_0}{R} = 0.2, \quad \alpha = 400 \text{ с}^{-2}, \quad \beta = 200 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

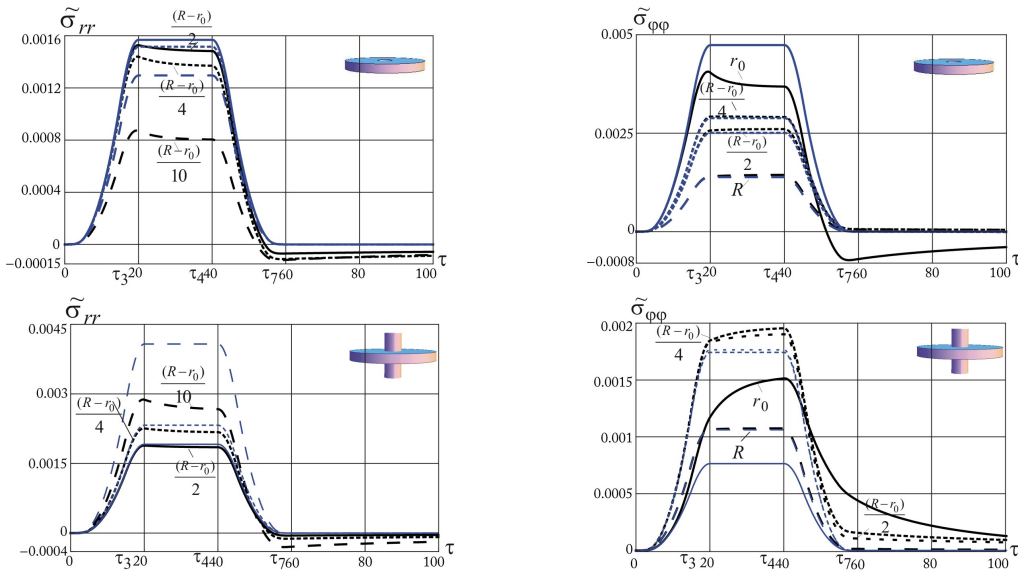


Рис. 3. Изменение напряжений с течением времени

Распределения напряжений в зависимости от радиуса для диска постоянной толщины в различные моменты времени приведено на рис. 1 (черная линия — вязкоупругое

решение, синяя линия — упругое). Здесь и далее результаты расчетов приведены для кусочно-линейного закона изменения углового ускорения. Различие в распределении Σ при различных режимах разгона диска показано на рис. 2, при более резком разгоне Σ может существенно увеличиваться даже при одинаковых итоговых скоростях вращения. Изменение напряжений с течением времени показано на рис. 3. Распределение перемещения u_r по радиусу в различные моменты времени приведено на рис. 6. Для дисков с переменными профилями и одинаковой массой распределение напряжений $\tilde{\sigma}_{rr}$ и $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$ показано на рис. 5 ($h_1(r) = kr^m$ — красная линия, $h_2(r) = ke^{-(\frac{r}{R})^l}$ — синяя линия, $h_3(r) = h_0$ — черная линия).

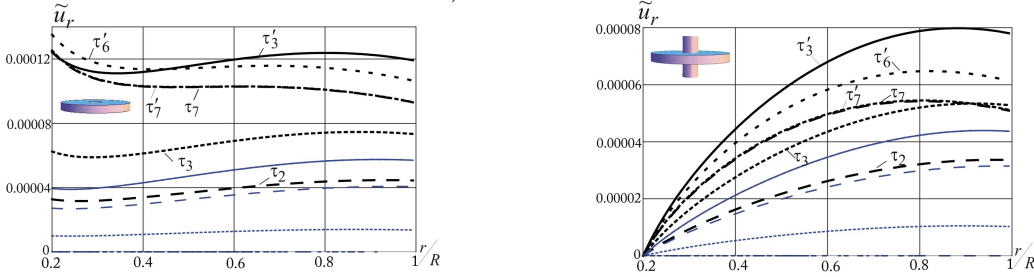


Рис. 4. Распределение перемещений в зависимости от радиуса

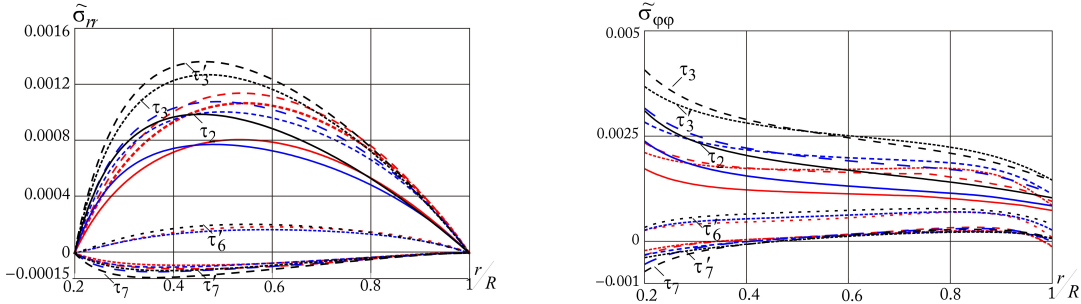


Рис. 5. Распределения напряжений для различных профилей дисков

Осесимметричная задача. Для более точного расчета утолщенных вращающихся дисков необходимо решить пространственную задачу с осевой симметрией. Для этого будем использовать метод конечных элементов. В рассматриваемом случае для компонент полных деформаций имеем:

$$d_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad d_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (16)$$

$$d_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad d_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad d_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right).$$

Принцип возможных перемещений запишем в виде

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_T} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dS, \quad \delta \mathbf{u} \quad (\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } S_u), \quad (17)$$

где \mathbf{f} — вектор массовых сил (в нашем случае силы инерции, связанные с центробежным и угловым ускорениями), \mathbf{T} — поверхностные силы. Шаг по времени Δt выберем достаточно малым. Предполагаем, что в момент времени t все величины

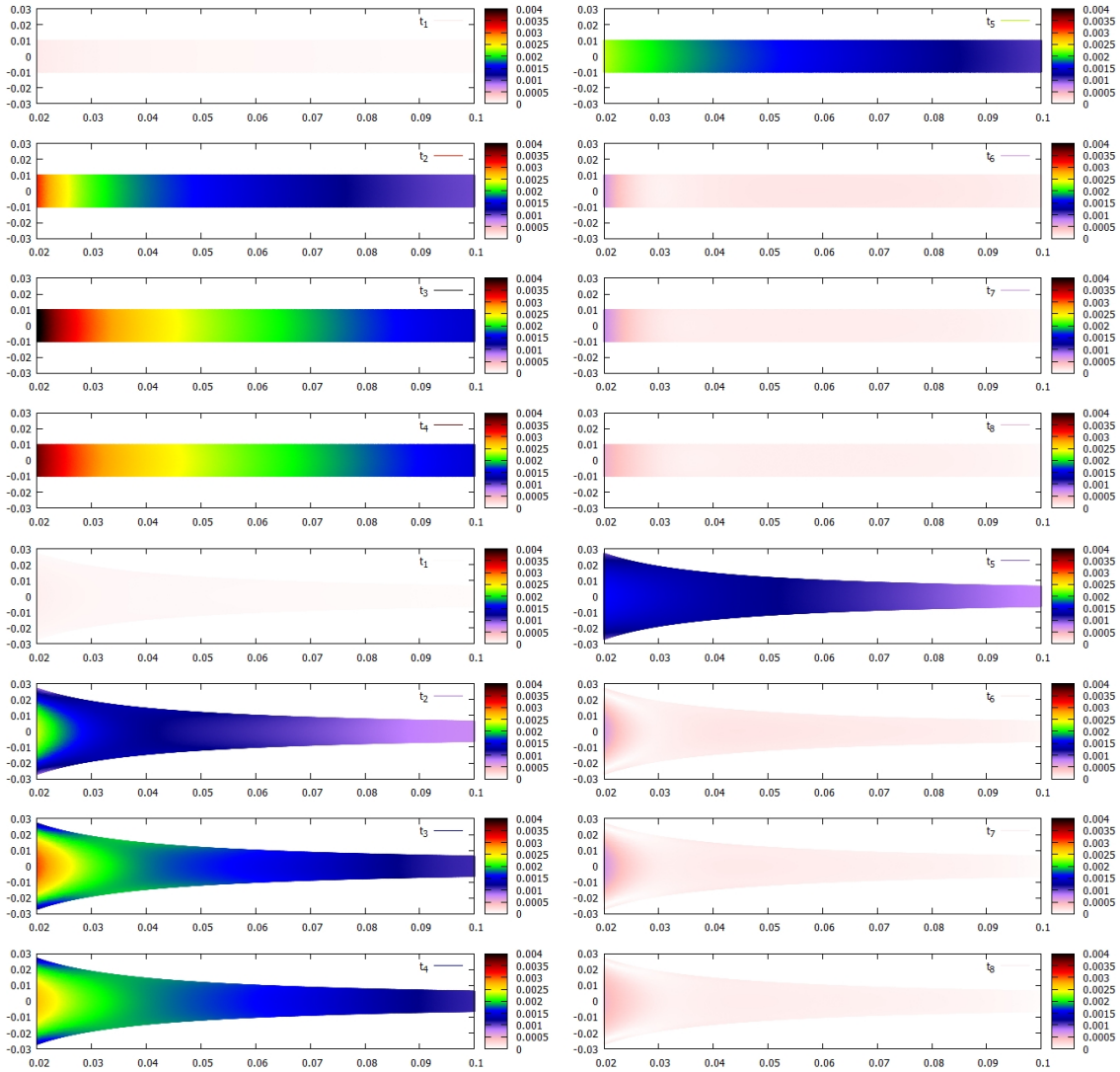


Рис. 6. Распределение интенсивностей напряжений Σ/μ зависимости от радиуса

известны, и необходимо их определить в следующий момент времени $t + \Delta t$. Приращения напряжений связаны с приращением обратимых деформаций законом Гука (2):

$$\Delta\sigma_{ij} = \lambda\Delta e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\Delta e_{ij} \quad (18)$$

Тогда линейризованное уравнение принципа возможных перемещений, записанное в приращениях:

$$\int_V \Delta\sigma : \delta\mathbf{d}dV = \int_V \rho^{t+\Delta t}\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u}dV + \int_{S_T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{u}dS - \int_V {}^t\sigma : \delta\mathbf{d}dV. \quad (19)$$

Численное решение задачи найдено методом конечных элементов с применением пакета FreeFem++. На рис.5 показаны распределения интенсивностей напряжений в

зависимости от радиуса в различные моменты времени для диска постоянной толщины и диска параболического профиля (масса дисков одинаковая).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wahl A. M. A Comparison of Flow Criteria Applied to Elevated Temperature Creep of Rotating Disks with Consideration of the Transient Condition. Berlin, Heidelberg, 1962. p. 195–214.
- [2] Gupta S. K., Sonia T. P. Creep Transition in a thin Rotating Disc of variable density // Defence Sci. Journal. 2000. Vol. 50. P. 147–153.
- [3] Rattan M., Chamoli N., Singh S. B. Creep analysis of an isotropic functionally graded rotating disc // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2010. Vol. 5, no. 9. p. 419–431.
- [4] Левин А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. М.: Госэнергоиздат, 1963. 624 с.
- [5] Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
- [6] Zharfi H., Toussi H. E. Numerical creep analysis of FGM rotating disc with GDQ method // J Theor Appl Mech. Vol. 2017, no. 55(1). p. 331–41.
- [7] Dai T., Dai H. L. Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed // Appl. Math. Model. 2016. Vol. 40. p. 7689–7707.
- [8] Displacement and Stress Fields in a Functionally Graded Fiber-Reinforced Rotating Disk with Nonuniform Thickness and Variable Angular Velocity / Y. Zheng, H. Bahaloo, D. Mousanezhad et al. // J. Eng. Mater. Technol. 2017. Vol. 139. p. 1–10.

A. S. Begun, L. V. Kovtanuk

DEFORMING OF A VISCOELASTIC DISK ROTATING WITH ACCELERATION

Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The deformation of a viscoelastic disk rotating with a changing speed is considered. Within the framework of the theory of flow, relations are obtained that allow one to calculate the fields of stresses, strains, displacements, and velocities. To solve these equations in the case of a plane stress state, the finite-difference method is used, in the case of an axisymmetric problem, the finite element method implemented in the Freefem ++ package is used. Acceleration, braking and rotation at a constant speed are considered. The deformation of a hollow disk and a disk with a hard inclusion of both a constant thickness and a variable is considered.

Keywords: viscoelasticity, rotating disk, irreversible deformation, residual stresses

REFERENCES

- [1] Wahl A. M. A Comparison of Flow Criteria Applied to Elevated Temperature Creep of Rotating Disks with Consideration of the Transient Condition. Berlin, Heidelberg, 1962. P. 195–214.
- [2] Gupta S. K., Sonia T. P. Creep Transition in a thin Rotating Disc of variable density // Defense Sci. Journal. 2000. Vol. 50. P. 147–153.
- [3] Rattan M., Chamoli N., Singh S. B. Creep analysis of an isotropic functionally graded rotating disc // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2010. Vol. 5, no. 9. p. 419–431.
- [4] Levin A. V. Steam turbine blades and discs. M.: Gosenergoizdat, 1963. 624 p.
- [5] Demyanushko I. V., Birger I. A. Calculation of the strength of rotating discs. M.: Mechanical Engineering, 1978. 247 p.
- [6] Zharfi H., Toussi H. E. Numerical creep analysis of FGM rotating disc with GDQ method // J Theor Appl Mech. Vol. 2017, no. 55 (1). p. 331–41.
- [7] Dai T., Dai H. L. Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed // Appl. Math. Model. 2016. Vol. 40. P. 7689–7707.
- [8] Displacement and Stress Fields in a Functionally Graded Fiber-Reinforced Rotating Disk with Nonuniform Thickness and Variable Angular Velocity / Y. Zheng, H. Bahaloo, D. Mousanezhad et al. // J. Eng. Mater. Technol. 2017. Vol. 139. p. 1–10.

Begun, Aleksandra Sergeevna, Candidate of Phys. & Math., Researcher of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia,

Kovtanuk Larisa Valentinovna, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia,

В. М. Мирсалимов

О ЧАСТИЧНОМ ЗАКРЫТИИ ЩЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ С КОНЦЕВЫМИ ЗОНАМИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В МАССИВЕ ГОРНОЙ ПОРОДЫ

Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. Рассматривается задача о сжатии изотропной горной среды с щелью переменной ширины с концевыми пластическими зонами. Считается, что взаимодействие поверхностей щели под действием тектонических и гравитационных усилий в массиве горной породы может приводить к возникновению зон контакта. Исследуется случай возникновения нескольких участков контакта берегов щели. При этом считается, что на некоторой части площадки контакта возникает сцепление берегов, на остальной части возможно проскальзывание. Нахождение неизвестных параметров, характеризующих частичное закрытие щели, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Определены контактные напряжения, значения размеров участков контакта и концевых зон пластических деформаций.

Ключевые слова: массив горной породы, щель переменной ширины, концевые зоны пластических деформаций, тектонические и гравитационные усилия, контактные напряжения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.51.68.015

УДК: 539.375

Введение. В механике горных пород, изучающей закономерности напряженного состояния и механического поведения горного массива при добыче полезных ископаемых, широкое применение имеют методы механики разрушения. Исследование в области очага разрушения горного массива очень важно в горной науке. Одной из актуальных проблем является исследование разрушения горного массива, ослабленного различными трещинами, щелями, полостями.

Рассмотрим разрушение массива горной породы, ослабленного прямолинейной щелью переменной ширины $h(x)$, поверхность которой находится под действием внутреннего давления $p(x)$. В процессе деформации горного массива в некоторых точках среды могут появляться зоны, в которых закон Гука не выполняется, т.е. напряжения превосходят предел упругости. Будем горную породу моделировать реальным хрупким телом в соответствии с моделью Леонова–Панасюка–Дагдейла [1]. По мере нагружения горного массива силовой нагрузкой будут возникать концевые зоны,

© Мирсалимов В. М., 2020

Мирсалимов Вагиф Мирзахмедович

e-mail: mir-vagif@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры механики, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 20.06.2020

которые моделируются как области ослабленных межчастичных связей материала массива [2, 3].

Исследуется квазистатический процесс деформирования горного массива. При наличии вблизи щели зон с нарушенной структурой в процесс разрушения вовлекается достаточно большая часть щели и область, в которой происходит разрушение, рассматривается как некоторый слой (концевая зона), примыкающий к щели и содержащий материал с частично нарушенными связями. Используется модель Леонова–Панасюка–Дагдейла, согласно которой пластическая область сосредоточена в некоторой узкой области на продолжении трещины. Опубликован ряд работ, посвященных исследованию деформированных тел с трещинами с учетом наличия сил сцепления между берегами и возможности их контакта [4–15].

Как известно, получить решение задачи механики разрушения с учетом контакта берегов щели значительно сложнее. Это связано с увеличением числа неизвестных параметров задачи, таких как контактные напряжения, границы контакта и т.п. В тоже время эти проблемы с учетом частичного контакта берегов щели представляют значительный интерес при исследовании разрушения горных пород, композитных материалов и др. Вопросы частичного контактирования берегов щели переменной ширины в горной породе мало изучены. Учет переменной ширины щели в горном массиве при контакте ее берегов практически не исследован. В настоящей работе дана общая постановка задачи, в которой учитывается переменность ширины щели, трение и сцепление ее берегов при действии тектонических и гравитационных сил. Получено решение для щели с учетом пластических деформаций в концевых зонах. Контактные напряжения определяются в квадратурах, что удобно для практического применения в инженерных расчетах.

Постановка задачи. Рассмотрим массив горной породы, ослабленный прямолинейной щелью переменной ширины $h(x)$, сравнимой с упругими деформациями. Принято, что горная порода является однородным и изотропным телом, щель расположена достаточно далеко от поверхности земли. Длина щели принята $2l = b - a$. Пусть тяжелое полупространство $y < H$ ослаблено одной прямолинейной щелью, параллельной поверхности полупространства. Рассматривается модель щели с концевыми зонами пластических деформаций с постоянными напряжениями.

В процессе нагружения массива горной породы при некотором соотношении физических и геометрических параметров среды и действующих тектонических и гравитационных усилий и поверхностных нагрузок появляются зоны сжимающих напряжений, в которых берега щели могут войти в контакт. Это приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов щели. Считаем, что в процессе деформирования берега щели вступают в контакт на участках (α_k, β_k) ($k = 1, 2, \dots, n$). Принято, что каждая площадка контакта состоит из участка сцепления берегов (c_k, d_k) и двух участков (α_k, c_k) и (d_k, β_k) , на которых возможно проскальзывание.

Напряженно-деформированное состояние массива горной породы формируется главным образом от действия тектонических и гравитационных усилий. Тектонические усилия принимаем постоянными по глубине массива. Распределение напряжений в массиве горной породы от действия гравитационных усилий принято согласно гипотезе А.Н. Динника:

$$\sigma_x = -\lambda\rho_*g(H - y), \quad \sigma_y = -\rho_*g(H - y), \quad \tau_{xy} = 0,$$

где σ_x, σ_y — горизонтальные и вертикальные нормальные напряжения соответственно; τ_{xy} — касательные напряжения; $\lambda = \nu/(1 - \nu)$ — коэффициент бокового распора породы; ν — коэффициент Пуассона; ρ_* — средняя плотность горного массива; g — ускорение силы тяжести; $(H - y)$ — глубина рассматриваемой точки массива от поверхности земли.

Кроме того, считается, что вдали от щели упругое полупространство сдеформировано напряжениями (имитирующими тектонические усилия)

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = 0,$$

а поверхность полупространства $y = H$ подвержена постоянной нормальной нагрузке $\sigma_y = \sigma_y^\infty$ и равной нулю касательной.

Обозначим: L_1 — совокупность участков сцепления; L_2 — совокупность участков проскальзывания; L_3 — совокупность участков, на которых действует внешнее давление $p(x)$; L_4 — совокупность концевых пластических участков $(a_1, a) \cup (b, b_1)$. В процессе деформирования горного массива в зонах, где берега щели вошли в контакт, возникают нормальные $p_y(x)$ и касательные $p_{xy}(x)$ напряжения, значения которых заранее неизвестны и подлежат определению. Отметим, что в рассматриваемом случае щель состоит из трех областей: 1) противоположные берега щели, нагруженные давлением; 2) концевые зоны пластических деформаций (a_1, a) и (b_1, b) ; 3) зоны (α_k, β_k) , в которых берега щели вошли в контакт.

Граничные условия задачи на берегах щели и концевых зон в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= p_y(x) - ip_{xy}(x) \quad \text{на } L_1, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= (1 - if_0(x))p_y(x) \quad \text{на } L_2, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= -p(x) \quad \text{на } L_3, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \sigma_s - i\tau_s \quad \text{на } L_4, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(v^+ - v^-) &= -h'(x) \quad \text{на } L_1 + L_2, \\ \frac{\partial}{\partial x}(u^+ - u^-) &= 0 \quad \text{на } L_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь принято, что на участках проскальзывания имеют место силы сухого трения (закон трения принимается в форме Амонтона–Кулона); $f_0(x)$ — коэффициент трения; $(u^+ - u^-)$ — касательная, $(v^+ - v^-)$ — нормальная составляющие раскрытия берегов щели.

Размеры контактных и концевых зон пластических деформаций заранее неизвестны и подлежат определению.

Метод решения. Напряженное состояние в горном массиве с щелью представим в виде суммы:

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ — компоненты тензора напряжений в нетронутом (сплошном) массиве горной породы $y < H$:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 + \sigma_y^0 &= \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty + \frac{\rho_* g}{2i(1 - \nu)}(z - \bar{z} - 2iH), \\ \sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 &= \sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + \frac{\rho_* g(1 - 2\nu)}{2i(1 - \nu)}(z - \bar{z} - 2iH). \end{aligned}$$

Считается, что щель расположена достаточно далеко от поверхности полупространства, при этом граничные условия на берегах щели будем удовлетворять точно, а на границе полупространства приближено, асимптотически. С учетом формул (3) граничные условия (1) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= p_y(x) - ip_{xy}(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_1, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= (1 - if_0(x))p_y(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_2, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= -p(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_3, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= \sigma_s - i\tau_s - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_4.\end{aligned}\tag{4}$$

Напряженное состояние $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению для функций напряжений. Следовательно, компоненты тензора напряжений $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ и вектора перемещений u_1, v_1 выразим через две кусочно-аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$ $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ [16]:

$$\begin{aligned}\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u_1 + iv_1) &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},\end{aligned}\tag{5}$$

где μ — модуль сдвига материала горной породы.

С помощью граничных условий (4) и представлений (5) приходим [16] к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами:

$$\begin{aligned}[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2f(t), \\ [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 0,\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$f(t) = \begin{cases} p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_1, \\ (1 - if_0(x))p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_2, \\ -p_x - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_3, \\ \sigma_s - i\tau_s - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_4. \end{cases}$$

Так как напряжения в горном массиве всюду ограничены, решение краевой задачи (6) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Решение задачи (6) имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \Omega(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(t)}{X(t)(t-z)} dt, \\ X(z) &= \sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}.\end{aligned}\tag{7}$$

При $z \rightarrow \infty$ $X(z) \rightarrow z + O(1/z)$. Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу щели.

Из условия разрешимости краевой задачи (6) в классе всюду ограниченных функций имеем

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f(t)}{X^+(t)} dt = 0, \quad \int_{a_1}^{b_1} \frac{tf(t)}{X^+(t)} dt = 0.\tag{8}$$

Соотношения (8) служат для определения неизвестных параметров a_1 и b_1 .

В соотношения (7) и (8) входят неизвестные контактные напряжения $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$. Для их определения построим интегральные уравнения. Условиями, определяющими неизвестные функции $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$, являются соотношения (2). Используя вторую формулу в соотношении (5) и граничные значения функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ на отрезке $y = 0$ $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, получаем

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x}(v^+ - v^-) \right]. \quad (9)$$

Теперь, используя формулы Сохоцкого–Племеля [17] и учитывая формулу (7), найдем

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{iX^+(x)}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(t)}{X^+(t)(t-x)} dt. \quad (10)$$

С помощью соотношений (2), (7), (9) и (10) после ряда преобразований получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{X_1^+(x)}{\pi} \left[\int_{L_1+L_2} \frac{p_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma_y^0(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \right. \\ & \left. - \int_{L_3} \frac{p(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt + \int_{L_4} \frac{\sigma_s}{X_1^+(t)(t-x)} dt \right] = \frac{2\mu}{1 + \kappa} h'(x), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{L_1} \frac{p_{xy}(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt + \int_{L_2} \frac{f_0 p_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \\ & - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau_{xy}^0(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt + \int_{L_4} \frac{\tau_s}{X_1^+(t)(t-x)} dt = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $X_1^+(t) = \sqrt{(t-a_1)(b_1-t)}$.

Метод численного решения и анализ результатов. Решение интегрального уравнения (11) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [17]. Интегральное уравнение (11) представим в виде

$$\begin{aligned} & \int_{L_1+L_2} \frac{p_y^*(\tau)}{\tau-t} d\tau = f_*(t), \quad p_y^*(t) = \frac{p_y(t)}{X_1(t)}, \\ & f_*(t) = \frac{2\mu h'(t)}{(1+\kappa)X_1(t)} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma_y^0(\tau)}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} d\tau + \\ & + \int_{L_3} \frac{p(\tau)}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} d\tau - \int_{L_4} \frac{\sigma_s}{X_1^+(\tau)(\tau-t)} d\tau. \end{aligned}$$

Введем кусочно-аналитическую функцию $F_*(z)$, заданную интегралом Коши, плотность которого является искомым решением интегрального уравнения:

$$F_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{p_y^*(\tau)}{t-\tau} d\tau.$$

Аналитическая функция $F_*(z)$ представляет собой решение задачи линейного сопряжения граничных значений:

$$F_*^+(\tau) + F_*^-(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i}. \quad (13)$$

Решение краевой задачи (13) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$F_*(z) = \frac{X_2(z)}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(t-\tau)} d\tau,$$

где

$$X_2(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(z-\alpha_k)(z-\beta_k)}, \quad f_*^1(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i},$$

$$X_2^+(\tau) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(\tau-\alpha_k)(\tau-\beta_k)}.$$

С учетом формул Сохоцкого–Племеля получаем решение интегрального уравнения (11):

$$p_y^*(t) = F_*^+(t) - F_*^-(t),$$

$$F_*^+(t) = X_2^+(t) \left(\frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau \right),$$

$$F_*^-(t) = X_2^-(t) \left(-\frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau \right).$$

Учитывая, что $X_2^-(t)/X_2^+(t) = -1$, имеем

$$p_y^*(t) = \frac{X_2^+(t)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau,$$

откуда следует

$$p_y(t) = X_1^+(t) \frac{X_2^+(t)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau. \quad (14)$$

Для определения параметров α_k и β_k имеем уравнения

$$\int_{L_1+L_2} \frac{t^{k-1} f_*^1(t)}{X_2^+(t)} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Недостающие n уравнений для определения координат концов участков контакта берегов щели получим из условий

$$v^+(\alpha_k) - v^-(\alpha_k) = -h(\alpha_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Имеем

$$v^+(x) - v^-(x) = \frac{1}{4\pi i \gamma} \int_{\alpha_1}^x G(t) dt,$$

где

$$\gamma = \frac{\mu}{\pi(1 + \kappa)}, \quad G(t) = [\Phi + \bar{\Phi}]^+ - [\Phi + \bar{\Phi}]^-.$$

Используя предыдущие формулы, находим искомые уравнения

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1} G(t) dt = -4\pi i \gamma h(\alpha_1), \quad \int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} G(t) dt = -4\pi i \gamma [h(\alpha_{k+1}) - h(\beta_k)], \quad (16)$$

$$k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Аналогично, решая сингулярное интегральное уравнение (12), получим

$$p_{xy}(x) = \frac{X_1^+(x)X_3^+(x)}{\pi^2} \int_{L_1} \frac{f_{xy}(\tau)}{X_3^+(\tau)(\tau - x)} d\tau, \quad (17)$$

где

$$X_3^+(x) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(x - c_k)(x - d_k)},$$

$$f_{xy}(x) = - \int_{L_2} \frac{f_0 p_y(t)}{X_1^+(t)(t - x)} dt + \int_{\alpha_1}^{b_1} \frac{\tau_{xy}^0(t)}{X_1^+(t)(t - x)} dt - \int_{L_4} \frac{\tau_s}{X_1^+(t)(t - x)} dt.$$

Для определения неизвестных c_k и d_k имеем

$$\int_{L_1} \frac{t^{k-1} f_{xy}(t)}{X_3^+(t)} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

Недостающие m уравнений для нахождения координат концов участков контакта получим из условий

$$u^+(c_k) - u^-(c_k) = \int_{\alpha_1}^{c_k} \frac{\partial}{\partial t} (u^+ - u^-) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Имеем

$$\int_{\alpha_1}^{c_1} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma h(c_1), \quad \int_{d_k}^{c_{k+1}} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma [h(c_{k+1}) - h(d_k)], \quad (19)$$

$$k = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Для определения участков сцепления имеем полную систему уравнений.

При вычислении контактных напряжений и размеров концевых и контактных зон полагалось, что на берега щели действуют постоянное давление.

С увеличением размера концевой зоны контактные напряжения уменьшаются. Характер изменения касательных контактных напряжений $p_{xy}(x)$ вдоль контактной зоны подобен изменению нормальных контактных напряжений $p_y(x)$, но абсолютные значения касательных напряжений существенно меньше.

Для определения предельного состояния, при котором происходит рост щели, используем критическое условие

$$|(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-)| = \delta_c,$$

где δ_c — характеристика трещиностойкости материала массива, определяемая экспериментально.

Выводы. Предложена эффективная схема расчета частично закрытой тектоническими и гравитационными силами щели переменной ширины с концевыми зонами под действием внутреннего давления. Анализ модели частичного закрытия щели переменной ширины с концевыми зонами в изотропной горной среде при наличии гравитационных и тектонических усилий сводится к параметрическому исследованию системы сингулярных интегральных уравнений при различных геометрических и физических параметрах горной среды. Полученные соотношения позволяют найти решение обратной задачи, т.е. определить параметры напряженного состояния горного массива, при которых имеет место заданная область контакта берегов щели переменной ширины.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. К., 1991.
- [2] Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин [и др.]. М.: Физматлит, 2008.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Физматлит, 2001.
- [4] Хлуднев А. М. Теория трещин с возможным контактом берегов // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 4. с. 41–82.
- [5] Мирсалимов В.М. Контактная задача о взаимодействии берегов щели переменной ширины с концевыми зонами пластических деформаций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2(28). с. 24–34.
- [6] Mirsalimov V. M. Simulation of partial closure of a variable width slot with interfacial bonds in end zones in an isotropic medium // International Journal of Damage Mechanics. 2016. Vol. 25. P. 266–279.
- [7] Мустафаев А.Б. Взаимодействие берегов щели переменной ширины при изгибе полосы (балки) под воздействием температурного поля // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 3(28). с. 30–36.
- [8] Mirsalimov V. M., Mustafayev A. B. Inhibition of a curvilinear bridged crack by induced thermoelastic stress field // Journal of Thermal Stresses. 2016. Vol. 39. p. 1301–1319.
- [9] Мир-Салим-заде М. В. Частичный контакт берегов щели переменной ширины в подкрепленной стрингерами пластине // Физико-химическая механика материалов. 2016. Т. 25, № 3. с. 29–34.
- [10] Mir-Salim-zada M. Contact problem for a stringer plate weakened by a periodic system of variable width slots // Structural Engineering and Mechanics. 2017. Vol. 62(6).
- [11] Мир-Салим-заде Частичное закрытие прямолинейных трещин со связями в стрингерной пластине с отверстием // Проблемы машиностроения. НАН Украины. 2017. Vol. 20, no. 2. p. 46–53.
- [12] Мустафаев А.Б. Замедление роста щели переменной ширины под действием температурного поля // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 1. с. 168–176.
- [13] Mirsalimov V. A contact problem for a plane weakened by a periodic system of variable width slots // Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. Vol. 23.
- [14] Мир-Салим-заде М.В. Частичное закрытие прямолинейной трещины, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. № 14(4). с. 313–322.
- [15] Mirsalimov V. Partial closure of the periodic system of variable width bridged slits in an isotropic medium under compression // International Journal of Damage Mechanics. 2020. Vol. 29. p. 529–546.
- [16] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
- [17] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

V. M. Mirsalimov

ON PARTIAL CLOSURE OF VARIABLE WIDTH SLIT WITH END ZONES OF PLASTIC DEFORMATIONS IN A ROCK

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

Abstract. The problem of compression of an isotropic rock medium with a slit of variable width is considered. The slit has end plastic zones. It is assumed that the interaction of slit surfaces under tectonic and gravitational forces in a rock mass can lead to the formation of contact zones. The case of the occurrence of several contact areas of the slit faces is considered. It is assumed that the cohesion of the faces occurs on some part of the contact area, and slippage is possible on the rest. Finding unknown parameters characterizing the partial closure of the slit is reduced to solving a system of singular integral equations. The contact stresses, sizes of contact areas and end zones of plastic deformations are determined.

Keywords: rock, slit of variable width, end zones of plastic deformations, tectonic and gravitational forces, contact stresses.

REFERENCES

- [1] Panasyuk V. Mechanics of quasi-brittle fracture of materials. K., 1991.
- [2] Limit state of deformable bodies and rocks / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, R. I. Nepershin et al. M.: Fizmatlit, 2008.
- [3] Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Fizmatlit, 2001.
- [4] Khludnev A. M. Theory of cracks with possible contact of the banks // *Mechanic successes*. 2005. Vol. 3, no. 4. p. 41–82.
- [5] Mirsalimov V. M. Contact problem on the interaction of the edges of a slot of variable width with end zones of plastic deformations // *Vestnik the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2016. no. 2(28). p. 24–34.
- [6] Mirsalimov V. M. Simulation of partial closure of a variable width slot with interfacial bonds in end zones in an isotropic medium // *International Journal of Damage Mechanics*. 2016. Vol. 25. P. 266–279.
- [7] Mustafaev A. B. Interaction of the edges of a gap of variable width during bending of a strip (beam) under the influence of a temperature field // *Mechanics of machines, mechanisms and materials*. 2014. no. 3 (28). p. 30–36.
- [8] Mirsalimov V. M., Mustafayev A. B. Inhibition of a curvilinear bridged crack by induced thermoelastic stress field // *Journal of Thermal Stresses*. 2016. Vol. 39. p. 1301–1319.
- [9] Mir-Salim-zade M. V. Partial contact of the sides of a slot of variable width in a plate reinforced with stringers // *Physical and chemical mechanics of materials*. 2016. Vol. 25, no. 3. p. 29–34.
- [10] Mir-Salim-zada M. Contact problem for a stringer plate weakened by a periodic system of variable width slots // *Structural Engineering and Mechanics*. 2017. Vol. 62 (6).
- [11] Mir-Salim-zade M. V. Partial bridging of straight-line cracks with ties in a stringer plate with a hole // *Problems in mechanical engineering. NAS of Ukraine*. 2017. Vol. 20, no. 2. P. 46–53.
- [12] Mustafaev A. Deceleration of the growth of a gap of variable width under the influence of a temperature field // *PMTF*. 2017. Vol. 58, no. 1. p. 168–176.
- [13] Mirsalimov V. A contact problem for a plane weakened by a periodic system of variable width slots // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 23.
- [14] Mir-Salim-zade M. Partial closure of a straight crack originating from the contour of a circular hole in the stringer plate // *Structural mechanics of engineering structures and structures*. 2018. no. 14 (4). p. 313–322.

Mirsalimov, Vagif Mirakhmedovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mechanics, Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan.

- [15] Mirsalimov V. Partial closure of the periodic system of variable width bridged slits in an isotropic medium under compression // International Journal of Damage Mechanics. 2020. Vol. 29. P. 529–546.
- [16] Muskhelishvili N. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. M.: Nauka, 1966.
- [17] Gakhov F. D. Boundary value problems. M.: Nauka, 1977.

О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ, СВОБОДНАЯ ОТ ПОСТУЛАТА О ДИФФЕОМОРФИЗМЕ: ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Строится плоская модель линейно упругого тела, в которой постулат о диффеоморфизме (предположение о гладкости поля перемещений) значительно ослаблен. Вместо одного поля перемещений, которое фигурирует в классической модели, вводятся два гладких поля перемещений. Рассмотрены постановки краевых задач, доказана теорема единственности.

Ключевые слова: слова: теория упругости, аффинная деформация, плоская деформация, определяющие уравнения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.60.58.016

УДК: 539.371

1. Введение. Основные труды профессора Д. Д. Ивлева и его научной школы посвящены механике деформирования пластических сред [1–3]. Благодаря им ряд разделов теории пластичности приобрел вполне законченный, классический вид.

Как известно, математическая теория пластичности так же, как и теория упругости, базируется на двух постулатах. Первый — среда предполагается сплошной и второй — поле перемещений предполагается достаточно гладким, т.е. имеет частные производные по координатам (постулат о диффеоморфизме [4]). Определенные комбинации частных производных представляют собой меры деформаций. На этой основе строятся определяющие уравнения и затем решаются краевые задачи. Постулат о диффеоморфизме, как правило, не обсуждается и считается чем-то само собой разумеющимся. Кажется удивительным, что необходимость его ослабления можно увидеть уже на самых первых шагах построения теории. Причем из соображений чисто логического характера, даже не прибегая к аргументам, связанным с экспериментальными

© Микенина О. А., Ревуженко А. Ф., 2020

Микенина Ольга Александровна

e-mail: olgarev@yandex.ru, мл. научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович

e-mail: revuzhenko@yandex.ru, зав. лабораторией, профессор, доктор физико-математических наук, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ (№ 20-05-00184).

Поступила 08.06.2020

данными о структурных уровнях деформирования реальных сред (горных пород, в частности).

Действительно, возьмем элементарный объем сплошной среды (рис. 1, плоская деформация, статика, упругость). Его кинематика описывается четырьмя векторами смещений центров граней элементарного объема (восемь степеней свободы). Им соответствует четыре вектора сил (также восемь степеней свободы). Последние связаны между собой тремя уравнениями равновесия: два уравнения на силы и одно уравнение на момент. Остается пять степеней свободы.

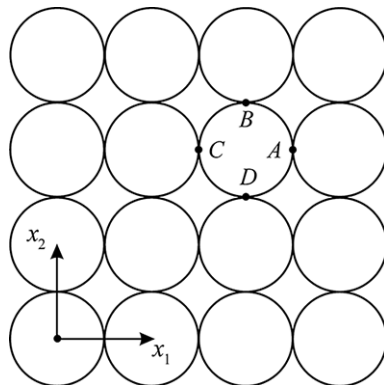


Рис. 1.

Далее, определяющие уравнения не должны зависеть от смещения и поворота элементарного объема как жесткого целого (три степени свободы). Остается пять кинематических инвариантных степеней свободы. Следовательно, определяющих уравнений должно быть в точности пять. Однако в классической теории упругости их только три (закон Гука)! Анализ [5] показывает, что два уравнения неявно содержатся в предположении о гладкости поля перемещений, т.е. в постулате о диффеоморфизме (ниже они будут выписаны явно). Таким образом, если говорить о классической модели линейно упругого тела, то можно сказать, что 60% информации о поведении материала дает закон Гука и 40% — предположение о существовании частных производных. Аналогичная ситуация имеет место и в других областях механики [6, с. 402–408]. Это означает только одно — предположение о гладкости не должно приниматься как само собой разумеющееся, но должно подвергаться анализу не менее тщательному, чем анализ собственно определяющих уравнений. Во всех случаях имеет смысл рассматривать варианты теорий, где это предположение либо снято, либо в той или иной степени ослаблено.

2. Модель линейно упругого тела. Рассмотрим данную возможность для модели линейно упругого тела. Обратимся к рис. 1. Обычно элементарный объем среды представляется как элемент, выделенный координатными поверхностями (линиями в плоском случае). Для плоских декартовых координат — это элементарные квадраты. Ничто не мешает элементарные объемы и контакты между ними представлять себе и так, как это показано на рис. 1. Предположения о существовании частных производных поля перемещений означает, что локально поле смещений является линейным и, значит, деформация элементарного объема $ABCD$ может быть только аффинной (три степени свободы, которые как раз и описываются тремя уравнениями — законом

Гука — в классической теории). Верно и обратное: если деформация элементарного объема не сводится к аффинной (т.е. локально поле перемещений является нелинейным), то это возможно только за счет ослабления постулата о диффеоморфизме.

Пять инвариантных кинематических переменных, которые упоминались выше, описывают относительное изменение длин материальных волокон AC и BD , изменение угла между ними, а также локальный изгиб элементарного объема $ABCD$. Если $u_i(A)$, $i = 1, 2$ — компоненты смещения точки A , то

$$\varkappa_i = \frac{1}{2} \left(\frac{u_i(A) + u_i(C)}{2} - \frac{u_i(B) + u_i(D)}{2} \right)$$

— это компоненты локального изгиба.

Для бесконечно малого элементарного объема относительные смещения точек A и C (т.е. на контактах вдоль оси Ox_1) малы. Поэтому v_i — поле смещений, определенное на контактах этого типа, можно считать гладким.

Аналогично можно считать гладким и поле смещений w_i , определенное на контактах типа B, D . Таким образом, одному локально неаффинному полю смещений u_i ставится в соответствие два гладких поля перемещений v_i и w_i .

В случае линейно упругого тела соответствующая система уравнений имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}), & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}), \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} &= \frac{\sigma_{12}}{\mu}, \\ v_1 - w_1 &= 2\eta \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \right), & v_2 - w_2 &= 2\eta \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где X_1, X_2 — компоненты объемной силы; $E, \nu, \mu = E/2(1 + \nu), \eta$ — упругие постоянные; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ — компоненты тензора напряжений.

Модель (1) переходит в классическую, если положить

$$v_1 - w_1 = 0, \quad v_2 - w_2 = 0. \quad (2)$$

Это и есть те два уравнения, которые эквивалентны предположению о гладкости поля перемещений.

3. Теорема единственности. В классической модели фигурирует одно поле перемещений. Поэтому вопрос о корректных краевых задачах решается самым естественным образом. А как быть с двумя полями перемещений?

Рассмотрим краевые условия, обеспечивающие единственность решения. Прежде всего отметим, что при $\eta = 0$ среда является изотропной, а при $\eta \neq 0$ — анизотропной. В этом смысле можно сказать, что среда является изотропной по отношению к напряжениям — деформациям и анизотропной по отношению к градиентам напряжений — локальным изгибам. Можно дать различную интерпретацию этого типа анизотропии. Например, можно представить элементарный объем как регулярную упаковку идеально упругих частиц микроуровня (см. рис. 1). Такая упаковка выделяет два ортогональных направления. Для краткости будем называть их горизонтальным и вертикальным направлениями или площадками. Возьмем элемент среды $2l \times 2l$, ограниченный указанными площадками. Подсчитаем работу внешних сил, отнесем ее

к $(2l)^2$ и рассмотрим предел при $l \rightarrow 0$. В результате для удельной работы получим выражение в дивергентной форме, которое сразу преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{22}v_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{12}w_1 + \sigma_{22}w_2) = \\ &= \left[\sigma_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \right) \frac{v_1 - w_1}{2} + \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \right) \frac{v_2 - w_2}{2} \right] + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \right) \frac{v_1 + w_1}{2} + \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \right) \frac{v_2 + w_2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть s — деформируемая область, ограниченная контуром L с внешней нормалью \bar{n} . Тогда

$$\iint_s W ds = \int_L [(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{12}v_2)n_1 + (\sigma_{12}w_1 + \sigma_{22}w_2)n_2] dl = - \int_L \bar{E} \cdot \bar{n} dl,$$

где $\bar{E} = -(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{12}v_2, \sigma_{12}w_1 + \sigma_{22}w_2)$ — направление линии тока энергии [7–9].

Дальше можно действовать по обычной схеме. Пусть имеется два решения, которые отметим одним и двумя штрихами. Их разность обозначим без штрихов. Система уравнений (1) линейна. Поэтому данная система имеет место также и для решения-разности.

Далее для решения-разности вторая квадратная скобка в (3) тождественно равна нулю (объемные силы для обоих решений одинаковы). Первая скобка сводится к сумме квадратов и поэтому всегда неотрицательна. Следовательно, единственность будет иметь место, если

$$\bar{E} \cdot \bar{n} = 0, \quad (4)$$

т.е. для решения-разности поток энергии скользит вдоль границы тела.

Полученное краевое условие совпадает с традиционным только для двух крайних случаев. В первом случае участок границы горизонтален, $n_1 = 0$, $n_2 = \pm 1$ и

$$\sigma_{12}w_1 + \sigma_{22}w_2 = 0. \quad (5)$$

Следовательно, на этом участке границы задан либо вектор напряжений, либо вектор смещений, либо их определенная комбинация, приводящая к условию (5). Для вертикальных участков границы $n_1 = \pm 1$, $n_2 = 0$ ситуация аналогична.

В общем случае, когда $n_1 \cdot n_2 \neq 0$, краевое условие (4) отличается от традиционных существенно. Опыт численного решения задач показывает, что удобнее всего общую ситуацию свести к рассмотренным выше частным случаям [10, 11]. Для этого достаточно границу тела аппроксимировать ломаной, состоящей из горизонтальных и вертикальных отрезков. На каждом из таких отрезков можно ставить уже обычные краевые условия типа (5). Для теоретического обоснования такой задачи изломы границы можно сгладить дугами окружностей радиуса r и затем перейти к пределу при $r \rightarrow 0$.

4. Заключение. Таким образом, в плоском случае система определяющих уравнений теории упругости должна содержать пять независимых уравнений. В классической теории явно формулируются только три уравнения. Два уравнения в неявном

виде содержатся в постулате о диффеоморфизме — предположении о гладкости поля перемещений. Предположение о гладкости означает, что локально поле смещений является линейным, а деформация элементарного объема — аффинной. Строится модель упругости, в которой постулат о диффеоморфизме ослаблен — вместо одного поля перемещений вводится два поля. Доказана теорема единственности и рассмотрены постановки краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. Т. 1. Теория идеальной пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 448 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.
- [3] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. Москва: Наука, 1971. 232 с.
- [4] Трусов П. В. Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого тела (в порядке обсуждения) // Мат. моделирование систем и процессов. 2009. № 17. С. 85–95.
- [5] Ревуженко А. Ф., Микенина О. А. Упруго-пластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // ПМТФ. 2018. № 2. С. 167–176.
- [6] Ревуженко А. Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: НГУ, 2000. 428 с.
- [7] Умов Н. А. Избранные сочинения. Москва–Ленинград: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1950. 553 с.
- [8] Ляв А. Математическая теория упругости. Москва–Ленинград: Объед. науч.-техн. изд. НКТИ СССР, 1935.
- [9] Клишин С. В., Ревуженко А. Ф. Линии тока энергии в деформируемом горном массиве, ослабленном эллиптическими отверстиями // ФТПРПИ. 2009. № 3. С. 3–8.
- [10] Lavrikov S. V., Revuzhenko A. F. Effect of structural parameter on stress concentration in a linear elastic body // AIP Conference Proceedings. 2017. 1893, 030122.
- [11] Lavrikov S. V., Revuzhenko A. F. Model of linear elastic theory with a structural parameter and stress concentration analysis in solids under deformation // AIP Conference Proceedings. 2018. 2051, 020167.

O. A. Mikenina, A. F. Revuzhenko

LINEAR ELASTICITY THEORY FREE FROM DIFFEOMORPHISM: PLANE DEFORMATION

N. A. Chinakal Institute of mining SB RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. The authors create a two-dimensional model of a linearly elastic body at considerably weakened postulate of diffeomorphism-supposed smoothness of field of displacements. One field of displacements as in the classical model is replaced by two smooth fields of displacements. The authors discuss formulations of boundary value problem and prove the unicity theorem.

Keywords: elasticity theory, affine deformation, plane deformation, constitutive equations.

Olga Aleksandrovna Mikenina, Junior researcher, Candidate of physical and mathematical Sciences, N. A. Chinakal Institute of mining SB RAS, Novosibirsk, Russia.

Aleksandr Filippovich Revuzhenko, Head of the laboratory, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, N. A. Chinakal Institute of mining SB RAS, Novosibirsk, Russia.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D. Mechanics of Plastic Media, Vol. 1: Theory of Ideal Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 448 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. Mechanics of plastic media, Vol. 2. General issues. Rigid-plastic and elastoplastic state of tel. Strengthening. Deformation theories. Complex environments. Moscow: Fizmatlit, 2002. 448 p. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. Theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971. 232 p. (in Russian).
- [4] Trusov P. V. Some questions of nonlinear mechanics of a deformable body (in order of discussion) // Mat. modeling systems and processes. 2009. no. 17. P. 85–95. (in Russian).
- [5] Revuzhenko A. F., Mikenina O. A. Elastic-plastic model of a rock with a linear structural parameter // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. no. 2. P. 167–176. (in Russian).
- [6] Revuzhenko A. F. Mechanics of elastic-plastic media and non-standard analysis. Novosibirsk: NSU, 2000. 428 p. (in Russian).
- [7] Umov H. A. Selected Works. Moskow-Leningrad: St. ed. techn.-theor. literature, 1950. 553 p.
- [8] Lav A. Mathematical theory of elasticity. Moskow-Leningrad: Merge. scientific and technical ed. NKTI USSR, 1935. (in Russian).
- [9] Klishin C. V., Revuzhenko A. F. Energy streamlines in deformable rock mass weakened by elliptical holes // Journal of Mining Science. 2009. no. 3. P. 3–8. (in Russian).
- [10] Lavrikov S. V., Revuzhenko A. F. Effect of structural parameter on stress concentration in a linear elastic body // AIP Conference Proceedings. 2017. 1893, 030122.
- [11] Lavrikov S. V., Revuzhenko A. F. Model of linear elastic theory with a structural parameter and stress concentration analisys in solids under deformation // AIP Conference Proceedings. 2018. 2051, 020167.

М. М. Вислогузова¹, Д. В. Гоцев^{1,2}, А. В. Ковалев^{1,2}, А. И. Шашкин¹

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

¹ Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

² Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия

Аннотация. Как известно при нагревании твердые тела, в частности металлы, испытывают температурные деформации, связанные с эффектом линейного расширения. При этом, несмотря на то, что эти деформации малы, соответствующие им напряжения могут оказаться достаточно большими, зачастую превосходящими предел текучести материала. В связи с этим для описания напряженно-деформированных состояний тел, находящихся под действием высоких температур, необходимо учитывать неупругое поведение материалов. Определению напряжений и деформаций в упругопластических задачах посвящено множество работ, в том числе исследования [1–10]. В некоторых из них [1], [5–10] рассматривается температурное воздействие на тела различной конфигурации. В настоящей работе решается задача об определении осесимметричного поля напряжений в плоском диске при воздействии на него точечного источника тепла (например, точечная сварка). Материал диска моделируется упрочняющейся упругопластической средой. Задача решалась в рамках плоско-напряженного состояния методом малых возмущений. В аналитическом виде получены соотношения, описывающие распределение полей напряжений в упругой и пластической областях деформирования. В качестве условий сопряжения решений на упругопластической границе использовались условия неразрывности радиальной и окружной компонент тензора напряжений и радиальной компоненты вектора перемещений.

Ключевые слова: пластичность, упрочнение, упругость, метод возмущений, температурные напряжения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.14.52.017

УДК: 539.3

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский диск, в центре которого помещен точечный источник тепла с большим запасом внутренней энергии. Материал диска будем моделировать анизотропно упрочняющейся упругопластической средой, физико-механические константы которой не зависят от распределения температуры. Решение будем проводить при условии реализации в диске осесимметричного плоского напряженного состояния. В этом случае все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние рассматриваемого тела будут зависеть лишь от расстояния r до точечного источника тепла. При этом на бесконечном удалении от него компоненты напряжений стремятся к нулевым значениям. Так как тепловой источник теоретически может обладать сколь угодно высокой температурой, то в его окрестности будет возникать зона неупругих деформаций радиусом $R(t)$, зависящим от времени t .

В рамках приведенной выше постановки задачи напряженно-деформированное состояние плоского диска в цилиндрической системе координат (r, θ, z) будет описываться следующими соотношениями:

— уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \quad (1.1)$$

где σ_r, σ_θ — радиальная и окружная компоненты тензора напряжений соответственно;

— соотношения Коши:

$$e_r = \frac{du}{dr}, \quad e_\theta = \frac{u}{r}, \quad (1.2)$$

где e_r, e_θ — радиальная и окружная компоненты тензора деформаций соответственно, u — радиальная компонента вектора перемещений;

— связь полных деформаций с пластической и упругой составляющими:

$$e_r = e_r^p + e_r^e, \quad e_\theta = e_\theta^p + e_\theta^e, \quad e_z = e_z^p + e_z^e, \quad (1.3)$$

где e_r^p, e_θ^p, e_z^p и e_r^e, e_θ^e, e_z^e — главные компоненты тензора пластических и упругих деформаций соответственно.

© Вислогузова М. М., Гоцев Д. В., Ковалев А. В., Шашкин А. И. 2020

Вислогузова Мария Михайловна

e-mail: visloguzova99@mail.ru, студент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Гоцев Дмитрий Викторович

e-mail: rbgotsev@mail.ru, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kav-mail@mail.ru, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Шашкин Александр Иванович

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, декан факультета прикладной математики информатики и механики, Воронежский государственный университет, Россия.

Поступила 05.06.2020

В качестве условия пластичности примем условие аналогичное условию Ишлинского-Прагера [5]:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta - c(e_r^p - e_\theta^p))^2 + (\sigma_r - c(e_r^p - e_z^p))^2 + (\sigma_\theta - c(e_\theta^p - e_z^p))^2 = 2k^2, \quad (1.4)$$

где c — коэффициент упрочнения; k — предел текучести.

Ассоциированный закон пластического течения тогда будет иметь вид

$$\begin{aligned} de_r^p &= 2d\lambda(2\sigma_r - \sigma_\theta - c(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p)), \\ de_\theta^p &= 2d\lambda(2\sigma_\theta - \sigma_r - c(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p)), \\ de_z^p &= -2d\lambda(\sigma_r + \sigma_\theta + c(2e_z^p - e_\theta^p - e_r^p)), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $d\lambda$ — скалярный положительный множитель.

Связь напряжений с упругими деформациями выберем в виде закона Гука

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-\nu} [e_r^e + \nu e_\theta^e - (1+\nu)\alpha T], \quad \sigma_\theta = \frac{2G}{1-\nu} [e_\theta^e + \nu e_r^e - (1+\nu)\alpha T], \quad (1.6)$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного температурного расширения; $T(r, t)$ — температура, которая определяется из решения уравнения теплопроводности (см. [1, 4]).

Граничные условия:

$$\sigma_r \Big|_{r=\infty} = 0. \quad (1.7)$$

Условия сопряжения:

$$[\sigma_r] \Big|_{r=R} = [\sigma_\theta] \Big|_{r=R} = [u] \Big|_{r=R} = 0. \quad (1.8)$$

В условиях (1.8) квадратные скобки обозначают разность соответствующих величин в пластической и упругой областях деформирования.

Решение проведем в безразмерных переменных, оставив им их исходные обозначения. При этом все величины имеющие размерность напряжений отнесем к пределу текучести материала.

2. Решение и результаты. Для решения данной задачи был использован метод малого параметра, согласно которому

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^0 + \delta\sigma_r', & \sigma_\theta &= \sigma_\theta^0 + \delta\sigma_\theta', \\ e_r &= e_r^0 + \delta e_r', & e_\theta &= e_\theta^0 + \delta e_\theta', & e_z &= e_z^0 + \delta e_z', \\ c &= c^0 + \delta c', & \alpha &= \alpha^0 + \delta\alpha', & \lambda &= \lambda^0 + \delta\lambda', & R(t) &= R^0(t) + \delta R'(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где величины с индексом «0» относятся к нулевому приближению, а с индексом «'» — к первому. Причем

$$c = \delta c', \quad \alpha = \alpha^0. \quad (2.2)$$

Распределение поля напряжений в нулевом приближении для упругой зоны деформирования, следуя [1], примем в форме

$$\sigma_r^0 = -2G \left(\frac{1}{r^2} \left(A(t) + \alpha^0(1+\nu) \int Tr dr \right) \right), \quad \sigma_\theta^0 = -\sigma_r^0 - 2GT\alpha^0(1+\nu). \quad (2.3)$$

Напряжения в нулевом приближении для пластической области согласно [1] определяются соотношениями

$$\sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = -1. \quad (2.4)$$

В первом приближении для упругой зоны согласно [2,3] распределение напряжений имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma'_r &= \frac{2G}{1-\nu} \left[C_1(t)(1+\nu) - C_2(t) \frac{1}{r^2}(1-\nu) \right], \\ \sigma'_\theta &= \frac{2G}{1-\nu} \left[C_1(t)(1+\nu) + C_2(t) \frac{1}{r^2}(1-\nu) \right].\end{aligned}\quad (2.5)$$

Соотношения, определяющие напряжения в первом приближении в пластической области:

$$\begin{aligned}\sigma'_r &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{3c'r^2(1+2\nu)}{G(1+\nu)} - \int 2Gr\alpha^0(1+\nu)T dr + C(t) \right], \\ \sigma'_\theta &= -\frac{1}{r^2} \left[\frac{3c'r^2(1+2\nu)}{G(1+\nu)} - \int 2Gr\alpha^0(1+\nu)T dr + C(t) \right] + 6c' \left(\frac{1+2\nu}{G(1+\nu)} - \alpha^0 T \right).\end{aligned}\quad (2.6)$$

В вышеприведенных выражениях $C(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $A(t)$ — функции времени. Для определения $C_1(t)$ и $C_2(t)$, $A(t)$ и радиуса упругопластической границы воспользуемся линейаризованными условиями сопряжения (1.8) для первого и нулевого приближения соответственно. Для определения $C(t)$ воспользуемся условием

$$\sigma'_r(0, t) = 3c' \left(\frac{1+2\nu}{G(1+\nu)} - \alpha^0 T \right),\quad (2.7)$$

полученным аналогично [4].

Отметим, что определение решения в упругой области проводилось классическими методами теории упругости с учетом температурных эффектов, а уравнения для определения напряженного состояния в пластической зоне в первом приближении были получены из решения системы (1.1) - (1.6) методом приведенным в [4].

Полагая $c = 0$, приходим к выражениям для напряжений, полученным в [1] для упругопластического материала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. 252 с.
- [2] Демидов С. П. Теория упругости. Москва: Высшая школа, 1979. 432 с.
- [3] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. 560 с.
- [4] Артемов М. А., Якубенко А. П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Воронеж. гос. ун-т. 2014. № 1. С. 30–38.
- [5] О механическом поведении упрочняющегося упругопластического диска под действием источника тепла / А. А. Афанасьев, К. К. Горностаев, А. В. Ковалев [и др.] // Вестник Томского гос. ун-та. Сер. «Математика и механика». 2017. № 50. С. 57–66.
- [6] Математическое моделирование состояния тонкого диска при тепловом и силовом воздействиях [Сетевое издание] / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, В. В. Акиншин [и др.] // Инженерный вестник Дона. 2019. № 4. Режим доступа: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_28_Artemov.pdf_4c0401978b.pdf. (Дата поступления статьи: 07.06.2019).
- [7] О поведении упругопластического диска под действием теплового источника [Сетевое издание] / Г. Г. Бердзенишвили, М. А. Артемов, Е. С. Барановский [и др.] // Инженерный вестник Дона. 2018. № 2. Режим доступа: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_190_Berdzeneshvili_N.pdf_45978b1390.pdf. (Дата поступления статьи: 01.06.2018).
- [8] Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е. Б. Дац, Е. В. Мурашкин, А. В. Ткачева [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 32–43.
- [9] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Изв. РАН. МГТ. 2014. Т. 49, № 2. С. 124–131.

- [10] Мурашкин Е. В., Дац Е. П. Термоупругопластическое деформирование многослойного шара // Известия РАН. Сер. «Механика твердого тела». 2017. № 5. С. 30–36.

M. M. Visloguzova¹, D. V. Gotsev^{1,2}, A. V. Kovalev^{1,2}, A. I. Shashkin¹

DETERMINATION OF THE STRESS STATE OF A HARDENING DISK UNDER THE INFLUENCE OF TEMPERATURE

¹*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

²*Military training and research center of the air force “Air force Academy
named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia*

Abstract. As you know, when heated, solids, in particular metals, experience thermal deformations associated with the effect of linear expansion. Moreover, in spite of the fact that these strains are small, the corresponding stresses can be quite large, often exceeding the yield stress of the material. In this regard, to describe the stress-strain states of bodies exposed to high temperatures, it is necessary to take into account the inelastic behavior of materials. Determination of stresses and strains in elastoplastic problems has been the subject of many works, including studies [1–10]. Some of them [1], [5–10] consider the temperature effect on bodies of various configurations. In this work, we solve the problem of determining the axisymmetric stress field in a flat disk when exposed to a point heat source (for example, spot welding). The disc material is modeled by a hardening elastoplastic medium. The problem was solved within the plane-stressed state by the method of small perturbations. In an analytical form, relations are obtained that describe the distribution of stress fields in elastic and plastic deformation regions. The conditions of continuity of the radial and circumferential components of the stress tensor and the radial component of the displacement vector were used as conditions for conjugation of solutions on the elastoplastic boundary.

Keywords: plasticity, hardening, elasticity, perturbation method, temperature stresses.

REFERENCES

- [1] Parkus G. Unsteady temperature stresses. Москва: State publishing house of physical and mathematical literature, 1963. 252 p. (in Russian).
 [2] Demidov S. P. Theory of elasticity. Moscow: Higher school, 1979. 432 p. (in Russian).
 [3] Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity. Moscow: Nauka Publishing house, 1979. 560 p. (in Russian).
 [4] Artemov M. A., Yakubenko A. P. Mathematical modeling of mechanical behavior of a rotating disk // Voronezh state university. 2014. no. 1. P. 30–38. (in Russian).
 [5] On the mechanical behavior of a hardening elastic-plastic disk under the action of a heat source / A. A. Afanasiev, K. K. Gornostaev, A. V. Kovalev et al. // Bulletin of the Tomsk state University. Ser. Mathematics and mechanics. 2017. no. 50. P. 57–66. (in Russian).

Maria Mikhailovna Visloguzova, student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Dmitry Viktorovich Gotsev, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh state University, Military training and research center of the air force “Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia.

Alexey Viktorovich Kovalev, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh State University, Military training and research center of the air force “Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia.

Alexandr Ivanovich Shashkin, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia

-
- [6] Mathematical modeling of the thin disk state under thermal and power effects [Online edition] / M. A. Artemov, E. S. Baranovsky, V. V. Akinshin et al. // Engineering Bulletin of the Don scientific journal. 2019. no. 4. Mode of delivery: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_28_Artemov.pdf_4c0401978b.pdf. (Date of receipt of the article: 07.06.2019). (in Russian).
- [7] On the behavior of an elastic-plastic disk under the action of a heat source [Online edition] / G. G. Berdzenishvili, M. A. Artemov, E. S. Baranovsky et al. // Engineering Bulletin of the Don scientific journal. 2018. no. 2. Mode of delivery: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_190_Berdzeneshvili_N.pdf_45978b1390.pdf. (Date of receipt of the article: 01.06.2018). (in Russian).
- [8] Temperature stresses in an elastic-plastic tube depending on the choice of the plasticity condition / E. B. Dats, E. V. Murashkin, A. V. Tkacheva et al. // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics. 2018. no. 1. P. 32–43. (in Russian).
- [9] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the field of residual stresses under local thermal influence // Izv. RAS. MTT. 2014. Vol. 49, no. 2. P. 124–131. (in Russian).
- [10] Murashkin E. V., Dats E. P. Thermoelasticoplastic deformation of a multilayer ball // Izvestiya RAS. Ser. “Solid mechanics”. 2017. no. 5. P. 30–36. (in Russian).

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ГЕМИТРОПНЫХ СРЕДАХ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматривается решение задачи о распространении плоской термоупругой гармонической волны в гемитропной микрополярной среде. Приводятся два варианта динамических уравнений гемитропного микрополярного континуума. Определены пространственные поляризации волн перемещений и микровращений относительно волнового вектора плоской волны. Обсуждается качественный характер возможных волновых решений уравнений связанной термоупругости. Отдельно рассматривается случай атермической волны. Вычисление волновых чисел приводится к исследованию одного кубического уравнения с вещественными коэффициентами.

Ключевые слова: волна, поляризация, волновой вектор, микроструктура, микрополяризованность, директор, волновое число, гемитропность, термоупругость

DOI: 10.37972/chgpu.2020.93.91.018

УДК: 539.374

1. Вводные замечания. Развитие современных методов производства материалов и метаматериалов в значительной степени определяется развитием новых способов

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2020

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 20.06.2020

аддитивного производства. Получаемые таким способом материалы обладают микроструктурными особенностями. Для описания механического поведения таких материалов требуются современные неклассические модели механики сплошных сред. К таким моделям относятся гемитропные микрополярные континуумы. Основной особенностью таких континуумов является чувствительность к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства, например, зеркальным отражениям и инверсиям пространства. Практическая значимость исследований этой области механики континуума связана с моделированием поведения биоматериалов используемых в трансплантологии медицинских материалах, сотовых конструкциях, керамиках, пенах. Биологические ткани животного происхождения (мышечная ткань, длинные кости, стенки кровеносных сосудов) проявляют гемитропные свойства, что подтверждается многочисленными исследованиями [1–3].

Термомеханика микрополярных континуумов бурно развивающаяся область механики сплошных сред, о чем свидетельствует многочисленными монографии, посвященные этому вопросу [1–8]. Однако, большинство из них посвящено вопросам моделирования линейных изотропных микрополярных сред. В общем случае микрополярной анизотропии упругий материал задается 171-ой определяющей постоянной, что существенно осложняет анализ систем уравнений, возникающих при решении прикладных задач. Полуизотропное (гемитропное) тело задается девятью определяющими константами, что всего на три больше, чем в изотропном случае.

Волновые задачи механики микрополярных континуумов возникают при моделировании процессов медицинской диагностики, таких как, ультразвуковое исследование, сонография, спектральная доплерография. Теоретической основой для этих методов могут служить задачи о распространении гармонических волн в сплошной среде [9–12]. Исследованиям решений волновых задач термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [4–8, 12]. В настоящей работе рассматривается задача о распространении плоской гармонической волны в гемитропном микрополярном континууме.

2. Динамические уравнения гемитропной микрополярной среды. В работе [4] приведен подробный вывод динамических уравнений для гемитропных сред. Векторная форма таких уравнений, в отсутствие массовых сил и моментов, записывается в виде

$$\begin{aligned} G[(1 + c_1)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \\ + 2c_1 \nabla \times \phi + Lc'_4 \nabla \nabla \cdot \phi + Lc'_5 \nabla \cdot \nabla \phi] = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ GL^2[(1 + c_2)\nabla \cdot \nabla \phi + (1 - c_2 + 2c_3)\nabla \nabla \cdot \phi + L^{-1}c'_4 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \\ + L^{-1}c'_5 \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + L^{-1}c'_6 \nabla \times \phi] - 2Gc_1(2\phi - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathfrak{J} \ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (1)$$

где введены обозначения

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6, \quad (2)$$

\mathbf{u} — вектор перемещений, ϕ — вектор микровращений, G — упругий модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, L — характерная длина микрополярной теории, $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности определяющие постоянные, ρ — массовая плотность, \mathfrak{J} — коэффициент микроинерции, ∇ — пространственный оператор Гамильтона.

В случае термоупругого континуума уравнения (1) следует дополнить слагаемыми, отвечающими за термоупругую связанность, и уравнением теплопроводности. В дальнейшем мы будем рассматривать упрощенный вариант связанных уравнений гемитропной термоупругой среды, когда из полного набора гемитропных слагаемых остается только температурный градиент $\varsigma \nabla \theta$. Система динамических уравнений в этом случае записывается в виде

$$\begin{cases} (\mu + \alpha) \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (\mu - \alpha + \lambda) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\phi} - \eta \nabla \theta = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ (\gamma + \varepsilon) \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} + (\gamma - \varepsilon + \beta) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + 2\alpha \nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\phi} - \varsigma \nabla \theta = \mathcal{I} \ddot{\boldsymbol{\phi}}, \\ \frac{\mathfrak{c}}{\kappa} \dot{\theta} = \nabla \cdot \nabla \theta - \frac{1}{\kappa} (\eta \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \varsigma \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}), \end{cases} \quad (3)$$

где θ — превышение температуры над отсчетной температурой θ_0 , κ — отношение коэффициента теплопроводности к θ_0 , \mathfrak{c} — отношение теплоемкости единицы объема при постоянной нулевой деформации к θ_0 , $\eta = 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha^*$, α^* — коэффициент линейного теплового расширения, $\varsigma = 2GL^2 \beta$, $GL^2 = \gamma$, β коэффициент теплового искажения.

3. Плоская гармоническая термоупругая волна. Исследуем решения системы (3) в форме плоских волн перемещений, микровращений и температуры:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \theta = B e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор; \mathbf{k} — (комплексный) волновой вектор; ω — циклическая частота; \mathbf{A} , \mathbf{S} — (комплексные) векторы пространственной поляризации волны; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента.

В результате подстановки вектора перемещений, вектора микровращений и температуры (4) в динамические уравнения (3) получим уравнения для волнового вектора \mathbf{k} и векторов поляризации плоской волны \mathbf{A} , \mathbf{S} ($k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$)

$$\begin{aligned} & -(\mu - \alpha + \lambda)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})\mathbf{k} - [(\mu + \alpha)k^2 - \rho\omega^2]\mathbf{A} + 2\alpha i\mathbf{k} \times \mathbf{S} - \eta i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ & -(\gamma - \varepsilon + \beta)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})\mathbf{k} - [(\gamma + \varepsilon)k^2 + 4\alpha - \mathcal{I}\omega^2]\mathbf{S} + 2\alpha i\mathbf{k} \times \mathbf{A} - \varsigma i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ & -k^2 B + \frac{\mathfrak{c}}{\kappa} i\omega B - \frac{\eta}{\kappa} \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - \frac{\varsigma}{\kappa} \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Из системы уравнений (5) легко получить выражения для проекций векторов поляризации \mathbf{A} и \mathbf{S} на волновой вектор \mathbf{k} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} &= \frac{\eta i k^2 B}{-(\lambda + \mu - \alpha)k^2 - (\mu + \alpha)k^2 + \rho\omega^2}, \\ \mathbf{S} \cdot \mathbf{k} &= \frac{\varsigma i k^2 B}{-(\beta + \gamma - \varepsilon)k^2 - (\gamma + \varepsilon)k^2 - 4\alpha + \mathcal{I}\omega^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из соотношений (6) видно, что в связанной термоупругой волне ($B \neq 0$) оба вектора поляризации \mathbf{A} и \mathbf{S} имеют ненулевые проекции на волновой вектор \mathbf{k} , т.е. указанная волна всегда содержит продольные составляющие перемещений и микровращений. Более того, можно показать, что она является чисто поперечной, т.е. поперечные составляющие перемещений и микровращений равны нулю. Упомянутые проекции

легко исключаются из системы уравнений (5), поскольку достаточно просто выражаются через комплексную амплитуду инкремента температуры B . В частности, их исключение возможно в третьем уравнении рассматриваемой системы [13].

4. Волновые числа плоской гармонической термоупругой волны. Поскольку комплексная амплитуда инкремента температуры отлична от нуля в термической волне, то для квадрата волнового числа сразу же получается дисперсионное уравнение. Вводя безразмерное волновое число $\tilde{k} = k/k_{\parallel}$ и опуская тильду, имеем

$$\frac{s^2}{i\omega'}k^2 + \frac{s_{\parallel}^2k^2}{1-k^2} + \frac{\mu s_{\parallel}^2k^2}{1 - \frac{1}{\omega'^2} - d_{\parallel}^2k^2} = 1, \quad (7)$$

где

$$\omega' = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \Omega^2 = \frac{4\alpha}{\mathfrak{J}}, \quad s^2 = \frac{\Omega\kappa}{\kappa c_{\parallel}^2}, \quad c_{\parallel}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},$$

$$s_{\parallel}^2 = \frac{\eta^2}{\rho\kappa c_{\parallel}^2}, \quad \mu s_{\parallel}^2 = \frac{\zeta^2}{\mathfrak{J}\kappa c_{\parallel}^2}, \quad d_{\parallel}^2 = \frac{\mu c_{\parallel}^2}{c_{\parallel}^2}, \quad \mu c_{\parallel}^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{\mathfrak{J}}.$$

Заметим, что уравнение (7) теряет смысл для волновых чисел

$$k^2 = 1, \quad k^2 = d_{\parallel}^{-2}(1 - \omega'^{-2}).$$

Несложно показать, что данным волновым числам могут соответствовать только холодные атермические волны, характеризующиеся условием $B = 0$.

Если вместо частоты оперировать с величиной

$$\tau^{-1} = i\omega',$$

то для квадрата волнового числа можно получить бикубическое уравнение

$$e_0k^6 + e_1k^4 + e_2k^2 + e_3 = 0 \quad (8)$$

с коэффициентами

$$e_0 = -i(i\tau)s^2d_{\parallel}^2, \quad -e_1 = -i(i\tau)s^2(d_{\parallel}^2 + 1 - (i\tau)^2) + (1 + s^2)d_{\parallel}^2 + \mu s_{\parallel}^2,$$

$$e_2 = [1 - (i\tau)^2][-i(i\tau)s^2 + s_{\parallel}^2 + 1] + \mu s_{\parallel}^2 + d_{\parallel}^2, \quad e_3 = -[1 - (i\tau)^2].$$

Корни бикубического уравнения (8) можно определить с помощью известных формул. Все они (три из них дают нормальные волновые числа) имеют ненулевые мнимые части. Далее рассмотрим известные из алгебры представления *формальных* корней кубического уравнения.

На комплексной плоскости рассмотрим алгебраическое кубическое уравнение

$$e_0w^3 + e_1w^2 + e_2w + e_3 = 0. \quad (9)$$

Здесь w обозначает комплексную переменную; e_0, e_1, e_2, e_3 — коэффициенты (вообще говоря, комплексные) кубического уравнения.

Корни уравнения вычисляются по известным формулам

$$w = -\frac{e_1}{3e_0} + w' = -\frac{e_1}{3e_0} + \lambda + \mu = -\frac{e_1}{3e_0} + \sqrt[3]{-\frac{e_3'}{2} + \sqrt{-\frac{D}{4 \cdot 27}}} + \sqrt[3]{-\frac{e_3'}{2} - \sqrt{-\frac{D}{4 \cdot 27}}}. \quad (10)$$

Здесь приняты обозначения

$$e'_2 = \frac{e_2}{e_0} - \frac{e_1^2}{3e_0^2}, \quad e'_3 = \frac{2e_1^3}{27e_0^3} - \frac{e_1e_2}{3e_0^2} + \frac{e_3}{e_0}, \quad E_j = \frac{e_j}{e_0} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (11)$$

$$D = -27e_3'^2 - 4e_2'^3 = E_1^2E_2^2 - 4E_1^3E_3 - 27E_3^2 - 4E_2^3 + 18E_1E_2E_3.$$

Процедура поиска и исследования корней кубического уравнения (9) подробно изложена в [12], включая самый сложный неприводимый случай.

5. Заключение.

1. Рассмотрено решение задачи о распространении плоской термоупругой гармонической волны в гемитропной микрополярной среде.
2. Приводятся два варианта динамических уравнений гемитропного микрополярного континуума.
3. Определены пространственные поляризации волн перемещений и микровращений относительно волнового вектора плоской волны.
4. Обсуждается качественный характер возможных волновых решений уравнений связанной термоупругости. Отдельно рассматривается случай атермической волны.
5. Вычисление волновых чисел приводится к исследованию одного кубического уравнения с вещественными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Maugin G. Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary. Singapore: Springer, 2017. xvii+259 p.
- [2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума. 2018. Т. 22. с. 504–517.
- [5] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1986. 872 с.
- [6] Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1962. 364 с.
- [7] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
- [8] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
- [9] Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [10] Бреховских Л. М. Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.
- [11] Весоловский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости. Киев: Наук. думка, 1981. 216 с.
- [12] Radayev Yu. N. Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki.
- [13] Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

PLANE THERMOELASTIC HARMONIC WAVES IN HEMITROPIC MICROPOLAR MEDIA

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to the problem of a plane thermoelastic harmonic wave propagation in hemitropic micropolar media. Two versions of the dynamic equations of the hemitropic micropolar continuum are presented. The spatial polarizations of the displacements and microrotations waves relative to the wave vector of a plane wave are determined. The characteristic features of possible wave solutions of the coupled thermoelasticity problems are discussed. The case of athermal waves is separately considered. Computation of wave numbers is reduced to the analysis of a cubic equation with real coefficients.

Keywords: wave, polarization, wave vector, microstructure, micropolarity, director, wavenumber, hemitropicity, thermoelasticity

REFERENCES

- [1] Maugin G. Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary. Singapore: Springer, 2017. xvii+259 p.
- [2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [4] Radayev Y. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2018. Vol. 22. p. 504–517.
- [5] Nowacki W. Theory of Elasticity. Moscow: Mir, 1986. 872 p.
- [6] Nowacki W. Problems of Thermoelasticity. Moscow: Izd-vo Akad. nauk SSSR, 1962. 364 p.
- [7] Nowacki W. Dynamic Problems of Thermoelasticity. Moscow: Mir, 1970. 256 p.
- [8] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Waves Problem of Field Theory and Thermomechanics. Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 2010. 328 p.
- [9] Witham G. B. Linear and nonlinear Waves. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons, 1974. xvi+636 p.
- [10] Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. Introduction to Continuum Mechanics (in Application to Theory of Waves). Moscow: Nauka, 1982. 336 p.
- [11] Wesolowski Z. Dynamic Problems of Nonlinear Elasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1981. 216 p.
- [12] Radayev Yu. N. Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki.
- [13] Sushkevich A. K. Foundations of Higher Algebra. Moscow, Leningrad: ONTI, 1937. 476 p.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,

101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,

101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 18-01-00844.

О. В. Дудко, А. А. Манцыбора

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ КОНСТАНТ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ НА РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ УДАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. В работе представлены результаты численного решения двумерных автомодельных задач динамики деформирования горных пород в условиях плоской деформации. Для описания динамического поведения материалов под действием ударной нагрузки выбрана модель разномодульной изотропно-упругой среды с сингулярной зависимостью между напряжениями и деформациями. Проведена серия вычислительных экспериментов для различных материалов и параметров краевых условий. В результате сделан вывод о существенном влиянии знака материальных констант, отвечающих в модели за проявление разномодульности, на характер решения в целом и поведение возникающих волн деформаций в частности.

Ключевые слова: разномодульная упругость, плоская деформация, ударная волна, волна Римана, автомодельное решение, численный эксперимент.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.74.18.019

УДК: 539.371:519.62

Введение

Известно, что у многих природных и конструкционных материалов зависимость между напряжениями и деформациями сильно отличается от линейной уже на упругой стадии. Более того, существуют материалы, чьи диаграммы «напряжения – деформации» выглядят как кусочно-гладкие нелинейные функции с особой точкой в области малых деформаций. Например, такие диаграммы имеют горные породы [1], зернистые и волокнистые композиты [2, 3], некоторые металлические сплавы [4] и др. Все перечисленные материалы по-разному реагируют на растяжение и сжатие даже

© Дудко О. В., Манцыбора А. А. 2020

Дудко Ольга Владимировна

e-mail: dudko@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Манцыбора Александр Анатольевич

e-mail: manzubor@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований ДВО РАН «Дальний Восток» на 2018–2020 годы (проект №18-5-002).

Поступила 03.09.2020

при малой деформации и поэтому причисляются механикой деформирования к классу разномодульных упругих сред. Среди множества подходов, призванных описывать свойства подобных материалов, в настоящей работе выбрана модель разномодульной изотропно-упругой среды [5], основанная на использовании упругого потенциала с добавочными слагаемыми особого неаналитического вида. Влияние разномодульности на одномерную динамику упругого деформирования в рамках самого простого трехконстантного варианта такой модели достаточно подробно исследовано в [6–8] и др. В данной работе рассматриваются особенности динамики плоских деформаций разномодульной среды [5] на примере численного решения плоских автотомельных задач. При этом основное внимание направлено на анализ полученных численных результатов с целью выявить в тензорно-линейном варианте модели [5] те факторы, которые оказывают наиболее заметное влияние на решения (в том числе, на характер возникающих нелинейных волн деформаций).

Математическая модель

Запишем систему модельных соотношений динамики деформирования разномодульного изотропно-упругого материала, используя предположения о малости деформаций, отсутствии массовых сил и адиабатическом характере процесса:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} = \rho \dot{v}_i, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \varepsilon_1, \quad v_i = \dot{u}_i, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\lambda}{2}\varepsilon_1^2 + \mu\varepsilon_2 - \nu\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2} + \alpha\frac{\varepsilon_1^3}{\sqrt{\varepsilon_2}} + \dots, \quad \varepsilon_1 = e_{kk}, \quad \varepsilon_2 = e_{ks}e_{sk}. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) неизвестные функции зависят от времени t и прямоугольных декартовых координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Коши; e_{ij} — компоненты тензора малых деформаций; u_i, v_i — компоненты вектора перемещений и вектора скорости точек среды соответственно; ρ_0, ρ — начальное и текущее значения плотности среды; точкой обозначена частная производная по времени, индексом после запятой — по соответствующей пространственной координате; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Функция $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ является упругим потенциалом, задающим в системе (1) механические свойства изотропно-упругой среды. Для описания разномодульного поведения деформируемой среды примем тензорно-линейный вариант модели [5], как это сделано, например, в [9]. Первые два слагаемых функции W соответствуют линейно-упругой среде с параметрами Ламе λ, μ ; неаналитические слагаемые с упругими модулями ν, α описывают разномодульное поведение материала; многоточием обозначено дальнейшее разложение W в ряд по сферическим функциям [9].

Из уравнений (1) можно записать зависимость «напряжения – деформации» в форме, подобной известному соотношению линейной теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = A\varepsilon_1\delta_{ij} + 2Me_{ij}, \\ A = \lambda - \frac{\nu}{\phi} + 3\alpha\phi, \quad M = \mu - \frac{\nu}{2}\phi - \frac{\alpha}{2}\phi^3, \quad \phi = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Однако, в отличие от линейной модели, в (2) модули упругости A, M являются особыми функциями от инвариантов тензора деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, что обеспечивает физическую нелинейность выбранной модели даже при малых деформациях.

Если быстрое (скачкообразное) изменение нагрузки на границе деформируемого тела не приводит к его необратимым деформациям, то возникающие в этом случае граничные возмущения распространяются в материал в виде нелинейных упругих волн (ударных и слабых). Такие процессы моделируются в решении системы (1) разрывами первых и вторых производных, связанными условиями совместности разрывов первого и второго порядка соответственно [10, 11]:

— на ударной волне — разрыве первых производных при $[u_i] = 0$:

$$\begin{aligned} [\rho(v_j n_j - G)] &= 0, \quad [\sigma_{ij}] n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i], \\ \sigma_{ij}^+[v_i] n_j &= \rho^+(v_i^+ n_i - G) ([U^T] + [E] + \frac{1}{2}[v_i][v_i]), \\ [v_i] &= -GR_i, \quad [u_{i,j}] = R_i n_j, \quad R_i = \tau n_i + \gamma m_i; \end{aligned} \quad (3)$$

— на слабой волне — разрыве вторых производных при $[u_i] = 0$, $[v_i] = 0$, $[u_{i,j}] = 0$:

$$[\sigma_{ij,j}] = \rho^+[\dot{v}_i], \quad [\dot{v}_i] = G^2[u_{i,jk}] n_j n_k. \quad (4)$$

Скачки разрывных функций в (3), (4) определяются как $[\diamond] = \diamond^+ - \diamond^-$, где \diamond^+ , \diamond^- — предельные значения функции \diamond в точке $(\mathbf{x}, t) \in D(t)$ на внешней и внутренней стороне волновой поверхности $D(t)$ соответственно; G — скорость распространения волны $D(t)$; τ , γ — нормальная и касательная интенсивности разрыва градиента перемещений на ударной волне: $\tau = [u_{i,j}] n_i n_j$, $\gamma = [u_{i,j}] m_i n_j$; n_i , m_i — компоненты нормального и касательного к $D(t)$ векторов \mathbf{n} и \mathbf{m} ($n_i m_i = 0$, $n_i n_i = 1$); $[U^T]$, $[E]$ — скачки энергии теплового движения частиц среды и упругой потенциальной энергии [11].

Согласно [10, 11] отметим, что упругая ударная волна существует, если разрывы на ней носят эволюционный характер и энтропия не убывает. Если эти условия нарушаются, то ударную волну в решении системы (1) необходимо заменить на волну Римана (простую волну) — область, ограниченную двумя слабыми разрывами [10]. При численном решении плоских автомодельных краевых задач динамики разномодульной среды проверку критериев существования ударной волны будем проводить согласно алгоритму, предложенному в [12] для нелинейно-упругой среды Мурнагана.

Свойства ударных волн при плоской деформации разномодульной среды
Положим, что все движения точек среды ограничены плоскостью (x_1, x_2) :

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, t), \quad u_3 = 0. \quad (5)$$

С учетом (5) из (1)–(3) при $\mathbf{n} = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{m} = \{0, 1, 0\}$ получаем систему уравнений для сильных разрывов в условиях плоской деформации:

$$\begin{cases} (A^+ + 2M^+)\tau + ([A] + 2[M])(e_{11}^+ - \tau) + [A]e_{22}^+ = \rho^+ G^2 \tau, \\ 2[M]e_{12}^+ + (M^+ - [M])\gamma = \rho^+ G^2 \gamma. \end{cases} \quad (6)$$

Из (6) можно вычислить скорость ударной волны G и одну из интенсивностей разрыва (τ или γ), если другая известна. Анализ решений системы (6) показывает, что свойства плоских ударных волн при плоской деформации разномодульной среды (1) вполне согласуются с результатами [10, 12], полученными для нелинейно-упругих сред с гладкими нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями (типа среды Мурнагана). Кратко запишем эти свойства, необходимые в дальнейшем для постановки краевых задач динамики деформирования:

1) при плоской деформации в разномодульной упругой среде (1) могут возникать два плоских комбинированных сильных разрыва: квазипродольная ударная волна со скоростью G_{QL} и квазипоперечная ударная волна со скоростью G_{QT} ;

2) скорости G_{QL} , G_{QT} являются сложными функциями предварительных деформаций e_{ij}^+ и состояния e_{ij}^- позади волны (или, что то же самое, скачков τ , γ на волне);

3) можно показать, что $G_{QL} > G_{QT}$, т.е. передним фронтом распространения граничных возмущений является квазипродольная ударная волна, вызывающая основное объемное сжатие среды с небольшим сдвигом: $\tau > 0$, $\gamma \neq 0$, $\tau \gg |\gamma|$ (при отсутствии предварительного сдвига такая волна будет чисто продольной); квазипоперечная ударная волна идет второй по уже ненулевому полю деформаций и инициирует основной скачок сдвиговых деформаций с небольшим изменением объема: $\gamma \neq 0$, $\tau \neq 0$ и $|\gamma| \gg |\tau|$ (чисто поперечной эта ударная волна в среде (1) стать не может согласно условию $\tau \neq 0$, необходимому для существования решения системы (6)).

Постановка плоских автомодельных краевых задач

Рассмотрим задачи:

А) о сжимающе-сдвигающей ступенчатой нагрузке $\sigma^* = \text{const}$, бегущей с постоянной скоростью по границе L разномодульного упругого полупространства (рис. 1,а);

Б) о наклонном падении плоской волны ударного сжатия Σ_0 с интенсивностью $\tau_0 = \text{const}$ на бесконечную плоскую жесткую преграду L в разномодульной упругой среде (рис. 1,б).

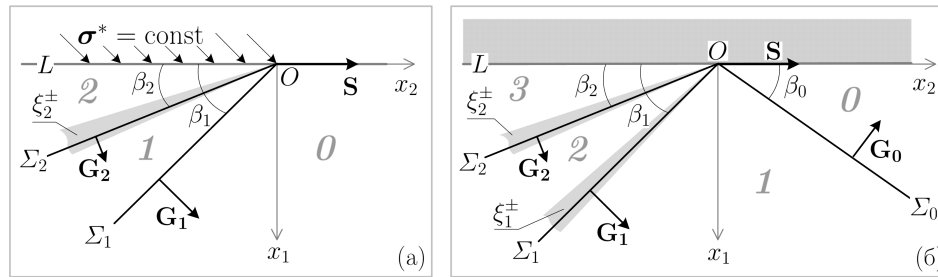


Рис. 1. Возможные схемы автомодельной постановки краевых задач: (а) задача А; (б) задача Б; Σ_0 , Σ_1 , Σ_2 — продольная, квазипродольная и квазипоперечная ударные волны; ξ_1^\pm , ξ_2^\pm — волны Римана; углы и скорости передних и задних фронтов волн Римана на рисунке не показаны

Постоянство граничной нагрузки и ее скорости в задаче А и постоянная интенсивность падающей волны в задаче Б позволяют провести решение А, Б в автомодельной постановке. В обоих случаях автомодельную переменную и компоненты вектора перемещений задаем как

$$\xi = \frac{x_1}{x_2 - St}, \quad u_1 = (x_2 - St)f(\xi), \quad u_2 = (x_2 - St)g(\xi), \quad u_3 = 0, \quad (7)$$

где $S = |\mathbf{S}| = \text{const} > c_1$ — скорость центра самоподобия подвижной системы координат O [13], связанная со скоростью любого k -го волнового фронта (рис. 1) соотношением $S = G_k / \sin \beta_k$; $f(\xi)$, $g(\xi)$ — безразмерные перемещения в автомодельном пространстве. Для параметров k -го волнового фронта (его автомодельной координаты ξ_k , скорости G_k и угла β_k) из (7) следует: $G_k = S\xi_k / (1 + \xi_k^2)^{1/2}$, $\xi_k = \text{tg} \beta_k$.

Представление (7) позволяет перейти в (1) от частных производных по x_i , t к производным по одной переменной ξ и записать уравнение движения в виде однородной

системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} A(\xi, f, g, f', g') \cdot f'' + B(\xi, f, g, f', g') \cdot g'' = 0, \\ C(\xi, f, g, f', g') \cdot f'' + D(\xi, f, g, f', g') \cdot g'' = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) имеет тривиальное решение $f(\xi) = a\xi + b$, $g(\xi) = k\xi + l$ с константами интегрирования $a = u_{1,1}$, $b = u_{1,2}$, $k = u_{2,1}$, $l = u_{2,2}$ всюду в деформируемой области, за исключением ударных волн (Σ_k) и волн Римана ($\xi_k^\pm = [\xi_k^-; \xi_k^+]$), где $AD - BC = 0$ и решение (8) нетривиально.

Возможные схемы постановки задач \mathcal{A} , \mathcal{B} на рис. 1 построены на основе перечисленных выше свойств плоских ударных волн. Автомодельные решения могут состоять из ударных волн (Σ_k) и волн Римана (ξ_k^\pm), которые включаются в постановку по принципу «или–или»:

\mathcal{A} (рис. 1,а): $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ или $\{\Sigma_1, \xi_2^\pm\}$;

\mathcal{B} (рис. 1,б): $\{\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2\}$ или $\{\Sigma_0, \Sigma_1, \xi_2^\pm\}$ или $\{\Sigma_0, \xi_1^\pm, \Sigma_2\}$ или $\{\Sigma_0, \xi_1^\pm, \xi_2^\pm\}$.

Заметим, что в задаче \mathcal{A} решения $\{\xi_1^\pm; \Sigma_2\}$, $\{\xi_1^\pm; \xi_2^\pm\}$ невозможны, т.к. на границе L задано ударное сжатие и передний фронт необходимо ударный.

Для численного решения каждой из краевых задач применяем подход, аналогичный предложенному в [12] для нелинейно-упругой среды Мурнагана. Решение, состоящее из одних только ударных волн Σ_k , находим из замкнутой системы нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных координат ударных фронтов ξ_k и всех неизвестных констант интегрирования a , b , k , l (т.е. различных постоянных значений $u_{i,j}$) во всех областях тривиального решения ($\mathcal{O}-2$ на рис. 1,а; $\mathcal{O}-3$ на рис. 1,б). Такая система строится с учетом (7) из краевых условий на границе L и соотношений на ударных волнах — условий непрерывности перемещений $[u_i] = 0$ и динамических условий совместности разрывов первого порядка (второе равенство в (3), которое при малых деформациях можно записать как $[\sigma_{ij}]n_j = -\rho_0 G[v_i]$). Затем, следуя алгоритму [12], каждую ударную волну Σ_k в полученном решении проверяем на выполнение критериев ее существования (эволюционности разрывов и неубывания энтропии [10, 11]) и при необходимости заменяем на волну Римана ξ_k^\pm . Неизвестные функции $f(\xi)$, $g(\xi)$ внутри волны Римана находим при помощи неявной разностной схемы [12] из системы ОДУ (8), переписанной на случай нетривиального решения: $Af'' + Bg'' = 0$, $AD - BC = 0$.

Численные результаты и обсуждение

Результаты серии численных экспериментов для задач \mathcal{A} и \mathcal{B} представим в графической форме. В качестве объектов исследования выбраны три материала [9] — диабаз, каменная соль и песчаник (Таблица 1).

№	Материал	λ [$\times 10^9$ Па]	μ [$\times 10^9$ Па]	ν [$\times 10^9$ Па]	α [$\times 10^9$ Па]
1	Диабаз	38.7	34.8	-4.8	-2.3
2	Каменная соль	4.8	4.7	2.1	1.2
3	Песчаник	1.78	8.70	1.35	0.48

Таблица 1. Константы упругости разномодульных сред [9]

Решение краевой задачи \mathcal{A} о бегущей нагрузке (рис. 1,а) проведено для диабазы и каменной соли (Таблица 1). Графики на рис. 2,а отражают изменение углов β_1, β_2 (т.е., фактически, положения ударных волн Σ_1, Σ_2) в зависимости от скорости движения постоянной нагрузки по границе L . Граничная нагрузка σ^* , предварительные деформации \mathbf{e}^0 и скорость точек среды \mathbf{v}^0 в зоне \mathcal{O} заданы параметрами: $\sigma_{11}^* = -0.01$ ГПа, $\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^* = 0.003$ ГПа, $\sigma_{22}^* = 0$; $e_{11}^0 = -0.005, e_{12}^0 = e_{21}^0 = 0.0005, e_{22}^0 = 0$; $v_1^0 = v_2^0 = 0$. Скорость движения нагрузки σ^* определяется числом Маха $\mathcal{M} = S/c_1 > 1$ ($c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$), которое в численном эксперименте изменялось в диапазоне от $\mathcal{M}_{min} > 1$ до $\mathcal{M}_{max} = 2.5$. Значение \mathcal{M}_{min} , при котором существует автомодельное решение задачи \mathcal{A} с заданными краевыми условиями, определялось численно и для выбранных материалов оказалось различным: для диабазы $\mathcal{M}_{min} = \mathcal{M}_1 = 1.11$, для каменной соли $\mathcal{M}_{min} = \mathcal{M}_2 = 1.005$.

На рис. 2,б показаны типичные диаграммы распределения напряжений по зонам $\mathcal{O}-\mathcal{Z}$ в дибазе, полученные при решении задачи \mathcal{A} с указанными выше параметрами $\sigma^*, \mathbf{e}^0, \mathbf{v}^0$ и движении граничной нагрузки со скоростью $S = 1.7c_1$. Форма полученных кусочно-постоянных функций $\sigma_{11} + \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$ соответствует перечисленным выше свойствам квазипродольных и квазипоперечных плоских ударных волн (а именно, соотношению на них скачков τ и γ) при плоской деформации разномодульной среды. Волновая картина $\{\Sigma_1; \xi_2^\pm\}$ с волной Римана для выбранных материалов при заданных параметрах задачи \mathcal{A} не реализовалась.

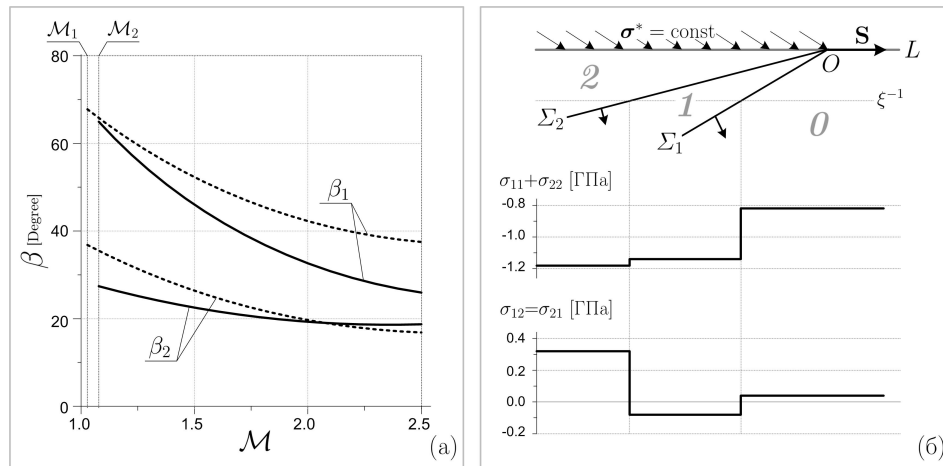


Рис. 2. Решение задачи \mathcal{A} с двумя ударными волнами Σ_1, Σ_2 : (а) графики изменения углов β_1, β_2 в зависимости от скорости движения граничной нагрузки (сплошные линии соответствуют дибазе, пунктирные — каменной соли); (б) мгновенное распределение напряжений в дибазе при $\mathcal{M} = 1.7$

На рис. 3 приведены результаты численного решения задачи \mathcal{A} для выбранных материалов, отражающие зависимость положения ударных волн (а именно, углов β_1, β_2) от нормированных параметров граничной нагрузки $\tilde{\sigma}_{11}^* = \sigma_{11}^*/(\lambda + 2\mu) < 0, \tilde{\sigma}_{21}^* = \sigma_{21}^*/(\lambda + 2\mu) > 0$. Графики β_1, β_2 на рис. 3,а построены при $|\tilde{\sigma}_{11}^*| \in [0.003; 0.06]$ и $\tilde{\sigma}_{21}^* = 0.3|\tilde{\sigma}_{11}^*|$, на рис. 3,б — при $\tilde{\sigma}_{21}^* \in [0.003; 0.06]$ и $\tilde{\sigma}_{11}^* = -0.01$.

Решение краевой задачи \mathcal{B} о выходе плоской волны ударного сжатия на жесткую границу полупространства (рис. 1,б) также построено для двух разномодульных материалов — диабазы и песчаника (Таблица 1). При этом для всей серии вычислительных

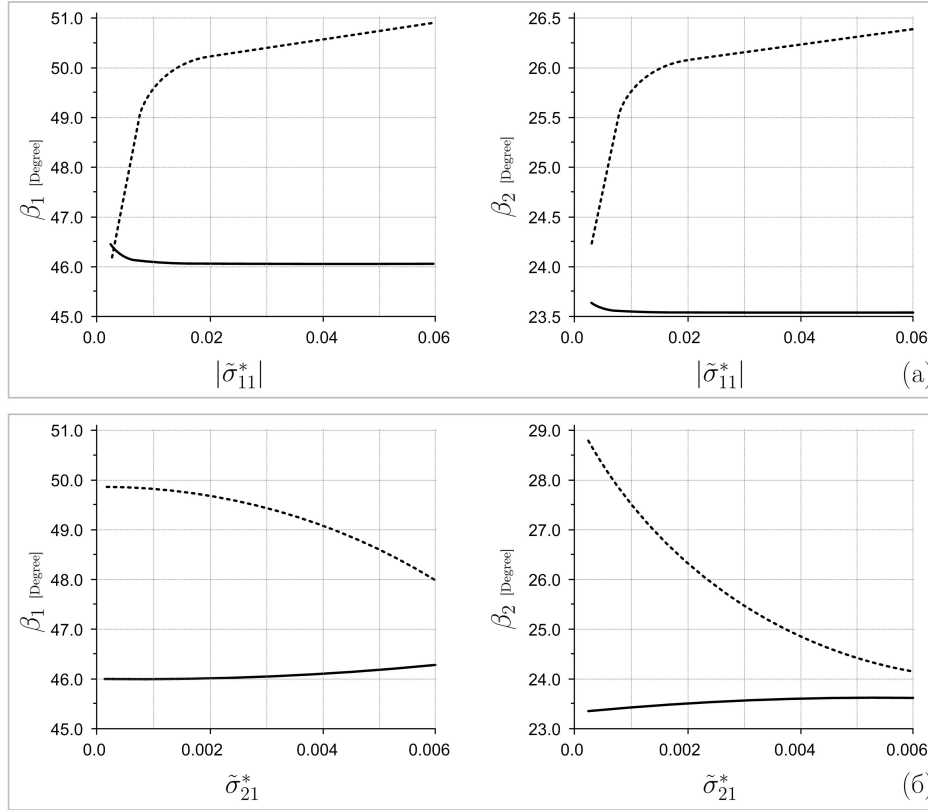


Рис. 3. Зависимость положения ударных волн от параметров граничной нагрузки в решении задачи \mathcal{A} : β_1, β_2 — углы между границей L и ударными волнами Σ_1, Σ_2 ; сплошные линии соответствуют диабазу, пунктирные — каменной соли

экспериментов задавались следующие постоянные параметры: предварительные деформации и скорость точек среды в зоне \mathcal{O} (рис. 1,б) $e_{11}^0 = 0.002, e_{12}^0 = e_{21}^0 = -0.0015, v_1^0 = v_2^0 = 0; v_1|_L = v_2|_L = 0$ на жесткой границе; нормальная и касательная интенсивности падающей волны $\tau_0 = 0.003, \gamma_0 = 0$.

Результаты численного решения задачи \mathcal{B} показаны на рис. 4 в виде зависимостей автомодельной координаты $\tilde{\xi} = \xi^{-1}$ падающей и отраженных волн от угла β_0 . Значение β_0 изменялось в диапазоне от 5° до 65° . Нетрудно видеть, что для диабаза (серые кривые) получены все возможные в решении задачи \mathcal{B} волновые картины, тогда как для песчаника (черные кривые) в заданном диапазоне изменения β_0 из четырех вариантов постановки реализовались только три (последовательно при увеличении угла β_0 : $\{\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2\}, \{\Sigma_0, \Sigma_1, \xi_2^\pm\}, \{\Sigma_0, \xi_1^\pm, \Sigma_2\}$). Кроме того, диапазоны значений β_0 , при которых в отраженном пакете возникают, например, две ударные волны, для выбранных материалов оказываются различными (это касается и остальных вариантов постановки).

Анализируя графики, представленные на рис. 2,а и рис. 4, замечаем, что решения задач \mathcal{A} и \mathcal{B} , полученные соответственно для каменной соли и песчаника, ведут себя сходным образом: изменение независимых аргументов \mathcal{M} и β_0 не приводит к существенному изменению величин $\Delta\beta = |\beta_1 - \beta_2|, \Delta\tilde{\xi} = |\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2|$. Иначе говоря, для этих

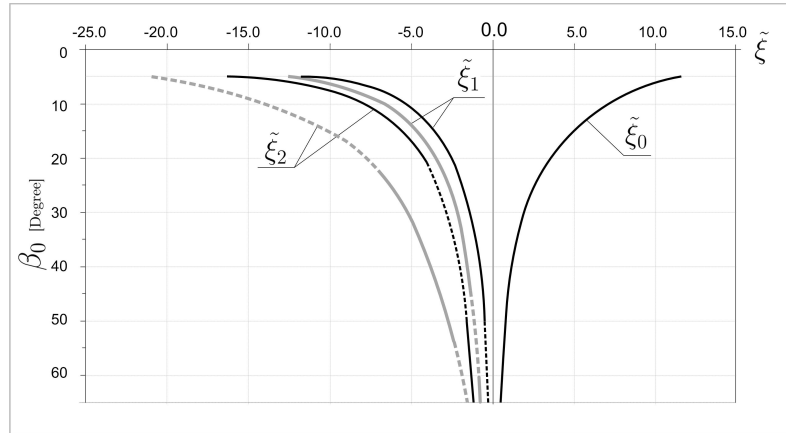


Рис. 4. Зависимость автомодельных координат волновых фронтов от угла падения β_0 в решении задачи \mathcal{B} : $\tilde{\xi} = \xi^{-1}$; $\tilde{\xi}_0$ — падающая волна ударного сжатия, $\tilde{\xi}_1$ — отраженный квазипродольный фронт, $\tilde{\xi}_2$ — отраженный квазипоперечный фронт; сплошные линии соответствуют ударным волнам, пунктирные — передним фронтам волн Римана; серый цвет графиков соответствует диабазу, черный — песчанику

материалов угол раствора зоны **1** между квазипродольной и квазипоперечной волнами на рис. 1,а и рис. 1,б слабо зависит от заданных при постановке задач значений M или β_0 . И наоборот, графики, полученные для диабаза, не позволяют сделать подобное заключение, т.к. в этом случае наблюдается явная нелинейность зависимостей $\Delta\beta(M)$ и $\Delta\tilde{\xi}(\beta_0)$. Подобные отличия можно увидеть и на рис. 3, где направления монотонного изменения функций β_1, β_2 для каменной соли и диабаза противоположны. В чем же заключается причина такого различия в поведении ударных волн при решении одних и тех же задач для разных сред? Сопоставление результатов графического анализа с параметрами выбранных разномодульных материалов (Таблица 1) позволяет нам предположить, что основным фактором здесь являются не абсолютные величины материальных констант $\lambda, \mu, \nu, \alpha$ (и их нормированных соотношений типа $\nu/(\lambda + 2\mu), \alpha/(\lambda + 2\mu)$), а знак упругих модулей ν, α , отвечающих за проявление разномодульности в тензорно-линейном варианте модели [5].

Заключение

Итак, в работе представлены результаты численного исследования особенностей распространения плоских волн деформаций в разномодульной изотропно-упругой среде [5] при условии ее плоского деформирования. На примере численного решения двумерных автомодельных задач показано, что в целом плоские волны деформаций в разномодульном материале ведут себя так же, как и в нелинейно-упругой среде [10,12] с гладкой зависимостью между напряжениями и деформациями. Серия вычислительных экспериментов, проведенных для трех различных разномодульных материалов [9], позволила заключить, что наряду с параметрам краевых условий немаловажным фактором, влияющим на решение задачи (т.е. на характер каждой из возникших волн и на всю волновую картину в целом), является знак материальных констант ν, α в добавочных неаналитических слагаемых упругого потенциала [5,9] в соотношениях (1). Также нам представляется возможным ожидать, что решения описанных автомодельных задач для любых разномодульных материалов [9] с константами $\nu > 0$,

$\alpha > 0$ будет сходно с решениями, полученным для каменной соли и песчаника, а при $\nu < 0$, $\alpha < 0$ — с решениями, построенными для диабазы. Считаем, что такой вывод в дальнейшем может послужить критерием корректности постановки и численных решений других плоских краевых задач динамики деформирования разномодульной среды [5].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Experimental investigation of the anisotropic mechanical behavior of phyllite under triaxial compression / X. Guowen, H. Chuan, S. Ang et al. // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2018. no. 104. p. 100–112.
- [2] Tien Y. M., Tsao P. F. Preparation and mechanical properties of artificial transversely isotropic rock // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2010. no. 37. p. 1001–1012.
- [3] Lomakin E. V., Fedulov B. N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Meccanica*. 2015. no. 50. p. 1527–1535.
- [4] Ломакин Е. В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Физическая мезомеханика*. 2007. Т. 10, № 5. С. 41–52.
- [5] Олейников А. И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // *Прикладная математика и механика*. 1993. Т. 57, № 5. С. 153–159.
- [6] Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // *Дальневосточный математический журнал*. 2005. Т. 6, № 1-2. С. 94–105.
- [7] Gavrilov S. N., Herman G. C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodal elastic bar subjected to a harmonic loading // *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331, no. 20. P. 4464–4480.
- [8] Dudko O. V., Ragozina V. E., Lapteva A. A. Mathematical modeling the nonlinear 1D dynamics of elastic heteromodal and porous materials // *Materials Science Forum*. 2019. no. 945. P. 899–905.
- [9] Мясников В. П., Олейников А. И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007. 172 с.
- [10] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М: Московский лицей, 1998. 412 с.
- [11] Чернышов А. Д. Об условиях распространения ударных волн в средах с упругими и пластическими свойствами // *Проблемные вопросы механики горных пород*. Алма-Ата: Наука, 1972. С. 183–192.
- [12] Потянихин Д. А. Алгоритм решения автомодельных задач динамики ударного деформирования твердого тела // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 8, № 2. С. 413–423.
- [13] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 8-ое, переработанное изд. М: Наука, 1977. 440 с.

O. V. Dudko, A. A. Mantsybora

NUMERICAL STUDY OF AN INFLUENCE OF MATERIAL CONSTANTS OF A HETEROMODULAR ELASTIC MEDIUM ON SOLUTIONS OF PLANE SELF-SIMILAR PROBLEMS OF SHOCK DEFORMATION

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The paper presents the results of numerical solving 2D self-similar problems of the dynamic deformation of rocks under plane strain conditions. To describe the dynamic behavior of materials in question under the action of a shock load, a model of an isotropic-elastic heteromodal medium with a singular dependence between stresses and deformations is chosen. A series of computational experiments was carried out for various materials and parameters of the boundary conditions. As a result, it has been concluded that the sign of the material constants responding for the manifestation of different modularity in the model equations has a significant effect on the solution as a whole and the behavior of the arising deformation waves in particular.

Keywords: heteromodal elasticity, plane deformation, shock wave, Reimann wave, self-similar solution, computational experiment.

REFERENCES

- [1] Experimental investigation of the anisotropic mechanical behavior of phyllite under triaxial compression / X. Guowen, H. Chuan, S. Ang et al. // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2018. no. 104. p. 100–112.
- [2] Tien Y. M., Tsao P. F. Preparation and mechanical properties of artificial transversely isotropic rock // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2010. no. 37. p. 1001–1012.
- [3] Lomakin E. V., Fedulov B. N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. no. 50. p. 1527–1535.
- [4] Lomakin E. V. Mechanics of media with stress-state dependent properties // Physical Mesomechanics. 2007. Vol. 7, no. 5-6. P. 255–264.
- [5] Oleinikov A. I. Fundamental general relationships for a model of an anisotropically elastic heteromodal medium // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1993. Vol. 57, no. 5. P. 913–920.
- [6] Dudko O. V., Lapteva A. A., Semyonov K. T. About distribution of flat one-dimensional waves and their interaction with barrier in the media differently reacting to a stretching and compression // Far Eastern Mathematical Journal. 2005. Vol. 6, no. 1-2. P. 94–105. (in Russian).
- [7] Gavrilov S. N., Herman G. C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodal elastic bar subjected to a harmonic loading // Journal of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331, no. 20. P. 4464–4480.
- [8] Dudko O. V., Ragozina V. E., Lapteva A. A. Mathematical modeling the nonlinear 1D dynamics of elastic heteromodal and porous materials // Materials Science Forum. 2019. no. 945. P. 899–905.
- [9] Myasnikov V. P., Oleinikov A. I. Fundamentals of Mechanics of Heteromodal Media. Vladivostok: Dal'nauka, 2007. 172 p. (in Russian).
- [10] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear Waves in Elastic Media. New York: CRC Press, 1995. 256 p.
- [11] Chernyshov A. D. On shock wave propagation conditions in media with elastic and plastic properties // Problems of the Mechanic of Mountain Rock. Alma-Ata: Nauka, 1972. P. 183–192. (in Russian).
- [12] Potyanikhin D. A. Algorithm of the decision of automodelling problems of dynamics of shock deformation of a firm body // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. Vol. 8, no. 2. P. 413–423. (in Russian).
- [13] Sedov L. I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. 10th edition. New York: CRC Press, 1993. 498 p.

Dudko Olga Vladimirovna, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Leading Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.

Mantsybora Alexander Anatolievich, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.

Н. В. Минаева, Д. В. Сабынин, А. И. Шашкин

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА УПРУГО ПОДКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ОСНОВАНИЯ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Рассмотрен изгиб шарнирно закрепленной балки на упругом основании. Начальный прогиб и неоднородность жесткости основания заданы с точностью до малых параметров. Получено условие, определяющее границу области сходимости метода малого параметра. Найдена функция, характеризующая прогиб, с точностью до величин четвертого порядка малости. Проанализирован случай, когда малые параметры являются случайными величинами.

Ключевые слова: упруго подкрепленная балка, изгиб, сходимость метода малого параметра, стохастическая неоднородность.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.64.67.020

УДК: 539.374

Рассмотрим шарнирно закрепленную балку на упругом основании. Она находится под действием продольной силы P и моментов M_i ($i = 1, 2$), приложенных на концах балки. В качестве модели основания выбрана классическая модель однопараметрического основания Винклера [1, 2].

Прогиб балки описывается решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} u^{(4)}(x) - f^{(4)}(x) + \alpha u''(x) + c(x)(u(x) - f(x)) &= 0 \\ u(0) = u(1) &= 0, \\ u''(0) - f''(0) = m_1, \quad u''(1) - f''(1) &= m_2, \end{aligned} \tag{1}$$

© Минаева Н. В., Сабынин Д. В., Шашкин А. И., 2020

Минаева Надежда Витальевна

e-mail: minaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Сабынин Денис Викторович

e-mail: minaeva@yandex.ru, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Шашкин Александр Иванович

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, декан факультета прикладной математики информатики и механики, Воронежский государственный университет, Россия.

Поступила 20.06.2020

где $\alpha = \frac{Pl^2}{EI}$, $m_i = \frac{M_i}{EI}$. Функция начального прогиба задается функцией $f(x) = \varphi_1(x)\varepsilon_1$. Реакция упругого основания определяется как $c(x) = c_0 + \varphi_2(x)\varepsilon_2$, где $c_0 = \frac{\tilde{c}_0 l^4}{EI}$, \tilde{c}_0 – коэффициент податливости основания (коэффициент постели), имеющий размерность Н/см³ или Па/м; $\varphi_i(x)$ – заданные функции, $|\varepsilon_i| < 1$ – малые параметры (можно рассматривать и как случайные величины).

Поскольку функция начального прогиба и коэффициент постели заданы с точностью до малых параметров, то для нахождения функции прогиба воспользуемся методом возмущений [3]. Прежде, чем находить приближения, проведем исследование сходимости метода малого параметра.

Пусть при $\varphi_i(x) = 0$ задача (1) допускает решение $u = u_0(x)$. Тогда решение задачи (1) будет аналитической функцией, если оно будет непрерывно зависеть от $\varphi_i(x)$ при $\varphi_i(x) = 0$.

Для проверки этой непрерывности, как следует из [4], необходимо составить следующую задачу относительно вспомогательной функции $\zeta(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(4)} + \zeta^{(4)} + \alpha u'' + \alpha \zeta'' + c_0 u + c_0 \zeta &= 0 \\ u(0) + \zeta(0) = u(1) + \zeta(1) &= 0, \\ u''(0) + \zeta''(0) = m_1, \quad u''(1) + \zeta''(1) &= m_2, \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку $u_0(x)$ – решение задачи (1), то из (2) получаем следующую задачу [5]:

$$\begin{aligned} \zeta^{(4)} + \alpha \zeta'' + c_0 \zeta &= 0 \\ \zeta(0) = \zeta(1) &= 0, \\ \zeta''(0) = 0, \quad \zeta''(1) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно [5], решение задачи (1) непрерывно зависит от $\varphi_i(x)$ при $\varphi_i(x) = 0$, если задача (3) имеет только тривиальное решение.

Условие существования нетривиального решения задачи (3) получено в следующем виде:

$$c_0 = n^2 \pi^2 \alpha - n^4 \pi^4 \quad (4)$$

Это же условие будет давать границу области сходимости метода малого параметра.

При условии, что все исходные данные удовлетворяют требованиям сходимости, будем искать решение в виде ряда по малым параметрам

$$u = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{ij}(x) \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \quad (5)$$

(5) В результате подстановки в (5) были получены задачи для нахождения приближений (до четвертого порядка включительно). Для u_0 :

$$u_0^{(4)}(x) + \alpha u_0''(x) + c_0(x) u_0(x) = 0 \quad (6)$$

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad u_0''(0) = m_1, \quad u_0''(1) = m_2, \quad (7)$$

Дифференциальные уравнения для приближений u_{20} , u_{30} , u_{40} аналогичны (6), а для остальных компонент приближений отличаются только слагаемыми, характеризующимися неоднородность уравнения

$$u_{ij}^{(4)}(x) + \alpha u_{ij}''(x) + c_0(x) u_{ij}(x) = f_{ij}(x)$$

Вид функций $f_{ij}(x)$ зависит от $\varphi_i(x)$ и вида предшествующих приближений:

$$\begin{aligned} f_{10}(x) &= -\varphi_1^{(4)}(x) + c_0\varphi_1(x) & f_{01}(x) &= -\varphi_2(x)u_0(x) \\ f_{11}(x) &= -\varphi_2(x)(\varphi_1(x) - u_{10}(x)) & f_{02}(x) &= -\varphi_2(x)u_{01}(x) & f_{21}(x) &= -\varphi_2(x)u_{20}(x) \\ f_{12}(x) &= -\varphi_2(x)u_{11}(x) & f_{22}(x) &= -\varphi_2(x)u_{21}(x) & f_{03}(x) &= -\varphi_2(x)u_{02}(x) \\ f_{31}(x) &= -\varphi_2(x)u_{30}(x) & f_{13}(x) &= -\varphi_2(x)u_{12}(x) & f_{04}(x) &= -\varphi_2(x)u_{03}(x) \end{aligned}$$

Граничные условия почти для всех компонент приближений аналогичны условиям из (3), и только для u_{10} имеют отличный вид:

$$u_{10}(0) = u_{10}(1) = 0, \quad u''_{10}(0) = \varphi_1''(0), \quad u''_{10}(1) = \varphi_1''(1)$$

Для оптимизации процесса нахождения приближений в аналитическом виде использовался пакет Maple. Рассматривался частный случай, когда функции, характеризующие начальный прогиб и неоднородность основания следующие $\varphi_i(x) = \sin(k_i\pi x)$. Входными данными при этом являются: α – параметр продольной силы; c_0 – коэффициент жесткости основания; m_1 и m_2 – моменты, приложенные на концах балки; k_1 и k_2 – коэффициенты, содержащиеся в функциях $\varphi_i(x)$.

Поскольку $u_{20} = u_{21} = u_{22} = u_{30} = u_{31} = u_{40} = 0$, то решение задачи (1) с точностью до величин четвертого порядка малости примет вид:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + u_{10}(x)\varepsilon_1 + u_{01}(x)\varepsilon_2 + u_{11}(x)\varepsilon_1\varepsilon_2 + u_{02}(x)\varepsilon_2^2 + \\ &\quad + u_{12}(x)\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + u_{03}(x)\varepsilon_2^3 + u_{13}(x)\varepsilon_1\varepsilon_2^3 + u_{04}(x)\varepsilon_2^4 \end{aligned}$$

Если считать ε_1 , ε_2 независимыми случайными величинами, то с точностью до величин четвертого порядка малости:

$$\langle u \rangle = u_0(x) + u_{02}(x)\langle \varepsilon_2^2 \rangle + u_{03}(x)\langle \varepsilon_2^3 \rangle + u_{04}(x)\langle \varepsilon_2^4 \rangle$$

Дисперсия имеет вид:

$$D(u(x)) = D(\varepsilon_1) (u_{10}^2 + (u_{11}^2 + 2u_{10}u_{12})D(\varepsilon_2) + o_1(\langle \varepsilon_2^3 \rangle)) + u_{01}^2 D(\varepsilon_2) + o_2(\langle \varepsilon_2^3 \rangle)$$

где $o_i(\langle \varepsilon_2^3 \rangle)$ представляют собой функции, зависящие от $\langle \varepsilon_2^3 \rangle$ и математических ожиданий более высоких степеней ε_2 .

Таким образом, получаем, что если проводится экспериментальное исследование поведения балки, то наличие малого начального прогиба не оказывает значительного влияния на среднестатистический результат (математическое ожидание).

Дисперсия $u(x)$, будет пропорциональна дисперсии случайной величины, характеризующей начальный прогиб. Влияние неоднородности упругого основания более значительно и носит нелинейный характер, поскольку необходимо учитывать еще дисперсии более высоких степеней ε_2 .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. с. 137.
- [2] Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
- [3] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластических деформаций. М.: Наука.
- [4] Минаева Н. В. Метод возмущений в механике деформируемых тел. М.: Научная книга, 2002. 156 с.
- [5] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Об устойчивости полосы при сжатии // ДАН СССР. 1961. Т. 138, № 5. С. 1047–1049.

N. V. Minaeva, D. V. Sabynin, A. I. Shashkin

INVESTIGATION OF BENDING OF AN ELASTICALLY SUPPORTED BEAM TAKING INTO ACCOUNT THE INHOMOGENEITY OF THE BASE

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The bending of a pivotally fixed beam on an elastic base is considered. The initial deflection and inhomogeneity of the base stiffness are set up to small parameters. A condition is obtained that defines the boundary of the convergence region of the small parameter method. A function describing the deflection is found up to the fourth order of smallness. The case when small parameters are random variables is analyzed.

Keywords: elastic reinforced beam, bending, convergence of the small parameter method, stochastic inhomogeneity.

REFERENCES

- [1] Lomakin V. Statistical problems of solid mechanics. M.: Nauka, 1970. p. 137.
- [2] Volmir A. Stability of elastic systems. M.: Fizmatgiz, 1963. 880 p.
- [3] Ivlev D. D., Ershov L. V. On the stability of the band under compression // DAN SSSR. 1961. Vol. 138, no. 5. P. 1047–1049.
- [4] Minaeva N. Perturbation method in the mechanics of deformable bodies. M.: Nauchnaya kniga, 2002. 156 p.
- [5] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastoplastic deformations. M.: Nauka.

Minaeva Nadezhda Vital'evna, Doc. of Phys. and Math. Sc., Professor, Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Sabynin Denis Victorovich, Postgraduate student, Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Alexandr Ivanovich Shashkin, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Е. Е. Абашкин, А. В. Ткачева

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ В МАТЕРИАЛЕ ПЛАСТИНЫ, ОБРАЗОВАННОЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ДВИЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Работа посвящена исследованию температурных напряжений в пластине из среднеуглеродистой легированной стали, по поверхности которой с определенной скоростью проходит прямолинейно источник тепла. Математическая модель строится на основе модели Прандтля – Рейса, в которой закон Гука заменен законом Дюамеля – Неймана. В качестве условия пластического течения принимается условие Мизесса, где предел текучести параболически зависит от температуры. Рассматриваются поля остаточных напряжений в зависимости от скорости прохождения источника тепла. Значения остаточных напряжений, полученные в результате расчета, сравниваются с экспериментальными напряжениями, снятыми с пластины при помощи анализатора остаточных напряжений RIGAKU.

Ключевые слова: температурные напряжения, локальный нагрев, остаточные напряжения, упругость, пластичность

DOI: 10.37972/chgpu.2020.92.50.021

УДК: 539.374

Введение

В производстве металлоконструкций чаще всего встречаются следующие тепловые процессы: горячая посадка, сварка, штамповка. Их объединяет возникновение необратимых деформаций вследствие высокой температуры. Деформации такого рода повышают поле остаточных напряжений и оказывают влияние на эксплуатационную прочность конструкций. В настоящее время сварка является наиболее распространенным методом получения соединений. В большинстве случаев процесс сварки проходит под действием точечного локального перегрева металла, в результате которого

© Абашкин Е. Е., Ткачева А. В., 2020

Абашкин Евгений Евгеньевич

e-mail: abashkine@mail.ru, кандидат тех. наук, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: 4nansi4@mail.ru, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия,

Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН №075-01032-20-00.

Поступила 20.03.2019

возникают колоссальные остаточные напряжения, вызывающие дефекты и разрушение материалов. Сварка аустенитных сталей представляет наибольший интерес для производства металлоконструкций, несмотря на требование жесткого соблюдения режимов и достаточно сложную свариваемость. Нержавеющие стали при сварке имеют выраженную склонность к формированию горячих трещин в околосшовной области и непосредственно в сварном шве. Одним из способов борьбы с горячими трещинами является метод снижения уровня проплавления металла с увеличением скорости прохождения источника тепла. Ввиду этого появляется задача определения уровня распределения остаточных напряжений в конструкциях из аустенитных сталей теоретическим методом, который позволит прогнозировать получаемый результат и оптимизировать технический процесс. Изучению остаточных напряжений, желательных и нежелательных деформаций металлоконструкций, появившихся в результате температурного воздействия, посвящено много работ [1–8, 8, 9]. Проблема возникновения деформаций в сварочных процессах также хорошо освещена [?, ?, ?, ?] и нуждается в дальнейшем изучении. Одним из аспектов, требующих рассмотрения, является движущийся локальный источник тепла и его влияние на распределение остаточных напряжений в материале аустенитной стали. А так же требуется экспериментальное сравнение с полученными теоретическими данными.

Основы математической модели.

Для решения поставленной задачи была выбрана модель малых деформаций. Из-за малого значения теплового расширения материала пластины, считаем деформации малыми и складываемыми из обратимых e_{ij}^e , и необратимых e_{ij}^p .

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

u_i – компоненты вектора перемещений $i = 1, 2, 3$. Зависимость деформации e_{ij}^e , напряжения σ_{ij} и температуры T запишем зависимость Дюамеля–Неймана.

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad (2)$$

где α – коэффициент линейного расширения, λ , μ , $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – упругие модули, δ_{ij} – компоненты единичного тензора, соответственно из символов Кронекера.

Необратимые деформации начинают расти, когда напряженное состояние достигнет поверхности нагружения (условия пластического течения).

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = \zeta \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \zeta > 0 \quad (3)$$

где $f(\sigma_{ij}) = 0$ – поверхность нагружения в пространстве напряжений. В качестве поверхности нагружения примем условие Мизеса.

$$f(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2k^2 \quad (4)$$

k – предел текучести, зависящий от температуры, σ_1 , σ_2 , σ_3 – значения главных напряжений.

$$k(T) = k_0 \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_0} \right)^2 \quad (5)$$

T_p – температура плавления, k_0 – предел текучести при комнатной температуре.

Замыкает описаную систему уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (6)$$

Для проверки теоретического расчета предложенной математической модели был произведен практический эксперимент, заключающийся в наплавке сварного шва на металлические жестко закрепленные пластины размером 0,4 м на 0,35 м с помощью автоматической электродуговой сварки на агрегате АДФ-1005 под слоем флюса, при разных скоростях наплавки: 10, 15, 20 м/ч. После охлаждения произведена регистрация остаточных напряжений в экспериментальной пластине по сетке с шагом 0,01 м с использованием анализатора остаточных напряжений RIGAKU. Метод заключается в следующем: в деформируемом металле при приложении внешней силы изменяется межплоскостное расстояние между кристаллическими решетками в трех измерениях, что приводит к более значительному наблюдаемому изменению положения пика дифракционного профиля, чем в случае без деформаций. Упругие напряжения рассчитываются из этих изменений (смещений) положения пика. Для случая однородной деформации изменение межплоскостного расстояния равно относительной деформации образца пластины.

Постановка задачи. Обратимое деформирование.

Для расчета остаточных напряжений в пластине из среднеуглеродистой лигированной стали, в системе декартовых координат (x, y, z) рассмотрим прямоугольную тонкую пластину размерами S_x и S_y , по поверхности которой прямолинейно с некоторой скоростью V движется источник тепла. Поскольку пластина тонкая, распределение температуры по толщине пластины не учитываем. Температура в пластине задается законом теплопроводности.

$$\rho A \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + 2\kappa \frac{T_0 - T}{h} \quad (7)$$

ρ – плотность, A – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, κ – коэффициент теплоотдачи.

Для решения уравнения (7) следует задать начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} t = 0 : \quad T &= T_0, \quad T_0 = 20^\circ C \\ t > 0 : \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=Vt} &= q \\ & \quad y = 0.5S_y \\ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=S_x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=S_y} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$q = \eta IU$, η – к.п.д. источника, I – сила тока, U – напряжения источника тока.

Не составляет особого труда решить поставленную выше температурную задачу. Считаем известным поле температур на каждой временной итерации, перейдем к механической части задачи.

В условиях плоского напряженного состояния $\sigma_{zz} = 0$ зависимость Дюамеля – Неймана принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Au_{x,x} + Bu_{y,y} - C\theta, \\ \sigma_{yy} &= Au_{y,y} + Bu_{x,x} - C\theta, \\ \sigma_{xy} &= 2\mu(u_{x,y} + u_{y,x}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$A = 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}, B = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}, C = 6K\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}, \theta = T - T_0.$$

Соотношения (8) подставляются в уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} &= 0 \\ \sigma_{yy,y} + \sigma_{xy,x} &= 0\end{aligned}\quad (10)$$

из которых определяются перемещение $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$, с использованием граничных условий, моделирующих жесткий задел пластины по периметру

$$\begin{aligned}u_x|_{x=0} = u_y|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=S_x} = u_y|_{x=S_x} = 0, \\ u_x|_{y=0} = u_y|_{y=0} = 0, \quad u_x|_{y=S_y} = u_y|_{y=S_y} = 0\end{aligned}\quad (11)$$

К сожалению, получить аналитическое решение (9) совместно с граничными условиями (10) относительно $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$ невозможно, поэтому воспользуемся численным сеточным методом: итерационно находятся перемещения на каждом шаге по времени, а после вычисляются напряжения из (10). Через несколько временных шагов в области источника выполняется условие Мизеса $\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 = 4k^2$.

Пластическое течение Поскольку в области пластического течения начинают развиваться необратимые деформации, соотношения (10) примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= A(u_{x,x} - p_x) + B(u_{y,y} - p_y) - C\theta, \\ \sigma_{yy} &= A(u_{y,y} - p_y) + B(u_{x,x} - p_x) - C\theta\end{aligned}\quad (12)$$

Используя ассоциированный закон пластического течения (3) находим $p_x = \tilde{p}_x + \tau d\lambda(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$, $p_y = \tilde{p}_y + \tau d\lambda(2\sigma_{yy} - \sigma_{xx})$, $p_{xy} = \tilde{p}_{xy} + 6\tau d\lambda\sigma_{xy}$, где \tilde{p}_x , \tilde{p}_y , \tilde{p}_{xy} – необратимые деформации на предыдущем шаге, τ – временной шаг. Для нахождения $d\lambda$ перепишем зависимость Дюамеля – Неймана

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= A'(u_{x,x} - \tilde{p}_x) + B'(u_{y,y} - \tilde{p}_y) - C'\theta, \\ \sigma_{yy} &= A'(u_{y,y} - \tilde{p}_y) + B'(u_{x,x} - \tilde{p}_x) - C'\theta\end{aligned}\quad (13)$$

где $A' = (A + 2d\lambda(A^2 + B^2))(d\lambda(A + B) + 1)^{-1}(3d\lambda(A - B) + 1)^{-1}$,

$$B' = (B + d\lambda(A^2 - B^2))(d\lambda(A + B) + 1)^{-1}(3d\lambda(A - B) + 1)^{-1},$$

$C' = C(d\lambda(A + B) + 1)^{-1}$ и подставим его в условие пластического течения Мизеса $\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 = 4k^2$, получим уравнение относительно $d\lambda$

$$a_6\tau^6 d\lambda^6 + a_5\tau^5 d\lambda^5 + a_4\tau^4 d\lambda^4 + a_3\tau^3 d\lambda^3 + a_2\tau^2 d\lambda^2 + a_1\tau d\lambda + a_0 = 0\quad (14)$$

$$a_6 = 10368\mu^2 k^2 (A - B)^2 (A + B)^2$$

$$a_5 = 1728\mu k^2 (A - B)(A + B)(A^2 + 8\mu(2A - B) - B^2)$$

Уравнение (14) относительно $d\lambda$ решается с использованием итерационного метода Ньютона для нелинейных уравнений.

Итак, на каждом шаге по времени решаем (10) совместно с (13) и (14). Если $d\lambda = 0$ то в этой области материал деформируется упруго, если $d\lambda > 0$, то имеет место пластическое течение, и находятся необратимые деформации. Окончание расчета происходит, когда температура по пластине станет равной начальной температуре.

Результат Рассмотрим остаточные напряжения в материале стальной пластины после линейного теплового воздействия от электродуговой сварки при различных скоростях перемещения источника тепла размерами $S_x = 0.4\text{м}$, $S_y = 0.35\text{м}$, ($T_p = 1400^\circ\text{C}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $k = 275\text{ МПа}$, $\alpha = 16.1 \cdot 10^{-6}$, $\rho = 7900\text{ кг/м}^3$, $c = 500\text{ Дж/(кгК)}$, $\lambda = 16.0\text{ Вт/(мК)}$ коэффициент теплопроводности, $\kappa = 7.6\text{ Вт/(мК)}$, $K = 163.33\text{ ГПа}$,

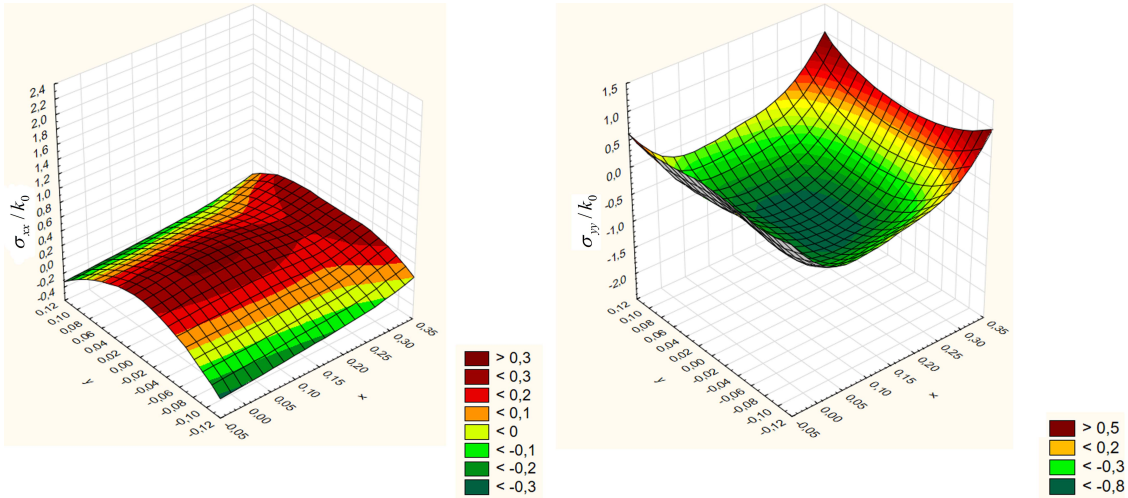


Рис. 1 Распределение остаточных напряжений в материале пласти, после воздействия источника тепла со скоростью 10 м/ч

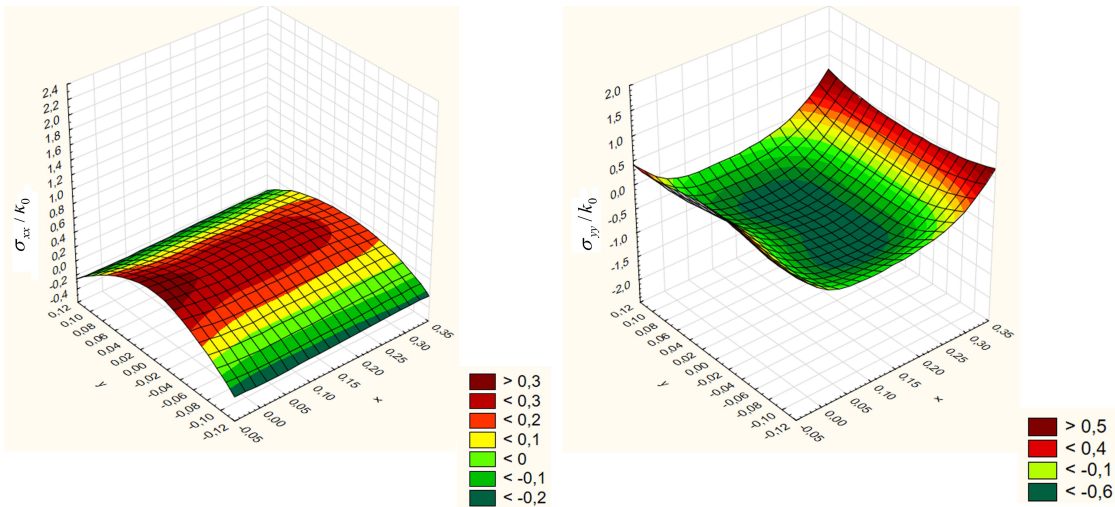


Рис. 2 Распределение остаточных напряжений в материале пласти, после воздействия источника тепла со скоростью 15 м/ч

$\mu = 75.385$ ГПа, $\lambda = 113.076$ ГПа), по которой прошел источник тепла. По проведенным расчетам получены результаты, распределения остаточных напряжений вдоль и поперек перемещения источника тепла представлены на рис. 1-3.

Значительные растягивающие остаточные напряжения, расположенные вдоль источника тепла при скорости движения 10 м/ч, локализируются по центру от начала пластины и распространяются в конце по всей области пластины (рис.1). С увеличением скорости до 15 м/ч остаточные напряжения имеют максимальные значения в начале пластины с постепенным снижением значений к концу пластины (рис.2). На максимальной расчетной скорости, составляющей 20 м/ч, можно видеть на рис.3, что высокий уровень остаточных растягивающих напряжений наблюдается в центре

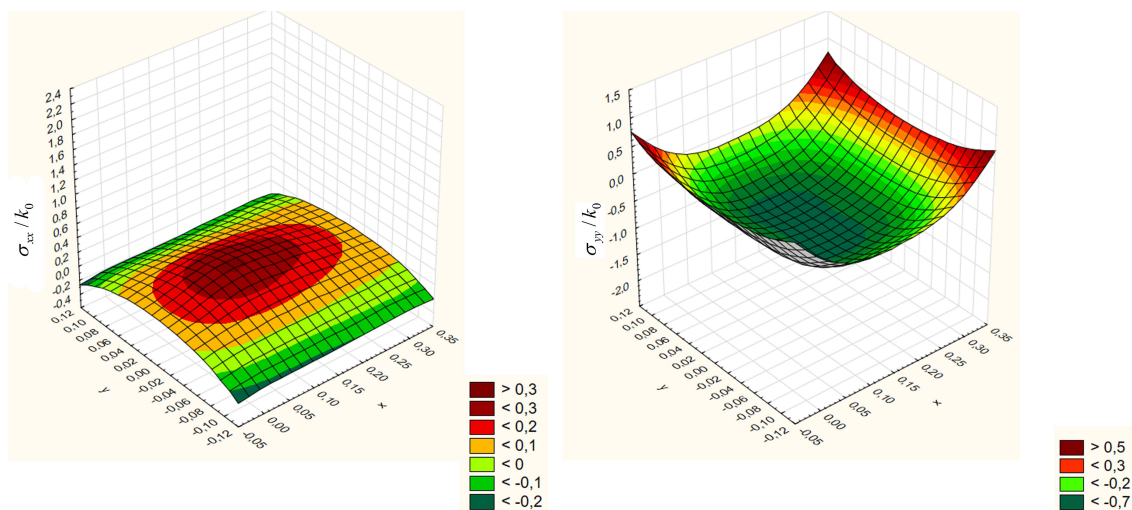


Рис. 3 Распределение остаточных напряжений в материале пласти, после воздействия источника тепла со скоростью 20 м/ч

пластины. В поперечном направлении источника тепла наблюдаются идентичные распределения сжимающих остаточных напряжений, расположенных по обе стороны от линии прохода с незначительным снижением их уровня при увеличении скорости перемещения источника тепла. Результаты, полученные в ходе практического эксперимента по распределению остаточных напряжений в экспериментальной пластине, снятые при помощи анализатора остаточных напряжений RIGAKU показали расхождение не более 10 % с теоретическим расчетом.

Заключение

Согласно теоретическим расчетам максимальное значение остаточных напряжений достигает 220 МПа при скорости 10 м/ч. При проведении эксперимента полученное максимальное значение остаточных напряжений в данной точке при этой же скорости - 258 МПа. Такие высокие значения практически соизмеримы с пределом текучести выбранного материала пластины (270 МПа), и могут вызвать появление дефектов в конструкциях или деталях, которые подвергаются локальному тепловому воздействию при сварке. Благоприятные значения остаточных напряжений получены со скоростью движения источника тепла 15 м/ч, данный режим позволяет минимизировать негативное влияние локального теплового воздействия для сталей. Проведенные исследования доказали работоспособность предложенной математической модели и достоверность полученных результатов расчета. Данная модель позволит прогнозировать распределение остаточных напряжений в материале деталей в зависимости от источника тепла и скорости его передвижения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Eerik Sikanen Janne E Heikkinen Jussi Sapanen. Shrink-fitted joint behavior using three-dimensional solid finite elements in rotor dynamics with inclusion of stress-stiffening effect // *Advances in Mechanical Engineering*. 2018. № 10(6). С. 1–13.
- [2] Ivo Doležal Václav Kotlan Bohuš Ulrych. Design of joint between disk and shaft based on induction shrink fit // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2014. № 270. С. 52–62.
- [3] Xiushan Wu Li Can Li Sian Sun Renyuan Tong Qing Li. A Study on the Heating Method and Implementation of a Shrink-Fit Tool Holder // *Energies*. 2019. № 12.
- [4] Samson Shittua Guiqiang Lia Xudong Zhaoa Xiaoli Maa Yousef Golizadeh Akhlaghia Emmanuel Ayodeleb. High performance and thermal stress analysis of a segmented annular thermoelectric generator // *Energy Conversion and Management*. 2019. № 184. с. 180–193.
- [5] Ming Panga Xiao-Han Zhanga Quan-Xiu Liua Yi-Xuan Fua Guang Liub Wen-Dan Tana. Effect of preheating temperature of the substrate on residual stress of Mo/8YSZ functionally gradient thermal barrier coatings prepared by plasma spraying // *Surface & Coatings Technology*. 2020. № 385.
- [6] Дац Е.П. Ткачева А.В. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // *ПМТФ*. 2016. № 57(3). С. 208–216.
- [7] Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermo-elastoplastic shrink-fit assembly // *Applied Mathematical Modelling*. 2013. № 37. с. 2352–2363.
- [8] A.G. Osorioa D. Souzaab T. dos Passosa L. Dalpiazab-T. Airesa. Effect of niobium addition on the flux of submerged arc welding of low carbon steels // *Journal of Materials Processing Tech.* 2019. № 266. с. 46–51.
- [9] Jie Yil Jian-ming ZHANG Shu-fen CAO Peng-cheng GUO. Effect of welding sequence on residual stress and deformation of 6061-T6 aluminium alloy automobile component // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*. 2019. № 29. с. 287295.

E. E. Abashkin, A. V. Tkachev

**THE STRESS-STRAIN STATE IN THE PLATE MATERIAL, FORMED AS A
RESULT OF THE MOVEMENT OF A HEAT SOURCE**

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Russia

Abstract. The work is devoted to the study of temperature stresses in a plate made of medium-carbon alloy steel on the surface of which a heat source passes rectilinearly at a certain speed. The mathematical model is based on the Prandtl – Reis model, in which Hooke’s law is modified by the Duhamel – Neumann law. As a condition for plastic flow, the Mises condition is accepted, where the yield strength of the parabolic depends on the temperature. The residual stress fields are considered depending on the speed of the heat source passage. The resulting residual stresses are compared with the experimental stresses taken from the plate using the Rigaku residual stress analyzer.

Keywords: thermal stresses, local heating, residual stresses, elasticity, plasticity

REFERENCES

- [1] Eerik Sikanen Janne E Heikkinen J. S. Shrink-fitted joint behavior using three-dimensional solid finite elements in rotor dynamics with inclusion of stress-stiffening effect // *Advances in Mechanical Engineering*. 2018. no. 10(6). P. 1–13. (in Russian).

Abashkin Evgeny Evgenievich, Junior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

Tkacheva Anastasia Valerievna, Can. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

- [2] Ivo Doležel V6clav Kotlan B. U. Design of joint between disk and shaft based on induction shrink fit // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2014. no. 270. P. 52–62. (in Russian).
- [3] Xiushan Wu 1 Can Li S. S. R. T. Q. L. A Study on the Heating Method and Implementation of a Shrink-Fit Tool Holder // *Energies*. 2019. no. 12. (in Russian).
- [4] Samson Shittua Guiqiang Lia X. Z. X. M. Y. G. A. E. A. High performance and thermal stress analysis of a segmented annular thermoelectric generator // *Energy Conversion and Management*. 2019. no. 184. P. 180–193. (in Russian).
- [5] Samson Shittua Guiqiang Lia X. Z. X. M. Y. G. A. E. A. High performance and thermal stress analysis of a segmented annular thermoelectric generator // *Energy Conversion and Management*. 2019. no. 184. P. 180–193. (in Russian).
- [6] Dats E.P. T. A. Technological thermal stresses in the shrink fitting of cylindrical bodies with consideration of plastic flows // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. no. 57(3). P. 569–576. (in Russian).
- [7] Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermo-elastoplastic shrink-fit assembly // *Applied Mathematical Modelling*. 2013. no. 37. P. 2352–2363. (in Russian).
- [8] A.G. Osorioa D. Souza T. d. P. L. D. T. A. Effect of niobium addition on the flux of submerged arc welding of low carbon steels // *Journal of Materials Processing Tech.* 2019. no. 266. P. 46–51. (in Russian).
- [9] Jie YI Jian-ming ZHANG S.-f. C. P.-c. G. Effect of welding sequence on residual stress and deformation of 6061-T6 aluminium alloy automobile component // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*. 2019. no. 29. P. 287–295. (in Russian).
- [10] Dénes Kollár Balázs Kövesdi L. G. V. S. H. Weld process model for simulating metal active gas welding *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*. 2019. no. 102. P. 2063–2083. (in Russian).
- [11] Wang Tianpenga Zhang Jieb W. L. T. I. C. L. N. a. o. t. r. s. d., its influence factor analysis for Si3N4/42Cr. Weld process model for simulating metal active gas welding *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* // *Mo brazed joint Simulation Modelling Practice and Theory*. 2019. no. 95. P. 49–59. (in Russian).

С. В. Фирсов

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ С УСКОРЕНИЕМ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Рассмотрена задача деформирования цилиндрического тела вращающегося вокруг центральной оси с ускорением. Получены итоговая система уравнений, описывающая данный процесс в рамках математической модели теории больших деформаций при наличии необратимых деформаций. Рассмотрен частный случай упругого деформирования, для которого приведены выражения для расчёта напряжений и деформаций в среде, а также итоговые дифференциальные соотношения, решение которых необходимо искать.

Ключевые слова: цилиндр, вращение, большие деформации, вязкопластичность, ползучесть, упругость.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.90.56.022

УДК: 539.374

Рассмотрим деформацию цилиндра, вращающегося с ускорением. В качестве математической модели возьмём модель больших деформаций [1,2]. Рассматривать задачу будем в цилиндрических координатах r, φ, z . Материал будем считать несжимаемым. Это позволяет записать перемещения точек среды в форме

$$u_r = r(1 - \cos \theta), \quad u_\varphi = r \sin \theta, \quad (1)$$

где $\theta = \theta(r, t)$ — угол поворота точек среды вокруг оси вращения.

Зная перемещения, из соотношений

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,k} v_k$$

можно найти значения скоростей

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = r \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2)$$

© Фирсов С. В., 2020

Фирсов Сергей Викторович

e-mail: firsov.s.new@yandex.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00038-а).

Поступила 20.06.2020

и ненулевых компонент тензора Альманси

$$d_{r\varphi} = \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,r}, \quad d_{rr} = -\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}_{,r}^2 = -2d_{r\varphi}^2. \quad (3)$$

Ненулевые компоненты тензора скоростей деформации и тензора вихря, общий вид которых представлен в [1], в нашем случае примут значения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} &= \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,r}, & \omega_{\varphi r} = -\omega_{r\varphi} &= \dot{\theta} + \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,r}, \\ z_{\varphi r} = -z_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{2 - e_{rr} - e_{\varphi\varphi}} r\dot{\theta}_{,r}, & r_{\varphi r} = -r_{r\varphi} &= \dot{\theta} + \frac{1}{4}(2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi})r\dot{\theta}_{,r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия запишутся в виде

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = -\rho r\dot{\theta}^2, \quad \sigma_{r\varphi,r} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} = -\rho r\ddot{\theta}. \quad (5)$$

Напряжения примут значения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= P + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz}) + 2\mu e_{rr} + (5\mu - 4b)e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= P + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz}) + 2\mu e_{\varphi\varphi} + (5\mu - 4b)e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{zz} &= P + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz}) + 2\mu e_{zz} + (2\mu - 4b)e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив их в уравнения равновесия получим

$$\begin{aligned} 2\mu r^{-1}(e_{rr} - e_{\varphi\varphi}) + 2b(e_{rr,r} + e_{\varphi\varphi,r} + e_{zz,r}) + 2\mu e_{rr,r} + \\ + 2(5\mu - 4b)e_{r\varphi}e_{r\varphi,r} + P_{,r} = -\rho r\dot{\theta}^2, \\ 2\mu(e_{r\varphi,r} + 2r^{-1}e_{r\varphi}) = -\rho r\ddot{\theta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем уравнения переноса, воспользовавшись полученными ранее значениями тензоров скоростей деформаций и вихря (4). Для необратимых деформаций они примут вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_{rr} &= (1 - 2p_{rr})\gamma_{rr} - 2p_{r\varphi} \left(\gamma_{r\varphi} + \dot{\theta} + \frac{1}{4}(2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi})r\dot{\theta}_{,r} \right), \\ \dot{p}_{\varphi\varphi} &= (1 - 2p_{\varphi\varphi})\gamma_{\varphi\varphi} - 2p_{r\varphi} \left(\gamma_{r\varphi} - \dot{\theta} - \frac{1}{4}(2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi})r\dot{\theta}_{,r} \right), \\ \dot{p}_{zz} &= (1 - 2p_{zz})\gamma_{zz}, \\ \dot{p}_{r\varphi} &= (1 - p_{rr} - p_{\varphi\varphi})\gamma_{r\varphi} - p_{r\varphi}(\gamma_{rr} + \gamma_{\varphi\varphi}) + \\ &+ (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) \left(\dot{\theta} + \frac{1}{4}(2 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi})r\dot{\theta}_{,r} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

А для обратимых

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{rr} &= -(1 - e_{rr})\gamma_{rr} + e_{r\varphi} \left(\gamma_{r\varphi} - 2\dot{\theta} - \frac{1}{2}(3 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi})r\dot{\theta}_{,r} \right), \\
\dot{e}_{\varphi\varphi} &= -(1 - e_{\varphi\varphi})\gamma_{\varphi\varphi} + e_{r\varphi} \left(\gamma_{r\varphi} + 2\dot{\theta} + \frac{1}{2}(1 + e_{rr} - e_{\varphi\varphi})r\dot{\theta}_{,r} \right), \\
\dot{e}_{zz} &= -(1 - e_{zz})\gamma_{zz}, \\
\dot{e}_{r\varphi} &= -\frac{1}{2}(2 - e_{rr} - e_{\varphi\varphi})\gamma_{r\varphi} + \frac{1}{2}e_{r\varphi}(\gamma_{rr} + \gamma_{\varphi\varphi}) + (e_{rr} - e_{\varphi\varphi})\dot{\theta} + \\
&\quad + \frac{1}{8}(4 + e_{rr} + 3e_{rr}^2 - 6e_{\varphi\varphi} - 4e_{rr}e_{\varphi\varphi} + e_{\varphi\varphi}^2)r\dot{\theta}_{,r}.
\end{aligned} \tag{9}$$

В итоге получаем систему из десяти дифференциальных уравнений с десятью неизвестными, где γ_{ij} — источник необратимых деформаций. Если в качестве механизма накопления необратимых деформаций рассматривать пластичность, то его можно к примеру представить в виде

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} \tau_{ij}.$$

Для ползучести можно принять

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{3}{2} B \Sigma^{n-1} \tau_{ij}.$$

Также, если мы хотим одновременно учитывать и ползучесть, и пластичность, то это можно сделать к примеру следующим образом:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v + \varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{3}{2} B \Sigma^{n-1} + \frac{1}{\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} \right) \tau_{ij}.$$

Рассмотрим стадию упругого деформирования. В этом случае источник необратимых деформаций γ_{ij} будет равен нулю, как и сами необратимые деформации. Из уравнений переноса (9) получим $\dot{e}_{zz} = 0$. С учётом малости деформаций при упругости положим, что слагаемые, содержащие компоненты тензора обратимых деформаций второго порядка и выше являются малы, поэтому исключим их из рассмотрения. В связи с этим можно записать, что $e_{rr} = d_{rr}$, $e_{\varphi\varphi} = d_{\varphi\varphi}$ и $e_{r\varphi} = d_{r\varphi}$. Используя это и значения компонент тензора Альманси (3) можно записать напряжения в виде

$$\sigma_{rr} = P - (\mu + b)r^2\theta_{,r}^2, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = P - br^2\theta_{,r}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu r\theta_{,r}. \tag{10}$$

Подставив полученные напряжения в уравнения равновесия (5) получим

$$\begin{aligned}
(3\mu + 2b)r\theta_{,r}^2 + 2(\mu + b)r^2\theta_{,r}\theta_{,rr} &= P_{,r} + \rho r\dot{\theta}^2, \\
\rho r\ddot{\theta} + 3\mu\theta_{,r} + \mu r\theta_{,rr} &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
- [2] Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Течение упруговязкопластического материала между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежёсткого сцепления // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 56, № 2. с. 146–158.

S. V. Firsov

**FINITE STRAIN OF CYLINDRICAL BODY ROTATING WITH
ACCELERATION**

*Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,
Komsomolsk-na-Amure, Russia*

Abstract. The problem of deformation of cylindrical body rotating with acceleration is considered. The system of equations describing this process in general case with non zero irreversible strains in frame of finite strain theory was obtained. A particular case of elastic deformation was considered and the resulting equations for this case was obtained.

Keywords: cylinder, rotating, finite strain, viscoplasticity, creep, elastic.

REFERENCES

- [1] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p.
- [2] Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. The flow of an elastic-viscoplastic material between rotating cylindrical surfaces under non-rigid adhesion // Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. Vol. 56, no. 2. P. 146–158.

М. В. Вильде, Я. А. Парфенова, М. Ю. Сурова

О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ УТОЧНЕННЫХ ТЕОРИЙ ПРИ ОПИСАНИИ ИЗГИБНОЙ КРАЕВОЙ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Аннотация. Исследуются пределы применимости уточненных теорий изгиба пластины при описании дисперсии изгибной краевой волны и амплитуды её возбуждения парой сосредоточенных скручивающих моментов, приложенных на торце. Методом численного сравнения с решением трехмерной задачи показано, что теория типа Тимошенко пригодна для описания краевой волны на частотах, не превосходящих 30% от первой частоты запираания. Уточненная теория изгиба пластин с приведенной инерцией в сочетании с классическими граничными условиями позволяет уточнить скорость волны по сравнению с теорией Кирхгофа, но значительно искажает амплитуду.

Ключевые слова: краевые волны, нестационарные волны, изгиб пластины.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.28.36.023

УДК: 539.3

Введение. При исследовании пределов применимости двумерных теорий пластин для описания волновых процессов основное внимание, как правило, уделяется точности приближения дисперсионных кривых. Однако с практической точки зрения точность описания амплитуды возбуждения волны также имеет большое значение.

© Вильде М. В., Парфенова Я. А., Сурова М. Ю., 2020

Вильде Мария Владимировна

e-mail: mv_wilde@mail.ru, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, д.ф.-м.н., Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Парфенова Янина Александровна

e-mail: parfenovaya@yandex.ru, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, к.ф.-м.н., Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Сурова Мария Юрьевна

e-mail: mzhilko@yandex.ru, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-01-00673-а).

Поступила 20.06.2020

В данной работе изучаются пределы применимости уточненных теорий изгиба пластины при описании дисперсии и амплитуды возбуждения изгибной краевой волны. Рассматриваются две наиболее простые из уточненных теорий: теория изгиба пластин с приведенной инерцией и теория типа Тимошенко. Волновое поле в пластине возбуждается двумя парами касательных сосредоточенных сил, приложенных на ребрах пластины. Такая нагрузка, эквивалентная с интегральной точки зрения действию двух сосредоточенных скручивающих моментов, может рассматриваться как модель действия пьезоупругого актуатора, приклеенного вблизи поверхности пластины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарную динамическую задачу об изгибе упругой пластины, отнесенной к декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) и занимающей область $-\infty < x_1 \leq 0$, $-\infty < x_2 < \infty$, $|x_3| \leq h$. Примем, что волновое поле в пластине возбуждается двумя парами противоположно направленных сосредоточенных сил, приложенных на ребрах пластины в точках $x_2 = \pm l$ (см. рис. 1). Решение данной задачи в рамках трехмерной теории упругости описано в работе [1] (см. также [2]). В данной работе это решение используется для исследования пределов применимости уточненных теорий изгиба пластин в задачах данного типа. Рассматриваются две простейшие уточненные теории: теория изгиба пластин с приведенной инерцией [3] и теория типа Тимошенко [4]. Ограничиваясь двумя первыми уточняющими членами в выражении для приведенной инерции, запишем разрешающее уравнение из [3] в виде

$$\frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 w + \rho h \left(1 + a_1 \frac{h^2}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - h^2 b_0 \Delta \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где

$$a_1 = \frac{422 - 424\nu - 33\nu^2}{1050(1-\nu)}, \quad b_0 = \frac{17 - 7\nu}{15(1-\nu)}. \quad (2)$$

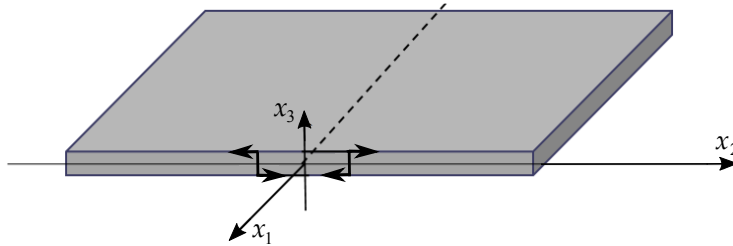


Рис. 1. Геометрия задачи и приложенная нагрузка

Уравнения движения в теории типа Тимошенко [4] имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \Delta \psi_i + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right] - 2k_R^2 Gh \left(\psi_i + \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) &= \rho \frac{2h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}, \\ k_R^2 Gh (\Delta w + \Phi) &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \Phi = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для удобства введем безразмерные переменные по формулам

$$\{x_i, u_i, w, \tilde{\Phi}\} = h\{\tilde{x}_i, \tilde{u}_i, \tilde{w}, \tilde{\Phi}\}, \quad \tilde{t} = c_2 h^{-1} t, \quad M_{ij} = h^2 G \tilde{M}_{ij}, \quad Q_i = h G \tilde{Q}_i. \quad (4)$$

В (1)–(4) $u_i = \psi_i x_3$ ($i = 1, 2$) – перемещения в направлении осей x_i , w – прогиб срединной поверхности пластины, ψ_i – углы поворота нормали, M_{ij} – изгибающие и скручивающие моменты, Q_i – перерезывающие силы, t – время, ρ – плотность, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, $k_R = c_R/c_2$, c_2 – скорость волны сдвига, c_R – скорость волны Рэлея, h – полутолщина пластины, Δ – оператор Лапласа, Знак “ \sim ”, обозначающий безразмерные переменные, далее опущен. Уравнение (1) в безразмерных переменных принимает вид

$$\Delta^2 w + k_b \left(1 + a_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_0 \Delta \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

где $k_b = 3(1 - \nu)/2$. Моменты и перерезывающие силы выражаются через функцию прогиба по формулам

$$M_{ii} = -\frac{2}{k_b} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right), \quad M_{12} = -\frac{4}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad Q_i = -\frac{2}{k_b} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta w. \quad (6)$$

Интегральные граничные условия на торце $x_1 = 0$, соответствующие заданной нагрузке, имеют вид

$$M_{11} = 0, \quad Q_1 = 0, \quad M_{12} = H_0 (\delta(x_2 - l) - \delta(x_2 + l)) f(t), \quad (7)$$

где δ – дельта-функция Дирака, $f(t)$ – функция, выражающая изменение нагрузки во времени, H_0 – амплитуда скручивающего момента, соответствующего парам сил, изображенных на рис. 1.

Порядок уравнения (1) не позволяет удовлетворить трем граничным условиям (7). Используя прием, предложенный Кирхгофом, запишем граничные условия для теории с приведенной инерцией в виде

$$M_{11} = 0, \quad Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = H_0 f(t) \frac{\partial}{\partial x_2} (\delta(x_2 - l) - \delta(x_2 + l)). \quad (8)$$

Уравнения теории типа Тимошенко (3) в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta \psi_i + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - 3k_R^2 \left(\psi_i + \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}, \\ k_R^2 (\Delta w + \Phi) &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \Phi = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (9)$$

а уравнения состояния – вид

$$M_{ii} = \frac{2}{k_b} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} \right), \quad M_{12} = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right), \quad Q_i = 2k_R^2 \left(\psi_i + \frac{\partial w}{\partial x_i} \right). \quad (10)$$

В случае теории типа Тимошенко порядок системы уравнений позволяет удовлетворить всем трем граничным условиям (7). Для обеих теорий, решение поставленных краевых задач ищется при нулевых начальных условиях.

2. Решения в изображениях. Применим к поставленным задачам преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по координате x_2 :

$$f^L = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f^F = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2) e^{i\xi x_2} dx_2.$$

После перехода к изображениям задачи сводятся к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. При записи общего решения последних следует

учитывать условие отсутствия источников энергии при $x_1 \rightarrow -\infty$. Произвольные константы, входящие в общие решения, определяются из соответствующих граничных условий.

С практической точки зрения представляет интерес исследование скорости $V(x_2, t) = (\dot{u}_1)|_{x_1=0, x_3=z_0}$, где z_0 – заданное расстояние от срединной поверхности пластины до исследуемой линии. Данная величина может быть измерена экспериментально с помощью лазерного виброметра (см. [2]).

Решение в изображениях по теории с приведенной инерцией имеет вид

$$V^{\text{LF}} = -k_b H_0^{\text{LF}} \omega \xi \frac{r_1 (r_2^2 - \nu \xi^2) - r_2 (r_1^2 - \nu \xi^2) x_3}{2f_K(\omega, \xi) h}, \quad (11)$$

где

$$r_{1,2} = \sqrt{\xi^2 - 0.5k_b b_0 \omega^2 \mp \sqrt{k_b \omega^2 (1 - a_1 \omega^2) + 0.25k_b^2 b_0^2 \omega^4}}$$

и

$$f_K(\omega, \xi) = r_2 (r_1^2 - \nu \xi^2) (r_2^2 - (2 - \nu) \xi^2) - r_1 (r_2^2 - \nu \xi^2) (r_1^2 - (2 - \nu) \xi^2). \quad (12)$$

Решение по теории типа Тимошенко также можно записать в явном виде

$$V^{\text{LF}} = \frac{3}{2} H_0^{\text{LF}} \omega \xi \frac{r_1 S_2 (k_T \omega + \nu_p \omega^2) - r_2 S_1 (k_T \omega - \nu_p \omega^2) x_3}{f_T(\omega, \xi) h}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= (k_T \omega \mp \nu_m \omega^2) (r_{1,2}^2 - \nu \xi^2) \pm (1 - \nu) r_{1,2} r_3 \omega^2 k_R^{-2} \\ r_{1,2} &= \sqrt{\xi^2 \mp k_T \omega - \nu_p \omega^2}, \quad r_3 = \sqrt{\xi^2 - \omega^2 + 3k_R^2} \\ \nu_{p,m} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_R^2} \pm \frac{1 - \nu}{2} \right), \quad k_T = \sqrt{k_b + \nu_m^2 \omega^2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f_T(\omega, \xi) &= r_2 S_1 \left[\left(2k_T \omega - \frac{1 - \nu}{2} \omega^2 \right) \xi^2 - r_3^2 \frac{\omega^2}{k_R^2} \right] - \\ &\quad - r_1 S_2 \left[\left(2k_T \omega + \frac{1 - \nu}{2} \omega^2 \right) \xi^2 + r_3^2 \frac{\omega^2}{k_R^2} \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Краевая антисимметричная волна соответствует полюсам решений (11) и (13), определяемых уравнениями

$$f_K(\omega, \xi) = 0 \quad (15)$$

и

$$f_T(\omega, \xi) = 0, \quad (16)$$

которые соответствуют дисперсионным уравнениям задачи о распространении гармонической волны. При нахождении корней уравнений (15) и (16) следует искать действительные корни в области $r_1^2 > 0$. Граница этой области $r_1 = 0$ представляет собой дисперсионную кривую изгибной моды пластины, соответствующей волне Лэмба A_0 .

3. Дисперсионные кривые. На рис. 2а, в результаты численного решения уравнений (15) и (16) сопоставляются с дисперсионной кривой, полученной при численном

решении трехмерной задачи. Для сравнения представлено также решение по классической теории Кирхгофа. Последнее можно получить из решения по теории с приведенной инерцией, полагая константы (2) равными нулю. Здесь представлены нормированные фазовые скорости $c_{\text{ph}} = \omega/\xi$ (рис. 2а) и разность между фазовой скоростью по теории пластин и по трехмерной теории $\Delta c_{\text{ph}} = |c_{\text{ph}}^{\text{plate}} - c_{\text{ph}}^{\text{3D}}|$ (рис. 2в).

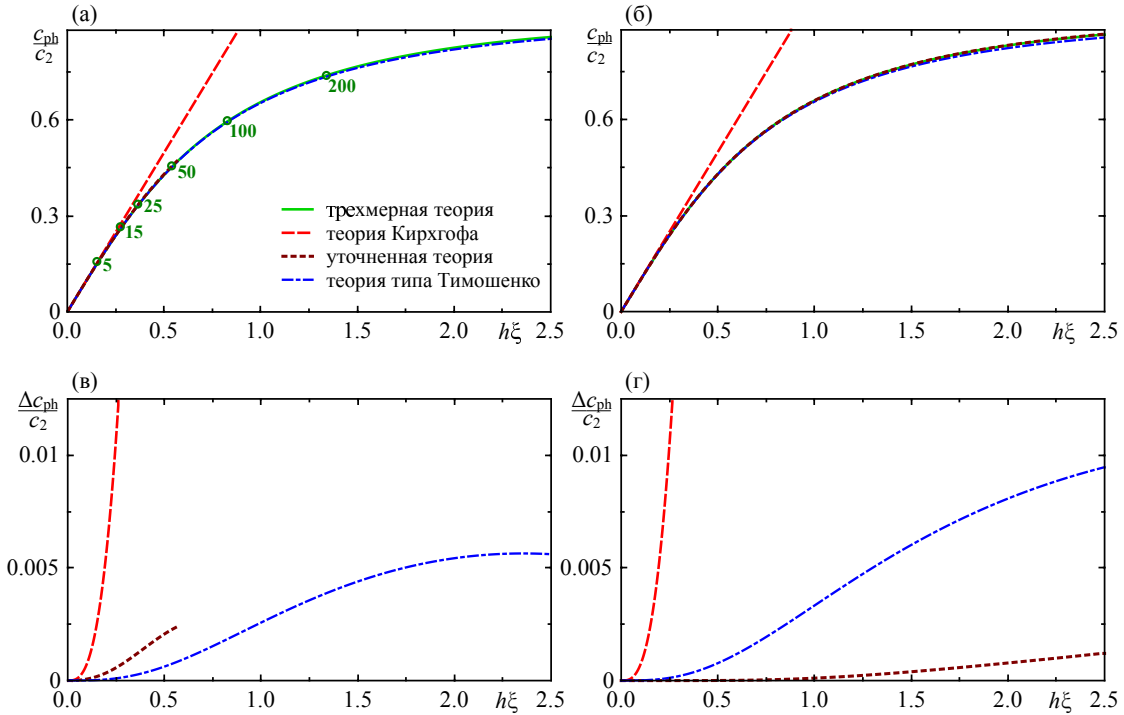


Рис. 2. Фазовые скорости и соответствующая погрешность теорий пластин $\Delta c_{\text{ph}} = |c_{\text{ph}}^{\text{plate}} - c_{\text{ph}}^{\text{3D}}|$ для краевой волны EA_0 (а,в) и волны Лэмба A_0 (б,г)

Особенностью антисимметричной краевой волны EA_0 в области применимости двумерных теорий пластин является близость её дисперсионной кривой к дисперсионной кривой волны Лэмба A_0 . В связи с этим, погрешность описания волны Лэмба во многом определяет погрешность описания краевой волны, хотя и не совпадает последней. Это можно заметить, анализируя различия между упомянутыми рисунками и рис. 2б,г, на которых представлено то же, что и на рис. 2а,в, но для волны Лэмба A_0 .

Анализ рис. 2 показывает, что теория Кирхгофа применима только для очень длинных волн ($h\xi \ll 1$). Введение приведенной инерции улучшает приближение для краевой волны, однако приводит к её исчезновению при $h\xi > 0.6$, что противоречит как решению по трехмерной теории, так и экспериментальным данным. При этом для волны Лэмба A_0 теория с приведенной инерцией дает наиболее точное приближение. Это объясняется тем, что для описания краевой волны необходимы не только уточненные уравнения движения, но и соответственным образом уточненные граничные условия.

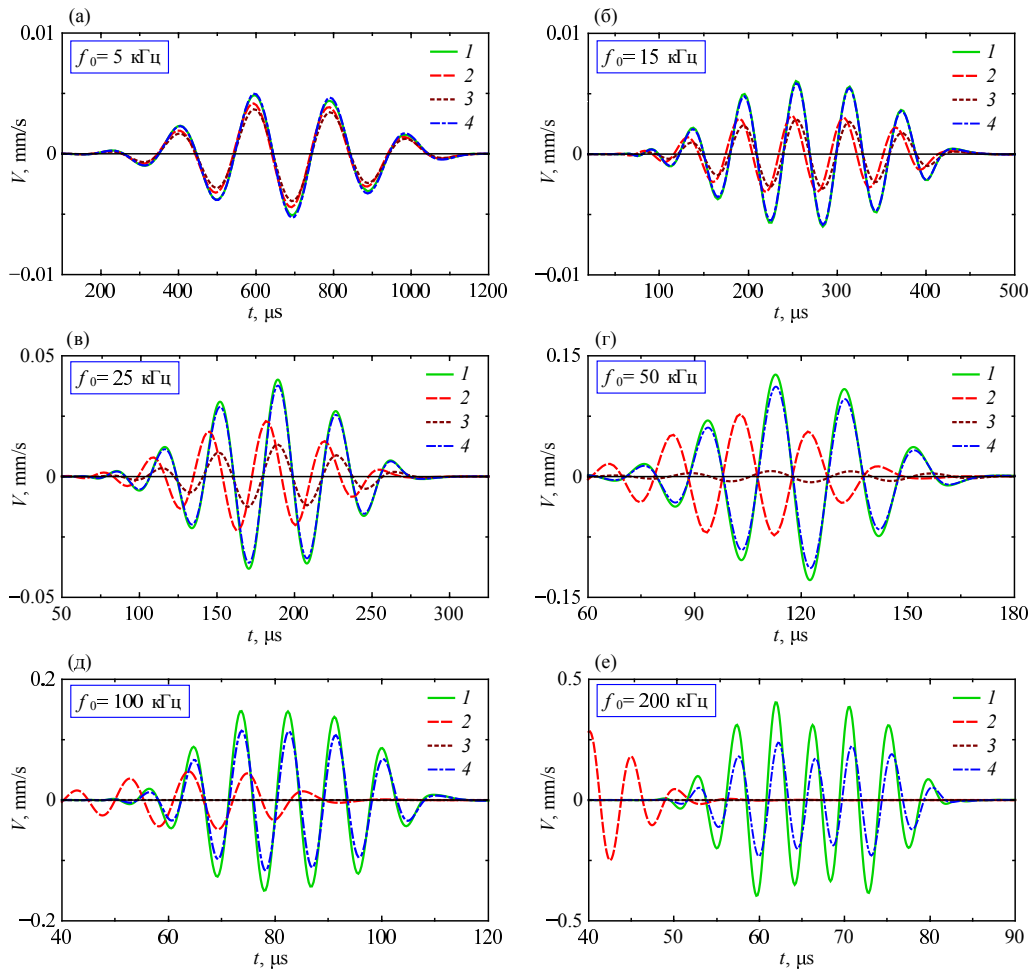


Рис. 3. Вклад краевой волны в нормальную скорость на торце: 1 – трехмерная теория, 2 – теория Кирхгофа, 3 – уточненная теория с приведенной инерцией, 4 – теория типа Тимошенко

Теория типа Тимошенко, позволяющая интегрально удовлетворить всем трем граничным условиям на торце, дает самое лучшее (из рассмотренных теорий) приближение для антисимметричной краевой волны.

4. Поле краевой волны. Для сравнения погрешности теорий пластин при описании амплитуды рассмотрим поле изгибной краевой волны, выделенное путем использования контурного интегрирования и теоремы о вычетах. На рис. 3 представлены графики изменения во времени скорости V в точке с координатами $x_2 = 165$ мм, $x_3 = 1.47$ мм для алюминиевой пластины толщины 4.85 мм с параметрами материала $\nu = 0.33$, $c_2 = 3080$ м/с. Принято, что пары сосредоточенных сил приложены на расстоянии $2l = 30$ мм и изменяются во времени как пять циклов синуса, сглаженных окном Ханна, с центральными частотами $f_0 = 5, 15, 25, 50, 100, 200$ кГц. Значения фазовой скорости, соответствующие каждой из этих частот, указаны на рис. 2а.

Сравнение результатов расчетов по различным теориям, представленных на рис. 3, показывает, что амплитуда возбуждения краевой волны также наиболее точно описывается теорией типа Тимошенко. Теория с приведенной инерцией уточняет время прихода волны при $f_0 = 15$ и $f_0 = 25$ кГц, однако значительно занижает амплитуду. При $f_0 > 100$ кГц теория типа Тимошенко правильно показывает время прихода волны, но амплитуда описывается неверно.

Заключение. Принимая за характерную частоту значение первой частоты записывания $f_{\text{ref}} = c_2/4h$, можно определить предел применимости теории Кирхгофа при описании краевой волны как $0.03f_{\text{ref}}$, а теории Тимошенко – как $0.3f_{\text{ref}}$. Уточненная теория изгиба пластин с классическими граничными условиями применима для определения скорости распространения волны на частотах меньше $0.15f_{\text{ref}}$, однако амплитуда возбуждения волны описывается этой теорией неверно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вильде М. В., Сурова М. Ю. Нестационарные антисимметричные краевые волны в пластине при действии касательной нагрузки // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (18-22 сентября 2017 г., Самара, Россия). Т. 1. Самара: СамГТУ, 2017. с. 125–128.
- [2] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate // J. Sound Vib. 2019. Vol. 441. p. 26–49.
- [3] Kaplunov J. D., Kossovich L. Y., Nolde E. V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
- [4] Григолоук Э. Н., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.

M. V. Wilde, Ya. A. Parfenova, M. Yu. Surova

ON THE APPLICABILITY LIMITS OF REFINED THEORIES IN DESCRIBING OF THE FLEXURAL EDGE WAVE IN PLATES

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. The applicability limits of refined plate bending theories in describing of the flexural edge wave dispersion and its excitation amplitude are investigated. The wave is excited by a pair of twisting couples applied to the edge of the plate. Numerical comparison with the solution of 3D problem shows that Uflyand–Mindlin theory is applicable at the frequencies up to 30% of the first cut-off. The higher order asymptotic theory of plate bending with modified inertia and classical boundary conditions allows to improve the describing of the velocity comparing to Kirchhoff theory, but leads to a considerable error in describing of the amplitude.

Keywords: edge waves, transient waves, plate bending.

REFERENCES

- [1] Wilde M. V., Surova M. Y. Transient antisymmetrical edge waves in a plate subjected to tangential load // Proceedings of the X All-Russian Conference on Solid Mechanics (September 18-22, 2017, Samara, Russia). Vol. 1. Samara: SamSTU, 2017. p. 125–128.
- [2] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate // J. Sound Vib. 2019. Vol. 441. p. 26–49.
- [3] Kaplunov J. D., Kossovich L. Y., Nolde E. V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
- [4] Grigolyuk E. N., Selezov I. T. Non-classical theories of vibrations of bars, plates and shells. M.: VINITI, 1973. 272 p.

Wilde, Maria Vladimirovna, Professor, Doctor of Sciences, Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov, Russia.

Parfenova, Yanina Aleksandrovna, Lecturer, Candidate of Sciences, Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov, Russia.

Surova, Maria Yurievna, Postgraduate student, Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov, Russia.

С. Г. Жилин, О. Н. Комаров, Н. А. Богданова

МЕХАНИЗМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ТОЧНОЙ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОТЛИВКИ НА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЭТАПАХ ЕЕ ПОЛУЧЕНИЯ

*Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре,
Россия*

Аннотация. Решение задач, связанных с физической трансформаций материала, сопровождающей этапы получения биметаллических отливок повышенной точности, актуально и востребовано в машиностроении. Распространенный метод получения таких изделий - литье по выплавляемым моделям. Проблемными стадиями являются прессование воскообразного слоя удаляемой модели и формирование поверхности из пластических материалов на стальном каркасе. Упругий отклик, возникающий вследствие теплофизических процессов формоизменения, определяет необходимость устранения напряжения в материалах.

Ключевые слова: воскообразные материалы, прессование, пластичность, упругий отклик, напряженно-деформированное состояние, давление, размерно-геометрическая точность

DOI: 10.37972/chgpu.2020.11.35.024

УДК: 621.74.045 / 046

Введение

В машиностроении актуальность использования производственных процессов, направленных на выпуск литой металлопродукции повышенной точности, обусловлен

© Жилин С. Г., Комаров О. Н., Богданова Н. А., 2020

Жилин Сергей Геннадьевич

e-mail: sergeyzhilin1@rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Комаров Олег Николаевич

e-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Богданова Нина Анатольевна

e-mail: joyful289@inbox.ru, младший научный сотрудник, Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН

Поступила 01.09.2020

необходимостью сокращения издержек, связанных со значительным количеством технологических этапов. В этом аспекте предпочтение отдается технологиям, позволяющим получать металлоизделия с механическими характеристиками, качеством поверхности и размерной точностью, максимально приближенными к конечным деталям. Последовательность технологических этапов традиционных процессов получения деталей, как правило, включает непосредственно стадии формирования литой заготовки с последующими стадиями термомеханической обработки, определяющих увеличение временных и материальных затрат. Среди немногочисленных методов, позволяющих решить задачу получения литой заготовки с минимальным припуском на механическую обработку, а в ряде случаев вообще без ее применения, наиболее распространен метод литья по выплавляемым моделям (ЛВМ) [1, 2, 3]. Методом ЛВМ получают отливки сложной пространственной конфигурации с размерами до 500 мм, выполненными с точностью, соответствующей 11-12 квалитетам. Практика применения такого способа, как правило, не затрагивает варианты формирования биметаллического изделия, а подразумевает получение тела отливки целиком, или формирование его части на каркасе [4]. В последнем случае получение литой детали с высокой размерно-геометрической точностью всех поверхностей представляется затруднительным ввиду того, что воскообразный модельный материал на каркас наносят и формируют вручную. Актуальность использования деталей ответственного назначения, выполненных в виде биметаллических литых заготовок с высокими размерно-геометрическими характеристиками, представляющих собой поверхность из цветного сплава сформированную на стальном каркасе, в настоящее время высока и продиктована необходимостью сокращения технологических издержек, увеличения конструкционной прочности изделий за счет каркаса, получение развитой конфигурации поверхности из различных цветных сплавов с присущими им характеристиками: электропроводностью и пластичностью [5]. Решение задачи получения таких изделий видится в синтезе технологических методов, объединяющих процессы формоизменения пластических материалов прессованием с традиционной технологией ЛВМ [6, 7]. Последовательность операций в ЛВМ состоит из формирования выплавляемой модели (ВМ) заливкой жидкого воскообразного состава в пресс-форму, сборки ВМ на модельном блоке (МБ), нанесения и сушки слоев оболочковой формы (ОФ), выплавления ВМ, прокатки и заливки ОФ расплавом металла. Неустойчивость теплофизических и реологических процессов в модельных материалах, сопровождающих этапы изготовления и удаления ВМ, определяют возможность усадочных явлений в теле ВМ (величина объемной усадки может достигать 14 %) и нарушение точности размеров конечного изделия [8].

С целью сокращения, а в ряде случаев полного устранения, температурных дефектов воскообразных литейных моделей при получении биметаллического точного литья предложено использование нового принципа ее формирования, основанного на запрессовке порошковых фракций модельной массы в зазор между внутренней полостью пресс-формы и опорным каркасом [9, 10]. Экспериментально установлено, что формирование качества поверхности такой прессовки достигается при плотности меньшей, чем плотность, характерная для этого материала, полученного в условиях свободной заливки [11]. Однако, получение распределенной пористости в структуре прессовки, позволяющее констатировать равенство напряжений в различных ее частях, достигается не во всех случаях, вследствие чего в переуплотненных зонах становится возможным появление упругого отклика материала [12]. Исследование вариантов снижения

значений упруго отклика сводится к определению параметров уплотнения: скорости прессования и времени выдержки материала под нагрузкой. Результаты исследований позволят учитывать это явление при проектировании пресс-форм.

Цель и задачи

В связи с отмеченным выше, целью настоящей работы стало исследование механизмов, сопровождающих теплофизические процессы формирования поверхности точной биметаллической отливки на технологических этапах ее получения.

В рамках поставленной цели решались задачи, связанные с изучением влияния скорости перемещения прессующих элементов на величину упругого возврата воскообразного модельного материала, уплотняемого на жестком стальном каркасе, а также изучение влияния времени релаксации уплотненного материала на величину его упругого возврата.

Основное содержание

Управление процессом формирования «финишного» воскообразного слоя на стальном каркасе, а именно возможность регулирования плотности и, как следствие, упруго отклика материала, в участках прессовок различной толщины и в местах сопряжений их элементов представляется малоизученным. В ходе экспериментов установлено, что величина упруго отклика, возникающего при уплотнении воскообразного порошкового тела, зависит от направления приложения деформирующего усилия. Так, в направлении оси уплотнения она составляет 0,7-1,2 %, а в направлении перпендикулярном оси уплотнения 0,4-0,6 % от размеров формообразующей полости пресс-формы соответственно [13]. Предлагаемый к рассмотрению процесс формирования воскообразной поверхности на упругом каркасе может быть представлен при помощи схемы, изображенной на рис.1

Этапы получения биметаллического литья следующие: в зазор между пресс-формой 1, снабженной подвижными прессующими элементами 2, и помещенным внутрь упругим (стальным) каркасом 3 поступает фракция воскообразного модельного состава, который, в результате перемещения подвижных элементов 2, уплотняется, формируя поверхностный слой 4. На полученном блоке послойным нанесением и сушкой формируют огнеупорную керамическую оболочку 5, затем выплавляют из оболочки напрессованную модельную массу. После прокалки зазор между оболочкой и стальным каркасом заполняют расплавом металла 6 с температурой ниже температуры плавления материала каркаса.

Поскольку воскообразные модельные материалы обладают уникальными физическими (модуля Юнга $E = 80$ ГПа и коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$), но не являются конструкционными, то адаптация известных расчетных методик их поведения при нагружении в результате напрессовки на твердую основу (в том числе в канале) представляется затруднительной. В этой связи целесообразным видится экспериментальное моделирование процесса формирования воскообразного напрессованного слоя посредством мундштучного выдавливания через канал определенного сечения.

Реализацию экспериментальной части исследования осуществляли мундштучным выдавливанием порошкового тела, состоящего из воскообразного модельного материала ПС 50/50 фракций 0,63-2,5 мм, с различной скоростью перемещения пресс-пунсона. В эксперименте использовали профилирующий мундштук переменного диаметра. Процесс выдавливания позволяет имитировать перемещение воскообразного материала, заполняющего объем пресс-формы между стальным каркасом и ее формообразующей стенкой [14]. Регистрацию нагрузки осуществляли на тестовой машине

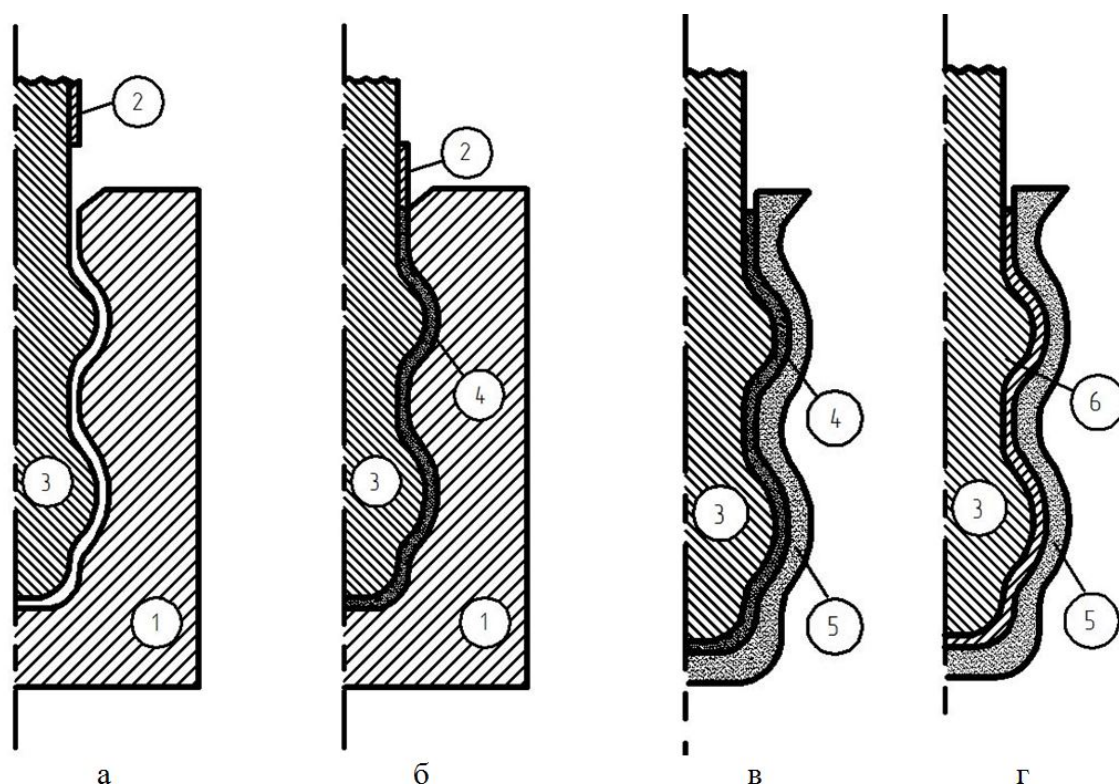


Рис. 1. Схема последовательности формирования биметаллической отливки: 1 – пресс-форма; 2 – подвижный пресс-пуансон; 3 – стальной каркас; 4 – воскообразный напрессованный слой; 5 – керамическая оболочка; 6 – биметаллическая отливка в оболочковой форме.

AG-X plus Shimadzu, обеспечивающей отклонение значения нагрузки не более 0,03 % от задаваемого.

В ходе серии предварительных экспериментов установлено технологически приемлемое время выдержки материала под нагрузкой, позволяющего сократить напряжения в прессовке, возникающие в процессе уплотнения материала в закрытой матрице. При этом установлено, что интенсивность снижения величины упругого возврата материала прессовки замедляется в течение 30 минут.

В ходе эксперимента установлено, что с увеличением фракции и скорости диффузии нагрузка на пресс-пуансоне возрастает, что приводит к росту напряжений в уплотняемом порошковом теле и, следовательно, необходимости увеличения времени его релаксации для сокращения упругого отклика материала прессовки. Определено, что для материалов типа ПС 50/50 технологически приемлемая релаксация напряжений достигается уже на 8-ой минуте выдержки материала под нагрузкой (когда все элементы пресс-формы находятся в сомкнутом состоянии).

Таким образом, скорость перемещения пресс-пуансона при мундштучном выдавливании ПС 50/50 из диффузора, установленная на основании экспериментальных данных, принадлежит диапазону значений 0,5-1,5 мм/с, что обеспечивает скорость

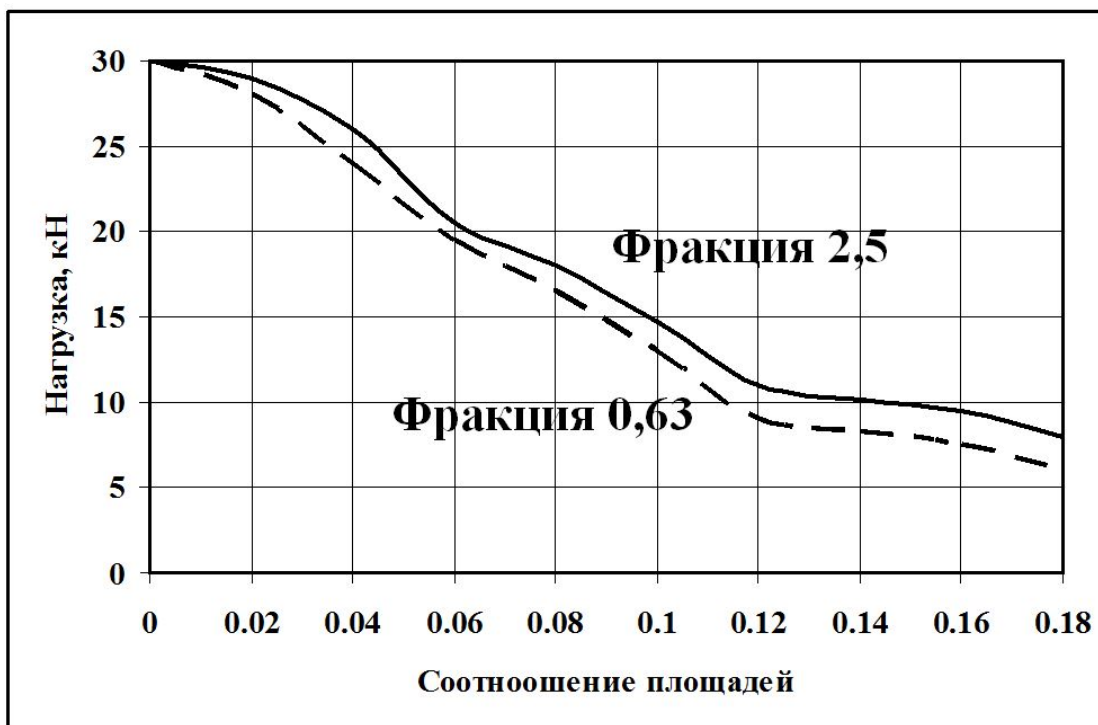


Рис. 2. Экспериментальные зависимости нагрузки от соотношения площадей мундштука и основания пресс-пуансона для различных фракций ПС 50/50.

диффузии материала не превышающую 6 мм/с [15], а значит, не приводит к значительному росту отклонения размеров прессовки от внутренних размеров формообразующей полости пресс-формы. Перемещение пресс-пуансона призвано обеспечить уплотнение порошкового тела до плотности пластического течения, создавая условия для экструзии материала через профилирующий мундштук, внутренний диаметр которого в ходе эксперимента изменялся по отношению к площади пресс-формы от 1/60 до 1/6. На рис.2. представлены экспериментальные результаты по определению влияния нагрузки от соотношения площадей мундштука и основания пресс-пуансона для различных фракций ПС 50/50. видно, что увеличение соотношения площадей пресс-пуансона и мундштука значение максимальной нагрузки, соответствующей началу процесса выдавливания пластифицированного материала, уменьшается. При этом нагрузка, необходимая для экструзии ПС 50/50 фракции 2,5 ммнесколько выше, чем нагрузка, характерная для получения прессовки из фракции 0,63 мм.

Экспериментально определено, что формирование технологически приемлемого качества напрессованной на стальной каркас поверхности достигается при величине зазора между стенками пресс-формы и стальным каркасом не менее 10 % от площади поперечного сечения каркаса. Таким образом, реализация рассмотренного в работе подхода к формированию поверхности из воскообразного модельного материала позволяет получать биметаллические отливки повышенной размерно-геометрической точностью.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Литье по выплавляемым моделям /В. А. Озеров, В. Ф. Гаранин, В. Н. Иванов и др.; Под общ.ред. В.А. Озерова. 4 изд., переработ. и доп. М.: Машиностроение, 1994. 448 с.
- [2] Жилин С. Г., Богданова Н. А., Комаров О. Н., Соснин А. А. Снижение упругого отклика при уплотнении порошковой парафиностеариновой композиции // Деформация и разрушение материалов. 2020. № 1. С. 29-33
- [3] Leushin I. O., Ul'yanov V. A., Leushina L. I. Predicting Gas-defect Formation on Changing the Investment-casting Technology // Steel in Translation, 2013, vol. 43, no. 11, pp. 681–683
- [4] Коваленко П. А., Ковалев Д. С. Новый способ литья по выплавляемым моделям с кристаллизацией под давлением // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2017. Т. 1. № 13. С. 401-403
- [5] Kuroda H., Hiruta H., Aoyama M. Patent JP №5147040. Copper alloy material, copper alloy conductor and its production method, trolley wire for overhead contact wire, and cable. Publ. 20.02.2013
- [6] Комаров О. Н., Жилин С. Г., Панченко Г. Л., Предеин В. В., Абашкин Е. Е., Потянихин Д. А., Попов А. В. Способ получения стальных отливок из термитной шихты Патент РФ № 2634818. Заявл. 30.05.2016, Оpubл. 03.11.2017, Бюл. №31
- [7] Sapchenko I. G., Zhilin S. G., Potianikhin D. A, Komarov O. N. Mesomechanics of Technological Properties of Powdered Polymer Compacts in Lost Wax Casting.// AIP Conference Proceedings, 2014, vol. 1623, pp. 543–546
- [8] Осенникова О. Г. Теплофизические и реологические характеристики синтетических смол для модельных композиций // Литейное производство. 2016. № 10. С. 26–28
- [9] Zhilin S. G., Komarov O. N., Bogdanova N. A. Production of the steel casting with improved dimensional and geometrical accuracy using complex models // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020, 709(3). 033104
- [10] Богданова Н. А., Жилин С. Г., Комаров О. Н. Способ получения биметаллической отливки // Патент на изобретение RU 2696118 C1, 31.07.2019. Заявка № 2018140932 от 21.11.2018.
- [11] Sosnin A. A., Bogdanova N. A., Zhilin S. G., Komarov O. N. Finite Element Modeling of the Stress-Strain State of Waxy Compacts // Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS-2019)AIP Conf. Proc. 2176, pp. 030017-1–030017-4
- [12] Буренин А. А. Упругий отклик среды при развитии, остановке и повторном вязкопластическом течении, включая мгновенную разгрузку // Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (5). С. 2043–2044
- [13] Жилин С. Г., Комаров О. Н., Соснин А. А., Потянихин Д. А. Особенности формирования пористой структуры прессовок из полимерного дисперсного материала // Ученые записки КнАГТУ. 2016. IV-(28). С. 26-33.
- [14] Жилин С. Г., Богданова Н. А., Комаров О. Н. Влияние гранулометрического состава и скорости выдавливания воскообразной композиции на геометрию длинномерной прессовки при мундштучном экструдировании // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4 (38). С. 54-64.
- [15] Жилин С. Г., Богданова Н. А., Комаров О. Н. Влияние параметров уплотнения порошкового тела из воскообразного материала на формирование остаточных напряжений прессовки // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3 (41). С. 110-121.

S. G. Zhilin, O. N. Komarov, N. A. Bogdanova

MECHANISMS FOR SURFACE FORMATION OF ACCURATE BIMETALLIC CASTING AT TECHNOLOGICAL STAGES OF ITS PRODUCTION

Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia

Abstract. Solving problems associated with the physical transformations of the material that accompanies the stages of obtaining bimetallic castings of high accuracy is relevant and in demand in engineering. A common method for producing such products is lost wax casting. The problematic stages are the pressing of the waxy layer of the removed model and the formation of the surface from plastic materials on a steel frame. The elastic response arising from thermophysical processes of shaping determines the need to eliminate stress in materials.

Keywords: waxy materials, pressing, ductility, elastic response, stress-strain state, pressure, dimensional and geometric accuracy.

REFERENCES

- [1] Lost wax casting / V. A. Ozerov, V. F. Garanin, V. N. Ivanov, etc .; Under the general ed. V.A. Ozerov. 4th ed., Revised. and add. Moscow: Mashinostroenie, 1994.448 p.
- [2] Zhilin S. G., Bogdanova N. A., Komarov O. N., Sosnin A. A. Decrease in elastic response during compaction of powder paraffin-stearin composition // Deformation and destruction of materials. 2020. No. 1. P. 29-33
- [3] Leushin I. O., Ul'yanov V. A., Leushina L. I. Predicting Gas-defect Formation on Changing the Investment-casting Technology // Steel in Translation, 2013, vol. 43, no. 11, pp. 681 –683
- [4] Kovalenko P. A., Kovalev D. S. A new method of investment casting with crystallization under pressure // Actual problems of aviation and cosmonautics. 2017.Vol. 1.No. 13.P. 401-403
- [5] Kuroda H., Hiruta H., Aoyama M. Patent JP No. 5147040. Copper alloy material, copper alloy conductor and its production method, trolley wire for overhead contact wire, and cable. Publ. 02/20/2013
- [6] Komarov O. N., Zhilin S. G., Panchenko G. L., Predein V. V., Abashkin E. E., Potyanikhin D. A., Popov A. V. Method of obtaining steel castings from the termite charge RF Patent No. 2634818. Appl. 05/30/2016, Publ. 03.11.2017, Bul. No. 31
- [7] Sapchenko I. G., Zhilin S. G., Potianikhin D. A, Komarov O. N. Mesomechanics of Technological Properties of Powdered Polymer Compacts in Lost Wax Casting.// AIP Conference Proceedings, 2014, vol. 1623, pp. 543-546
- [8] Ospennikova OG Thermophysical and rheological characteristics of synthetic resins for model compositions // Foundry. 2016. No. 10. P. 26–28
- [9] Zhilin S. G., Komarov O. N., Bogdanova N. A. Production of the steel casting with improved dimensional and geometrical accuracy using complex models // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020, 709 (3). 033104
- [10] Bogdanova N. A., Zhilin S. G., Komarov O. N. Method of obtaining bimetallic casting // Patent for invention RU 2696118 C1, 31.07.2019. Application No. 2018140932 dated 21.11.2018.

Zhilin, Sergey Gennadevich Ph. D. in Engineering sciences, associate professor, Leading Researcher. Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Komarov, Oleg Nikolaevitsch Ph. D. in Engineering sciences, associate professor, Leading Researcher. Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Bogdanova, Nina Anatolievna Junior Researcher. Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

-
- [11] Sosnin A. A., Bogdanova N. A., Zhilin S. G., Komarov O. N. Finite Element Modeling of the Stress-Strain State of Waxy Compacts // Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS-2019) AIP Conf. Proc. 2176, pp. 030017-1-030017-4
- [12] Burenin A. A. Elastic response of the medium during development, stopping and repeated viscoplastic flow, including instantaneous unloading // Fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Bulletin of the Nizhny Novgorod University. N.I. Lobachevsky. 2011. No. 4 (5). P. 2043–2044
- [13] Zhilin S. G., Komarov O. N., Sosnin A. A., Potyanikhin D. A. Features of the formation of the porous structure of compacts from a polymer dispersed material // Uchenye zapiski KnAGTU. 2016. IV- (28). S. 26-33.
- [14] Zhilin S. G., Bogdanova N. A., Komarov O. N. Influence of the granulometric composition and extrusion speed of the wax-like composition on the geometry of long pressing during die extrusion. // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2018. No. 4 (38). S. 54-64.
- [15] Zhilin S. G., Bogdanova N. A., Komarov O. N. Influence of the parameters of compaction of a powder body made of a wax-like material on the formation of residual stresses in the pressing. // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2019. No. 3 (41). S. 110-121.

А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОДИФФУЗИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия*

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Исследуются нестационарные упругодиффузионные колебания ортотропной пластины Кирхгофа с учетом релаксации диффузионных потоков. В общем случае пластина находится под действием растягивающих усилий, изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил. Здесь же заданы плотности диффузионных потоков. Для постановки задачи используется модель нестационарного плоского изгиба упругодиффузионной пластины Кирхгофа, полученная с помощью вариационного принципа Даламбера.

Ключевые слова: упругая диффузия, нестационарные задачи, связанные задачи, многокомпонентные среды, пластина Кирхгофа, функции Грина.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.12.22.025

УДК: 539.3, 539.8

1. Формулировка проблемы. Рассматривается задача о нестационарных упругодиффузионных колебаниях прямоугольной пластины Кирхгофа. Схема приложенных усилий, а также ориентация осей прямоугольной декартовой системы координат представлена на рисунке 1.

Для математической постановки задачи используется модель механодиффузионных процессов в однородных сплошных средах, которая в прямоугольной декартовой

© Земсков А. В., Тарлаковский Д. В., 2020

Земсков Андрей Владимирович

e-mail: azemskov1975@mail.ru, профессор кафедры «Прикладные программные средства и математические методы», Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт), с.н.с. лаборатории динамических испытаний НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, д.ф.-м.н., доцент, Москва.

Тарлаковский Дмитрий Валентинович

e-mail: tdvhome@mail.ru, заведующий лабораторией динамических испытаний НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин», Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт), д.ф.-м.н., профессор, Москва.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-08-00589 А).

Поступила 01.06.2020

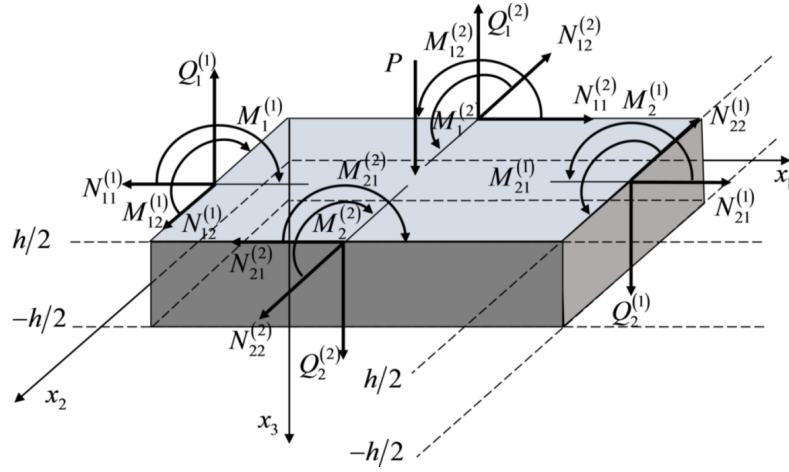


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи.

системе координат имеет вид [1–9]:

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad \dot{\eta}^{(q)} = -\frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} + Y^{(q)} \quad (q = \overline{1, N}). \quad (1)$$

где σ_{ij} и $J_i^{(q)}$ – компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока, которые определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \sum_{p=1}^N \alpha_{ij}^{(p)} \eta^{(p)}, \quad J_i^{(q)} + \tau_q \dot{J}_i^{(q)} = \Lambda_{ijkl}^{(q)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} - \sum_{p=1}^N D_{ij}^{(q)} g^{(qp)} \frac{\partial \eta^{(p)}}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Здесь точки обозначают производную по времени. Все величины в (1) и (2) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_i^*}{l}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}^*}{C_{1111}^*}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}^*}{\rho}, \\ \alpha_{ij}^{(q)} &= \frac{\alpha_{ij}^{*(q)}}{C_{1111}^*}, \quad D_{ij}^{(q)} = \frac{D_{ij}^{*(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_{ijkl}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{ij}^{*(q)} \alpha_{kl}^{*(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 Cl}, \quad \tau_q = \frac{C \tau^{(q)}}{l}, \\ F_i &= \frac{F_i^*}{C_{1111}^*}, \quad Y^{(q)} = \frac{l Y^{*(q)}}{C}, \quad l_m = \frac{l_m^*}{l}, \quad h = \frac{h^*}{l}, \end{aligned} \quad (3)$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; u_i^* – компоненты вектора перемещений; l – диагональ пластины, которая имеет размеры $l_1^* \times l_2^*$ и толщину h^* ; $\eta^{(q)}$ – приращение концентрации q -ой компоненты вещества в составе N -компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q -го вещества; C_{ijkl}^* – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность; $\alpha_{ij}^{*(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D_{ij}^{*(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества; $g^{(qp)}$ – термодинамические множители Даркена; $\tau^{(q)}$ – время релаксации.

Начальные условия полагаем нулевыми. Для формулировки граничных условий полагаем, что область G ограничена, $\partial G = \Pi = \Pi_u \cup \Pi_\sigma = \Pi_\eta \cup \Pi_J$ и при этом $\Pi_u \cap \Pi_\sigma = \emptyset$ и $\Pi_\eta \cap \Pi_J = \emptyset$. Тогда кинематика и динамика поверхностных возмущений записывается так:

$$u_i|_{\Pi_u} = U_i, \quad \sigma_{ij}\nu_j|_{\Pi_\sigma} = P_i \quad (\tau > 0), \quad (4)$$

$$\eta^{(q)}|_{\Pi_\eta} = N^{(q)}, \quad \left(J_i^{(q)} + \tau_q j_i^{(q)} \right)|_{\Pi_J} = I_i^{(q)} \quad (\tau > 0, \quad q = \overline{1, N}). \quad (5)$$

Величины, стоящие в правых частях граничных условий – поверхностные кинематические U_i , $N^{(q)}$ и динамические P_i , $I_i^{(q)}$ возмущения, ν_i – компоненты единичного вектора внешней нормали к ∂G .

2. Вариационная постановка задачи Для построения уравнений изгиба пластины используем вариационный принцип Даламбера согласно которому соотношения (1) – (5) можно записать так [10]

$$\begin{aligned} & \int_G \left(\ddot{u}_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_i \right) \delta u_i dG + \sum_{q=1}^N \int_G \left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\dot{\eta}^{(q)} + \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} - Y^{(q)} \right) \delta \eta^{(q)} dG + \\ & + \iint_{\Pi_\sigma} (\sigma_{ij}\nu_j - P_i) \delta u_i dS + \sum_{q=1}^N \iint_{\Pi_J} \left(J_i^{(q)} + \tau_q j_i^{(q)} - I_i^{(q)} \right) \nu_i \delta \eta^{(q)} dS = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

где δu_i и $\delta \eta^{(q)}$ – виртуальные перемещения и приращения концентраций.

Далее полагаем, что:

1. Область решения задачи – прямоугольный параллелепипед $G = D \times [-h/2, h/2]$, где $D = [0, l_1] \times [0, l_2]$ – прямоугольная область занятая срединной поверхностью пластины $x_3 = 0$, $\Gamma = \partial D$ – граница срединной поверхности (рис. 1)
2. Поверхность пластины $\Pi = \Pi_- \cup \Pi_+ \cup \Pi_b$, где Π_- – нижняя поверхность, соответствующая $x_3 = -h/2$, Π_+ – верхняя поверхность, соответствующая $x_3 = h/2$, $\Pi_b = \Pi_{11} \cup \Pi_{21} \cup \Pi_{12} \cup \Pi_{22}$ – боковая поверхность. Поверхности Π_{1k} соответствуют $x_k = 0$, поверхности Π_{2k} соответствуют $x_k = l_k$, $k = 1, 2$. Предполагается, что верхняя и нижняя поверхности свободны от механических нагрузок и массоперенос через них отсутствует, т.е.

$$\sigma_{ij}\nu_j|_{\Pi_-} = \sigma_{ij}\nu_j|_{\Pi_+} = 0, \quad \left(J_i^{(q)} + \tau_q j_i^{(q)} \right)|_{\Pi_-} = \left(J_i^{(q)} + \tau_q j_i^{(q)} \right)|_{\Pi_+} = 0. \quad (7)$$

3. материал пластины ортотропный. Для записи физических постоянных срезы будем использовать нотацию Фойгта. Так же, полагаем, что точки зрения явления массопереноса материал пластины идеальный твердый раствор [1, 2, 8, 9]

$$g^{(qr)} = \delta_{qr} \Rightarrow D_{ij}^{(q)} g^{(qr)} = D_{ij}^{(q)} = D_q. \quad (8)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера.

4. Поперечные прогибы пластины считаются малыми. Тогда линейаризация искоемых величин по переменной x_3 будет иметь вид (приближенное равенство заменяется точным)

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, x_3, \tau) &= u(x_1, x_2, \tau) - x_3 \chi_1(x_1, x_2, \tau), \\
u_2(x_1, x_2, \tau) &= v(x_1, x_2, \tau) - x_3 \chi_2(x_1, x_2, \tau), \\
u_3(x_1, x_2, \tau) &= w(x_1, x_2, \tau) + x_3 \psi(x_1, x_2, \tau), \\
\eta^{(q)} &= N_q(x_1, x_2, \tau) + x_3 H_q(x_1, x_2, \tau).
\end{aligned} \tag{9}$$

5. Считаем также, что прямолинейное, нормальное к срединной поверхности волокно после деформации также остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности (пластина Кирхгофа). С учетом (7) будем предполагать, что деформации вдоль оси Ox_3 отсутствуют. Тогда

$$\varepsilon_{i3} = 0 \quad (i = \overline{1, 3}) \Rightarrow \psi = 0, \quad \chi_k = \frac{\partial w}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2. \tag{10}$$

Следовательно

$$u_1 = u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w. \tag{11}$$

На основании сформулированных гипотез, компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока в (2) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - \sum_{q=1}^N \alpha_1^q (N_q + x_3 H_q), \\
\sigma_{22} &= C_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - \sum_{q=1}^N \alpha_2^q (N_q + x_3 H_q), \\
\sigma_{33} &= C_{13} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + C_{23} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - \sum_{q=1}^N \alpha_3^q H_q,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - 2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), \\
\sigma_{13} &= C_{55} \left(-\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \sigma_{23} = C_{44} \left(-\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1^{(q)} + \tau_q \dot{J}_1^{(q)} &= -D_1^q \left(\frac{\partial N_q}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial H_q}{\partial x_1} \right) + \\
&+ \Lambda_{11}^q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \right) + \Lambda_{12}^q \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right), \\
J_2^{(q)} + \tau_q \dot{J}_2^{(q)} &= -D_2^q \left(\frac{\partial N_q}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial H_q}{\partial x_2} \right) + \\
&+ \Lambda_{21}^q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) + \Lambda_{22}^q \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right), \\
J_3^{(q)} + \tau_q \dot{J}_3^{(q)} &= -D_3^q H_q - \Lambda_{31}^q \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \Lambda_{32}^q \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (q = \overline{1, N}).
\end{aligned}$$

где

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\alpha\beta\beta}, \quad C_{66} = C_{1212}, \quad D_\alpha^q = D_{\alpha\alpha}^q, \quad \alpha_\alpha^q = \alpha_{\alpha\alpha}^q, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^q = \Lambda_{\alpha\alpha\beta\beta}^q.$$

3. Модель упругодиффузионной пластины Кирхгофа Далее подставляем (11) и найденные значения компонент тензора напряжений и вектора диффузионного потока (12) в функционал (6). Используя необходимое условие экстремума функционала, получаем следующие краевые задачи:

- задача относительно продольных деформаций пластинки

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \sum_{r=1}^N \alpha_1^r \frac{\partial N_r}{\partial x_1} + \frac{n_1}{h}, \\ \ddot{v} &= (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \sum_{r=1}^N \alpha_2^r \frac{\partial N_r}{\partial x_2} + \frac{n_2}{h}, \\ \dot{N}_q + \tau_q \ddot{N}_q &= D_1^q \frac{\partial^2 N_q}{\partial x_1^2} + D_2^q \frac{\partial^2 N_q}{\partial x_2^2} - \\ &- \Lambda_{11}^q \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - \Lambda_{12}^q \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \Lambda_{21}^q \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \Lambda_{22}^q \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^3} + \frac{y^{(q)}}{h}, \end{aligned} \quad (13)$$

- задача относительно прогибов пластинки

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x_1^2} + \frac{\ddot{w}}{\partial x_2^2} - \frac{12}{h^2} \ddot{w} &= \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + C_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \\ &+ \sum_{q=1}^N \left(\alpha_1^q \frac{\partial^2 N_q}{\partial x_1^2} + \alpha_2^q \frac{\partial^2 N_q}{\partial x_2^2} \right) - \frac{12}{h^3} \left(\frac{\partial^2 m_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 m_2}{\partial x_2^2} + q \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{H}_q + \tau_q \ddot{H}_q = D_1^q \frac{\partial^2 H_q}{\partial x_1^2} + D_2^q \frac{\partial^2 H_q}{\partial x_2^2} + \Lambda_{11}^q \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + (\Lambda_{12}^q + \Lambda_{21}^q) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \Lambda_{22}^q \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \frac{12}{h^3} z_q.$$

Здесь:

1. $\int_{-h/2}^{h/2} F_1 dx_3 = n_1$ и $\int_{-h/2}^{h/2} F_2 dx_3 = n_2$ – распределённые по поверхности продольные нагрузки,
2. $\int_{-h/2}^{h/2} x_3 F_1 dx_3 = m_1$ и $\int_{-h/2}^{h/2} x_3 F_2 dx_3 = m_2$ – распределённые по поверхности моменты,
3. $\int_{-h/2}^{h/2} F_3 dx_3 = q$ – распределённая по поверхности поперечная нагрузка,
4. $\int_{-h/2}^{h/2} Y^{(q)} dx_3 = y_q$ – распределённая по поверхности плотность объемных источников массопереноса,
5. $\int_{-h/2}^{h/2} Y^{(q)} x_3 dx_3 = z_q$.

Полученные уравнения дополняем граничными условиями, которые также получаются из вариационного уравнения (6). Например, для задачи об изгибе свободно опертой пластины под действием пар изгибающих моментов $M_k^{(1)}$ и $M_k^{(2)}$, $k = 1, 2$ (рис. 1) они имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_1^q H_q \right) \Big|_{x_1=0} &= -\frac{12}{h^3} M_1^{(1)}(x_2, \tau), \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_1^q H_q \right) \Big|_{x_1=l_1} &= -\frac{12}{h^3} M_2^{(1)}(x_2, \tau); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left(C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_2^q H_q \right) \Big|_{x_2=0} = -\frac{12}{h^3} M_1^{(2)}(x_1, \tau),$$

$$\left(C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_2^q H_q \right) \Big|_{x_2=l_2} = -\frac{12}{h^3} M_2^{(2)}(x_1, \tau);$$

$$H_q|_{x_1=0} = H_{q1}^{(1)}(x_2, \tau), \quad H_q|_{x_1=l_1} = H_{q2}^{(1)}(x_2, \tau),$$

$$H_q|_{x_2=0} = H_{q1}^{(2)}(x_1, \tau), \quad H_q|_{x_2=l_2} = H_{q2}^{(2)}(x_1, \tau);$$

$$w|_{x_1=0} = W_1^{(1)}(x_2, \tau), \quad w|_{x_1=l_1} = W_2^{(1)}(x_2, \tau),$$

$$w|_{x_2=0} = W_1^{(2)}(x_1, \tau), \quad w|_{x_2=l_2} = W_2^{(2)}(x_1, \tau).$$

Решения полученных задач ищутся с помощью метода функций Грина, для нахождения которых используется преобразование Лапласа и разложение в тригонометрические ряды Фурье.

4. Заключение. Таким образом, на основании известных линейных моделей механо диффузии сплошных сред, в совокупности с гипотезами теории пластин и оболочек, с помощью вариационного принципа Даламбера получена модель нестационарных упругодиффузионных колебаний пластины Кирхгофа. Показано, что так же как и в классической теории упругости, механо диффузионная модель пластины Кирхгофа состоит из двух независимых начально-краевых задач относительно продольных и относительно поперечных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1984. 182 с.
- [2] Князева А.Г. Введение в термодинамику необратимых процессов. Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014. 172 с.
- [3] Aouadi M., Copetti M. I. M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two steps in thermoelastic diffusion theory // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2015. P. 1-24.
- [4] Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // International Journal of Thermal Sciences. 2011. Vol. 50, No. 5. P. 749-759.
- [5] Elhagary M.A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating // Acta Mech. 2013. Vol. 224. P. 3057-3069
- [6] Kumar R., Kothari S., Mukhopadhyay S. Some theorems on generalized thermoelastic diffusion // Acta Mech. 2011. Vol. 217. P. 287-296
- [7] Sherief H.H., El-Maghraby N.M. A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int J Thermophys. 2009. Vol. 30. P. 2044-2057
- [8] Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропной однокомпонентной полуплоскости // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2015. Т. 157, Кн. 4. С. 103-111.
- [9] Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56, No. 6. P. 1023-1030.
- [10] Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation // Math. Comput. Appl. 2019. 24, 23;

A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii

**PROBLEM FORMULATION OF A RECTANGULAR ORTHOTROPIC
ELASTODIFFUSIVE KIRCHHOFF PLATE VIBRATIONS**

Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Abstract. We study unsteady elastic diffusion vibrations of a rectangular orthotropic Kirchhoff plate in the presence of diffusion fluxes relaxation. In general formulation the plate is subjected to tensile and shear forces as well as bending moments and torque. The unsteady model of an elastodiffusive Kirchhoff plate is obtained using the d'Alembert variational principle.

Keywords: elastic diffusion, coupled problem, unsteady problem, multicomponent continuum, Kirchhoff plate, Green's function.

REFERENCES

- [1] Eremeev V.S. Diffusion and Stress), Moscow: Energoatomizdat, 1984.
- [2] Knyazeva A.G. Introduction to the thermodynamics of irreversible processes. Tomsk: Publishing house "Ivan Fedorov 2014. 172 p.
- [3] Aouadi M. Copetti M. I. M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2015. P. 1-24.
- [4] Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // International Journal of Thermal Sciences. 2011. Vol. 50, No. 5.P. 749-759.
- [5] Elhagary M.A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating // Acta Mech. 2013. Vol. 224. P. 3057-3069
- [6] Kumar R., Kothari S., Mukhopadhyay S. Some theorems on generalized thermoelastic diffusion // Acta Mech. 2011. Vol. 217. P. 287-296
- [7] Sherief H.H., El-Maghraby N.M. A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int J Thermophys. 2009. Vol. 30. P. 2044–2057
- [8] Zemskov A.V., Tarlakovsky D.V. Two-dimensional non-stationary problem of elastic diffusion for an isotropic one-component half-plane // Uchenye zapiski Kazan University. Series Physics and Mathematics. 2015.Vol. 157, Book. 4.S. 103-111.
- [9] Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56, No. 6.P. 1023-1030.
- [10] Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation // Math. Comput. Appl. 2019.24, 23;

Zemskov, Andrei V. Professor, Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Senior Researcher of Dynamic Testing Laboratory, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Doctor of Physics and Mathematics Science, assistant professor, Moscow.

Tarlakovskii, Dmitry V. Head of Dynamic Testing Laboratory, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Head of the Department of materials resistance, dynamics and machine strength, Moscow Aviation Institute (National Research University), Doctor of Physics and Mathematics Science, professor, Moscow.

В. И. Штука

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНТЕНСИВНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ, ЗАПОЛНЕННОГО НЕСЖИМАЕМОМ ИЗОТРОПНЫМ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМ МАТЕРИАЛОМ

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток, Россия

Аннотация. На примере нескольких задач о нагружении упруговязкопластического и термоупругого цилиндрических слоёв с предварительными деформациями показаны основные моменты, на которые следует обратить внимание при комплексном моделировании отклика на существенно нестационарное воздействие термоупругой несжимаемой среды с вязкопластическими свойствами. Отмечены нюансы, касающиеся употребления соотношений теории больших упругопластических деформаций, применения метода лучевых рядов и использования специальных схем численных расчётов. Представлены зависимости скачков температуры и добавочного давления на плоскополяризованных поверхностях сильного разрыва, определены скорости волн нагрузки и круговой поляризации.

Ключевые слова: термоупругость, вязкопластичность, ударные волны, конечные деформации, лучевой метод.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.16.30.026

УДК: 539.374

Введение и постановка задачи *Пластичность – свойство твёрдых тел приобретать остаточные деформации* – так начинается первая глава книги, выпущенной в соавторстве Геннадием Ивановичем Быковцевым и Дюисом Даниловичем Ивлевым [10], где были представлены и изложены основы одного из наиболее развитых разделов механики деформируемого твёрдого тела – теории пластичности. Их труд поражает своей монументальностью и заделом на будущее, который до сих пор ещё до конца не исчерпан в части решения существенно нестационарных задач. Даже несмотря на то, что отдельный раздел в этой книге посвящён кинематическим и геометрическим условиям совместности на поверхностях разрывов, определению δ -производной

© Штука В. И., 2020

Штука Виктор Игоревич

e-mail: onslice@mail.ru, доцент кафедры математики и моделирования, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток, Россия.

Поступила 01.06.2020

и их расширениям, количество решённых задач ударного деформирования ограничивается сравнительно небольшим числом.

Применение одной из разработанных их учениками и последователями теорий необратимого деформирования [4], характеризующейся отказом от предположения малости как обратимых, так и необратимых деформаций, нашлось в расчётах конкретных краевых задач [13], [16]. В этих работах решались одномерные задачи, когда слой несжимаемой упруговязкопластической среды, ограниченный снаружи и изнутри соосными бесконечными цилиндрическими ободкой и валом радиуса R и r_0 соответственно (на границах которых выполнялись условия жёсткого закрепления), подвергался ударному нагружению (рис. 1).

Подобного рода постановки свойственны аппарату вискозиметрии, когда в пространстве между двумя жёсткими цилиндрическими поверхностями (приборы Куэтта-Хатчека и Сирля) помещают исследуемый образец и подвергают его физическим воздействиям [15], [17]. Точки среды при этом способны двигаться по винтовым траекториям, подчиняясь следующему закону

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t),$$

где функция крутки ψ определяет центральный угол поворота точки относительно её первоначального состояния, а функция аксиального смещения u – изменение её положения относительно образующей, параллельной оси $z = x_3$. Распределение предварительных деформаций в [13], [16] определяется решением соответствующей статической задачи с тем лишь условием, что до момента начала нагружения ($t \leq 0$) слой пребывает в состоянии нейтрального нагружения. При этом граница ядра вязкопластического течения будет находиться на внутреннем цилиндре, поскольку внешний будет зафиксирован, а процесс ударного нагружения определён граничными условиями, задающими (для примера) предварительную крутку (тоже, соответствующую ей деформацию $e_{r\varphi}$) и смещающее ударное воздействие со стороны вала на внутреннюю границу слоя

$$\begin{aligned} \psi(r_0, t) &= \psi_0, \quad \psi(R, t) = 0, \\ u(r_0, t) &= u_1 t + u_2 t^2, \quad u(R, t) = 0. \end{aligned}$$

Между тем, в других работах [18], [20] вязкопластические свойства не принимались в расчёт для того, чтобы выявить взаимосвязь лишь температурных и механических эффектов, поэтому следующим логическим и естественным шагом является комплексное моделирование задач с учётом как реологических, так и тепловых свойств.

Расширением привычного набора уравнений модели несжимаемого твёрдого тела в переменных Эйлера x_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho (\dot{v}_i + v_{i,j} v_j), \quad \rho T \frac{ds}{dt} + q_{k,k} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p, \\ \sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}) - p \delta_{ij} \quad \text{при } p_{ij} \neq 0, \\ \sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}) - p \delta_{ij} \quad \text{при } p_{ij} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

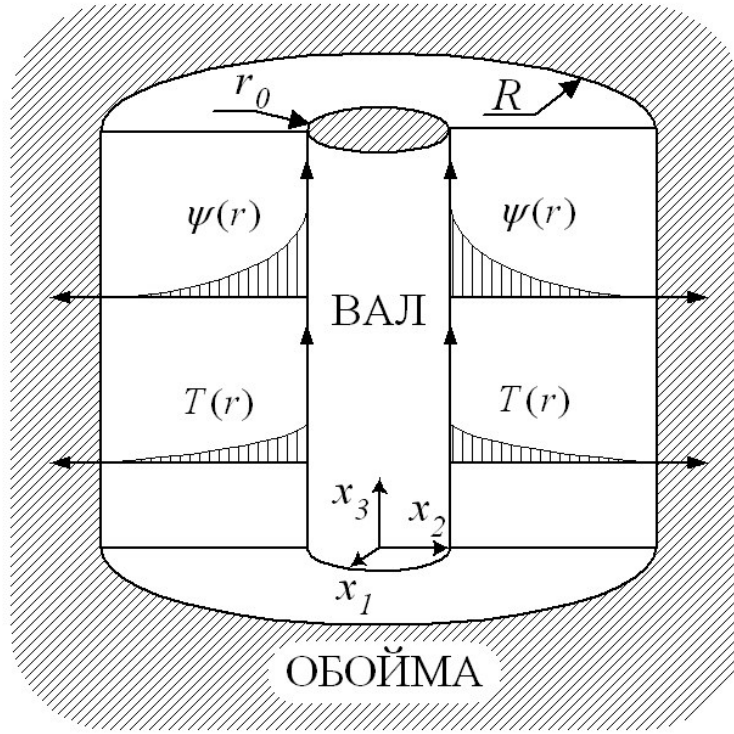


Рис. 1. Схематическое изображение постановки задачи

является её дополнение соотношениями теории больших необратимых деформаций [4] вида

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j})/2 = e_{ij} + p_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2 - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{kl}e_{lj}, \\ v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad Dp_{ij}/Dt = \varepsilon_{ij}^p + r_{ik}\varepsilon_{kj}^p + \varepsilon_{ik}^p r_{kj}, \quad r_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 + A^{-1} \times \\ &\times (B^2(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}) + B(\varepsilon_{ik}e_{kl}e_{lj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{lj}) + e_{ik}\varepsilon_{kl}e_{ln}e_{nj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{ln}e_{nj}), \quad (2) \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - (E_1^3 - E_3)/3, \quad B = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}, \end{aligned}$$

где σ_{ij} , α_{ij} – компоненты тензоров напряжений Коши-Эйлера, полных деформаций Альманси; e_{ij} , p_{ij} – обратимых и необратимых деформаций; ε_{ij}^p – скорости необратимых деформаций; u_i , v_i , q_i – векторов перемещения, скорости и теплового потока; p , T – добавочное давление и температура, входящая в уравнение баланса энтропии s ; $\rho = const$ – плотность среды. Символом D/Dt обозначена объективная производная (согласно [4]), индекс после запятой в системах (1) и (2) обозначает частную производную по соответствующей координате, точка над символом – по времени.

Определяющим звеном математической модели является упругий потенциал изотропной среды W , записанный в виде ряда Маклорена относительно свободного состояния

$$\begin{aligned} W(A_1, A_2, T) &= -2\mu A_1 + bA_1^2 - \mu A_2 - aA_1^3 - (\mu - b)A_1A_2 + \\ &+ \nu T(1 - \ln(T/T_0)) - \chi T A_1 + \dots, \quad A_1 = \alpha_{kk}, \quad A_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \end{aligned}$$

где μ , a , b , ν и χ – термоупругие модули. Кроме того, важно ещё знание вектора теплового потока, который может подчиняться как классическому закону теплопроводности Фурье, так и быть обусловленным специфическими требованиями, приводящими систему дифференциальных уравнений (1) и (2) к гиперболическому виду и тем самым обуславливая конечность скорости распространения тепла [5].

Условия совместности и ударные волны Основной сложностью при моделировании существенно нестационарных процессов, когда нет возможности обратиться к свойству автомодельности системы дифференциальных уравнений или квазистатической формулировке самой задачи, является возникновение и распространение поверхностей разрывов деформаций (ударных волн), скорости которых отличаются от скорости распространения возмущений.

В рассматриваемой постановке динамические условия совместности на поверхностях разрывов представлены следующими выражениями

$$[\sigma_{ij}]n_j = \rho(v_k^+ n_k - G)[v_i], \quad (v_k^+ n_k - G)([W] + \rho[v_k][v_k]/2) + [q_k]n_k = \sigma_{ij}^+[v_i]n_j, \quad (3)$$

которые с учётом условий Адамара [10] сводятся к системе четырёх уравнений, два из которых необходимы для выражения разрывов температуры и добавочного давления

$$[T] = \frac{d}{\nu} \frac{3\gamma[m^2]/2 + [m^3]/8}{1 - 2g_3\gamma}, \quad \gamma = \frac{[m]}{4} \frac{e_{r\varphi}^+ - [e_{r\varphi}]}{[e_{r\varphi}]}, \quad m = (2e_{r\varphi}^+)^2 + (2e_{rz}^+)^2, \quad (4)$$

$$[p] = -\frac{\mu + b + 2\chi T}{2}[m] - \frac{3}{4}d([m^2] + [m^3]) - \chi(1 + m^+ - [m])[T],$$

а оставшиеся два для определения типов плоскополяризованных ударных волн и их скоростей. В (3), и (4) квадратными скобками обозначена величина разрыва функции $[f]$, определяющаяся разностью значений функции f на ударной волне спереди – f^+ (далее ”+” опускается) и сзади – f^- .

Тождество, из которого получается сделать заключение о типах ударных волн, с учётом того, что пластические деформации являются непрерывными ($[p_{ij}] = 0$) [1], имеет вид

$$[h](e_{r\varphi}[v_z] - e_{rz}[v_\varphi]) = 0, \quad h = C^2(1 + g_1 m^2 + g_2 T + \dots), \quad (5)$$

$$C = \sqrt{\mu/\rho}, \quad g_1 = 3(\mu + a - b)/4\mu, \quad g_2 = \chi/\mu.$$

Из (5) на первой поверхности сильных разрывов Σ_1 , как было определено ранее [13], [16] происходит увеличение предварительного сдвига ($e_{r\varphi}[v_z] = e_{rz}[v_\varphi]$), а на второй поверхности сильных разрывов Σ_2 изменяется лишь его направленность ($[m] = 0$). Называются эти поверхности соответственно волной нагрузки и волной круговой поляризации и имеют достаточно существенные различия при наличии предварительных деформаций, поскольку при их отсутствии теоретически в несжимаемой среде возможно распространение лишь одной ударной волны (наличие предварительного градиента температуры роли здесь не играет). Из выражений (4) следует, что Σ_2 является ещё и изотермической ($[T] = 0$) ударной волной. Этой особенности лишена волна нагрузки, на которой согласно (4) происходит скачок температуры, а также добавочного давления. Эти же зависимости показывают, что основными на ударных волнах являются интенсивности разрывов обратимых деформаций, а скачки температуры и добавочного давления являются производными величинами.

Термодинамическое условие совместности в несжимаемых средах заранее определяет порядок следования плоско-поляризованных ударных волн, чего нельзя сказать

о квазипоперечных ударных волнах, распространяющихся в сжимаемых средах. Нормированные скорости распространения волн нагрузки и круговой поляризации определены из (3) с учётом (5) выражениями ($g_3 = \chi/\nu$)

$$\begin{aligned}
 G_1/C &= 1 + \frac{1}{2}g_2T + g_1m^2 - \frac{1}{8}g_3m + \frac{1}{4}\frac{m^2}{e_{r\varphi}^2}[e_{r\varphi}] \times \\
 &\times \left(g_3(1 + g_2T + g_1m^2) - e_{r\varphi} \left(\frac{3}{4}g_2T + 5g_1m - \frac{7}{4}g_1g_3m^2 \right) + \dots \right), \\
 G_2/C &= 1 + \frac{1}{2}g_2T + \frac{1}{2}g_1m^2 + \frac{1}{4}\frac{m^2}{e_{r\varphi}^2}[e_{r\varphi}] \times \\
 &\times \left(g_3(1 + g_2T + g_1m^2) - e_{r\varphi} \left(\frac{1}{2}g_2T + 2g_1m - \frac{1}{2}g_1g_3m^2 \right) + \dots \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Вид выражений (6) свидетельствует о том, что большим предварительным деформациям, а также температурам и интенсивностям волны нагрузки ($[e_{r\varphi}]$ и $[m]$) соответствуют большие скорости распространения Σ_1 и Σ_2 .

Несмотря на различия, определённые при моделировании несжимаемых сред с различными свойствами [19] следует заметить, что скорости ударных волн, распространяющихся как в чисто упругих, так и в термоупругих средах с вязкопластическими свойствами, определяются именно обратимыми и предварительными деформациями [3], а также температурой, если изотермичностью процесса нельзя пренебречь.

Лучевой метод и численное моделирование Выражения (6) ввиду зависимостей от интенсивностей ударных волн вынуждают использовать аппарат нелинейного лучевого метода из-за незамкнутости системы дифференциальных уравнений относительно интенсивностей разрывов старших порядков. Предложенный ранее независимо друг от друга Дж. Ахенбахом с Д. Рэдди [21] и Г. И. Быковцевым с учениками [1] классический вариант лучевого метода для задач с ударными волнами не подходит, поэтому необходимо пользоваться его расширенной версией, впервые предложенной А. А. Бурениным и Ю. А. Россихиным в работе [7], а затем описанную в [9], с целью преодоления этой особенности. Суть предложения состоит в использовании дополнительных разложений разрывов неизвестных функций, определённых на ударных волнах, с тем, чтобы перевести незамкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений в замкнутую систему нелинейных алгебраических соотношений. Для этого необходимо записать уравнения движения и теплопроводности (1) в разрывах и применить к ним аппарат нелинейного лучевого метода [9]. Этот приём позволяет уже три десятка лет справляться с "неразрешимыми" для 80-х годов прошлого века задачами.

Решение системы уравнений движения и теплопроводности (1) в разрывах и её дискретизированного аналога позволяет вычислять значения искомых функций в окрестности поверхностей разрывов для существенно больших времён, чем предполагает использование одного лишь аналитического решения, полученного с помощью лучевого метода. Неявная монотонная схема с центральными разностями, подробно описанная в [8], устойчива и имеет хорошую сходимость. Сохранение самого понятия разрыва при этом позволяет определять поля напряжений, обратимых и необратимых деформаций, а также распределение температуры за приемлемое время, которое может быть

уменьшено в разы при использовании современного аппарата распараллеливания вычислений.

Заключение Учёт вязкопластических и термоупругих свойств материалов важен не только для теоретических, но и для инженерных расчётов. Обратимые деформации существенно влияют на картину распределения остаточных напряжений по завершению технологических процессов [6], а при моделировании динамического нагружения важен как учёт вязкости [11], так и температуры, которые естественным образом сказываются на решении, формируя диссипативные явления за ударными волнами и приводя, в конечном итоге, к размытию разрыва, выступая опосредованным источником необратимых деформаций.

Обратившись к работам Чжу Бо-Те [22], Ю. А. Россихина и М. В. Шитиковой [23], В. А. Баскакова и М. С. Чирко [2], следует заметить, что в основном решение динамических краевых задач производилось в рамках физически линейной среды, поэтому для моделирования сред нелинейных при отказе от предположений малости как обратимых, так и необратимых деформаций, необходимо использовать некоторый критерий разделения полных деформаций. Вид этого критерия обусловлен произволом конструктора математической модели упруговязкопластической среды [4], [14].

Применение модели больших необратимых деформаций, свободной от ограничений величин деформаций (как, например, теория Прандтля-Рейса) и имеющей ряд отличий от деформационной теории пластичности [12], позволило произвести всю совокупность расчётов, чтобы определить напряжённо-деформированное состояние за распространяющимися криволинейными поверхностями сильных разрывов в цилиндрическом слое с предварительными деформациями. Учёт температурных эффектов, как было показано выше, не представляет при этом особенной сложности, но позволит получить решение задачи определения отклика на существенно нестационарные граничные неизотермические воздействия цилиндрического слоя, заполненного несжимаемым упруговязкопластическим материалом даже в случае гиперболической теории теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязкопластических средах // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. № 1. С. 145-155.
- [2] Баскаков В. А., Чирко М. С. К изучению свойств сильных разрывов в нелинейной термоупругой среде // Механика деформируемых сред. Куйбышев: Изд-во Куйбышевского университета. 1979. Вып. 4. С. 26-40.
- [3] Безгласный П. А., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязкопластических средах // Механика твёрдого тела. 1971. № 5. С. 71-76.
- [4] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток : Дальнаука, 2013. 312 с. ISBN 978-5-8044-1423-9.
- [5] Буренин А. А. К построению теории термоупругости при конечной скорости распространения тепла // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре технического университета. 2018. № IV-1(36). С. 47-53.
- [6] Буренин А. А., Устинова А. С. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчётом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // Успехи механики сплошных сред. К 70-летию В. А. Левина. Владивосток: Дальнаука. 2009. С. 91-102.
- [7] Буренин А. А., Россихин Ю. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР. 1991. С. 129-137.

- [8] Буренин А. А., Севастьянов Г. М., Штука В. И. О выделении разрывов в расчётах динамики несжимаемой упругой среды // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 4. С. 400-411.
- [9] Буренин А. А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный математический сборник. 1999. Вып. 8. С. 49-72.
- [10] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с. ISBN 5-7442-0586-1.
- [11] Зволинский Н. В., Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамика деформируемых твёрдых тел // В кн. : Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твёрдого тела. М. : Наука, 1972. С. 291-323.
- [12] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М. : Физматлит, 2001. 704 с.
- [13] Ковтанюк Л. В., Штука В. И. Исследование цилиндрических ударных волн в упруговязкопластических несжимаемых телах с помощью метода лучевых рядов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2(32). С. 118-134.
- [14] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М. : Физматлит, 2013. 319 с. ISBN 978-5-9221-1409-7.
- [15] Рейнер М. Реология. М. : Наука, 1965. 224 с.
- [16] Севастьянов Г. М., Ковтанюк Л. В., Штука В. И. Одномерные цилиндрические ударные волны в условиях нагрузки, вызывающей вязкопластическое течение // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2018. Т. 1. № 4(36). С. 40-46.
- [17] Шрамм Г. Основы практической реологии и реометрии / Пер. с англ. И. А. Лавыгина. М. : КолосС, 2003. 321 с.
- [18] Штука В. И. Особенности применения лучевого метода при решении нестационарных задач связанной термоупругости с ударными волнами // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технологических устройств и конструкций. Материалы II Дальневосточной школы-семинара. 2017. С. 70-73.
- [19] Штука В. И. Сравнение результатов моделирования отклика несжимаемых упругой и упруговязкопластической сред с предварительными деформациями на существенно нестационарные граничные воздействия // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твёрдого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. Материалы V Дальневосточной конференции с международным участием. 2018. С. 21-23.
- [20] Штука В. И. Ударные волны в несжимаемом термоупругом цилиндрическом слое // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела. 2017. С. 291-296.
- [21] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in linear viscoelastic media // Zeitschr. für angew. Math. und Phys. 1967. Vol. 18. № 1. P. 141-144.
- [22] Boas-The Chu Transverse shock waves in incompressible elastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. P. 1-14.
- [23] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. On construction of uniformly fit ray decompositions for solving dynamic problems of linear viscoelasticity // Soviet Appl. Mech. (Engl. transl.). 1991. Vol. 27. No 1. P. 77-82.

V. I. Shtuka

NONCOMPRESSED CYLINDRICAL LAYER SHOCK LOADING IN ANISOTHERMIC CONDITIONS

Vladivostok State University of Economics and service, Vladivostok, Russia

Abstract. The main points which should be paid attention of modeling the response of thermoelastic incompressible medium with viscoplastic properties to the essentially unsteady effect are shown by the example of several problems on loading elastoviscoplastic and thermoelastic cylindrical layers with preliminary deformations. Some remarks were noted regarding to the use of the relations of the theory of finite elastoplastic deformations, the ray series method application and special numerical calculation schemes. The dependencies of temperature and additional pressure breaks on plane-polarized strong discontinuities surfaces, loading and circular polarized waves velocities are determined.

Keywords: thermoelasticity, viscoplasticity, shock waves, finite deformations, ray method.

REFERENCES

- [1] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Verveiko N. D. Ray method for solving problems in elastic-viscoplastic media // Applied Mathematics and Mechanics. 1973. T. 37. No. 1. S. 145-155.
- [2] Baskakov V. A., Chirko M. S. On the Study of the Properties of Strong Discontinuities in a Nonlinear Thermoelastic Medium // Mechanics of Deformable Media. Kuibyshev: Publishing house of the Kuibyshev University. 1979. Issue 4. S. 26-40.
- [3] Voiceless P. A., Verveiko N. D. Beam method for solving problems in elastic-viscoplastic media // Rigid Body Mechanics. 1971. No. 5. S. 71-76.
- [4] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok : Dalnauka, 2013. 312 p. ISBN 978-5-8044-1423-9.
- [5] Burenin A. A. Towards the construction of the theory of thermoelasticity at a finite rate of heat propagation // Scientific notes of the Komsomolsk-on-Amur Technical University. 2018. No. IV-1 (36). S. 47-53.
- [6] Burenin A. A., Ustinova A. S. Development and deceleration of a helical viscoplastic flow with the calculation of the elastic response after stopping the flow and unloading. To the 70th anniversary of V. A. Levin. Vladivostok: Dalnauka. 2009. S. 91-102.
- [7] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces of discontinuities // Applied problems of mechanics of deformable media. Vladivostok: DVO AN USSR. 1991. S. 129-137.
- [8] Burenin A. A., Sevast'yanov G. M., Stuck V. I. On the separation of discontinuities in the calculations of the dynamics of an incompressible elastic medium // Computational mechanics of continuous media. 2016. Vol. 9. No. 4. S. 400-411.
- [9] Burenin A. A. On one possibility of constructing approximate solutions of non-stationary problems of the dynamics of elastic media under shock influences // Dalnevostochnyi matematicheskiy sbornik. 1999. Issue 8. S. 49-72.
- [10] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Plasticity theory. Vladivostok : Dalnauka, 1998. 528 p. ISBN 5-7442-0586-1.
- [11] Zvolinsky N. V., Reitman M. I., Shapiro G. S. Dynamics of deformable solids // In the book : Mechanics in the USSR for 50 years. T. 3. Mechanics of a deformable solid. M. : Nauka, 1972. S. 291-323.
- [12] Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. M. : Fizmatlit, 2001. 704 p.

Shtuka, Viktor Igorevich Docent, Department of Math and Modeling, Vladivostok State University of Economics and service, Vladivostok, Russia.

- [13] Kovtanyuk L. V., Stuck V. I. Investigation of cylindrical shock waves in elastic-viscoplastic incompressible bodies using the ray series method // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit State Mechanics. 2017. No. 2 (32). S. 118-134.
- [14] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Thermomechanics of Elastoplastic Deformation. M. : Fizmatlit, 2013. 319 p. ISBN 978-5-9221-1409-7.
- [15] Reiner M. Rheology. M. : Nauka, 1965. 224 p.
- [16] Sevast'yanov G. M., Kovtanyuk L. V., Stuck V. I. One-dimensional cylindrical shock waves under load conditions causing viscoplastic flow // Uchenye zapiski Komsomolsk-on-Amur State Technical University. 2018. Vol. 1. No. 4 (36). S. 40-46.
- [17] G. Schramm Fundamentals of practical rheology and rheometry / Per. with eng. I. A. Lavygina. M. : KolosS, 2003. 321 p.
- [18] Stuck V. I. Features of the application of the ray method in solving non-stationary problems of coupled thermoelasticity with shock waves // Fundamental mechanics as a basis for improving industrial technologies, technological devices and structures. Materials of the II Far Eastern School-Seminar. 2017. S. 70-73.
- [19] Stuck V. I. Comparison of the results of modeling the response of incompressible elastic and elasto-viscoplastic media with preliminary deformations to substantially unsteady boundary actions // Fundamental and applied problems of mechanics of deformable solids and progressive technologies in mechanical engineering. Materials of the V Far Eastern conference with international participation. 2018. S. 21-23.
- [20] Stuff V. I. Shock waves in an incompressible thermoelastic cylindrical layer // Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics of Deformable Solids. 2017. S. 291-296.
- [21] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in linear viscoelastic media // Zeitschr. für angew. Math. und Phys. 1967. Vol. 18. No. 1. P. 141-144.
- [22] Boas-Chu Transverse shock waves in incompressible elastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. P. 1-14.
- [23] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. On construction of uniformly fit ray decompositions for solving dynamic problems of linear viscoelasticity // Soviet Appl. Mech. (Engl. Transl.). 1991. Vol. 27. No 1. P. 77-82.

Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, А. М. Буруруев, Т. К. Нестеров, Н. Э. Стадник

ОБ УПРУГОЙ РАЗГРУЗКЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАГРЕТОГО ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА ОБЛАДАЮЩЕГО ТОРОИДАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Институт прикладной математики ДВО РАН г. Владивосток, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматривается ряд краевых задач теории термоупругопластического деформирования материала в условиях тороидальной симметрии. Рассмотрен процесс упругой разгрузки предварительно нагретого объекта. Рассчитаны поля остаточных напряжений и перемещений. Получены точные формулы для аналитического решения поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: температурное напряжение, идеальная пластичность, теплопроводность, термоупругость

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.88.027

УДК: 539.374

1. Введение. Во многих отраслях современного машиностроения и самолетостроения значительно возросли потребности в использовании облегченных деталей и конструкций. Эту задачу частично решает использование функционально градиентных материалов (например, сплавов титана) [1-5]. Функционально градиентный материал это класс современных материалов с различными свойствами в зависимости от характерного микроструктурного размера. В природе функционально градиентными материалами являются кости, зубы и т. д. Одной из уникальных характеристик функционально градиентных материалов является их способность адаптироваться к конкретному эксплуатационным нагрузкам.

© Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Буруруев А. М., Нестеров Т. К., Стадник Н. Э. 2020

Дац Евгений Павлович

e-mail: dats@dvo.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №18-01-00844, № 19-51-60001, № 20-01-00666).

Поступила 24.06.2020

Другая актуальная проблема — это быстрая замена вышедших из строя деталей. В случае их замены, несомненными преимуществами обладают процессы аддитивного производства. К таким способам производства относятся: физическое или химическое осаждение из жидкой/газообразной фазы, плазменное напыление, самораспространяющийся высокотемпературный синтез, метод порошковой металлургии, метод центробежного литья и процесс лазерного осаждения металла. Процесс лазерного осаждения металла — это класс процессов аддитивного производства, который позволяет производить функциональную деталь непосредственно из трехмерной компьютерной модели детали и, возможно, из различных материалов.

Производимые такими способами изделия экономически более выгодны, а их производство менее токсично по сравнению с другими технологическими процессами. Тем не менее, полученные аддитивным способом изделия и материалы, зачастую проявляют микроструктурные особенности и являются функционально градиентными материалами.

Математические модели деформирования изделий, изготовленных описанными выше способами, несомненно должны учитывать температурные эффекты. Модель термоупругопластичности, полученная обобщением классической модели Прандтля–Рейса полностью отвечает требованиям, предъявляемым современной инженерией к исследователям. Ранее авторами, настоящего сообщения, был решен ряд краевых задач по расчету температурных напряжений в телах с осевой и центральной симметрией [6–18]. В предлагаемой работе рассмотрим проблему расчета остаточных напряжений в условиях тороидальной симметрии. Основу расчетов пластического течения, предваряющего стадию разгрузки материала, возьмем результаты изложенные в публикациях [19–21].

2. Определяющие модельные соотношения и основные уравнения. Воспользуемся [8] моделью малых упруго-пластических деформаций, в которой тензор малых деформаций \mathbf{d} состоит из термоупругой (обратимой) \mathbf{e} и пластической (необратимой) \mathbf{p} составляющей:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla) \quad (1)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений в трехмерной декартовой системе координат.

Предполагается, что материал находится в состоянии термоупругопластического равновесия, для которого справедливо уравнение:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Буруруев Алексей Михайлович

e-mail: alexey@bururuev.ru, ведущий инженер, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Нестеров Тимофей Константинович

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, программист, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Стадник Никита Эдуардович

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши. Зависимость между тензором напряжений и упругими компонентами тензора деформаций выражается при помощи закона Дюамеля-Неймана

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{e} + [\lambda\text{tr}(\mathbf{e}) - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0)]\mathbf{I} \quad (3)$$

здесь \mathbf{I} — единичный тензор, $\text{tr}(\mathbf{e})$ — след тензора упругих деформаций, $T - T_0$ — разница между текущей и начальной температурой в точке среды, λ, μ — параметры Ламе, α — коэффициент линейного теплового расширения.

Температурное поле описывается уравнением теплопроводности:

$$\rho c_p \partial_t T = \nabla \cdot (\eta \nabla T) \quad (4)$$

где ρ — плотность, c_p — теплоемкость, η — теплопроводность материала, ∂_t — производная по временной координате. При $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ система соотношений (1)–(4) вместе с заданными граничными условиями определяет термоупругое равновесие материала.

Начало процесса необратимое деформирование материала определяется выполнением условия пластичности Мизеса:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} - \frac{8}{3}k^2(T) = 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — девиатор тензора напряжений, $k(T)$ — предел текучести при чистом сдвиге, значение которого в каждой точке среды зависит от текущей температуры и не зависит от напряженного состояния материала (идеальная пластичность).

Основные соотношения. Преобразование от декартовых прямоугольных координат (X, Y, Z) к псевдотороидальным координатам (r, θ, φ) определяется соотношениями:

$$X = \Omega \cos(\varphi), \quad Y = \Omega \sin(\varphi), \quad Z = R_0 \cos(\theta), \quad \Omega = (R_0 + r \sin(\theta)), \quad (6)$$

где R_0 главный радиус тора, $r \in [r_1, r_2]$, r_1 и r_2 внутренний и внешний радиусы тора. При этом учитывается, что центр тора совпадает с началом декартовой системы координат, а центр тороидальной системы расположен на образующей оси тора.

Компоненты тензора малых деформаций $d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$, определяются через термоупругую e_{ij} и пластическую p_{ij} составляющие, а с компонентами вектора перемещений u_i в псевдотороидальной системе координат связаны уравнениями

$$\begin{aligned} d_{\theta\theta} &= \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}, & d_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r \sin(\theta) + u_\theta \cos(\theta)}{\Omega} + \frac{u_{\varphi,\varphi}}{\Omega}, & d_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ d_{rr} &= u_{r,r}, & d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi \sin(\theta)}{\Omega} \right), & d_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{\theta,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,\theta} - \frac{u_\varphi \cos(\theta)}{\Omega} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и далее индексом после запятой обозначается частное дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Уравнения равновесия в псевдотороидальной системе координат преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\Omega} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + \text{ctg} \theta (\sigma_{r\theta})) &= 0, \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\Omega} (\sigma_{r\theta} + \text{ctg}(\theta)(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})) &= 0, \\ \sigma_{r\varphi,r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{2\sin(\theta)}{\Omega} (\sigma_{r\varphi} + \text{ctg}(\theta)\sigma_{\theta\varphi}) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Определяющие соотношения термоупругого континуума можно принять в форме закона Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{tr} e_{ij} - \alpha \delta_{ij} (3\lambda + 2\mu)(T - T_0) + 2\mu e_{ij}, \quad (9)$$

где δ_{ij} — дельта Кронекера, λ , μ — постоянные Ламе, α — коэффициент линейного теплового расширения, $(T - T_0)$ — температур начально T_0 и текущей T .

Отметим, что в дальнейшем изложении материала статьи мы будем пренебрегать влиянием деформационных процессов на изменение температурного поля в исследуемом теле. Уравнение теплопроводности в псевдотороидальных координатах имеет форму

$$T_{,rr} + \frac{(R_0 + 2r \sin(\theta))T_{,r}}{r(R_0 + r \sin(\theta))} + \frac{T_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos(\theta)T_{,\theta}}{r(R_0 + r \sin(\theta))} + \frac{T_{,\varphi\varphi}}{(R_0 + r \sin(\theta))^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (10)$$

При заданных граничных условиях и известных распределениях необратимых деформаций p_{ij} система уравнений (7)–(10) задает эволюцию напряженно-деформированного состояния, подвергающегося тепловой обработке тела тороидальной формы, в условиях тороидальной симметрии.

Постановка задачи Рассмотрим полый тор радиусов R_0 и $r_1 < r < r_2$. Температурное воздействие на термоупругий материал задается осесимметричным³ температурным распределением. В таком случае, напряженно-деформированное состояние не будет зависеть от угловой координаты φ . Тогда, следующие компоненты вектора перемещений, тензора деформаций и тензора напряжений, будут равны нулю

$$u_\varphi = 0, \quad d_{r\varphi} = d_{\theta\varphi} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0. \quad (11)$$

На внешней поверхности тора определим состояние свободного теплового расширения согласно краевым условиям

$$\sigma_{rr}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_2, \theta) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим решение стационарного уравнения теплопроводности (10) с краевыми условиями:

$$T(r_1, \theta) = T_k, \quad T(r_2, \theta) = T_0. \quad (13)$$

Численный анализ решений уравнения теплопроводности показал, что вычисляемое распределение температуры существенно зависит от геометрии тора и при малых значениях параметра $\epsilon = r_2/R_0$ может быть описано функцией, зависящей только от радиальной координаты. При стремлении $\epsilon = r_2/R_0$ к нулю, тороидальная симметрия переходит в цилиндрическую, что позволяет принять с достаточной степенью точности одномерные аналитические решения в приближении гипотезы обобщенной плоской деформации. При таком подходе важным является определение допустимых конечных значений параметра ϵ , при которых цилиндрические решения будут удовлетворительно описывать двумерные численные в псевдотороидальных координатах.

Стационарное уравнение теплопроводности при $\epsilon = 0$, т. е. в условиях осевой симметрии приобретает форму:

$$T_{,r} + rT_{,rr} = 0. \quad (14)$$

Численные эксперименты показали, что максимальное отклонение аналитического решения уравнения (14) от численного решения уравнения (10) составляет менее 2%

³Имеется ввиду симметрия относительно оси oZ .

при $\epsilon = 0.1$ и $r_1/r_2 = 0.4$. Следовательно с достаточно высокой степенью точности температурное распределение при $\epsilon < 0.1$ можно считать одномерным.

При $\epsilon = 0$. Уравнения равновесия и соотношения для деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \\ d_{rr} = F_{,r} \quad d_{\varphi\varphi} = C, \quad d_{\theta\theta} = \frac{F}{r}, \quad d_{r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $F(r)$ – неизвестная функция радиуса, C – неизвестная константа. Компоненты вектора перемещений при этом можно представить в следующей форме:

$$u_r(r, \theta) = F(r) + R_0 C \sin(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = R_0 C \cos(\theta). \quad (16)$$

Вид функции $F(r)$ зависит от напряженно-деформированного состояния и определяется с учетом наличия или отсутствия пластического течения в заданной области материала.

Напряженно-деформированное состояние материала при наличии остаточных деформаций. Как было показано в работах [19-21] при свободном тепловом расширении температурный градиент, заданный условиями (13) приводит к возникновению в материале нескольких областей деформирования: двух областей пластического течения, соответствующих ребру и грани призмы Треска, и области термоупругого деформирования. Решения в каждой области конкретной области приведены в [19-21] и отличаются друг от друга видом функции $F(r)$.

Рассмотрим процесс остывания материала тора, когда температурное поле возвращается к начальному распределению ($T = T_0$). В этом случае, после пластического течения начнется процесс разгрузки, характеризуемый термоупругим деформированием с учетом накопленных необратимых деформаций. Выразив одну из компонент пластических деформаций через две другие ($p_{\varphi\varphi} = -p_{rr} - p_{\theta\theta}$), запишем в общем виде результирующие соотношения для напряжений, возникающих в материале при разгрузке:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2\mu}{\eta^2} \int_{r_1}^r \frac{p_{rr}(\rho) - p_{\theta\theta}(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{2\mu^2}{(\lambda + 2\mu)r^2} \int_{r_1}^r \rho(p_{rr}(\rho) + p_{\theta\theta}(\rho)) d\rho + \frac{Q}{r^2} + P, \\ \sigma_{\theta\theta} &= (r\sigma_{rr}(r)_{,r}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \mu\gamma(p_{rr}(r) + p_{\theta\theta}(r)) + \frac{\lambda\sigma_{rr}(r) + \lambda\sigma_{\theta\theta}(r)}{2(\lambda + \mu)}, \\ \eta^2 &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}, \quad \gamma = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь, P , Q – константы интегрирования. Пластические деформации, согласно условиям пластичности [19-21], представим в виде:

$$p_{rr} = \begin{cases} p_{rr}^*, & r_1 \leq r \leq b, \\ p_{rr}^{**}, & b \leq r \leq a, \\ 0, & r_1 \leq a \leq r_2, \end{cases} \quad p_{\theta\theta} = \begin{cases} p_{\theta\theta}^*, & r_1 \leq r \leq b, \\ 0, & b \leq r \leq a, \\ 0, & r_1 \leq a \leq r_2, \end{cases} \quad (18)$$

где p_{ij}^* – пластические деформации в области пластического течения ($r_1 \leq r \leq b$), соответствующей ребру призмы Треска ($\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k$), p_{ij}^{**} – пластические деформации в области пластического течения ($b \leq r \leq a$), соответствующей грани призмы Треска ($\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k$). В области ($a \leq r \leq R_1$) пластические деформации

отсутствуют. Для пластических деформаций (18) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} p_{rr}^* &= -\frac{C}{2} + \frac{D}{r^2} - \omega \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{\omega}{r^2} \int_{r_1}^r k(\rho)\rho d\rho - \frac{3}{r^2} \int_{r_1}^r \Delta(\rho)\rho d\rho - 2\frac{k}{\mu\gamma} + 2\Delta, \\ p_{\theta\theta}^* &= -\frac{C}{2} - \frac{D}{r^2} - \omega \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{\omega}{r^2} \int_{r_1}^r k(\rho)\rho d\rho + \frac{3}{r^2} \int_{r_1}^r \Delta(\rho)\rho d\rho + \frac{k}{\mu\gamma} - \Delta, \\ p_{\varphi\varphi}^* &= C + 2\omega \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{k}{\mu\gamma} - \Delta, \quad \omega = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} F^{**}(r) &= \frac{\psi}{2\eta} \left(\frac{(\eta + 1)}{r^\eta} \int_{r_1}^r \Delta(\rho)\rho^\eta d\rho + (\eta - 1)r^\eta \int_{r_1}^r \frac{\Delta(\rho)}{\rho^\eta} d\rho \right) + rC - \\ &- \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{1}{r^\eta} \int_{r_1}^r k(\rho)\rho^\eta d\rho + r^\eta \int_{r_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho^\eta} d\rho \right) + Mr^\eta + \frac{N}{r^\eta}, \\ p_{rr}^{**} &= \frac{1}{2} \left(F_{,r}^{**} - C - \frac{k}{\mu} \right), \quad p_{\varphi\varphi}^{**} = \frac{1}{2} \left(C + \frac{k}{\mu} - F_{,r}^{**} \right), \quad \psi = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где C, D, M, N – константы интегрирования.

Соотношения (17)–(20) определяют напряженно-деформированное состояние в условиях упругой разгрузки материала. Отметим, что в этом случае развитые зоны пластического деформирования не достаточны для возникновения повторного пластического течения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood et al. // Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. 2019. V. 30. P. 51–58.
- [2] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 515–522.
- [3] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 523–529.
- [4] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 555–564.
- [5] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu / Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 503–513.
- [6] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu / Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo et al. // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. V. 51. No 6. P. 766–773.
- [7] Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е.П. Дац и др. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №. 1. P. 32–43.
- [8] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical analysis of the elastic-plastic boundaries in the thermal stresses theory frameworks // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2017. V. 937. No. 1. P. 012030.
- [9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoelasticity // International Journal of Applied Mathematics. 2017. V. 47. No. 3.
- [10] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // Archive of Applied Mechanics. 1993. V. 63. No. 1. P. 42–50.

- [11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids*. 2014. V. 49. No. 2. P. 218–224.
- [12] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature // *Procedia engineering*. 2017. V. 173. P. 891–896.
- [13] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modelling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. V. 7. P. 427–434.
- [14] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // *Mechanics of Solids*. 2017. V. 52. No. 5. P. 495–500.
- [15] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in am fabricated ball during a heating process // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 1959. P. 1–5.
- [16] Stadnik N., Dats E. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 991. P. 1–7.
- [17] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 991. P. 1–12.
- [18] Akinlabi E. T., Dats E., Murashkin E. Thermoelasticplastic deformation of a functionally graded spherical layer // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1474(1). P. 012002.
- [19] Orçan Y. Residual stresses and secondary plastic flow in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends // *International journal of engineering science*. 1995. V. 33. No. 12. P. 1689–1698.
- [20] Murashkin E., Dats E. Thermal stresses computation in donut // *Engineering Letters*. 2019. V. 27. No 3. P. 568–571.
- [21] Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Температурные напряжения в условиях тороидальной симметрии // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. №. 2. С. 57–70.
- [22] Murashkin E. V., Dats E. P. Thermal stresses computation under toroidal symmetry conditions // *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC. 2019. V. 2116. No. 1. P. 380012.

E. P. Dats, E. V. Murashkin, A. M. Bururuev, T. K. Nesterov, N. E. Stadnik

THERMOELASTIC PLASTIC DEFORMATION OF A FUNCTIONAL GRADIENT MATERIAL UNDER CONDITIONS OF CENTRAL SYMMETRY

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. A number of boundary value problems of the theory of thermoelastoplastic deformation of a material under conditions of toroidal symmetry are presented. The process of elastic unloading of a heated object is considered. The fields of residual stresses and displacements are calculated. Exact formulas are obtained for the analytical solution of the stated boundary value problem.

Keywords: thermal stress, ideal plasticity, yield, heat conduction, thermoelasticity

REFERENCES

- [1] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood et al. // Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. 2019. V. 30.P. 51-58.
- [2] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 515–522.
- [3] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 523–529.
- [4] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 555-564.
- [5] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu / Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 503-513.
- [6] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu / Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo et al. // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. V. 51. No 6. P. 766–773.
- [7] Temperature stresses in an elastoplastic pipe depending on the choice of the plasticity condition / E.P. Dats et al. // Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. 2018. no. 1.P. 32–43.

Dats Evgeniy Pavlovich PhD, Researcher, Institute of Applied Mathematics of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Murashkin Evgenii Valerievich PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Bururuev Aleksei Mikhailovich Leading Engineer of the Laboratory for Modeling in Mechanics of Solids IPMech RAS, Moscow, Russia.

Nesterov Timofey Konstantinovich programmer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Stadnik Nikita Eduardovich Junior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A17-117021310381-8) and by the Russian Foundation for Basic Research project nos. 18-01-00844, 19-51-60001, 20-01-00666).

- [8] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical analysis of the elastic-plastic boundaries in the thermal stresses theory frameworks // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2017. V. 937. No. 1.P. 012030.
- [9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoplasticity // *International Journal of Applied Mathematics*. 2017. V. 47. No. 3.
- [10] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // *Archive of Applied Mechanics*. 1993. V. 63. No. 1.P. 42-50.
- [11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids*. 2014. V. 49. No. 2.P. 218-224.
- [12] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature // *Procedia engineering*. 2017. V. 173. P. 891-896.
- [13] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modeling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. V. 7. P. 427-434.
- [14] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // *Mechanics of Solids*. 2017. V. 52. No. 5.P. 495-500.
- [15] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in am fabricated ball during a heating process // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 1959. P. 1-5.
- [16] Stadnik N., Dats E. Continuum mathematical modeling of pathological growth of blood vessels // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 991. P. 1-7.
- [17] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 991. P. 1-12.
- [18] Akinlabi E. T., Dats E., Murashkin E. Thermoelasticplastic deformation of a functionally graded spherical layer // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1474 (1). P. 012002.
- [19] Orçan Y. Residual stresses and secondary plastic flow in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends // *International journal of engineering science*. 1995. V. 33. No. 12.P. 1689-1698.
- [20] Murashkin E., Dats E. Thermal stresses computation in donut // *Engineering Letters*. 2019. V. 27.No 3.P. 568-571.
- [21] E. P. Dats, E. V. Murashkin Temperature stresses in conditions of toroidal symmetry. *Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics*. 2019. no. 2.P. 57-70.
- [22] Murashkin E. V., Dats E. P. Thermal stresses computation under toroidal symmetry conditions // *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC. 2019. V. 2116. No. 1.P. 380012.

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

² *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

³ *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. В работе рассматриваются многослойные бетонные стержни постоянного поперечного сечения. Закон деформирования каждого слоя стержня принят в виде аппроксимации полиномом третьего порядка. Предполагается, что на защемленный стержень действуют квазистатические продольные и поперечные нагрузки и сила тяжести. Рассматриваемые задачи решаются методом Бубнова-Галеркина.

Ключевые слова: продольно-поперечный изгиб, стержень, предельная деформация, бетон, диаграмма деформирования бетона, растяжение, сжатие, метод Бубнова-Галеркина, системы нелинейных алгебраических уравнений

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.88.028

УДК: 539.374

В данной работе будем учитывать тот факт, что диаграммы растяжения и сжатия бетонов демонстрируют существенную нелинейность даже при низких уровнях нагружения. Аналогично работам [1–3] будем использовать, единообразные достаточно простые аппроксимации диаграмм деформирования с различными (по зонам) коэффициентами.

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2020

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiryuy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий Чувашского государственного университета им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 20.06.2020

В качестве критерия условного предельного состояния в i -ом слое принимаем достижение в нем максимальной деформации предельно допустимого значения при растяжении или сжатии.

Рассмотрим многослойные бетонные стержни постоянного поперечного сечения. Закон деформирования каждого слоя стержня представим в виде аппроксимации полиномом третьего порядка (1), где коэффициенты A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} – коэффициенты, которые можно найти из реальных диаграмм растяжения и сжатия бетонов.

$$\sigma_i = A_{1i}\varepsilon + A_{2i}\varepsilon^2 + A_{3i}\varepsilon^3. \quad (1)$$

Примеры расчета коэффициентов A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} для бетонов марок В10, В30, В50 из экспериментальных диаграмм [4] методом наименьших квадратов приведены в таблице 1.

Марка бетона	$\varepsilon_*^-, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$A_{1i}, \text{МПА}$	$A_{2i}, \text{МПА}$	$A_{3i}, \text{МПА}$
В10	0,2	0,005	17899	15 775 616	4 680 659 632
В30	0,2	0,005	47471	38 565 027	10 502 501 729
В50	0,2	0,005	83420	69 930 797	19 399 634 911

Таблица 1. Значения физических параметров бетонов

На рис. 1, 2 линиями изображены диаграммы растяжения-сжатия бетонов, построенных по соотношениям (1), точками изображены результаты экспериментов.

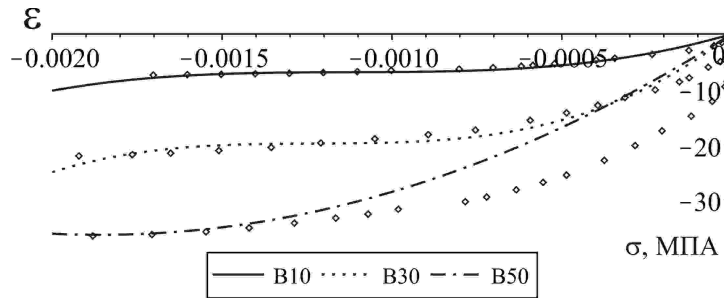


Рис. 1. Диаграммы растяжения бетонов, построенных по соотношениям (1), и экспериментальные

Для изгибающего изгибающего момента и продольного усилия справедливы соотношения

$$N = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sigma_i dS, \quad M_y = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sigma_i z dS, \quad (2)$$

и будем считать справедливыми уравнения равновесия

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z - \frac{dm_y}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x. \quad (3)$$

где q_x, q_z – проекции вектора внешних усилий на соответствующие оси, m_y – проекция вектора распределенного момента на ось y .

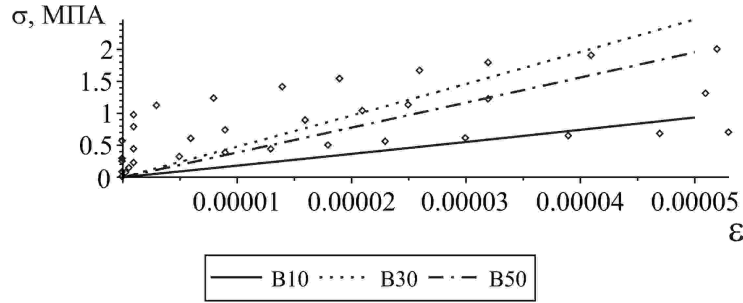


Рис. 2. Диаграммы сжатия бетонов, построенных по соотношениям (1), и экспериментальные

Если принять справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява, тогда будет иметь место

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x), \quad (4)$$

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y = \frac{d^2w_0}{dx^2}, \quad (5)$$

где u_0 , w_0 – компоненты вектора перемещений точек осевой линии стержня вдоль осей x и z соответственно.

Исходя из предположения, что имеет место случай защемленного с обоих концов стержня, имеем

$$u_0(0) = w_0(0) = u_0(l) = w_0(l) = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{dw_0}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dw_0}{dx} \right|_{x=l} = \left. \frac{du_0}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du_0}{dx} \right|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (1)-(5) получим систему дифференциальных уравнений относительно перемещений с граничными условиями (6)-(7).

Указанную систему дифференциальных уравнений будем решать методом Бубнова-Галеркина [5].

Положим

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^N B_k y_k(x), \quad w_0(x) = \sum_{k=1}^N C_k r_k(x), \quad (8)$$

где B_k , D_k – постоянные.

Если принять за $\varphi_i(x)$ выражения

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^N D_{i,k} x^{k-1}, \quad (9)$$

где $D_{i,k}$ определяются исходя из граничных условий.

Будем считать $y_k(x)$, $r_k(x)$ в выражении (8) равными

$$y_k(x) = r_k(x) = \varphi_k(x). \quad (10)$$

Если подставить перемещения (8) в полученные дифференциальные уравнения и обозначить через $L_1(x)$, $L_2(x)$ левые части соответствующих уравнений, положив в

качестве базисных функций в методе Бубнова-Галеркина те же функции, что и в разложении (8)

$$f_k(x) = \cos \frac{k-1}{l} \pi x - \cos \frac{k+1}{l} \pi x, \quad k = 1 \dots N, \quad (11)$$

получим систему из $2N$ алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных $B_k, C_k, k = 1 \dots N$,

$$\int_0^l L_i(x) f_k(x) dx = 0, \quad i = 1 \dots 3, \quad k = 1 \dots N. \quad (12)$$

Значения B_k, C_k можно определить из полученной системы уравнений каким-либо численным методом.

Пусть на стержень действуют распределенные нагрузки q_1, q_2, q_3, q_4 и сила тяжести проекция которой на соответствующие оси равна q_{sx}, q_{sz} .

Тогда для усилий и моментов имеет место

$$q_x = 2 \int_0^{b_1(0)} q_3 dy + 2 \int_0^{b_n(h_n)} q_4 dy + 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i(z)} q_{sx} dy, \quad (13)$$

$$q_z = 2 \int_0^{b_1(0)} q_2 dy + 2 \int_0^{b_n(h_n)} q_1 dy + 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i(z)} q_{sz} dy, \quad (14)$$

$$m_y = -2 \int_0^{b_n(h_n)} x q_1 dy - 2 \int_0^{b_1(0)} x q_2 dy + 2 h_n \int_0^{b_n(h_n)} q_3 dy - \\ - 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i(z)} (x q_{sz} - z q_{sx}) dy. \quad (15)$$

Действующие нагрузки $q_1, q_2, q_3, q_4, q_{sx}, q_{sz}$ примем равными

$$q_1 = t_{11} + t_{12}x, q_2 = t_{21} + t_{22}x, q_3 = t_{31} + t_{32}x, \quad q_4 = t_{41} + t_{42}x, \quad (16)$$

$$q_{sx} = g_x \rho \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_{i+1}} b_i(z) dz, \quad q_{sz} = g_z \rho \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_{i+1}} b_i(z) dz, \quad (17)$$

где $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}, t_{31}, t_{32}, t_{41}, t_{42}$ – постоянные, g_x, g_z – проекции вектора ускорения свободного падения.

Для иллюстрации данной методики рассмотрим стержень форма поперечного сечения которого имеет вид изображенный на рис. 3. На указанном рисунке марка бетона из которого сделан материал слоя указан напротив соответствующего номера слоя.

Примем в качестве постоянных характеризующих нагрузки (16) следующие значения

$$t_{11} = -300 \frac{\text{КН}}{\text{М}}, t_{12} = 10 \frac{\text{КН}}{\text{М}^2}, t_{21} = t_{22} = 0, t_{31} = 8000 \frac{\text{Н}}{\text{М}}, t_{32} = 800 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, t_{41} = t_{42} = 0.$$

Примем, что сила тяжести направлена вертикально вниз, т.е. $g_x = 0, g_z = 0$. Решение поставленной задачи имеет вид, изображенный на рис. 4-7.

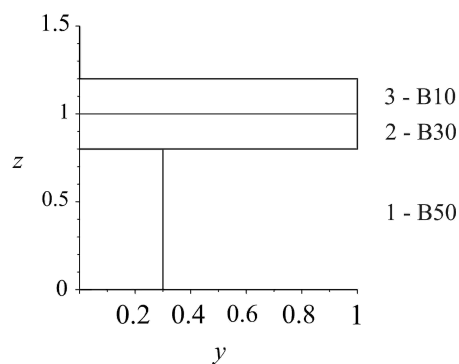


Рис. 3. Форма поперечного сечения стержня

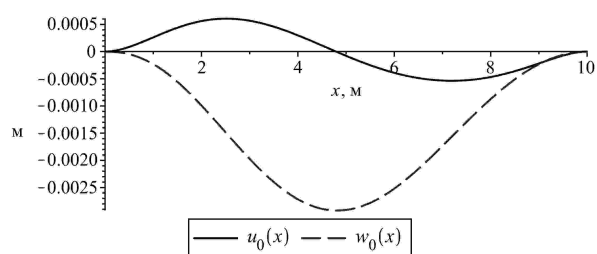


Рис. 4. Распределение компонентов вектора перемещений по длине стержня

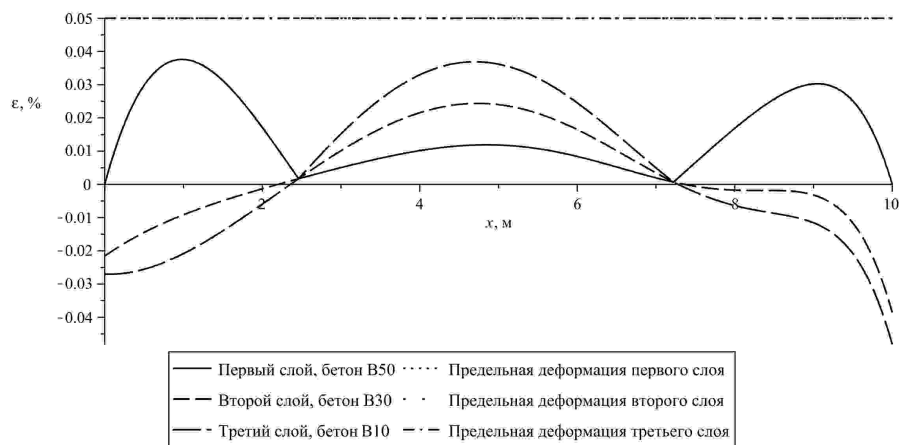


Рис. 5. Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня

Анализируя полученные решения, можно сделать вывод, что деформация не превысила своих предельных значений во всех сечениях стержня. Следовательно стержень может выдержать действующие на него нагрузки.

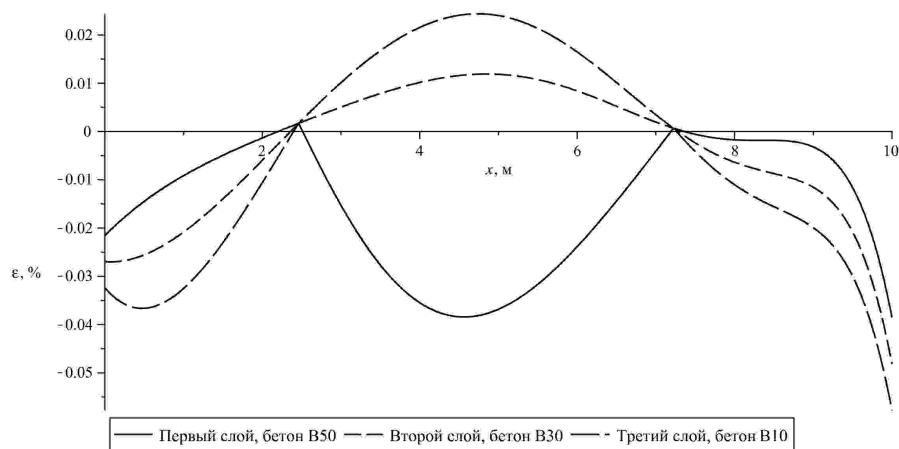


Рис. 6. Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня

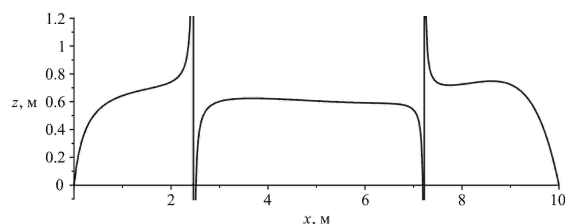


Рис. 7. Распределение координаты нейтральной линии по длине стержня

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [2] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
- [3] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.
- [4] Иващенко Е. И. Разработка методов расчета железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов с учетом фактического изменения площади их поперечных сечений // дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 2006. 230 с.
- [5] Голоскоков Д. П. Построение базиса для одномерных краевых задач в системах символьных вычислений // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. Т. 1. С. 77–85.

Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov

LONGITUDINAL-TRANSVERSE BENDING OF A MULTILAYER BAR MADE OF A PHYSICALLY NONLINEAR MATERIAL

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The paper considers multilayer concrete rods of constant cross-section. The deformation law for each layer of the bar is adopted as an approximation by a third-order polynomial. It is assumed that quasi-static longitudinal and transverse loads and gravity act on the restrained rod. The problems under consideration are solved by the Bubnov-Galerkin method.

Keywords: longitudinal-transverse bending, bar, ultimate deformation, concrete, concrete deformation diagram, tension, compression, Bubnov-Galerkin method, systems of nonlinear algebraic equations.

REFERENCES

- [1] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Deformation diagrams of concrete and reinforced concrete // Bulletin of the Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [2] Nemirovsky Y. V. Deformation limit of hybrid reinforced concrete structures // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2018. no. 3 (37). P. 26–37.
- [3] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Limit state of concrete and reinforced concrete rods in complex and longitudinal-transverse bending // Vestnik of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2020. № 1. C. 60–73.
- [4] Ivaschenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual deformation diagrams of materials, taking into account the actual change in the area of their cross-sections // dis. ... Cand. tech. sciences. Voronezh, 2006. 230 p.
- [5] Goloskokov D. P. Construction of a basis for one-dimensional boundary value problems in symbolic computation systems // Space, time and fundamental interactions. 2017. Vol. 1. P. 77–85.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (екс_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2e с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., Тихонов С. В.</i> Дюис Данилович Ивлев. К 90-летию со дня рождения (6 сентября 1930 г. – 3 марта 2013 г.)	5
<i>Горбенко О. Д., Шашкин А. И.</i> Д. Д. Ивлев и его научная школа	27
<i>Радаев Ю. Н.</i> Метагармонические потенциалы в механике микрополярных сред	35
<i>Чигарев А. В., Чигарев Ю. В.</i> Стохастизация колебаний трубопровода в условиях динамического внутреннего давления	49
<i>Баженов В. Г., Жестков М. Н.</i> Трехмерное моделирование больших деформаций пористых металлов и построение их диаграмм деформирования	56
<i>Алексеев А. А., Зубчанинов В. Г., Гультияев В. И.</i> Экспериментальное и теоретическое исследование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по некоторым многозвенным траекториям	64
<i>Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.</i> Ползучесть и пластическое течение материала толстостенной цилиндрической трубы вследствие действия равномерного внутреннего давления	72
<i>Велизаде Э. С.</i> Оптимальное проектирование фрикционной пары тормозного механизма с равномерным давлением	80
<i>Фомин Л. В.</i> О применении дробно-линейной модели ползучести и длительной прочности при моделировании длительного разрушения типовых элементов конструкций в активной среде	89
<i>Мионов Б. Г., Никитин А. В.</i> К вопросу об определении деформированного состояния анизотропной нелинейно-неоднородной трубы	97
<i>Соколова М. Ю., Астапов Ю. В.</i> Упругие волны в материале Генки-Мурнагана	108
<i>Немировский Ю. В.</i> Предельные состояния слоистых полигональных выпуклых пластин с прямым углом контура	121
<i>Адамов А. А., Келлер И. Э., Подкина Н. С.</i> Базовые эксперименты для идентификации кэп-модели пластичности гибкого графита	131
<i>Бегун А. С., Ковтанюк Л. В.</i> Деформирование вязкоупругого диска, вращающегося с ускорением	143
<i>Мирсалимов В. М.</i> О частичном закрытии щели переменной ширины с концевыми зонами пластических деформаций в массиве горной породы	152

<i>Микенина О. А., Ревуженко А. Ф.</i> Линейная теория упругости, свободная от постулата о диффеоморфизме: плоская деформация	162
<i>Вислогузова М. М., Гоцев Д. В., Ковалев А. В., Шашкин А. И.</i> Определение напряженного состояния упрочняющегося диска под действием температуры	168
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Монохроматические термоупругие волны в гemitропных средах	174
<i>Дудко О. В., Манцыбора А. А.</i> Численное исследование влияния материальных констант разномодульной упругой среды на решения плоских автотомельных задач ударного деформирования	180
<i>Минаева Н. В., Сабьнин Д. В., Шашкин А. И.</i> Исследование изгиба упруго подкрепленной балки с учетом неоднородности основания	190
<i>Абашкин Е. Е., Ткачева А. В.</i> Напряженно-деформируемое состояние в материале пластины, образованное в результате движения источника тепла	194
<i>Фирсов С. В.</i> Большие деформации цилиндрического тела вращающегося с ускорением	202
<i>Вильде М. В., Парфенова Я. А., Сурова М. Ю.</i> О пределах применимости уточненных теорий при описании изгибной краевой волны в пластине	206
<i>Жилин С. Г., Комаров О. Н., Богданова Н. А.</i> Механизмы формирования поверхности точной биметаллической отливки на технологических этапах ее получения	214
<i>Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.</i> Постановка задачи об упругодиффузионных колебаниях прямоугольной ортотропной пластины Кирхгофа	222
<i>Штука В. И.</i> Особенности моделирования интенсивного неизотермического нагружения цилиндрического слоя с предварительными деформациями, заполненного несжимаемым изотропным упруговязкопластическим материалом	229
<i>Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Буруруев А. М., Нестеров Т. К., Стадник Н. Э.</i> Об упругой разгрузке предварительно нагретого термоупругопластического тела обладающего тороидальной симметрией	238
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Продольно-поперечный изгиб многослойного стержня из физически нелинейного материала	247
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	254
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	257
СОДЕРЖАНИЕ	259

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2020. № 3 (45)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 29.12.2020. Выход в свет 29.12.2020.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 32,6.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38