

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 4(46)
октябрь – декабрь 2020 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Заместитель ответственного секретаря: С. В. Матвеев

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1184

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2020

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

Scientific journal

№ 4(46)

October – December 2020

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhurov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007

Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media “Roskomnadzor”
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue “Press of Russia”
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko

Executive Secretary: S. V. Tikhonov, E. V. Murashkin

Associate Secretary: S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, G. K. Mikhailov, Yu. V. Nemorovskii,
R. I. Nepershin, V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov,
A. N. Sporihin, A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1184

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

В. Г. Баженов, Е. В. Нагорных, Д. А. Самсонова

О ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

*Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород,
Россия*

Аннотация. Представлено сравнение результатов расчетов контактного взаимодействия и потери устойчивости упругопластических цилиндрических оболочек с упругим толстостенным заполнителем, выполненных на основе двух подходов: с позиций механики сплошных сред и теории оболочек типа Тимошенко с основанием Винклера. Оба подхода позволяют решать задачи деформирования и устойчивости непологих оболочек с учетом геометрических нелинейностей. Постановка с позиций механики сплошных сред позволяет аппроксимировать оболочку по толщине рядом слоев конечных элементов. Определяющие соотношения формулируются в переменных Лагранжа с использованием в качестве отсчетной неподвижной декартовой или цилиндрической системы координат. Кинематические соотношения записываются в метрике текущего состояния. Упругопластические свойства оболочек описываются теорией пластического течения с изотропным упрочнением. Уравнения движения следуют из баланса виртуальных мощностей работ. В первом подходе контактное взаимодействие оболочки и упругого тела моделируется условиями непроникания по нормали и свободного проскальзывания вдоль касательной. Во втором подходе контактное взаимодействие упругого заполнителя с оболочкой моделируется основанием Винклера. Оба подхода позволяют описать нелинейное докритическое деформирование оболочек вращения с упругим заполнителем, определить предельные (критические) нагрузки в широком диапазоне скоростей нагружения с учетом геометрических несовершенств формы. Оценивается область применимости гипотезы Винклера при контактном взаимодействии оболочки с упругой средой в зависимости от жесткости и толщины основания.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки, упругопластическая потеря устойчивости, упругий заполнитель, основание Винклера.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.88.029

УДК: 539.3

Математическая модель

Задача деформирования и упругопластического выпучивания оболочек вращения с толстостенным упругим наполнителем при комбинированных статических и динамических нагрузениях формулируется в плоской двумерной постановке в рамках механики сплошных сред [1]. Определяющая система уравнений записывается в декартовой системе эйлеровых координат. Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния. Упругопластические свойства материала оболочки описываются в рамках теории течения с нелинейным изотропным упрочнением. Материал наполнителя полагается линейно упругим. Вариационные уравнения движения оболочки и наполнителя следуют из уравнения баланса виртуальных мощностей. Контактное взаимодействие оболочки и деформируемого наполнителя моделируется исходя из условий непроникания по нормали и свободно-проскальзывания вдоль касательной. Условия непроникания выполняются только в активной фазе контактного взаимодействия, при нарушении контакта они заменяются условиями на свободной поверхности. В квазистатических задачах скорость нагружения принимается такой, чтобы роль сил инерции была пренебрежимо мала. Численное решение определяющей системы уравнений осуществляется по явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» второго порядка точности. Данный метод исследования позволяет описать нелинейное докритическое деформирование оболочек вращения с упругим наполнителем, определить предельные (критические) нагрузки в широком диапазоне скоростей нагружения с учетом геометрических несовершенств формы.

Результаты полномасштабного моделирования (в рамках механики сплошных сред) сравнивались с полученными ранее в упрощенной постановке, основанной на гипотезах теории оболочек типа Тимошенко и основания Винклера [2].

Пример численного моделирования

Решалась задача о потере устойчивости цилиндрических оболочек (сталь X18H10T [3]) с толстостенным упругим наполнителем при квазистатическом нагружении внешним давлением. Начальная толщина оболочки $h_0 = 1$ мм, отношение начального среднего радиуса к толщине оболочки $R_0/h_0 = 14.5$. Соотношение начальных толщин наполнителя и оболочки H_0/h_0 варьировалось от 4 до 13 с шагом 1. На внешней

© Баженов В. Г., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А., 2020

Баженов Валентин Георгиевич

e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия,

Нагорных Елена Владимировна

e-mail: pavlyonkova@mech.unn.ru, к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия,

Самсонова Дарья Анатольевна

e-mail: ozornikova.dasha@yandex.ru аспирант, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-08-00814-а)

Поступила 23.06.2020

поверхности оболочки задавалось равномерно распределенное давление, линейно возрастающее во времени: $p = p_0 t$, $p_0 = 50$ МПа/с. На внутренней поверхности заполнителя задавались нулевые нормальные перемещения. При численном моделировании полагалось, что напряженно-деформированное состояние вдоль образующей оболочки и заполнителя является однородным, то есть оболочка и заполнитель находятся в условиях плоского деформированного состояния. Краевые эффекты, вызванные граничными условиями на торцах оболочки, не рассматривались.

С учетом симметрии, расчетная область представляла собой половину поперечного сечения оболочки с толстостенным заполнителем. Начальная погибь оболочки задавалась в виде $\Delta R_0 = Ah_0 \cos n\beta$, где $0 \leq \beta \leq \pi$, A — относительная амплитуда начальной погиби.

Сначала моделировалось обжатие пустотелой оболочки. Начальная погибь оболочки задавалась с $A = 1 \cdot 10^{-5}$ и $n = 2$, т.к. ожидаемая форма поперечного сечения цилиндрической оболочки после потери устойчивости — эллипс [2]. Поперечное сечение оболочки покрывалось конечно-элементной сеткой с $N = 5$ элементами по толщине и $L = 60, 120, 160$ или 240 элементами вдоль половины окружности. На рис. 1 приведены расчетные зависимости относительного среднего прогиба $\hat{w} = \frac{w}{h_0}$ от внешнего давления p . Средний прогиб оболочки определялся по формуле $w = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^L w_i$,

где w_i — среднее арифметическое прогибов (нормальных перемещений) на внешней и внутренней поверхностях оболочки в узле с номером i . Цифрами 1–4 отмечены расчеты с $L = 60, 120, 160$ и 240 элементами вдоль половины окружности соответственно, цифрой 5 — расчеты по теории оболочек [2].

В расчетах момент потери устойчивости оболочки определяется резким ростом среднего прогиба \hat{w} , поперечное сечение оболочки на начальной стадии потери устойчивости приобретает эллиптическую форму. Зависимости среднего прогиба \hat{w} оболочки от внешнего давления p до момента потери устойчивости оболочек близки к линейным. Для вариантов расчета с $L = 120, 160$ и 240 разброс критических давлений p_* , при которых происходит потеря устойчивости, не превышает 1 %. Сетка с $L = 120$ элементами вдоль половины окружности цилиндра является достаточной для сходимости численного решения. Отличие критического давления p_* на этой сетке от расчета по оболочечной модели составляет 4 %.

Коэффициент постели k , упругие характеристики и толщина основания связаны соотношением

$$k = \frac{E}{H_0(1 - 2\nu^2)}, \quad (1)$$

где E и $\nu = 0.3$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона заполнителя.

Рассмотрим пример, в котором в оболочечной модели коэффициент постели $k = 5000$ МПа. В расчетах по модели сплошной среды для каждого варианта толщины заполнителя H_0 модуль Юнга E определялся из формулы (1). Начальная погибь задавалась с $A = 1 \cdot 10^{-5}$ и $n = 2$ и 3 , из двух расчетов выбирался вариант, в котором величина критической нагрузки p_* была минимальной. В расчетах с отношением толщин $H_0/h_0 = 4, 8$ потеря устойчивости оболочки происходит по третьей форме, с $H_0/h_0 = 9, 13$ — сначала по второй, затем рост одной выпучины прекращался, а вторая трансформировалась в складку. В местах выпучивания имеет место отрыв оболочки от заполнителя. В расчетах по оболочечной модели с основанием Винклера

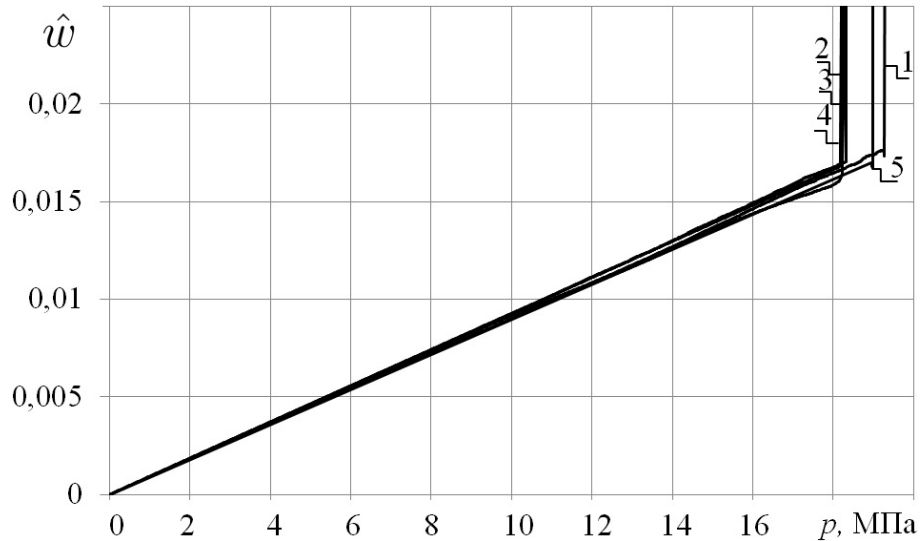


Рис. 1. Зависимости среднего прогиба от внешнего давления пустотелой оболочки

для данного коэффициента постели и относительной амплитуды начальной погиби потеря устойчивости происходила по третьей форме.

На рис. 2 приведено изменение относительного среднего прогиба \hat{w} в диапазоне внешнего давления p , близкого к критическому p_* . Толстой линией приведена кривая из расчета в упрощенной постановке [2], тонкими — расчеты по модели сплошной среды с различными толщинами заполнителя. Цифрами 1 и 2 отмечены кривые с $H_0/h_0 = 4$ и 13, соответственно. Величина критического давления p_* монотонно возрастает с увеличением толщины заполнителя H_0 . До момента потери устойчивости оболочек кривые практически совпадают. Разброс критических давлений для отношения толщин $H_0/h_0 = \overline{4,13}$ в расчетах не превышает 1%. Следует отметить, что время расчета одного варианта при использовании компьютера с процессором 4.39 ГГц в упрощенной постановке составляет около 10 минут, а в полной постановке — около 18 часов.

Заключение

Выполнено численное исследование контактного взаимодействия упругопластической цилиндрической оболочки с толстостенным упругим заполнителем при равномерном внешнем давлении в зависимости от толщины и жесткости заполнителя в двумерной постановке в рамках модели сплошной среды. Показано, что в исследованном диапазоне толщины заполнителя $H_0/h_0 = \overline{4,13}$ величина критического давления p_* изменяется незначительно (разброс не превышает 1%) и хорошо согласуется с результатом упрощенной оболочечной постановки с основанием Винклера. При этом формы потери устойчивости изменяются в зависимости от толщины и жесткости заполнителя. Наличие заполнителя приводит к более высоким формам потери устойчивости, и даже к локальным. Результаты исследования показывают, что модель Винклера в сочетании с моделью теории оболочек имеет широкую применимость в задачах контактного взаимодействия осесимметричных упругопластических оболочек с упругим заполнителем как при низких, так и при локальных формах потери устойчивости.

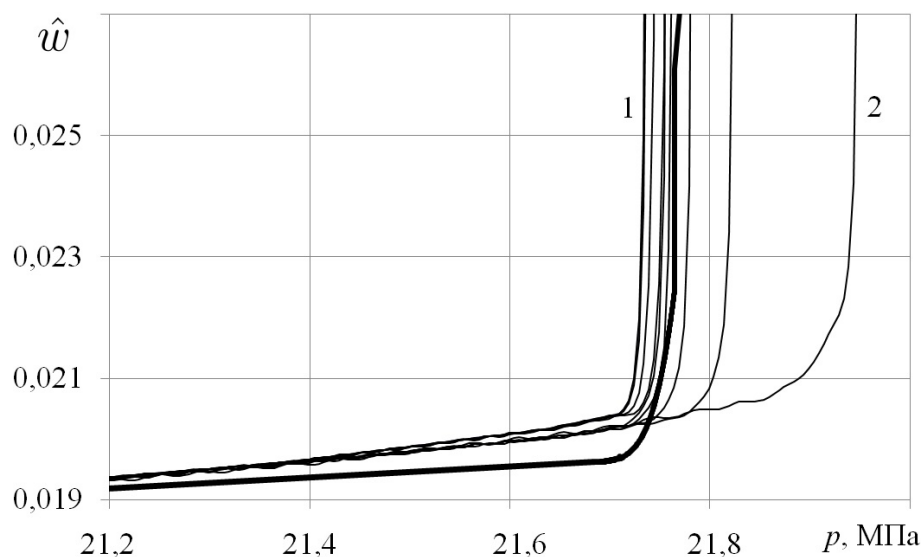


Рис. 2. Зависимости среднего прогиба от внешнего давления оболочки с толстостенным заполнителем

Величина погрешности зависит от градиента изменения контактного давления вдоль контактной поверхности, а при локальном воздействии она увеличивается. Преимуществом упрощенной постановки является существенное сокращение времени расчета по сравнению с полномасштабным моделированием.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пакет программ «Динамика-2» для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами / В. Г. Баженов, С. В. Зефирова, А. В. Кочетков [и др.] // Матем. моделирование. 2000. Т. 12(6). С. 67–72.
- [2] Samsonova D. A., Bazhenov V. G., Nagornykh V. E. Elastoplastic buckling of a cylindrical shell with initial geometric imperfections and an elastic filler at external pressure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 747. p. 012030.
- [3] Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении / В.Г. Баженов, М.С. Баранова, А.И. Кибец [и др.] // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.–матем. науки. 2010. Т. 152, № 4. С. 86–105.

V. G. Bazhenov, E. V. Nagornyykh, D. A. Samsonova

**ABOUT APPLICABILITY OF THE WINKLER MODEL FOR CONTACT
INTERACTION OF CYLINDRICAL ELASTOPLASTIC SHELLS WITH AN
ELASTIC FILLER AT EXTERNAL PRESSURE**

National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia

Abstract. Comparison of the results of calculations of contact interaction and loss of stability of elastoplastic cylindrical shells with an elastic thick-walled filler, performed on the basis of two approaches: from the standpoint of continuum mechanics and the theory of Timoshenko–type shells with a Winkler base is presented. Both approaches allow solving the problems of deformation and stability of non–sloping shells, taking into account geometric nonlinearities. The statement from the perspective of continuum mechanics makes it possible to approximate the shell in thickness by a number of layers of finite elements. The constitutive relations are formulated in Lagrange variables using a fixed Cartesian or cylindrical coordinate system as a reference. Kinematic relations are recorded in the metric of the current state. The elastic-plastic properties of shells are described by the theory of plastic flow with isotropic hardening. The equations of motion follow from the balance of the virtual powers of the jobs. In the first approach, the contact interaction of a shell and an elastic body is modeled by the conditions of nonpenetration along the normal and free slip along the tangent. In the second approach, the contact interaction of the elastic filler with the shell is modeled by the Winkler base. Both approaches allow one to describe the nonlinear subcritical deformation of shells of revolution with an elastic filler, to determine the limiting (critical) loads in a wide range of loading rates, taking into account the geometric imperfections of the shape. The area of applicability of the Winkler hypothesis is estimated for the contact interaction of a shell with an elastic medium, depending on the stiffness and thickness of the base.

Keywords: cylindrical shells, elastoplastic loss of stability, elastic filler, Winkler foundation.

REFERENCES

- [1] Software package «Dynamics - 2» for solving plane and axisymmetric nonlinear problems of nonstationary interaction of structures with compressible media / V. G. Bazhenov, S. V. Zefirov, A. V. Kochetkov et al. // Mat. modeling. 2000. Vol. 12 (6). P. 67–72.
- [2] Samsonova D. A., Bazhenov V. G., Nagornyykh V. E. Elastoplastic buckling of a cylindrical shell with initial geometric imperfections and an elastic filler at external pressure // IOP Conf. Ser. : Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 747. p. 012030.
- [3] Buckling of elastoplastic cylindrical and conical shells under axial shock loading / V. Bazhenov, M. Baranova, A. Kibets et al. // Scholar. app. Kazan. un-that. Ser. Phys. - mat. science. 2010. Vol. 152, no. 4. P. 86–105.

Bazhenov, Valentin Georgievich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Chief Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Research Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia,

Nagornyykh, Elena Vladimirovna, Nagornyykh, Elena Vladimirovna, PhD of Physical and Mathematical Sciences, Assoc. Prof., National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia,

Samsonova, Daria Anatolievna Postgraduate student, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia.

В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

О ТРЕХКОНСТАНТНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ В ПОЛЯРНЫХ КОНТИНУУМАХ

Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматривается важная с точки зрения прикладных задач проблема моделирования процессов деформирования материалов со сложным откликом на механические воздействия. Приводятся основные уравнения трехконстантной микроструктурной модели для случая одного полярного директора. Выписана точная форма упругого потенциала, из которой, следуя стандартной схеме, выводятся все необходимые уравнения и граничные условия.

Ключевые слова: микроструктура, микрополярность, директор, трехконстантный потенциал, уравнения равновесия, нематический жидкий кристалл

DOI: 10.37972/chgpu.2020.77.42.030

УДК: 539.374

1. Предварительные замечания. Современная механика континуума включает целый ряд нелинейных гиперболических теорий, в том числе учитывающих микроструктурные свойства. Микроструктурные особенности проявляют многие материалы и изделия современной промышленной практики. В последние годы производство и обработка метаматериалов привлекли значительное внимание инженерного

© Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2020

Ковалев Владимир Александрович

e-mail: vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 18-01-00844, № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2020

сообщества и исследователей. Эти искусственные метаматериалы демонстрируют аномальные физические свойства, которые обычно не встречаются в природе. Примеры включают отрицательный коэффициент Пуассона (ауксетические материалы) [1], отрицательное тепловое расширение, отрицательную электрическую проницаемость и магнитную проницаемость. Технологии аддитивного производства, в частности, селективное лазерное плавление [2] позволяет создавать в изделии из сплавов титана (функционально-градиентных материалов) локальные участки с заданными микроструктурой и свойствами [3]. Моделирование таких свойств материалов может проводиться разными способами. Особого упоминания здесь заслуживают газовая динамика, теория пластического течения Треска–Сен-Венана [4], теория разрушения [5, 6], связанные термоупругие среды (второго типа согласно общепринятой классификации) [7, 8]. Сочетание гиперболических теорий с принципом термомеханической ортогональности [9–12] приводит к принципиально новым моделям теории и механики сплошных сред, развитым в наших прежних публикациях [7, 8, 10–16].

Стандартные теории механики континуума часто оказываются непригодными для математического моделирования поведения новых современных материалов, обладающих микроструктурой (например, упругих метаматериалов или микрополярных материалов с управляемыми свойствами). Особенно это проявляется в тех случаях, когда характерный размер микроструктуры сравним с характерными изменениями линейных размеров микроэлементов, составляющих континуум. То же самое имеет место и в волновых процессах, когда длина волны оказывается существенно меньшей характерного размера микроструктуры континуума. Микроструктуры многих современных материалов имеют ярко выраженные анизотропные свойства, которые, в свою очередь, могут быть легко *модулируемыми*, что естественно сказывается на их физико-механических свойствах. Модулируемость (а иногда и управляемость) механических свойств подобных материалов достигается воздействием внешних полей и сил, не только механических и тепловых, но также и гравитационных (например, в случае модулирования свойств наращиваемых тел) и электромагнитных (например, магнитного поля, постоянного тока или прямоугольного электромагнитного импульса). Примерами таких материалов являются жидкие кристаллы [17] и молекулярно-биологические ткани. Необходимо отметить, что в некоторых случаях управление физико-механическими свойствами может быть реализовано с помощью термических полей. Настоящее исследование направлено на разработку систематической процедуры построения связанных микроструктурных континуальных теорий методами современной физической теории поля.

2. Уравнения трехконстантной теории континуума с одним полярным директором. Основы континуального подхода при моделировании микрополярных сред с одним директором можно найти в классической работе [18]. В статьях [19] и [20, 21] континуальный подход был применен к моделированию механического поведения нематических жидких кристаллов. В этом случае для описания подвижной микроструктурной ориентации молекул достаточно ввести единственный директор ϕ

и трактовать его как внутреннюю переменную состояния [7, 8, 16]. Уравнения движения для такой среды можно записать, например, в терминах относительных тензоров [7, 8]

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{X} + \rho \partial \cdot \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]} = -\mathbf{Y} + \mathfrak{S} \partial \cdot \boldsymbol{\phi}^{[-1]}. \quad (2)$$

Здесь ∇ — трехмерный оператор Гамильтона (абсолютный вектор); ρ — массовая плотность (абсолютный скаляр); \mathfrak{S} — микроинерция (microinertia, псевдоскаляр веса -2); $\boldsymbol{\phi}$ — полярный директор (псевдовектор веса $+1$); \mathbf{v} — вектор линейной скорости (абсолютный вектор); $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор силовых напряжений (force stress tensor, абсолютный тензор); $\boldsymbol{\mu}$ — асимметричный тензор моментных напряжений (couple stress tensor, псевдотензор веса -1); \mathbf{X} — вектор объемных сил (абсолютный вектор); \mathbf{Y} — объемные моменты (псевдовектор веса -1); ∂ — производная по времени, при неизменных пространственных координатах. Отметим, что в квадратных скобках над символом указан вес относительной тензорной величины. В основу определения относительного тензора может быть положена полилинейная скалярная функция векторных аргументов [22–25], представляющая собой не абсолютный, а относительный инвариант при преобразованиях координат. Такое определение позволяет легко переписать уравнения движения в терминах абсолютных тензоров. В дальнейшем будем рассматривать уравнения теории в терминах абсолютных тензоров, тем более, что переход к абсолютным тензорам осуществляется формальным умножением на степени ориентирующего псевдоскаляра.

Компоненты тензор силовых напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ можно принять в виде:

$$\sigma^{ji} = -pg^{ji} - g^{is} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\nabla_j \phi^k)} \nabla_s \phi^k, \quad (3)$$

где p — гидростатического давление (неопределенное скалярное поле), g^{ji} — компоненты метрического тензора, \mathcal{F} — объемная плотность упругого потенциала.

Функцию свободной энергии \mathcal{F} можно принять в форме трехконстантного потенциала в координатной форме

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(k_{11} - k_{22}) \nabla_m \phi^m \nabla_n \phi^n + \frac{1}{2} k_{22} \nabla_m \phi^n \nabla_n \phi^m + \frac{1}{2} (k_{33} - k_{22}) g_{sl} \nabla_m \phi^s \nabla_n \phi^l \phi^m \phi^n \quad (4)$$

в векторной форме

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} k_{11} (\nabla \cdot \boldsymbol{\phi})^2 + \frac{1}{2} k_{22} (\boldsymbol{\phi} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi}))^2 + \frac{1}{2} k_{33} (\boldsymbol{\phi} \times (\nabla \times \boldsymbol{\phi}))^2 \quad (5)$$

где k_{11} , k_{22} , k_{33} — упругие определяющие константы.

Объемные моменты \mathbf{Y} можно выписать в виде

$$\mathbf{Y} = \gamma \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\beta} \cdot (\nabla \otimes \boldsymbol{\phi}) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\phi}}. \quad (6)$$

Здесь γ и $\boldsymbol{\beta}$ — параметры внешних воздействующих полей.

Моментные напряжения, сопряженные директору $\boldsymbol{\phi}$, можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\phi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\nabla \otimes \boldsymbol{\phi})}. \quad (7)$$

Подставим выражения (4) и (7) в уравнения движения (1) и (2). В результате получим

$$\nabla \cdot \left(p\mathbf{I} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\nabla \otimes \phi)} \cdot \phi \otimes \nabla \right) = \mathbf{X} - \rho \partial \cdot \mathbf{v}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \left(\beta \otimes \phi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\nabla \otimes \phi)} \right) = - \left(\gamma \phi - \beta \cdot (\nabla \otimes \phi) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \right) + \mathfrak{S} \partial \cdot \phi. \quad (9)$$

Вычислим производные $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\nabla \otimes \phi)}$ и $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}$ в (8) и (9) в координатной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\nabla_i \phi^j)} &= (k_{11} - k_{22}) \nabla_s \phi^s \delta_j^i + k_{22} \nabla_j \phi^i + (k_{33} - k_{22}) g_{lj} \nabla_s \phi^i \phi^s \phi^l, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^i} &= (k_{33} - k_{22}) g_{sl} \nabla_i \phi^s \nabla_m \phi^l \phi^m. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив полученные выражения (10) в систему (1), (2) получим

$$\begin{aligned} g^{ji} \nabla_j p + g^{is} \nabla_j \left((k_{11} - k_{22}) \nabla_m \phi^m \delta_k^j + k_{22} \nabla_k \phi^j + (k_{33} - k_{22}) g_{lj} \nabla_m \phi^i \phi^m \phi^l \right) \nabla_s \phi^k &= \\ = X^i - \rho \partial \cdot v^i, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} g_{ik} \beta^j \nabla_j \phi^k + \nabla_j \left((k_{11} - k_{22}) \nabla_s \phi^s \delta_i^j + k_{22} \nabla_i \phi^j + (k_{33} - k_{22}) g_{li} \nabla_s \phi^j \phi^s \phi^l \right) &= \\ = -\gamma g_{ik} \phi^k + \beta_j g_{ik} \nabla_j \phi^k + (k_{33} - k_{22}) \phi^j \nabla_i \phi^k g_{kl} \nabla_j \phi^l + \mathfrak{S} g_{ik} \partial \cdot \phi^k. \end{aligned} \quad (12)$$

Раскрыв скобки окончательно получим

$$\begin{aligned} g^{ji} \nabla_j p + (k_{11} - k_{22}) g^{is} \nabla_j (\nabla_m \phi^m \nabla_s \phi^j) + k_{22} g^{is} \nabla_j (\nabla_k \phi^j \nabla_s \phi^k) + \\ + (k_{33} - k_{22}) g_{lj} g^{is} \nabla_j (\nabla_m \phi^i \nabla_m \phi^k \phi^s \phi^l) = X^i - \rho \partial \cdot v^i, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} g_{ik} \beta^j \nabla_j \phi^k + (k_{11} - k_{22}) \nabla_i \nabla_l \phi^l + k_{22} \nabla_j \nabla_i \phi^j + (k_{33} - k_{22}) g_{li} \nabla_j \nabla_s \phi^j \phi^s \phi^l = \\ = -\gamma g_{ik} \phi^k + \beta^j g_{ik} \nabla_j \phi^k + (k_{33} - k_{22}) g_{kl} \nabla_i \phi^k \nabla_j \phi^l \phi^j + \mathfrak{S} g_{ik} \partial \cdot \phi^k. \end{aligned} \quad (14)$$

Полученные уравнения (13) и (14) описывают поведение микрополярной среды с одним свободным директором.

Заключение.

- (1) В настоящей работе предложена процедура моделирования микрополярного континуума с одним свободным директором, представляющим собой псевдовектор веса +1. Подобные модели могут быть использованы в прикладных задачах, связанных с изучением процессов деформирования метаматериалов.
- (2) Получены уравнения движения в терминах относительных тензоров и осуществлен переход к формулировкам в абсолютных тензорах. Последнее выполняется с помощью степеней ориентирующего псевдоскаляра.
- (3) Указаны определяющие соотношения для тензора силовых и моментных напряжений.
- (4) В линейном приближении приведена точная форма упругой энергии в форме трехконстантного потенциала.
- (5) В итоговых формах уравнений не используются абсолютные дискриминантные тензоры (или псевдотензоры перестановок), характерные для микрополярных теорий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // *physica status solidi (b)*. 2013. Т. 250, № 10. С. 2038–2043. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pssb.201384233>.
- [2] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood [и др.] // *Advances in Manufacturing Engineering* / под ред. S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. С. 555–564.
- [3] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi [и др.] // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2020. Т. 51, № 6. С. 766–773. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mawe.202000019>.
- [4] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности // Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та. 2006. с. 340.
- [5] Radayev Yu. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics // *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A*. 1994. Т. 60, № 580. С. 2750–2758.
- [6] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part I. Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropic Damage State // *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*. Berlin, Boston, 1996. Т. 21, № 2. С. 129 – 152.
- [7] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. Физматлит, 2009. с. 156.
- [8] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Изд-во Саратовского ун-та, 2010. с. 328.
- [9] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Термомеханическая ортогональность в нелинейной термоупругости третьего типа (GNIII) // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2012. Т. 12, № 3. С. 72–82.
- [10] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Связанная термомеханическая ортогональность в нелинейных моделях термоупругости третьего типа // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2013. № 1 (30). С. 207–214.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On thermodynamics of wave processes of heat transport // *Mechanics for Materials and Technologies*. Springer, 2017. С. 363–376.
- [12] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В. О принципе термомеханической ортогональности в проблемах моделирования сложных сред и метаматериалов // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. № 1. С. 20–31.
- [13] Новацкий В. Теория упругости. М: Мир, 1975. с. 872.
- [14] Nowacki W. The Linear Theory of Micropolar Elasticity // *Micropolar Elasticity: Symposium Organized by the Department of Mechanics of Solids, June 1972* / под ред. W. Nowacki, W. Olszak. Vienna: Springer Vienna, 1974. С. 1–43.
- [15] Maugin G. A. Continuum mechanics through the twentieth century. Springer, 2013. с. 978.
- [16] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Springer, 2017. с. 314.
- [17] Чандрасекар С. Жидкие кристаллы. М: Мир, 1980. с. 344.
- [18] E. Cosserat, F. Cosserat. Th´eorie des corps d´eformables. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. с. 124.
- [19] Ericksen J. L. Conservation laws for liquid crystals // *Trans-Soc. Rheol.* 1961. Т. 5. С. 23–24.
- [20] Leslie F. M. Some constitutive equations for anisotropic fluids // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1966. Т. 19, № 3. С. 357–370.
- [21] Leslie F. M. Some constitutive equations for liquid crystals // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1968. Т. 28, № 4. С. 265–283.
- [22] Широков П. А. Тензорное исчисление. Ч. 1. Алгебра тензоров. М: ОНТИ, 1934. с. 464.
- [23] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948.
- [24] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков, 1965. М.: Наука, ГРФМЛ. с. 456.
- [25] Сокольников И. Тензорный анализ. М: Наука, 1971. с. 376.

V. A. Kovalev, E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ON THREE-CONSTANT POTENTIALS IN POLAR CONTINUA

Moscow City University of Management, Moscow, Russia
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with the problem of modeling the processes of deformation of materials with a complex response to mechanical stress. The governing equations of the three-constant microstructural model for the case of one polar director are presented. The exact form of the Helmholtz free energy is written out. The governing equations and boundary conditions are derived by the standard scheme.

Keywords: microstructure, micropolarity, director, three-constant potential, equilibrium equations, nematic liquid crystal

REFERENCES

- [1] Goldstein R. V., Górodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // *physica status solidi (b)*. 2013. T. 250, № 10. С. 2038–2043.
- [2] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood [и др.] // *Advances in Manufacturing Engineering* / под ред. S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. С. 555–564.
- [3] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi [и др.] // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2020. T. 51, № 6. С. 766–773.
- [4] Radayev Y. N. Three-Dimensional Problem of the Theory of the Perfect Plasticity // Samara: Sam. St. Univ. 2006. с. 340.
- [5] Radayev Yu. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics // *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A*. 1994. T. 60, № 580. С. 2750–2758.
- [6] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part I. Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropic Damage State // *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*. Berlin, Boston, 1996. T. 21, № 2. С. 129 – 152.
- [7] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Elements of the Classical Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants. Fizmatlit, 2009.
- [8] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics. Saratov Univ. Press, 2010.
- [9] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Thermomechanical orthogonality in nonlinear type-III thermoelasticity (GNIII) // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2012. T. 12, № 3. С. 72–82.
- [10] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Coupled thermodynamic orthogonality in non-linear models of type-III thermoelasticity // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*. 2013. № 1 (30). С. 207–214.

Kovalev Vladimir Alexandrovich

e-mail: vlad_koval@mail.ru, Dr. Sci., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,

101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,

101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

-
- [11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On thermodynamics of wave processes of heat transport // *Mechanics for Materials and Technologies*. Springer, 2017. С. 363–376.
- [12] Kovalev V. A., Murashkin E. V. On the principle of thermomechanical orthogonality in the problems of modeling complex media and metamaterials // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. Yakivkeva Ser: Mekh. Pred. Sost.* 2019. № 1. С. 20–31.
- [13] Nowacki W. *Elasticity Theory*. M: Mir, 1975.
- [14] Nowacki W. *The Linear Theory of Micropolar Elasticity* // *Micropolar Elasticity: Symposium Organized by the Department of Mechanics of Solids, June 1972 / под ред. W. Nowacki, W. Olszak*. Vienna: Springer Vienna, 1974. С. 1–43.
- [15] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Springer, 2017. с. 314.
- [16] Maugin G. A. *Continuum mechanics through the twentieth century*. Springer, 2013. с. 978.
- [17] Chandrasekhar S. *Liquid Crystals*. M: Mir, 1980.
- [18] E. Cosserat, F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. с. 124.
- [19] Ericksen J. L. Conservation laws for liquid crystals // *Trans-Soc. Rheol.* 1961. Т. 5. С. 23–24.
- [20] Leslie F. M. Some constitutive equations for anisotropic fluids // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1966. Т. 19, № 3. С. 357–370.
- [21] Leslie F. M. Some constitutive equations for liquid crystals // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1968. Т. 28, № 4. С. 265–283.
- [22] Shirokov P. A. *Tensor calculus. P. 1. Tensor Algebra*. M: ONTI, 1934. с. 464.
- [23] Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants* // M., L.: GITTL. 1948. с. 408.
- [24] Schouten J. A. *Tensor analysis for physicists*. Oxford, Clarendon Press, 1965. с. 456.
- [25] Sokolnikoff I. S. *Tensor analysis*. M: Nauka, 1971. с. 376.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 18-01-00844, 19-51-60001, 20-01-00666.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ГЕМИТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы применения относительных тензоров при моделировании гемитропных микрополярных сред. Вводится определяющая форма микрополярного упругого потенциала. С помощью принципа виртуальной работы получаются определяющие уравнения для силовых и моментных характеристик микрополярного континуума в терминах относительных тензоров. Приводятся уравнения движения микрополярного континуума в терминах относительных тензоров. Выводится финальная форма динамических уравнений для перемещений и микровращений в случае полуизотропной (гемитропной) симметрии.

Ключевые слова: микроструктура, микрополярность, директор, относительный тензор, ориентирующий псевдоскаляр, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031

УДК: 539.374

1. Вводные замечания. Математическое моделирование процессов деформирования метаматериалов актуальная задача, стоящая перед современными исследователями. Адекватность математических моделей современной континуальной механики обеспечивается совместным применением достижений современной геометрии

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2020

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 18-01-00844, № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2020

(векторный анализ [1–4] и тензорное исчисление [5–8]) и теоретической физики (теории поля [9–11]). Применение достижений современной геометрии не только гарантирует адекватность математических моделей, но и позволяет получить наиболее простую запись систем дифференциальных уравнений и определяющих форм потенциалов (свободной энергии Гельмгольца, упругой энергии) с аргументами, являющимися алгебраические инвариантами [12] физических полей.

Современные метаматериалы обладают экзотическими свойствами: отрицательный коэффициент Пуассона (ауксетические материалы [13]), отрицательное тепловое расширение, отрицательная электрическая проницаемость и магнитная проницаемость. Многие метаматериалы являются композитными материалами, но с некоторыми отличиями. Метаматериал демонстрирует характеристики отклика, которые либо не наблюдаются, либо усиливаются по сравнению с индивидуальными откликами составляющих его материалов. Композитные 3D-материалы используют для изготовления легких компонентов и деталей конструкций во многих отраслях современной промышленности [14, 15]. Композиты производят комбинированием материалов с предпочтительными физико-механическими свойствами и последующем синтезом нового материала из выбранных составляющих, обладающих заданными свойствами. Например, титановые сплавы модифицируются добавлением к ним других материалов для создания титановых композитов. Свойства полученного материала оказываются приемлемыми для большинства приложений, где необходима низкая плотность и хорошая коррозионная стойкость (например, в компонентах газотурбинных двигателей, высокопроизводительных автомобильных деталях, конструктивных элементах самолетов, морской технике, аэрокосмических компонентах, медицинских устройствах, биомедицинских приложениях (имплантаты и протезы), спортивном оборудовании). Композиты из титана часто используются для поверхностной модификации с целью улучшения определенных механических свойств. Эффективное производство этих композитных материалов — серьезная проблема, с которой сталкивается современная технологическая практика. Появление технологии аддитивного производства упростило производство композитных 3D-материалов. Лазерное напыление металлических сплавов открывает прекрасные возможности для производства изделий из титана и его композитов [15–17]. Лазерное напыление, кроме того, позволяет изготавливать геометрически сложные детали, которые невозможно эффективно изготовить с использованием классических подходов. Производимые таким способом 3D-изделия и 3D-материалы обладают сложными термомеханическими свойствами, в том числе, наличием микроструктуры. Поэтому, при математическом моделировании процессов деформирования и формообразования таких материалов необходимо отказываться от классических моделей механики сплошных сред. При построении таких моделей важно соблюдать термодинамическую и геометрическую непротиворечивость получаемых систем дифференциальных уравнений. В таких случаях полезными оказываются микрополярные модели континуума.

Микрополярное твердое тело, которое изотропно относительно вращений координат, но не относительно отражений, называется полуизотропным (гемитропным). Материалы могут проявлять полуизотропность в атомном масштабе (кварц, сахар, биологические молекулы), а также в более крупном масштабе (кости, пористые материалы, композиты, содержащие волокна или включения) [18–20]. Гемитропные среды

из-за отсутствия геометрической симметрии между объектом и его зеркальным отображением известны в оптике как оптически активные материалы. Они характеризуются присущей им лево- или правоориентированностью на оптических частотах из-за естественной спиральной структуры и, следовательно, не могут совпадать с их зеркальным отражением. Геометрическим объектом реагирующим на отражение является относительный тензор (псевдотензор). Математический аппарат относительных тензоров достаточно хорошо развит, о чем свидетельствуют многочисленные монографии по тензорному исчислению [6–9, 12, 21–23]. Физические поля гемитропного микрополярного континуума в рамках математической модели представляются относительными тензорами. Тем не менее, формализм относительных тензоров очень редко применяется в исследованиях по микрополярным средам. Заметим, что основной целью настоящей статьи выступает вывод основных уравнений микрополярной теории упругости в терминах относительных тензоров (relative tensors) или псевдотензоров (pseudotensors), для более глубокого понимания физической и геометрической природы исследуемых физических объектов.

2. Гемитропное микрополярное тело. Применим формализм относительных тензоров [7, 12] к модели линейного микрополярного тела. Для микрополярного континуума с одним директором упругий потенциал¹ \mathcal{U} с соответствующими аргументами можно принять в форме [24, 25]

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}{}^i, \kappa_i), \quad (1)$$

где $\epsilon_{(ij)}$ — тензор малых деформаций (абсолютный тензор), $\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}$ — симметричная часть тензора изгиба—кручения (относительный тензор веса +1), $\overset{[+1]}{\varphi}{}^i$ — вектор относительного микровращения (относительный вектор веса +1), κ_i — сопутствующий вектор изгиба—кручения (абсолютный вектор), сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках отмечен его вес.

Первая вариация \mathcal{U} вычисляется согласно

$$\delta\mathcal{U} = \sigma^{(ij)}\delta\epsilon_{(ij)} + \overset{[-1]}{\mu}{}_{(ij)}\delta\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)} + 2\overset{[-1]}{\tau}{}_i\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^i + 2\mu^i\delta\kappa_i. \quad (2)$$

Здесь σ^{ik} — тензор силовых напряжений (абсолютный тензор второго ранга, $\overset{[-1]}{\mu}{}_{i\cdot}$ — тензор моментных напряжений (относительный тензор веса –1), $\overset{[-1]}{\tau}{}_i$ — ассоциированный вектор силовых напряжений (относительный вектор веса –1), μ^i — ассоциированный вектор моментных напряжений (абсолютный вектор).

Принцип виртуальной работы², при моделировании механического отклика микрополярных сред, примем в виде

$$\int \delta\mathcal{U} dV = \int \left[X^j \delta u_j + \overset{[-1]}{Y}_j \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^j \right] dV + \oint_{\partial} \left[t^j \delta u_j + \overset{[-1]}{m}_j \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^j \right] dS. \quad (3)$$

Здесь dV — инвариантный элемент объема, X^k — объемные силы, Y_k — объемные моменты (относительный тензор веса –1), t^j — вектор силовых напряжений (force

¹Упругий потенциал \mathcal{U} является псевдоскаляром веса 0.

²Принцип виртуальной работы является следствием более фундаментального принципа виртуальных перемещений [24].

traction vector), ${}^{[-1]}m_j$ — вектор моментных напряжений (couple traction vector), связанные с тензором силовых напряжений σ^{ik} и тензором моментных напряжений ${}^{[-1]}_{i,k}\mu$ согласно соотношениям Коши

$$t^k = n_i \sigma^{ik}, \quad (4)$$

$${}^{[-1]}m_k = n_i {}^{[-1]}_{i,k}\mu. \quad (5)$$

Следствием вариационного принципа (3) являются уравнения движения микрополярной среды:

$$\nabla_i \sigma^{ik} = -X^k + \rho \partial \cdot v^k, \quad (6)$$

$$\nabla_i {}^{[-1]}_{i,k}\mu - 2 {}^{[-1]}\tau_k = -Y_k + \mathfrak{S} \partial \cdot \phi^k, \quad (7)$$

где ∇_i — ковариантная производная (набла Гамильтона), ρ — массовая плотность, v^k — компоненты вектора скорости, ${}^{[-2]}\mathfrak{S}$ — коэффициент микроинерции, ${}^{[+1]}_k\phi$ вектор микровращений.

В случае континуума, проявляющего полуизотропные свойства, т.е. инвариантность относительно вращений и не инвариантность относительно отражений и инверсии, потенциал \mathcal{U} можно представить в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & G\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + G \frac{[-1][-1]}{L L} c_3 g_{is} g_{lm} \kappa^{[+1](is)} \kappa^{[+1](lm)} + \\ & + G g^{is} g^{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(sm)} + G \frac{[-1][-1]}{L L} g_{is} g_{lm} \kappa^{[+1](il)} \kappa^{[+1](sm)} + 2G \frac{[-2]}{c_1} g_{is} \delta^{[+1]}_i \delta^{[+1]}_s + \\ & + G \frac{[-1][-1][+2]}{L L} c_2 g^{is} \kappa_i \kappa_s + G \frac{[-1]}{L} c_4 g^{is} g_{lm} \epsilon_{(is)} \kappa^{[+1](lm)} + \\ & + G \frac{[-1]}{L} c_5 \epsilon_{(is)} \kappa^{[+1](is)} + G \frac{[-1]}{L} c_6 \kappa_i \delta^{[+1]}_i, \quad (8) \end{aligned}$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная длина микрополярной теории; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности псевдоскаляры.

Тогда определяющие уравнения гемитропной микрополярной среды получаются в форме:

$$\begin{aligned} \sigma^{(is)} &= 2G \left(\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm} \right) \epsilon_{(lm)} + G \frac{[-1]}{L} (c_4 g^{is} g_{lm} \kappa^{[+1](lm)} + c_5 \kappa^{[+1](is)}), \\ {}^{[-1]}_{\mu(is)} &= 2G \frac{[-1][-1]}{L L} (c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \kappa^{[+1](lm)} + G \frac{[-1]}{L} (c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}), \\ {}^{[-1]}\tau_i &= 2G \frac{[-2]}{c_1} g_{is} \delta^{[+1]}_s + \frac{1}{2} G \frac{[-1]}{L} c_6 \kappa_i, \\ \mu^i &= G \frac{[-1][-1][+2]}{L L} c_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} G \frac{[-1]}{L} c_6 \delta^{[+1]}_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая свойство степеней фундаментального ориентирующего скаляра³ e

$$\nabla_i e^m = 0 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и дополнительно вводя обозначения

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6, \quad f^i = \frac{X^i}{\rho}, \quad l_i = \frac{Y_i^{[-1]}}{\rho}, \quad (10)$$

получим уравнения движения для гемитропного микрополярного континуума в терминах перемещений и микровращений

$$\begin{aligned} G[(1 + e^{2[-2]c_1})\nabla^s \nabla_s u^i + (1 - e^{2[-2]c_1} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i \nabla_k u^k \pm 2e^{[-2]c_1} \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l + \\ + L^{[-1]} c'_4 \nabla^i \nabla_k \phi^k + L^{[-1]} c'_5 \nabla^k \nabla_k \phi^i] = -\rho(f^i - \partial..u^i), \\ G L^{[-1]} L^{[-1]} [(1 + \frac{1}{e^2} c_2^{[+2]})\nabla^s \nabla_s \phi_i + (1 - \frac{1}{e^2} c_2^{[+2]} + 2c_3)\nabla_i \nabla_k \phi^k + L^{[-1]} c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + \\ + L^{[-1]} c'_5 \nabla^k \nabla_k u_i + L^{[-1]} c'_6 \epsilon_{isl} \nabla^s \phi^l] - 2e G^{[-2]c_1} (2\phi_i - \\ - \epsilon^{pqn} g_{ip} g_{kq} g_{ln} g^{ks} \nabla_s u^l) = -\rho(l_i - \mathfrak{I} \partial.. \phi_i). \end{aligned} \quad (11)$$

3. Заключительные замечания. Применение формализма относительных тензоров и алгебраических инвариантов в записях физических законов и дифференциальных уравнений позволяет более аккуратно изучать исследуемые физические поля. Отметим также, что достаточно простой способ преобразования относительных тензоров в абсолютные позволяет легко переходить от записи дифференциальных уравнений микрополярных теорий в терминах относительных тензоров к уравнениям в терминах истинных тензоров.

Для систем координат, удовлетворяющих ограничению

$$|e| = 1, \quad (12)$$

т.е.

$$e = \text{sgn } e, \quad (13)$$

³Ориентирующий трехмерное пространство псевдоскаляр веса +1 определяется соотношением

$$e = e^{[+1]} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3),$$

\mathbf{e}_k ($k = 1, 2, 3$) — локальные базисные векторы.

дифференциальные уравнения (11), в случае левоориентированной декартовой системе координат, преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 & G[(1 + \overset{[-2]}{c_1})\partial_s\partial_s u_i + (1 - \overset{[-2]}{c_1} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i\partial_k u_k - 2\overset{[-2]}{c_1}\epsilon_{ikl}\partial_k \overset{[+1]}{\phi_l} + \\
 & \quad + L \overset{[-1]}{c'_4}\partial_i\partial_k \overset{[+1]}{\phi_k} + L \overset{[-1]}{c'_5}\partial_k\partial_k \overset{[+1]}{\phi_i}] = -\rho(f_i - \partial_s u_i), \\
 & G L \overset{[-1]}{L} [(1 + \overset{[+2]}{c_2})\partial_s\partial_s \overset{[+1]}{\phi_i} + (1 - \overset{[+2]}{c_2} + 2c_3)\partial_i\partial_k \overset{[+1]}{\phi_k} + L^{-1}\overset{[-1]}{c'_4}\partial_i\partial_k u_k + \\
 & \quad + L^{-1}\overset{[-1]}{c'_5}\partial_k\partial_k u_i + L^{-1}\overset{[-1]}{c'_6}\epsilon_{isl}\partial_s \overset{[+1]}{\phi_l}] - 2G \overset{[-2]}{c_1}(2 \overset{[+1]}{\phi_i} - \\
 & \quad - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) = -\rho(\overset{[-1]}{l_i} - \overset{[-2]}{\mathcal{J}} \overset{[+1]}{\partial_s \phi_i}).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Встречающаяся в литературе по микрополярым континуумам характерная длина L считается абсолютным скаляром. В представленном исследовании она оказывается псевдоскаляром веса -1 , т.е. чувствительна к преобразованиям полуизотропной группы, в то время как модуль длины $|L|$ остается инвариантным относительно таких преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gibbs J. W. Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs. Yale University Press, 1901. 460 p.
- [2] Weatherburn C. E. Elementary vector analysis. London: Bell and Sons, 1921. xxvi + 184 p.
- [3] Weatherburn C. E. Advanced Vector Analysis. London: Bell and Sons, 1924. 222 p.
- [4] Кочин И. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва: Изд-во Акад. Наук, 1951. 427 с.
- [5] Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper: Translation, Comments, and Additional Material / G. Ricci-Curbastro, R. Hermann, M. M. G. Ricci et al. Brookline: Math Science Press, 1975. Vol. 2. 260 p.
- [6] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.
- [7] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.
- [8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [9] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [10] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. Физматлит, 2009. 156 с.
- [11] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
- [12] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.
- [13] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // physica status solidi (b). 2013. Vol. 250, no. 10. P. 2038–2043.
- [14] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. Vol. 51, no. 6. P. 766–773.
- [15] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu/Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // Advances in Manufacturing Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 503–513.
- [16] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood et al. // Advances in Manufacturing Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 555–564.

-
- [17] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood, S. Akinlabi, M. Shatalov et al. // Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. 2019. Dec. Vol. 30. P. 51–58. URL: <https://www.gup.ugal.ro/ugaljournals/index.php/awet/article/view/2639>.
- [18] Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43, no. 7. P. 1579–1589.
- [19] Mackay T. G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review // SPIE Reviews. 2010. Vol. 1, no. 1. P. 1–29.
- [20] Tomar S. K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37, no. 22. P. 9409 – 9418.
- [21] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [22] Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностранной литературы, 1948. 139 с.
- [23] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007.
- [24] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [25] Radayev Y. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2019. Vol. 23. P. 464–474. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1689>.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ON THE THEORY OF LINEAR MICROPOLAR HEMITROPIC MEDIA

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with the application of relative tensors to modeling hemitropic micropolar media. The latter is of crucial importance for biomechanics, mechanics of growing solids and mechanics of metamaterials. The constitutive form of the micropolar elastic potential is discussed. The basic equations of micropolar continuum are derived due to the principle of virtual displacements. Differential equations of the micropolar continuum are given in terms of relative tensors. The final form of dynamic equations for displacements and microrotations in the case of semi-isotropic (hemitropic) micropolar continuum is derived and discussed.

Keywords: microstructure, micropolarity, director, relative tensor, orienting pseudoscalar, micropolar hemitropic continuum

REFERENCES

- [1] Gibbs J. W. Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs. Yale University Press, 1901. 460 p.
- [2] Weatherburn C. E. Advanced Vector Analysis. London: Bell and Sons, 1924. 222 p.
- [3] Weatherburn C. E. Elementary vector analysis. London: Bell and Sons, 1921. xxvi + 184 p.
- [4] E. K. N. Vector calculus and fundamentals of tensor calculus. Moscow: Izd-vo Akad. Nauk, 1951. 427 p.
- [5] Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper: Translation, Comments, and Additional Material / G. Ricci-Curbastro, R. Hermann, M. M. G. Ricci et al. Brookline: Math Science Press, 1975. Vol. 2. 260 p.
- [6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
- [7] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
- [8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [9] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [10] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants. FIZMATLIT, 2009. 156 p.
- [11] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics. Saratov University Press, 2010. 328 p.
- [12] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
- [13] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovento D. S. Classification of cubic auxetics // physica status solidi (b). 2013. Vol. 250, no. 10. P. 2038–2043.
- [14] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. Vol. 51, no. 6. P. 766–773.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [15] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu/Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 503–513.
- [16] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood et al. // *Advances in Manufacturing Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 555–564.
- [17] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood, S. Akinlabi, M. Shatalov et al. // *Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology*. 2019. Dec. Vol. 30. P. 51–58. URL: <https://www.gup.ugal.ro/ugaljournals/index.php/awet/article/view/2639>.
- [18] Mackay T. G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review // *SPIE Reviews*. 2010. Vol. 1, no. 1. P. 1–29.
- [19] Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2001. Vol. 43, no. 7. P. 1579–1589.
- [20] Tomar S. K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // *Applied Mathematical Modelling*. 2013. Vol. 37, no. 22. P. 9409 – 9418.
- [21] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [22] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [23] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 p.
- [24] Radayev Y. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2019. Vol. 23. P. 464–474. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1689>.
- [25] Radayev Y. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2018. Vol. 22. P. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 18-01-00844, 19-51-60001, 20-01-00666.

Е. Е. Абашкин, Н. А. Богданова, С. Г. Жилин, О. Н. Комаров, В. В. Предеин

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЭТАПОВ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОТЛИВКИ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ

*Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре,
Россия*

Аннотация. Изготовление биметаллических деталей позволяет реализовать в них комплекс эксплуатационных и механических характеристик, присущих железоуглеродистым и цветным сплавам. Реализация процесса разрабатываемой технологии формирования биметаллического литья с жестким стальным каркасом и поверхностью из цветных сплавов, обладающих большими, чем материал каркаса пластичностью и электропроводностью, возможна за счет применения модернизированного метода литья по выплавляемым моделям. Изменению подвергается стадия изготовления поверхности выплавляемой модели отливки, которая формируется запрессовкой воскообразного порошка в зазор между пресс-формой и стальным каркасом, что позволяет повысить размерно-геометрическую точность литья за счет устранения теплофизических дефектов. Проблемой в реализации такого подхода является упругий отклик материала. В работе решается задача определения технологических параметров формирования воскообразной поверхности выплавляемой модели биметаллической отливки.

Ключевые слова: биметаллическая отливка, моделирование процесса, деформация, напряжение, экструзия, воскообразные материалы, температурные дефекты, выплавляемая модель, прессование, размерно-геометрическая точность

DOI: 10.37972/chgpu.2020.14.82.032

УДК: 621.74.045 / 046

Введение

Значительное количество технологических операций, сопровождающий процессы получения заготовок деталей сложной пространственной конфигурации определили необходимость разработки и совершенствования методов литья, позволяющих минимизировать припуски на механическую обработку. Наиболее востребованным способом формирования литых заготовок является метод литья по выплавляемым моделям, традиционная последовательность операций в котором сводится к изготовлению блоков с выплавляемыми моделями и элементами литниково-питающей системы, послойному формированию на таких блоках и сушке керамических оболочковых форм, выплавлению материала блоков из форм, прокаливанию и заливке их расплавом металла. Из производственной практики известно, что тепловые процессы, сопровождающие технологические этапы получения таких заготовок, в значительной степени определяют появление дефектов в виде усадки модельной массы, образования трещин в керамике при выплавлении из нее модельного материала. Повышению качества поверхности выплавляемых моделей посвящено значительное количество работ российских и зарубежных исследователей, которые преимущественно сводятся к изменению свойств модельных материалов путем внесения в их состав наполнителей [1–3]. Однако изменение свойств модельных материалов не позволяет в полной мере устранить образование тепловых дефектов. Решение проблемы видится не только в формировании пористости в структуре выплавляемых моделей, позволяющей повысить трещиностойкость керамики на этапе удаления из нее модельной массы [4], но и в получении качественной поверхности, не имеющей усадочных дефектов. В этой связи перспективным представляется получение 6-12 %-ой пористости в структуре выплавляемой модели, формируемой прессованием порошков воскообразных составов, направленное на устранение тепловых дефектов в полном объеме [5]. При формировании выплавляемых моделей несложной конфигурации пористость в их структуре распределяется равномерно. Однако при формировании прессовок с протяженными

© Абашкин Е. Е., Богданова Н. А., Жилин С. Г., Комаров О. Н., Предеин В. В., 2020

Абашкин Евгений Евгеньевич

e-mail: abashkine@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Богданова Нина Анатольевна

e-mail: joyful289@inbox.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Жилин Сергей Геннадьевич

e-mail: sergeyzhilin1@rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Комаров Олег Николаевич

e-mail: olegnikolaevitch@rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Предеин Валерий Викторович

e-mail: predein3@mail.ru, научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН

Поступила 20.03.2019

элементами или участками переменной толщины возникает неоднородность распределения свойств, приводящая к нарушению геометрии. Так, например, в ходе разработки процесса получения биметаллических отливок, определено, что формирование поверхности из воскообразных материалов на стальном каркасе, значения плотности различных участков модели могут отличаться. На рис.1 представлена схема последовательности получения биметаллической отливки, отличающаяся от традиционной схемы литья по выплавляемым моделям наличием этапа формирования поверхностного слоя выплавляемой модели путем запрессовки воскообразного модельного состава прессующими элементами в зазор между внутренней поверхностью пресс-формы и стальным каркасом [6]. Полученный блок затем облицовывают керамикой, сушат, выплавляют воскообразные компоненты, прокаливают и в зазор, образовавшийся между стальным каркасом и внутренней поверхностью керамической оболочки, подают расплав цветного металла с температурой ниже температуры плавления материала каркаса.

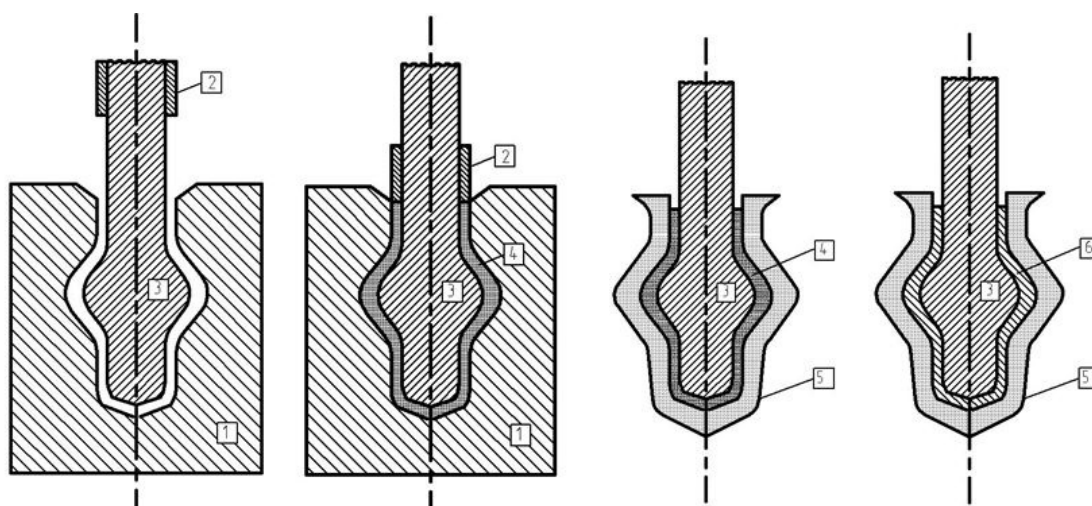


Рис. 1. Схема последовательности формирования биметаллической отливки: 1 – пресс-форма; 2 – подвижный пресс-пуансон; 3 – стальной каркас; 4 – воскообразный напрессованный слой; 5 – керамическая оболочка; 6 – биметаллическая отливка в оболочковой форме.

В ходе серии предварительных исследований установлено, что получение пористой структуры выплавляемых моделей достигаемой прессованием порошковых воскообразных композиций, представляется предпочтительным перед традиционными методами формирования выплавляемых моделей заливкой (либо запрессовкой) жидкой модельной массы в пресс-формы, так как позволяет повысить трещиностойкость оболочковых форм и размерную точность литья [7]. При этом диапазон пористости для различных модельных составов обусловлен их свойствами и определяется двумя факторами: коэффициентом термического расширения [8] и допустимой эксплуатационной прочностью [9]. Удовлетворительная эксплуатационная прочность выплавляемых моделей, получаемых прессованием порошков воскообразных материалов, на практике достигается в диапазоне значений пористости от 0 до 14 %. Последнее означает, например, что значение плотности пористой модели на 14 % ниже плотности характерной для состояния свободной заливки материала, из которого она сформирована.

В состоянии свободной заливки в материале присутствует рассредоточенный воздух, который может быть удален в результате внешнего механического воздействия. Так, например, при изостатическом уплотнении плотность парафина марки Т1 удалось увеличить с 0,86 г/см³ до 0,915 кг/м³ [10]. В результате роста нагрузки до определенного момента, соответствующего началу пластификации материала при мундштучной экструзии через диффузор, плотность формируемого протяженного изделия превышает плотность материала, получаемую при свободной заливке. Вследствие такого переуплотнения неизбежна разгрузка напряжения в формируемом теле, выражающееся в упругом отклике материала и, в конечном итоге, искажении геометрии прессовки. Искажения геометрии прессовки возникают также в условиях, когда отношение площади диффузора к площади пресс-пуансона значительное, а скорость перемещения пресс-пуансона и, соответственно, скорости экструзии, высокие, то возникают условия роста температуры в материале, поступающем в диффузор, что приводит к оплавлению периферийных участков прессовки и появлению тепловых дефектов в виде усадки. В этой связи рациональный выбор условий, при которых достигаются прогнозируемые значения размеров прессовки, сводится к балансу между скоростью экструзии и отношением площади диффузора к площади пресс-пуансона. В нашем случае скорость перемещения пресс-пуансона предварительно определена экспериментально и, как отмечено выше, составила 0,5 мм/с. Таким образом, для нашего случая остается определить требуемый диапазон соотношений площадей диффузора и пресс-пуансона, при которых плотность длинномерной прессовки, имитирующей формирование поверхности модели биметаллической отливки, будет ниже плотности материала, характерной для литого состояния.

Цели и задачи

Целью работы является экспериментальное моделирование технологических этапов процесса формирования тонкостенной поверхности вылавляемой модели биметаллической отливки высокой размерно-геометрической точности посредством определения условий мундштучного выдавливания (соотношения площадей внутреннего поперечного сечения цилиндрической пресс-матрицы и диффузора мундштука, силовых параметров выдавливания), при которых достигаются требуемые значения плотности протяженной прессовки из воскообразных материалов. В рамках представленной цели исследования решались следующие задачи: - определение влияния соотношения площадей внутреннего поперечного сечения пресс-матрицы и диффузора мундштука на силовые параметры процесса выдавливания; - исследование влияния соотношения площадей внутреннего поперечного сечения пресс-матрицы и диффузора мундштука на плотность протяженной цилиндрической прессовки из воскообразных модельных материалов.

Методы и подходы.

В качестве модельных использованы одно- и двухкомпонентные воскообразные материалы: парафин марки Т1 (ГОСТ 2368389. Парафины нефтяные твердые. Технические условия) и парафиностеариновый состав марки ПС 50/50, полученный сплавлением парафина марки Т1 со стеарином (ГОСТ 6484-96. Кислота стеариновая техническая. Технические условия). Таким образом, в эксперименте использованы Т1, как основной компонент состава ПС 50/50, так и сам состав, свойства которых позволяют их отнести к первой классификационной группе согласно [11, с.119]. Указанные материалы поставлены в виде пластин, полученных свободной заливкой в изложницы

размерами 150x400x500 мм. Воскообразный материал, получаемый свободной заливкой, имеет мелкодисперсную рассредоточенную пористость, с учетом которой плотность Т1 составляет 0,86 г/см³, а плотность ПС 50/50 0,934 г/см³ соответственно. Для реализации цели эксперимента воскообразные материалы подвергали измельчению и просеву на ситах, выполненных в соответствии ГОСТ 29234-91 «Пески формовочные. Метод определения среднего размера зерна и коэффициента однородности». По завершении просева материал представляет собой фракции от 0,63 до 2,5 мм хлопьевидной формы. Технологически обусловленный диапазон фракций материала, используемых в эксперименте, определен в результате предварительных исследований [7]. Установлено, что применение фракций модельного материала менее 0,63 мм увеличивает склонность к образованию комков, а при фракциях более 2,5 мм подача материала в различные участки пресс-форм сложной конфигурации затрудняется. На рис.2 представлена схема конструкции пресс-формы.

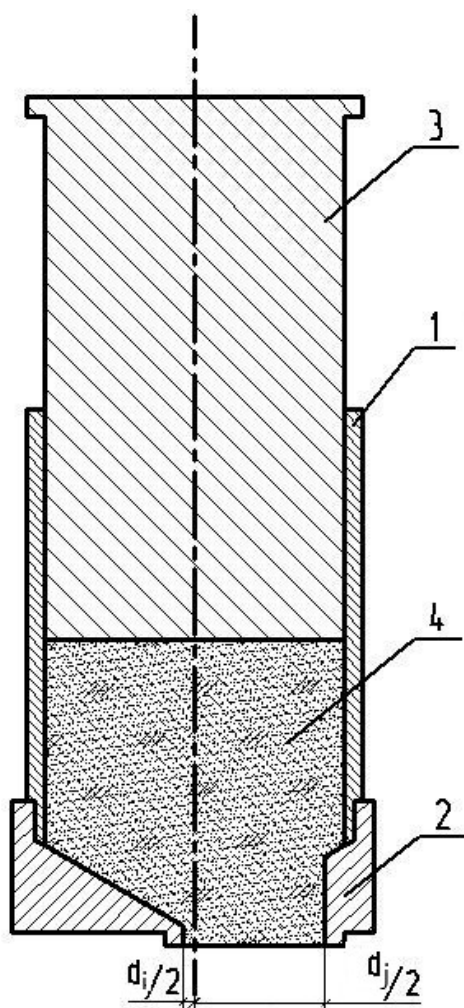


Рис. 2. Схема реализации эксперимента: 1 – пресс-матрица; 2 – мундштук с переменным диффузором; 3 – поршень пресс-матрицы; 4 – порошок воскообразного модельного состава.

В ходе эксперимента фракции материалов Т1 и ПС 50/50 (позиция 4) помещали в вертикально ориентированную цилиндрическую пресс-форму с внутренним диаметром $D = 45$ мм (позиция 1), в донной части которой расположен мундштук (позиция 2), выполненный в виде диффузора с конической внутренней поверхностью, угол наклона образующих которой равен 120° , что позволяет снизить величину нагрузки, необходимой для начала процесса экструзии [12, с.39]. Предварительными экспериментами определены требования к материалам пресс-форм, предназначенных для получения прессованных выплавляемых моделей. Так, например, использование сплавов на основе алюминия недопустимо вследствие адгезии уплотняемого воскообразного состава к поверхности пресс-формы, предположительно ввиду пластичности и низкой плотности алюминиевых сплавов. Применение стали 45 для выполнения элементов пресс-формы обеспечивает последней жесткость, позволяющую пренебречь значениями деформаций в ней, возникающих при экструзии воскообразного материала в ходе перемещения поршня (позиция 3) и уплотнения порошкового тела. В ходе эксперимента диаметр диффузора мундштука последовательно изменяли в сторону увеличения от $d_{i,j} = 0,006$ м с шагом $0,002$ м до диаметра, при котором завершается пластификация порошкового тела, характеризующегося отсутствием уплотнения материала и формированием прессованного цилиндрического тела. Масса дозировки воскообразного материала 4 в каждом эксперименте составляла $0,1$ кг. В ходе перемещения пресс-пуансона 3 с установленной предварительными экспериментами номинальной скоростью $0,5$ мм/с [5, 13] материал порошкового тела уплотняется и, по достижении им пластических свойств, выдавливается через диффузор 2. Сам процесс формирования длинномерной прессовки путем мундштучного выдавливания можно представить в виде трех последовательных этапов [14]: на первом, характеризующемся ростом значений нагрузки при одновременном перемещении пуансона 3, частицы материала 4 перераспределяются и уплотняются; на втором этапе, нагрузка достигает максимальных значений, при которых начинается экструзия материала; на третьем этапе нагрузка падает до значений, уровень которых остается неизменным до окончания процесса экструзии. Поддержка скоростного режима и регистрация силовых параметров экструзионного выдавливания осуществлялись при помощи универсальной испытательной машины AG-X plus Shimadzu, обеспечивающей отклонение значений нагрузки не более $0,03\%$ от задаваемого. Диаметры получаемых длинномерных прессовок определяли при помощи цифрового регистратора DIN 863 Vogel, обеспечивающего точность измерения $0,001$ мм.

Результаты и обсуждение.

Экспериментально получены зависимости нагрузки, возникающей на поршне пресс-матрицы в ходе перемещения вдоль вертикальной оси, определяющей пластификацию порошкового тела и последующую его экструзию, от отношения площади диффузора к площади сечения внутренней полости пресс-матрицы, представленные на рис.3. Для упрощения визуального восприятия результаты эксперимента представлены в виде различающихся по цветам кривых: синим цветом представлены зависимости, характерные для экструзии материала Т1, красным – для материала ПС 50/50 соответственно. Сплошными линиями представлены зависимости, характерные для экструзии материалов фракции $2,5$ мм, красным – для материалов фракции $0,63$ мм соответственно. Полиномиальные кривые, представленные на рис.3, характеризуются убыванием по экспоненте, а величина достоверности аппроксимации данных R^2 , в целом, значительно превышает $0,9$. Из графиков видно, что с увеличением значения

соотношения площадей диффузора и внутренней полости пресс-матрицы величина нагрузки, необходимой для начала процесса экструзии, снижается в диапазоне от 32 кН до 6 кН для материала Т1 и в диапазоне от 28 кН до 2 кН для материала ПС 50/50 соответственно. Такие различия в значениях нагрузки определяются большей пластичностью материала ПС 50/50 по сравнению с Т1. Общей тенденцией для всех задействованных в эксперименте материалов является более значительная величина нагрузки, возникающей при экструзии порошкового тела, состоящего из фракции 2,5 мм, чем при экструзии материала фракции 0,63 мм. По всей видимости, объяснение такого явления заложено в неравенстве площадей поверхности частиц различных фракции, выражающихся в конечном итоге в значениях насыпной плотности. Экспериментально определено, что для воскообразных материалов более высокая насыпная плотность, присуща порошковым телам, состоящим из частиц большей фракции. Так, например, для фракции 0,63 мм материала ПС 50/50 насыпная плотность составляет 310 кг/м³, а для фракции 2,5 мм того же материала значение насыпной плотности составляет 340 кг/м³.

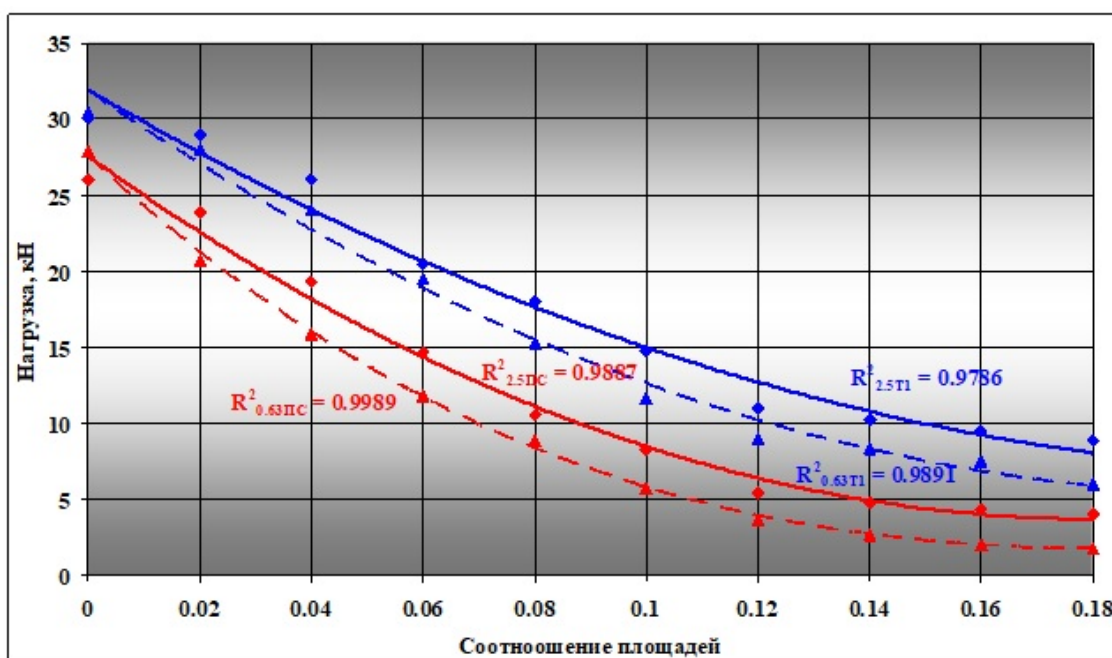


Рис. 3. Зависимость максимальной нагрузки от соотношения площадей внутреннего поперечного сечения цилиндрической пресс-матрицы и выходного отверстия диффузора.

В ходе эксперимента, результаты которого представлены на рис.3, определена верхняя граница диапазона значений величины соотношения площадей диффузора и внутренней полости цилиндра, при которых возможно создание условий для получения длиномерной пористой прессовки из воскообразных модельных композиций. Определение технологически приемлемого диапазона соотношения площадей диффузора и

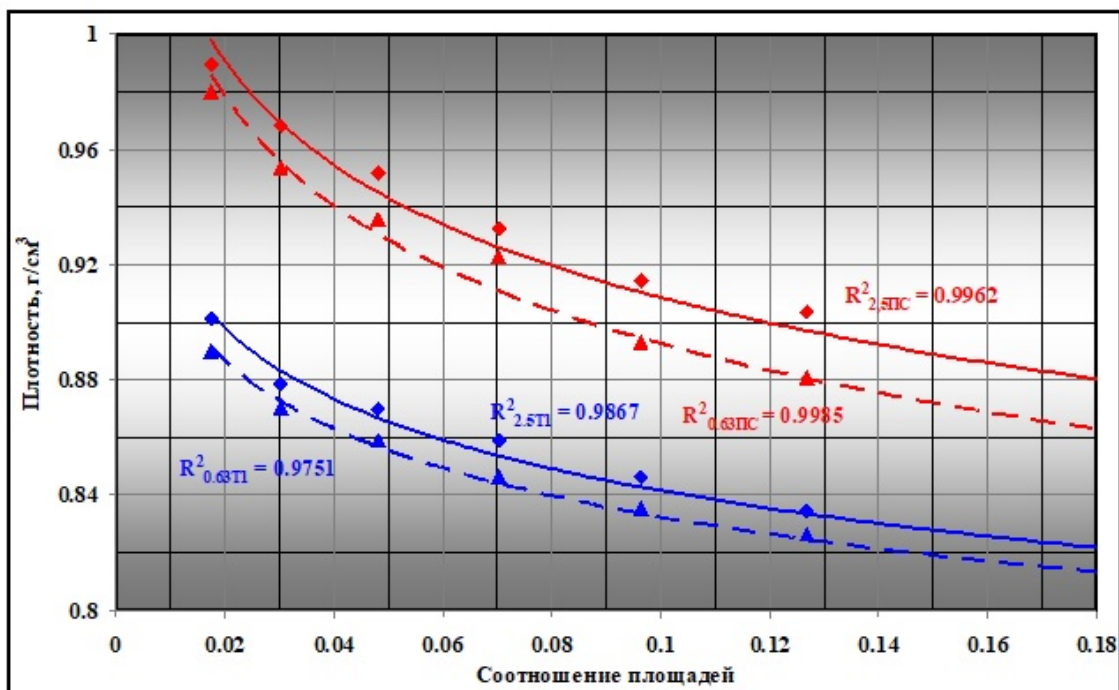


Рис. 4. Зависимость плотности длинномерных прессовок от соотношения площадей внутреннего поперечного сечения цилиндрической пресс-матрицы и выходного отверстия диффузора.

пресс-пуансона осуществлялось путем измерения плотности получаемых длинномерных прессовок. Результаты измерений представлены на рис.4 в виде экспоненциальных зависимостей значений плотности длинномерных прессовок из порошковых воскообразных материалов от соотношения площадей внутреннего поперечного сечения цилиндрической пресс-матрицы и выходного отверстия диффузора. Из графика видно, что данные, как и в случае с графиком на рис.3, позволили получить убывающие по экспоненте полиномиальные кривые, характеризующиеся величиной достоверности аппроксимации R^2 , значительно превышающей 0,9. Видно, что условия экструзии, возникающие при соотношении рассматриваемых в эксперименте площадей меньших 0,05, приводят к формированию переуплотненных прессовок. Это справедливо для всех материалов, задействованных в эксперименте. Для ПС50/50 значения плотности меньше, чем 0,934 г/см³ и для Т1 значения плотности меньше, чем 0,860 г/см³ достигаются при соотношении площадей больших, чем 0,05. Очевидно, что для всех рассмотренных в эксперименте материалов значения плотности длинномерных прессовок при увеличении диаметра выходного отверстия диффузора уменьшаются. При этом на конечную плотность прессовок, получаемых экструзией, определенное (но не решающее) влияние оказывает фракция материала: использование материала фракции 2,5 мм приводит к получению прессовки с плотностью на 1-2 % большей, чем у прессовок из фракции 0,63 мм. Увеличение соотношения площадей внутреннего поперечного сечения пресс-матрицы и выходного отверстия диффузора более 0,1 приводит к появлению дефектов на поверхности длинномерной прессовки.

Выводы

В результате эксперимента, моделирующего этапы процесса формирования тонкостенной поверхности выплавляемой модели биметаллической отливки высокой размерно-геометрической точности, определены условия мундштучного выдавливания, при которых на выходе из экструдера достигаются технологически приемлемые значения плотности протяженной прессовки из воскообразных материалов. Установлено, что при увеличении соотношения площадей поперечного сечения и диффузора мундштука значение максимальной нагрузки, необходимой для начала процесса мундштучного выдавливания, уменьшается, а более значительная величина нагрузки, возникает при экструзии порошкового тела, состоящего из более крупной фракции. Для всех воскообразных материалов, задействованных в эксперименте, установлены соотношения площадей внутреннего поперечного сечения цилиндрической пресс-матрицы и выходного отверстия диффузора, соответствующие диапазону значений $0,05 \div 0,1$, при соблюдении которого возможно формирование пористых прессовок с удовлетворительным качеством поверхности и плотностью меньшей, чем плотность этого материала, получаемая в результате свободной заливки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sabau A.S. V. S. Material properties for predicting wax pattern dimensions in investment casting // *Materials Science and Engineering: A*. 2003. no. T. 362. № 1-2. P. 125–134.
- [2] О.Г. Оспенникова. Исследование и разработка параметров технологического процесса изготовления моделей из модельных композиций на основе синтетических восков // *Авиационные материалы и технологии*. 2014. № № 3. С. 18–21.
- [3] Асланян И.Р. Гусева М.А. Оспенникова О.Г. Сравнительное исследование физико-механических и реологических характеристик модельных композиций // *Все материалы. Энциклопедический справочник*. 2019. № № 6. С. 34–39.
- [4] Постижено В.К. Береговая О.С. Влияние процентного содержания воздуха на физико-механические характеристики модельного состава "Велен" // *Вестник Национального технического университета Украины "Киевский политехнический институт"*. Серия: Машиностроение. 2011. № Т. 2. № 61. С. 67–71.
- [5] A.A. Sosnin N.A. Bogdanova S. Z., Komarov O. Finite Element Modeling of the Stress-Strain State of Waxy Compacts // *Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS-2019) AIP Conf. Proc.* 2019. no. 2176. P. 030017–1– 030017–4.
- [6] Богданова Н.А. Жилин С.Г. Комаров О.Н. Способ получения биметаллической отливки // Патент на изобретение RU 2696118 C1, 31.07.2019. Заявка № 2018140932 от 21.11.2018.
- [7] Жилин С.Г. Богданова Н.А. Комаров О.Н. Соснин А.А. Снижение упругого отклика при уплотнении порошковой парафиностеариновой композиции // *Деформация и разрушение материалов*. 2020. № № 1. С. 29–33.
- [8] Рассохина Л.И. Парфенович П.И. Нарский А.Р. Проблемы создания модельных композиций нового поколения на базе отечественных материалов для изготовления лопаток ГТД // *Новости материаловедения. Наука и техника*. 2015. № Т. 1. № 5. с. 7.
- [9] Салина М.В. Евстигнеев А.И. Влияние вакуумирования на физико-механические свойства и размерную точность выплавляемых моделей и отливок в литье по выплавляемым моделям // *Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета*. 2011. № Т. 1. № 5. С. 55–60.
- [10] Жилин С.Г. Комаров О.Н. Потянихин Д.А. Соснин А.А. Экспериментальное определение параметров регрессионной зависимости Кольрауша для пористых прессовок из воскообразных порошковых композиций // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2018. № № 2 (74). с. 9.
- [11] В.Ф. Гаранин В.Н. Иванов С.А. Казеннов и др. под общ. ред. В.А. Озерова. *Литье по выплавляемым моделям*. Машиностроение: Москва, 1994. 448 с.
- [12] Жолобов В.В. Зверев Г.И. *Прессование металлов*. Металлургиздат: Москва, 1959. 543 с.

- [13] Жилин С.Г. Богданова Н.А. Комаров О.Н. Влияние гранулометрического состава и скорости выдавливания воскообразной композиции на геометрию длинномерной прессовки при мундштучном экструдировании // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № № 4 (38). С. 54–64.
- [14] С.Г. Жилин. Влияние начальной упаковки компонентов порошкового тела на напряжённо-деформированное состояние прессовки при уплотнении // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2018. № Т. 1. № 3 (35). С. 73–79.

E.E. Abashkin, N.A. Bogdanova, S.G. Zhilin, O.N. Komarov, V.V. Predein

EXPERIMENTAL MODELING OF TECHNOLOGICAL STAGES OF THE FORMATION OF A HIGH DIMENSIONAL-GEOMETRIC BIMETALLIC CASTING

Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia

Abstract. The production of bimetallic parts makes it possible to realize in them a set of operational and mechanical characteristics inherent in iron-carbon and non-ferrous alloys. The implementation of the process of the developed technology for the formation of bimetallic casting with a rigid steel frame and a surface made of non-ferrous alloys, which have greater plasticity and electrical conductivity than the frame material, is possible through the use of a modernized investment casting method. The stage of manufacturing the surface of the investment casting model, which is formed by pressing the wax powder into the gap between the mold and the steel frame, is subject to change, which makes it possible to increase the dimensional and geometric accuracy of casting by eliminating thermophysical defects. The problem in implementing this approach is the elastic response of the material. This work solves the problem of determining the technological parameters of the formation of the waxy surface of the melted model of a bimetallic casting.

Keywords: bimetallic casting, process modeling, deformation, stress, extrusion, waxy materials, temperature defects, investment casting, pressing, dimensional and geometric accuracy.

REFERENCES

- [1] Sabau A.S. V. S. Material properties for predicting wax pattern dimensions in investment casting // Materials Science and Engineering: A. 2003. no. T. 362. № 1-2. P. 125–134. (in English).
- [2] O.G. Ospennikova. Research and development of parameters of the technological process of manufacturing models from model compositions based on synthetic waxes // Aviation materials and technologies. 2014. № № 3. С. 18–21. (in Russian).
- [3] Aslanyan I.R. Guseva M.A. Ospennikova O.G. Comparative study of physical, mechanical and rheological characteristics of model compositions // All materials. Encyclopedic reference. 2019. № № 6. С. 34–39. (in Russian).

Abashkin Evgeniy Evgenevich, Junior Researcher. Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia

Bogdanova Nina Anatolievna, Junior Researcher. Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia

Zhilin Sergey Gennadevich, Ph. D. in Engineering sciences, associate professor, Leading Researcher. Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia

Komarov Oleg Nikolaevitschh, Ph. D. in Engineering sciences, associate professor, Leading Researcher. Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia

Predein Valeriy Viktorovich, Researcher. Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS, Komsomolsk-na-Amure, Russia

-
- [4] Postizhenko V.K. Beregovaya O.S. Influence of the percentage of air on the physical and mechanical characteristics of the model composition "Velen-// Bulletin of the National Technical University of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute". Series: Mechanical Engineering. 2011. № Т. 2. № 61. С. 67–71. (in Russian).
- [5] A.A. Sosnin N.A. Bogdanova S. Z., Komarov O. Finite Element Modeling of the Stress-Strain State of Waxy Compacts // Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS-2019)AIP Conf. Proc. 2019. no. 2176. P. 030017–1– 030017–4. (in English).
- [6] Bogdanova N.A. Zhilin S.G. Komarov O.N. Method of obtaining bimetallic casting // Patent for invention RU 2696118 C1, 07/31/2019. Application No. 2018140932 dated 21.11.2018. (in Russian).
- [7] Zhilin S.G. Bogdanova N.A. Komarov O.N. Sosnin A.A. Decrease in elastic response during compaction of powder paraffin-stearin composition // Deformation and destruction of materials. 2020. № № 1. С. 29–33. (in Russian).
- [8] Rassokhina L.I. Parfenovich P.I. Narskiy A.R. Problems of creating model compositions of a new generation on the basis of domestic materials for the manufacture of GTE blades // News of Material Science. Science and technology. 2015. № Т. 1. № 5. с. 7. (in Russian).
- [9] Salina M.V. Evstigneev A.I. Influence of vacuumization on physical and mechanical properties and dimensional accuracy of lost-wax models and castings in investment casting // Uchenye zapiski Komsomolsk-on-Amur State Technical University. 2011. № Т.1, № 5. С. 55–60. (in Russian).
- [10] Zhilin S.G. Komarov O.N. Potyanikhin D.A. Sosnin A.A. Experimental determination of the parameters of the Kohlrausch regression dependence for porous compacts from wax-like powder compositions // Engineering journal: science and innovations. 2018. № № 2 (74). с. 9.
- [11] V.F. Garanin V.N. Ivanov S.A. Kazennov, others; under total. ed. V.A. Ozerov. Casting on investment models. Mashinostroenie: Moscow, 1994. 448 с. (in Russian).
- [12] Zholobov V.V. Zverev G.I. Metal pressing. Metallurgizdat: Moscow, 1959. 543 с. (in Russian).
- [13] Zhilin S.G. Bogdanova N.A. Komarov O.N. Influence of granulometric composition and speed of extrusion of a wax-like composition on the geometry of long pressing during die extrusion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I.I. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2018. № № 4 (38). С. 54–64. (in Russian).
- [14] S.G. Zhilin. Influence of the initial packing of the components of the powder body on the stress-strain state of the pressing during compaction // Uchenye zapiski Komsomolsk-on-Amur State Technical University. 2018. № Т. 1. № 3 (35). С. 73–79. (in Russian).

А. А. Лаптева, В. Е. Рагозина, О. В. Дудко

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ И РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Рассматривается динамика одномерных деформаций разномодульной упругой среды под действием нестационарной граничной нагрузки в режиме «растяжение – сжатие». Исследуются особенности построения кусочно-линейной функции, аппроксимирующей нелинейное краевое условие. Указан критерий выбора узловых точек разбиения аппроксимирующей функции, позволяющий управлять режимами взаимодействия волновых фронтов всех типов в решении краевой задачи. Получена итерационная формула изменения скорости ударной волны в результате ее попутного столкновения с медленными фронтами предварительного растяжения, а также итерационные соотношения для построения поля перемещений на всех стадиях деформирования.

Ключевые слова: упругость, разномодульная среда, нестационарное деформирование, одномерное движение, взаимодействие волн, плоские волны, кусочно-линейная аппроксимация.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.39.76.033

УДК: 539.3:517.958

Введение

Моделирование нелинейной динамики твердых деформируемых тел на математическом уровне, как правило, связано с необходимостью обращения к теоретическим или численным приближенным методам из-за невозможности получить точные аналитические решения. Такие решения, которые удается построить лишь в некоторых исключительных случаях (например, в плоских автомодельных задачах), имеют не только большое самостоятельное значение, но и используются как предельный случай при анализе других задач. В настоящей статье представляем один из вариантов задач

© Лаптева А. А., Рагозина В. Е., Дудко О. В., 2020

Лаптева Анастасия Александровна

e-mail: lanastal@mail.ru, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Рагозина Виктория Евгеньевна

e-mail: ragozina@vlc.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Дудко Ольга Владимировна

e-mail: dudko@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Поступила 02.09.2020

нелинейной динамики твердых сред, допускающих точные решения — задачи одномерного нестационарного деформирования разномодульного упругого полупространства на стадии малых деформаций. Модельные соотношения выбраны в форме физически нелинейной среды [1]. При одномерном деформировании модель [1] приводит к кусочно-линейной связи напряжений и деформаций, которой оказывается вполне достаточно как для линейного волнового характера уравнений движения, так и для появления ряда нелинейных эффектов (образование ударных волн, движение ударных волн с переменными скоростями, взаимодействие различных типов деформаций и т.д.). Дополнительным приемом, используемым в работе, является представление краевого условия на границе полупространства в виде кусочно-линейной функции. Краевое условие этого вида может иметь место само по себе, а также может аппроксимировать некоторое гладкое условие. В обоих случаях возникает достаточно удобный алгоритм [2] решения нестационарной краевой задачи, учитывающий движение по среде ударных волн, полусигнатонов и простых разрывов [3], а также позволяющий описывать результат взаимодействия этих волн между собой. Такие решения могут быть полезными при анализе динамики грунтов, сыпучих и пористых сред, которые традиционно относятся к разномодульноупругим материалам. В настоящей статье своей целью ставим исследование особенностей выбора кусочно-линейной функции краевого условия и включение соответствующих ограничений на аппроксимирующее разбиение в алгоритме [2] для создания возможности управления режимами взаимодействия волновых фронтов всех типов.

Общие модельные соотношения и скорости поверхностей разрывов первых производных поля перемещений

Движение разномодульной изотропной среды определяем общей системой уравнений в декартовых координатах x_i , предполагая малость деформаций, отсутствие массовых сил и адиабатичность процесса:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho_0 \dot{v}_i, \quad \rho = \rho_0(1 - u_{i,i}), \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \\ 2e_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i}, \quad W(E_1, E_2) = \frac{\lambda}{2} E_1^2 + \mu E_2 - \nu E_1 \sqrt{E_2} + \dots, \\ E_1 &= e_{ii}, \quad E_2 = e_{ij} e_{ji}, \quad v_i = \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

В формулах (1) u_i и v_i — компоненты вектора перемещений и скорости точек среды, ρ и ρ_0 — плотность среды в актуальном и свободном состоянии, e_{ij} и σ_{ij} — компоненты тензора малых деформаций и тензора напряжений Эйлера-Коши, W — упругий потенциал среды, в котором λ , μ , ν — упругие модули (λ , μ — параметры Ламе, ν — параметр разномодульности). Многоточием в формуле для $W(E_1, E_2)$ обозначены невыписанные слагаемые, соответствующие обобщению [4] модели [1] и следующие из разложения $W(E_1, E_2)$ в ряд по сферическим функциям.

Для деформаций общего типа с главными значениями e_i формулы (1) определяют зависимость упругого потенциала W от угла между единичным вектором с компонентами $e_i E_2^{-1/2}$ и осью всесторонней равномерной деформации $e_1 = e_2 = e_3$.

Для рассматриваемой далее в статье задачи одномерного движения среды $u_1 = u(x, t)$, $u_2 = u_3 = 0$, $x = x_1$ из формул (1) для связи напряжений и деформаций

следует кусочно-линейное соотношение:

$$\begin{aligned}\sigma(e) &= \{\lambda + 2\mu - 2\nu \cdot \text{sign}(e)\} e, \quad \sigma(0) = 0, \\ \text{sign}(e) &= \frac{e}{|e|}, \quad e \neq 0 \quad e = e_{11}, \quad \sigma = \sigma_{11}.\end{aligned}\quad (2)$$

Дополнение формулы $\sigma(e)$ в (2) значением в нуле $\sigma(0)$ позволяет аналогично [4] определить непрерывное поле напряжений, хотя модельные соотношения (1) имеют особенность в нуле.

Следствием (1), (2) будут уравнение движения и его решение в форме Даламбера:

$$\begin{aligned}u_{,xx} &= \frac{\ddot{u}}{c^2}, \quad c = \begin{cases} a = \sqrt{(\lambda + 2\mu + 2\nu)/\rho}, & u_{,x} < 0, \\ b = \sqrt{(\lambda + 2\mu - 2\nu)/\rho}, & u_{,x} > 0, \end{cases} \\ u(x, t) &= f(\zeta) + g(\eta), \quad \zeta(x, t) = x - ct, \quad \eta(x, t) = x + ct, \\ &a > b \quad \text{при} \quad \nu > 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Характеристические скорости a и b соответствуют «быстрому» процессу сжатия ($u_{,x} < 0$) и «медленному» процессу растяжения ($u_{,x} > 0$). Конкретный вид функций $f(\zeta)$ и $g(\eta)$ определяется, как обычно, исходной системой краевых и начальных условий задачи, а также условиями на подвижных поверхностях $x = \Sigma(t)$, разделяющих область решения на подобласти. Для нестационарных краевых задач на поверхностях $x = \Sigma(t)$ возможны разрывы первого рода поля скоростей и деформаций. Скорость $\Sigma'(t)$ и разрывы функций $\sigma(e)$ и v связаны между собой условиями совместности [5]:

$$[\sigma] = -\rho_0 \Sigma'(t)[v], \quad [v] = -\Sigma'(t)[u_{,x}]. \quad (4)$$

В (4) $[\sigma] = \sigma^+ - \sigma^-$ — разрыв (скачок) σ на поверхности $x = \Sigma(t)$, где σ^+ и σ^- — значения σ перед $x = \Sigma(t)$ и сразу за ней; скачки v и $u_{,x}$ определены аналогично. Из (2) и (4) следует формула для связи скорости $\Sigma'(t)$ возможной поверхности разрывов с состоянием среды в ее окрестности:

$$\Sigma'(t) = \left\{ \rho_0^{-1} \left(\lambda + 2\mu - 2\nu \text{sign}(u_{,x}^-) - 2\nu \cdot [\text{sign}(u_{,x})] \frac{u_{,x}^+}{[u_{,x}]} \right) \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Классификацию возможных разрывов обобщенного решения уравнения движения (3) введем аналогично принятой в [2, 3]. *Полусигнотон* $x = \gamma(t)$ будем называть плоскую одномерную волну, если $u_{,x}^+ u_{,x}^- = 0$ при $u_{,x}^+ \neq u_{,x}^-$, *простым разрывом* $x = \xi(t)$ — если $u_{,x}^+ \neq 0$ и $u_{,x}^+ u_{,x}^- > 0$. Простой разрыв и полусигнотон, которые распространяются по среде (1) со скоростью a , будем называть быстрыми фронтами $\xi^{\pm a}(t)$, $\gamma^{\pm a}(t)$, со скоростью b — медленными $\xi^{\pm b}(t)$, $\gamma^{\pm b}(t)$. Знаками «+» и «-» у верхних индексов a и b обозначены противоположные направления движения фронтов. В дальнейшем, знак «+» будем опускать. Если в обобщенном решении уравнения движения существует скачок первых производных перемещений и $u_{,x}^+ u_{,x}^- < 0$, то такой сильный разрыв назовем *ударной волной* $x = \Sigma(t)$ со скоростью $\Sigma'(t) = G(t)$. Используя (4) и (5) для модели (1), можно показать, что $b < G(t) < a$ [3, 5]. Следовательно, ударная волна скачком меняет тип деформации с растяжения ($u_{,x}^+ > 0$, $c^+ = b$) на сжатие ($u_{,x}^- < 0$, $c^- = a$). Обратный случай — переход от сжатия к растяжению — невозможен, поскольку такой разрыв не является эволюционным [6]. Простой разрыв $x = \xi(t)$ не изменяет тип деформированного состояния среды. Ударная волна и простой разрыв распространяются только по ненулевому предварительному полю

деформаций $u_{,x}^+ \neq 0$. Полусигнотон $x = \gamma(t)$ меняет предварительно недеформированную область $u_{,x}^+ = 0$ на растяжение или сжатие и наоборот. Следует отметить, что быстрый и медленный полусигнотоны могут двигаться парой с образованием жесткого слоя $\gamma^b(t) \leq x \leq \gamma^a(t)$ между собой [3, 7].

На основе перечисленных свойств плоских одномерных волн проведем анализ возможных волновых картин в одномерной нестационарной краевой задаче о растяжении-сжатии разномодульного упругого полупространства.

Взаимодействие ударной волны с простыми разрывами и полусигнотонами в одномерной задаче деформации разномодульной упругой среды

Рассматриваем полупространство $x \geq 0$, занятое средой (1) с границей $x = 0$, недеформированное до момента $t_0 = 0$. В момент $t_0 = 0$ на границе $x = 0$ начинает действовать нагрузка, результатом которой являются следующие граничные перемещения:

$$\begin{aligned} u(0, t) = F(t), \quad F(0) = F(t_3) = 0, \quad F(t)|_{0 \leq t \leq t_3} \leq 0, \\ F(t)|_{t > t_3} > 0, \quad F'(t)|_{0 \leq t \leq t_2} < 0, \quad F'(t)|_{t \geq t_2} > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) $F(t)$ — известная кусочно-гладкая функция (серая линия на рис. 1). Такое краевое условие вызывает начальное динамическое растяжение среды с последующим сжатием [8].

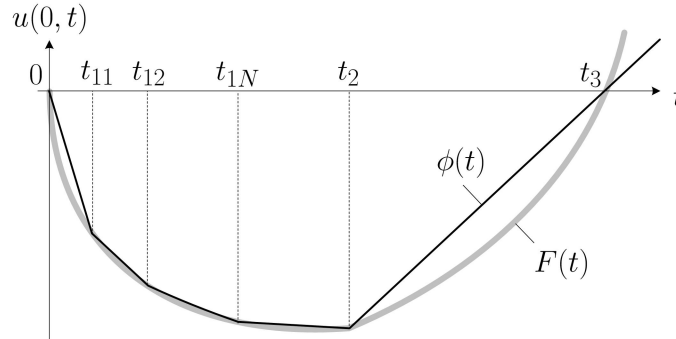


Рис. 1. Перемещение граничных точек полупространства

Заменим функцию $F(t)$ ее непрерывной кусочно-линейной аппроксимацией $\phi(t)$ (черная ломаная линия на рис. 1):

$$\begin{aligned} \phi(t)|_{t \in [t_{1(i-1)}; t_{1i}]} = y_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N+2, \\ t_{10} = 0, \quad t_{1(N+1)} = t_2, \quad t_{1(N+2)} = t_3, \\ y_i(t) = k_i t + p_i, \quad k_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{t_{1i} - t_{1(i-1)}}, \quad p_i = \phi_{i-1} - k_i t_{1(i-1)}, \quad \phi_i = F(t_{1i}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для участка $F(t)$ между $t_{10} = 0$ и $t_{1(N+1)} = t_2$, как следует из (7), выбираем дополнительно N внутренних узловых точек (значение N задаем, исходя из требуемой точности аппроксимации). При решении задачи число узловых точек N остается неизменным. Для участка $t \geq t_2$ используем линейную аппроксимацию $F(t)$ на основе ее значений в узлах t_2 и t_3 , что не является принципиальным ограничением. При таком выборе в области сжатия не возникает дополнительных быстрых простых волн

от границы $x = 0$, что позволяет несколько сократить изложение. Ранее [2] авторами рассматривался наиболее простой вариант краевого условия в виде трехзвенной ломаной (количество дополнительных внутренних узлов $N = 1$).

В результате замены условия (6) соотношениями (7) появляется возможность построить решение для поля перемещений $u(x, t)$ в кусочно-линейной форме для всей области среды, куда распространился процесс деформирования, с учетом необходимого деления на подобласти. В [2] было показано, что в результате воздействия (7) при $0 \leq t < t_2$ от границы $x = 0$ последовательно отделяются полусигнотон γ_1^b (перед ним находится область 0, где среда покоится) и система простых разрывов ξ_i^b , $t = t_{1i}$, $i = 1, 2, \dots, N$ (рис. 2). Область между γ_1^b и ξ_1^b обозначена I_1 (рис. 2), между ξ_1^b и ξ_N^b находятся области I_i , за ξ_N^b — область I_{N+1} . Во всех этих областях происходит растяжение, постоянная деформация растяжения $u_{,x} = \text{const}$ меняется скачком на полусигнотоне γ_1^b и простых разрывах ξ_i^b . Таким образом, для перемещений $u_{(i)}^I$ в областях I_i ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) с учетом (7) нетрудно получить решение на начальном этапе $t < t_2$:

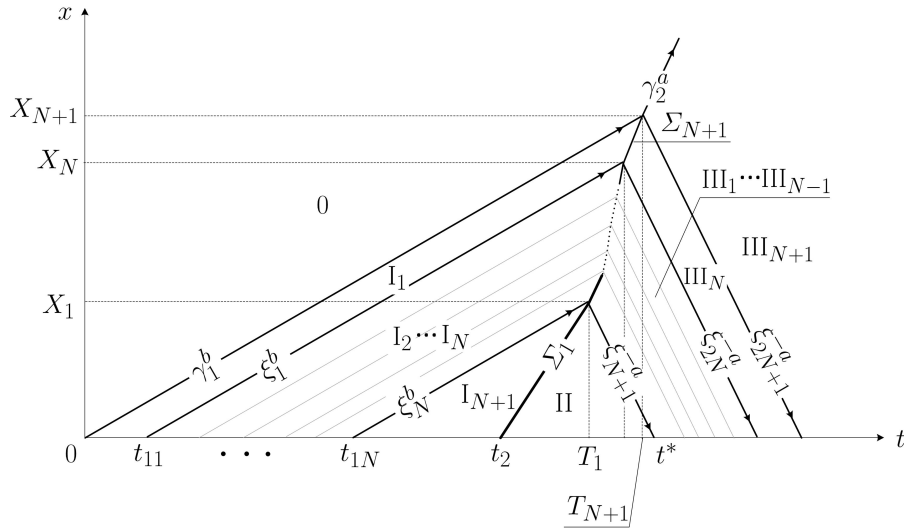


Рис. 2. Диаграмма ударных волн, простых разрывов и полусигнотонов

$$\begin{aligned}
 u_{(i)}^I(x, t)|_{l_{i+1} \leq x \leq l_i} &= A_i + B_i(t - t_{1(i-1)}) + C_i x, \\
 A_i &= p_i, \quad B_i = k_i, \quad C_i = -k_i/b, \\
 l_1(t) &= \gamma_1^b(t), \quad l_{i+1}(t) = \xi_i^b(t), \quad l_{N+2}(t) = 0, \\
 \gamma_1^b(t) &= bt, \quad \xi_i^b(t) = b(t - t_{1i}), \quad t_{10} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В момент $t = t_2$ на границе $x = 0$ происходит скачкообразный переход от растягивающих к сжимающим усилиям и мгновенное образование ударной волны Σ_1 [8]. За Σ_1 (область II на рис. 2) среда переходит в сжатое состояние. Ранее [2] было показано, что кусочно-линейный закон (7) приводит к постоянной скорости $\Sigma_1' = G_1$:

$$G_1 = \left\{ a^2 - (a^2 - b^2) \frac{k_{N+1}/b}{k_{N+1}/b - R/a} \right\}^{1/2}, \quad b < G_1 < a, \quad (9)$$

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) k_{N+1} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 k_{N+1}^2 - 4k_{N+2}(2k_{N+1} - k_{N+2})}$$

На основе (3), (7) и (9) для перемещений в области II получим

$$u^{\text{II}}(x, t)|_{0 \leq x \leq \Sigma_1(t)} = A_{N+2} + B_{N+2}(t - t_2) + C_{N+2}x, \quad (10)$$

$$A_{N+2} = k_{N+2}t_2 + p_{N+2}, \quad B_{N+2} = k_{N+2}(1 - G_1/b) + G_1R/a,$$

$$C_{N+2} = -R/a, \quad \Sigma_1(t) = G_1(t - t_2).$$

Решение перед Σ_1 продолжает определяться согласно (7), за Σ_1 — согласно (10) до момента времени $t = T_1 = (bt_{1N} - G_1t_2)/(b - G_1)$, когда ударная волна Σ_1 догонит «ближайший» к ней простой разрыв ξ_N^b . При этом исчезает область I_{N+1} и решение $u_{(N+1)}^I$. Столкновение Σ_1 и ξ_N^b происходит при $x = X_1 = G_1(T_1 - t_2)$. Его результатом будет образование двух новых волновых фронтов, расходящихся от $x = X_1$ при $t \geq T_1$ в обе стороны: быстрый простой разрыв ξ_{N+1}^{-a} идет к границе $x = 0$, ударная волна Σ_2 со скоростью $G_2 \neq G_1$ — в сторону бегущего впереди нее пакета медленных простых разрывов. Между Σ_2 и ξ_{N+1}^{-a} появляется новая область сжатия III_1 (рис. 2), состояние внутри которой, как и ранее в области II, определяется взаимодействием между собой предварительного растяжения и последующего сжатия. Этот эффект отличает разномодульную среду [1] от линейной упругой среды, где каждый из участков условия (7) последовательно передавал бы в полупространство собственные значения деформации, не связанные друг с другом. Если сжатие на границе продолжается по линейному закону, то ударная волна Σ_2 догонит в момент времени $t = T_2$ следующий медленный простой разрыв ξ_{N-1}^b . Вновь появляются два новых волновых фронта — ударная волна Σ_3 и быстрый простой разрыв ξ_{N+2}^{-a} , расходящихся от $x = X_2$ в противоположные стороны. Так продолжается до тех пор, пока ударная волна Σ_{N+1} не догонит медленный полусигнотон γ_1^b . В этом случае в момент времени $t = T_{N+1}$ от $x = X_{N+1}$ расходятся в разные стороны быстрый полусигнотон γ_2^a и быстрый простой разрыв ξ_{2N+1}^{-a} (рис. 2). Таким образом, ударная волна с постоянно эволюционирующим фронтом Σ_i (за счет изменения ее скорости G_i) «уничтожает» одну за другой области растяжения I_i и выходит в недеформированную часть полупространства. В результате такого попутного столкновения Σ_i с ξ_{N-i+1}^b и Σ_{N+1} с γ_1^b соответствующие области растяжения I_i перестают существовать, а области сжатия III_i ($i = 1, 2, \dots, N+1$) появляются. Для скоростей G_i из (5) с учетом (3), (7) получим формулу, более простую для применения, чем (9):

$$G_i = a - \frac{k_{N+2-i}(a^2 - b^2)}{k_{N+2-i}(a + b) - b(k_{N+2} + R)} = \text{const}, \quad (11)$$

$$b < G_i < a, \quad i = 2, 3, \dots, N + 1.$$

Из (11) следует, что значения скоростей G_i можно вычислить сразу, как только определены краевые условия (7). Перемещения в возникших областях Π_i имеют вид:

$$\begin{aligned}
u_{(1)}^{\text{III}}(x, t)|_{\xi_{N+1}^{-a}(t) \leq x \leq \Sigma_2(t)} &= A_{N+3} + B_{N+3}(t - T_1) + C_{N+3}x, \\
u_{(i+1)}^{\text{III}}(x, t)|_{\xi_{N+1+i}^{-a}(t) \leq x \leq \Sigma_{i+2}(t)} &= A_{N+3+i} + B_{N+3+i}(t - T_{i+1}) + C_{N+3+i}x, \\
u_{(2N+3)}^{\text{III}}(x, t)|_{\xi_{2N+1}^{-a}(t) \leq x \leq \gamma_2^a(t)} &= A_{2N+3} + B_{2N+3}(t - T_{N+1}) + C_{2N+3}x, \\
A_{N+3} &= k_N t_{1N} - p_N + C_{N+3}X_1, \\
B_{N+3} &= \frac{b(k_{N+3} + R)G_2 + ak_N(b - G_2)}{b(a + G_2)}, \\
C_{N+3} &= \frac{k_N(b - G_2) - b(k_{N+2} + R)}{b(a + G_2)}, \\
A_{N+3+i} &= A_{N+2+i} + B_{N+3+i}(T_{i+1} - T_i) + X_i(C_{N+2+i} - C_{N+3+i}), \\
B_{N+3+i} &= B_{N+2+i} - a(C_{N+2+i} - C_{N+3+i}), \\
C_{N+3+i} &= \frac{aC_{N+2+i} - B_{N+2+i} + (b - G_{i+2})k_{N-i}/b}{a + G_{i+2}}, \tag{12} \\
A_{2N+3} &= A_{2N+2} + B_{2N+2}(T_{N+1} - T_N + X_{N+1}/(2a)) + X_{N+1}C_{2N+2}/2, \\
B_{2N+3} &= (B_{2N+2} - aC_{2N+2})/2, \\
C_{2N+3} &= (aC_{2N+2} - B_{2N+2})/(2a), \\
T_{i+1} &= \frac{X_i + bt_{1(N-i)} - G_{i+1}T_i}{b - G_{i+1}}, \quad X_{i+1} = X_i + G_{i+1}(T_{i+1} - T_i), \\
T_{N+1} &= \frac{X_N - G_{N+1}T_N}{b - G_{N+1}}, \quad X_{N+1} = X_N + G_{N+1}(T_{N+1} - T_N), \\
\xi_{N+1}^{-a}(t) &= X_1 - a(t - T_1), \quad \Sigma_2(t) = X_1 + G_2(t - T_1), \\
\xi_{N+1+i}^{-a}(t) &= X_{i+1} - a(t - T_{i+1}), \quad \Sigma_{i+2}(t) = X_{i+1} + G_{i+2}(t - T_{i+1}), \\
\xi_{2N+1}^{-a}(t) &= X_{N+1} - a(t - T_{N+1}), \quad i = 1 \dots N-1.
\end{aligned}$$

Решение в области за Σ_1 продолжает вычисляться согласно (10). Таким образом, перемещения в каждой новой области можно получить только с учетом решений в появившихся ранее областях.

Важно отметить, что до сих пор говорилось только о взаимодействии ударной волны $\Sigma_i(t)$ с медленными разрывами ξ_i^b перед ней и не упоминалось, что в общем случае отраженные при каждом таком взаимодействии быстрые разрывы ξ_{N+i}^{-a} с момента времени $t^* = X_1/a - T_1$ достигают границы $x = 0$ и отражаются от нее уже как ξ_{2N+1+i}^a . Таким образом, позади ударной волны создается область сжатия, где происходит взаимодействие приходящих (ξ_{N+i}^{-a}) и отраженных (ξ_{2N+1+i}^a) от границы $x = 0$ быстрых простых разрывов, в том числе, ξ_{2N+1+i}^a могут догнать ударную волну сзади. С целью уменьшить объем изложения ограничимся временами $t \leq T_{N+1} < t^*$, не рассматривая эффекты взаимодействия быстрых простых разрывов между собой и с ударной волной. Записывая неравенство $t^* > T_{N+1}$ с учетом $X_1 = G_1(T_1 - t_2)$, $T_1 = (bt_{1N} - G_1 t_2)/(b - G_1)$, получим

$$\frac{b(1 + G_1/a)t_{1N} - G_1(1 + b/a)t_2}{b - G_1} > T_{N+1}. \tag{13}$$

Левая часть неравенства (13) нелинейным образом зависит от t_{1N} , поскольку G_1 тоже функция от t_{1N} . Значение $t = t_{1N}$ задается при замене гладкой функции $F(t)$ ее непрерывной кусочно-линейной аппроксимацией $\phi(t)$. Положение точки t_{1N} (рис. 2) существенно влияет на ход дальнейшего решения, поэтому нам необходимо получить некоторые критерии по ее выбору. Так, полагая $t_{1N} = t_{12}$, $t_{11} = t_{12}/2$ (т.е. ограничивая количество внутренних узлов аппроксимации $N = 2$), можем записать неравенство (13) в виде

$$\frac{b(1 + G_1/a)t_{12} - G_1(1 + b/a)t_2}{b - G_1} > T_3, \quad (14)$$

где с учетом (9) и (11)

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{X_2 + bt_0 - aT_2}{b - a}, \quad T_2 = \frac{X_1 + bt_{11} - G_2T_1}{b - G_2}, \quad T_1 = \frac{bt_{12} - G_1t_2}{b - G_1}, \\ X_1 &= G_1(T_1 - t_2), \quad X_2 = X_1 + G_2(T_2 - T_1), \\ G_1 &= \left(a^2 - \frac{(a^2 - b^2)k_3/b}{k_3/b - R/a} \right)^{1/2}, \quad G_2 = a - \frac{(a^2 - b^2)k_2}{k_2(a + b) - b(k_4 + R)}, \\ R &= (a/b + b/a)k_3 + \sqrt{(a/b + b/a)^2k_3^2 - 4k_4(2k_3 - k_4)}. \end{aligned}$$

Неравенство (14) позволяет на интервале $(0; t_2)$ найти для значения $t_{1N} = t_{12}$ ограничение сверху \tilde{t} , такое что при $0 < t_{1N} < \tilde{t}$ отраженные от границы разномодульного полупространства простые разрывы не успевают догнать ударную волну прежде, чем произойдет ее попутное столкновение с передним фронтом растяжения γ_1^b и выход в недеформированную область 0 (рис. 2). Значение \tilde{t} находим из неявного уравнения, полученного приравниванием левой и правой части неравенства (14) с заменой t_{12} на \tilde{t} . Заметим, что значение \tilde{t} не зависит от заданного количества узловых точек разбиения N и определяется исключительно угловыми коэффициентами $k_N(t_{1(N-1)}, t_{1N})$, $k_{N+1}(t_{1N}, t_{1(N+1)})$ отрезков y_N и y_{N+1} аппроксимирующей функции $\phi(t)$ (в формуле (14) это $k_2(t_{11}, t_{12})$, $k_3(t_{12}, t_2)$). Таким образом, выбирая $t_{1N} < \tilde{t}$, получаем решение задачи без взаимодействия ударной волны с отраженными от границы $x = 0$ простыми разрывами, а при $t_{1N} \geq \tilde{t}$ — с учетом таких взаимодействий.

Множество постоянных значений скоростей G_i ($i = 1, 2, \dots, N+1$), построенное из (9), (11) для случая $t_{1N} < \tilde{t}$, схематически показано на рис. 3. Отметим, что дискретные значения G_i не лежат на одной прямой даже при постоянном шаге разбиения отрезка $[t_1; t_{1N}]$. Кроме того, при выборе точки $t_{1N} < \tilde{t}$ скорость ударной волны монотонно убывает ($b < G_{N+1} < G_N < \dots < G_1 < a$), т.е. взаимодействие ударной волны с медленными простыми разрывами ξ_i^b приводит к ее торможению. И наоборот, если принять $t_{1N} \geq \tilde{t}$, то набегающие сзади на ударную волну отраженные от границы $x = 0$ быстрые фронты сжатия ξ_{2N+1+i}^a с некоторого момента времени разгоняют ее.

На рис. 4 изображена последовательность мгновенных кусочно-линейных диаграмм перемещений u и деформаций u, x , соответствующих полученным решениям (8)–(12). Диаграммы построены для различных моментов времени: (а) $t_{11} < \tau < t_{12}$, (б) $t_{1N} < \tau < t_2$, (в) $t_2 < \tau < T_1$, (г) $T_1 < \tau < T_2$, (д) $T_N < \tau < T_{N+1}$, (е) $t_{11} > T_{N+1}$; горизонтальная ось нормирована: (а), (б) $z = x/(b\tau)$, (в) $z = x/(G_1\tau)$, (г)–(е) $z = x/(a\tau)$.

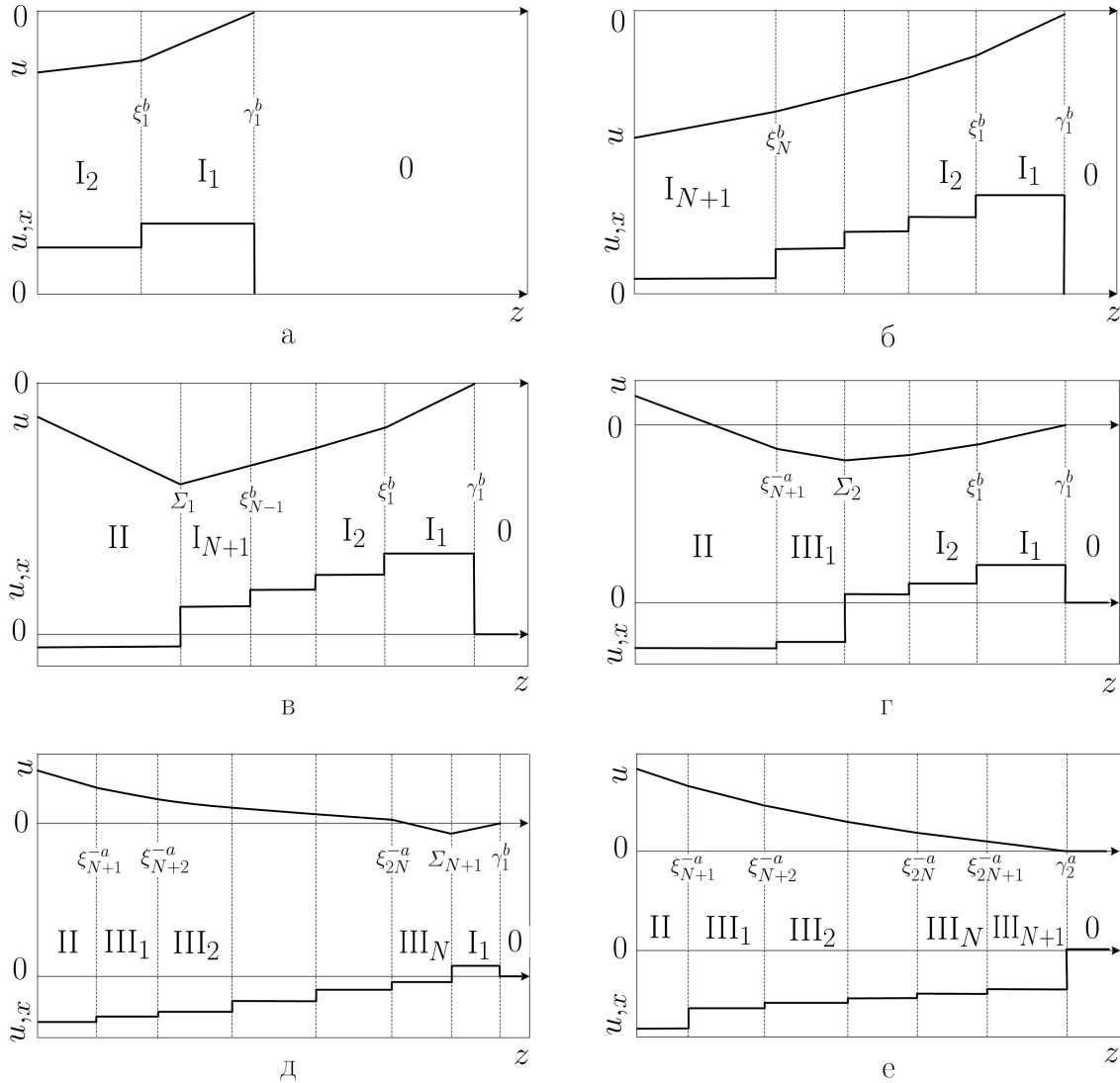


Рис. 3. Диаграммы перемещений и деформаций

Заключение

Из представленных в работе расчетов следует, что физическая нелинейность модели [1] не только сохраняется при кусочно-линейной постановке краевых условий, но и проявляется весьма существенно, если параметр разномодульности ν сопоставим со значениями параметров Ламе. Таким образом, показано, что кусочно-линейная аппроксимация краевых условий позволяет решать достаточно большое количество задач одномерной динамики разномодульных сред, где малый характер деформаций определяет простоту аналитического решения в каждой из областей. Более того, указанные ограничения и особенности выбора узловых точек аппроксимирующей функции позволяют «включать» или «выключать» эффекты взаимодействия ударной волны с фронтами определенного типа и направления, тем самым изменяя (и, надеемся,

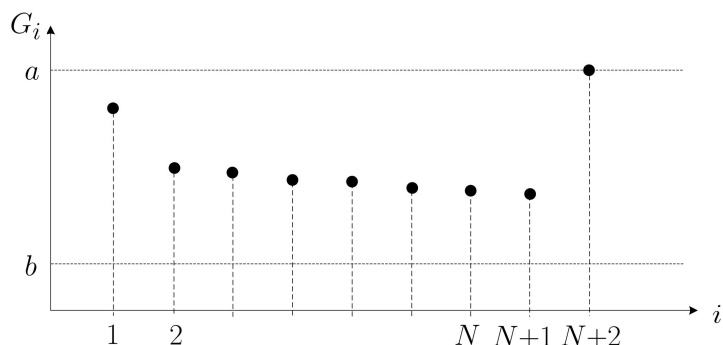


Рис. 4. Распределение скоростей ударных волн в зависимости от номера фронта

упрощая) ход решения конкретной краевой задачи. Одновременно можно предполагать, что такой подход может быть приемлем и для других физически нелинейных сред и процессов деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ляховский В. А., Мясников В. П. О поведении упругой среды с микронарушениями // Известия АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.
- [2] Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е. Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий // Вестник ПНИПУ. 2019. № 4. С. 5–15.
- [3] Маслов В. П., Мосолов П. П. Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды // Прикладная математика и механика. 1985. № 49(3). С. 419–437.
- [4] Мясников В. П., Олейников А. И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007. 172 с.
- [5] Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М: Мир, 1972. 183 с.
- [6] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М: Московский лицей, 1998. 412 с.
- [7] Gavrilov S. N., Herman G. C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // Journal of Sound and Vibration. 2012. № 331(20). С. 4464–4480.
- [8] Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. 2005. № 6(1-2). С. 94–105.

Anastasia A. Lapteva, Victoria E. Ragozina, Olga V. Dudko

PIECEWISE LINEAR APPROXIMATION OF BOUNDARY CONDITIONS AND SOLUTIONS IN PROBLEMS OF 1D NONSTATIONARY DYNAMICS OF HETEROMODULAR ELASTIC MEDIA

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The one-dimensional deformation dynamics in an elastic heteromodular medium under nonstationary boundary loading in the «tension and compression» mode is considered. The features of constructing a piecewise linear approximation of a nonlinear boundary condition are investigated. A selection criterion for the nodal partition points of the approximating function is indicated; it allows us to control the modes of collision between wave fronts of all types when the boundary value problem is solved. An iterative formula for the change in the shock wave velocity as a result of its collision with slow fronts of preliminary tension is obtained; the iterative relations for constructing the displacement field at all stages of deformation are written.

Keywords: elasticity, heteromodular medium, nonstationary deformation, one-dimensional motion, collision of waves, plane waves, piecewise linear approximation.

REFERENCES

- [1] Myasnikov V. P., Lyakhovskiy V. A. On the behavior of elastic cracked solid // *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Solid Earth*. 1984. № 10. С. 71–75. (in Russian).
- [2] Dudko O. V., Lapteva A. A., Ragozina V. E. Nonstationary 1D Dynamics Problems for Heteromodular Elasticity with Piecewise-Linear Approximation of Boundary Conditions // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019. № 4. С. 5–15. (in Russian).
- [3] Maslov V. P., Mosolov P. P. General theory of equations of motion of the elastic multimodulus medium // *Journal of applied mathematics and mechanics*. 1985. № 49(3). С. 419–437. (in Russian).
- [4] Myasnikov V. P., Oleinikov A. I. *Fundamentals of Mechanics of Heteromodular Media*. Vladivostok: Dal'nauka, 2007. 172 p. (in Russian).
- [5] Blend D. *Nonlinear dynamic theory of elasticity*. Moscow: Mir, 1972. 183 p. (in Russian).
- [6] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. *Nonlinear Waves in Elastic Media*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1998. 412 p.
- [7] Gavrilov S. N., Herman G. C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // *Journal of Sound and Vibration*. 2012. № 331(20). С. 4464–4480.
- [8] Dudko O. V., Lapteva A. A., Semenov K. T. About distribution of plane one-dimensional waves and their interaction with wall in the media, different resistance to tension and compression and their interaction with pregradaми в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // *Far Eastern Mathematical Journal*. 2005. № 6(1-2). С. 94–105. (in Russian).

Lapteva Anastasia Alexandrovna, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Junior Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.

Ragozina Victoria Evgenievna, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.

Dudko Olga Vladimirovna, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Leading Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.

М. В. Петров, Е. Г. Гоник, Б. В. Михайлов

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С СЫПУЧИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ НА ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Экспериментально и теоретически исследовано предельное состояние при изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек, имеющих начальные несовершенства геометрии. Изготовлены качественные образцы глубокой вытяжкой в матрице из листа и из трубы точением на токарном станке, имеющие геометрические несовершенства (толщины, диаметров). Материал образцов: алюминиевые сплавы 3004 и Д16Т. Перед испытанием образцы тщательно измерялись и обследовались на наличие дефектов. Изготовлен специальный стенд, к которому жестко одним концом крепились образцы, другой конец был свободным. На свободный конец прикладывалась ступенями поперечная сила до потери устойчивости. Испытывались пустые и заполненные железным порошком образцы. Фиксировались нагрузка и прогиб свободного конца образца индикатором часового типа ИЧ-10. Получены линейные зависимости прогиба от нагрузки, устойчивость терялась в упругости. Численные расчеты выполнялись в программном комплексе «Динамика-3». Для расчетов принимались идеальные образцы. Сопоставив критические нагрузки, полученные экспериментами и численными расчетами, судили о влиянии начальных несовершенств на предельное состояние. Численно рассчитанная критическая сила была всегда больше экспериментального значения. Начальные несовершенства образцов снижали критическую силу от 2,3% до 32,5%. У образцов с небольшими вмятинами в зоне потери устойчивости критическая сила уменьшилась в 1...2 раза. У заполненных железным порошком образцов критическая сила была больше до 40,5%, чем у пустых.

Ключевые слова: оболочка, устойчивость, дефекты, сыпучий материал, изгиб, критическая сила, образец.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.001

УДК: 539.3

Введение. В строительных, транспортных конструкциях, самолетостроении, кораблестроении используются тонкостенные оболочечные элементы конструкций, которые находятся в сложных напряженных и деформационных состояниях при изгибе, кручении, сжатии, комбинации нагрузений могут потерять устойчивость, что приводит к аварийным ситуациям, к разрушениям.

Много выполнено теоретических и экспериментальных исследований потери устойчивости и закритического поведения пустых тонкостенных оболочек различных видах нагружения [1–15]. Во всех работах не рассмотрены вопросы потери устойчивости при изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим наполнителем. В исследованиях отмечается большое расхождение результатов теоретических исследований с результатами экспериментов в два и более раз. Такое большое расхождение результатов объясняется наличием геометрических несовершенств оболочек, которые трудно учесть в теоретических исследованиях.

Классификация начальных несовершенств выполнено в работе [1], где различаются несовершенства, связанные с неоднородностью механических свойств материала, неточностью геометрических размеров, несовершенствами геометрической формы. Многообразие факторов свидетельствует о сложности и трудности исследований, которые снижают несущую способность оболочек. Влияние начальных неправильностей в форме оболочки в случае изгиба должно быть не так велико, как при осевом сжатии [2]. Начальные вмятины в растянутой зоне не должны сказываться сколь-нибудь существенно на поведении оболочки.

Теоретические и экспериментальные исследования потери устойчивости при изгибе и закритическое поведение тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом выполнены в трудах [16–23]. Однако в этих работах не рассмотрено влияние начальных несовершенств оболочек на их предельное состояние, поэтому исследования по этой тематике актуальны.

В данной работе рассмотрено влияние комплекса геометрических несовершенств тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим наполнителем, на их устойчивость при изгибе. Для оценки влияния начальных несовершенств оболочек на их устойчивость использовались относительная разница критических нагрузок, определяемых экспериментами и теоретическими расчетами. Для теоретических расчетов использовался программный комплекс «Динамика-3», аттестованный в научно-техническом центре по ядерной и радиационной безопасности [24], Госстандарте РФ [25].

© Петров М. В., Гоник Е. Г., Михайлов Б. В., 2020

Петров Михаил Васильевич

e-mail: rimmametova20@gmail.com, доктор технических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Гоник Екатерина Григорьевна

e-mail: katya.gonik@mail.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Михайлов Борис Васильевич

e-mail: boris.mihaylov.63@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 05.03.2020

Экспериментальные исследования выполнялись на модельных образцах, подобных натурным изделиям, изготавливаемых различными способами. Размеры образцов приведены в табл. 1.

Таблица 1. Размеры образцов

Серия образцов	Радиус R , мм	Толщина стенки h , мм	Длина L , мм	h/R	L/R	Материал образца
1	31,8	0,1	135	0,003	4,12	алюминиевый сплав 3004
2	41,6	0,12	165	0,0029	3,96	алюминиевый сплав 3004
3	41,2	0,42	171	0,01	4,15	сплав Д16Т
4	41,2	0,42	348	0,01	8,3	сплав Д16Т

Образцы первой и второй серии изготавливались из листов глубокой вытяжкой в матрице, поэтому они получились качественными. Образцы третьей и четвертой серий изготавливались из трубы за одну установку точением на токарном станке по наружной и внутренней поверхностям. Образцы тщательно обследовались на наличие дефектов. Геометрические размеры измерялись штангенциркулем с цифровым отсчетным устройством с точностью до 0,01 мм. Толщина стенки образцов измерялись микрометром с точностью до 0,001 мм. Наличие вмятин на наружной поверхности образцов проверялось световым тестером. Разброс толщины стенки образцов первой и второй серии было в пределах 0,01 мм, третьей и четвертой серии — в пределах 0,02 мм. Диаметры образцов первой и второй серий отличались до 0,1 мм, третьей и четвертой серий отличались до 0,25 мм. На некоторых образцах первой серии специально создавались вмятины глубиной до 0,1 мм в предполагаемой зоне потери устойчивости.

Для выполнения экспериментов был изготовлен специальный стенд, который позволял консольно закреплять образцы. Один конец образцов жестко защемлялся, а другой конец был свободным. На свободный конец образца прикладывалась сосредоточенная поперечная сила. Производилось ступенчатое нагружение через 10 Н, при приближении к моменту потери устойчивости нагружали по 1 Н и менее. На каждой ступени нагружения фиксировали усилие, прогиб свободного конца индикатором часового типа ИЧ-10. Испытывали по 10–15 образцов каждой серии, производилась статистическая обработка результатов. Испытывались пустые образцы и заполненные на 90% объема железным порошком. В табл. 2 приведены результаты экспериментов и численных расчетов критических сил. Численные расчеты выполнялись для образцов идеальных размеров, поэтому, сравнивая критические нагрузки, полученные из экспериментов и численных расчетов, сделали выводы о влиянии дефектов на предельное состояние.

Потеря устойчивости образцов происходила в зоне упругости, зависимость прогиба d от нагрузки линейная.

Из табл. 2 видно, что критическая сила для образцов, заполненных сыпучим материалом, значительно больше, чем для пустых образцов. Для образцов первой, второй, третьей, четвертой серий критическая сила увеличилась на 40,5%, 16,9%, 26,3%, 12,3% соответственно. Критическая сила, полученная численным расчетом, всегда больше, чем экспериментальное значение вследствие влияния различных дефектов образцов,

Таблица 2. Результаты экспериментов и численных расчетов критических сил

Серия образцов	Процент заполнения образца, %	Критическая сила F_{cr} , кН		Отличие F_{cr} , %	Увеличение F_{cr} для заполненного образца, %
		эксперимент	численный расчет		
1	0	0,153	0,16	4,5	
	90	0,215	0,223	3,7	40,5
2	0	0,262	0,269	2,7	
	90	0,341	0,349	2,3	16,9
3	0	1,77	2,21	25	
	90	2,235	2,7	20	26,3
4	0	0,83	1,1	32,5	
	90	0,932	1,20	28,75	12,3

ошибок эксперимента. Начальные несовершенства образцов снижали критическую силу от 2,3% до 32,5%. Для качественно изготовленных образцов первой и второй серии критические силы отличаются незначительно. У образцов первой серии с начальными небольшими вмятинами в зоне потери устойчивости критическая сила уменьшилась в 1...2 раза.

Выводы:

- 1) начальные несовершенства тонкостенных оболочек при изгибе всегда снижают значение критической нагрузки;
- 2) для заполненных сыпучим материалом образцов влияние начальных дефектов на устойчивость меньше, чем для пустых образцов;
- 3) тонкостенные оболочные элементы различных конструкций необходимо изготавливать очень качественно, отбраковывать элементы, имеющие какой-либо дефект.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Мильцын А. М. Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. Киев: Наукова Думка, 1977. 141 с.
- [2] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука, 1967. 984 с.
- [3] Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. Москва: Наука, 1978. 360 с.
- [4] Саченков А. В. О локальной устойчивости оболочек // Изв. Казан. филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1960. № 14. С. 35–42.
- [5] Коноплев Ю. Г. Экспериментальное исследование задачи о действии сосредоточенной силы на цилиндрическую оболочку // Исследования по теории пластин и оболочек. 1966. № 4. С. 83–90.
- [6] Ильгамов М. А. Экспериментальное исследование устойчивости консольно закрепленной цилиндрической оболочки под действием поперечной силы и внутреннего давления // Исследования по теории пластин и оболочек. 1964. № 2. С. 186–191.
- [7] Саченков А. В. Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. 1970. № 6/7. С. 391–433.
- [8] Бойко Д. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости овальных цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении изгибающим и крутящим моментами // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2007. № 3. С. 3–7.
- [9] Mathon C., Limam A. Experimental collapse of thin cylindrical shells submitted to internal pressure and pure bending // Thin-Walled Structure. 2006. Vol. 44. P. 39–50.
- [10] Li L.-Y., Kettle R. Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending // Int. Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, no. 3. P. 765–781.

- [11] Brazier L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other “Thin” Sections // Proceedings of the Royal Society. Vol. 116(773) of A. 1927. P. 104–114.
- [12] Chen L., Doerich C., Rotter J. M. A study of cylindrical shells under global bending in the elastic-plastic range // Steel Construction — Design and Research. 2008. Vol. 1, no. 1. P. 59–65.
- [13] Houliara S., Karamanos S. Stability of long transversely-isotropic elastic cylindrical shells under bending // Int. Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. P. 10–24.
- [14] Rotter J. M., Sadowski A. J., Chen L. Nonlinear stability of thin elastic cylinders of different length under global bending // Int. Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. P. 2826–2839.
- [15] Nonlinear behaviour of short elastic cylindrical shells under global bending / O. K. Fajuyitan, A. J. Sadowski, M. A. Wadee et al. // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 124. P. 574–587.
- [16] Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2(24). С. 119–125.
- [17] Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending / V. G. Bazhenov, E. G. Gonik, A. I. Kibets et al. // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol. 28. P. 16–20.
- [18] Гоник Е. Г., Федорова Т. Г. Конечно-элементное моделирование взаимодействия упругопластического сыпучего наполнителя с оболочкой при изгибе // Тез. докл. V Междунар. научн. семинара “Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы” / Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). 2016. С. 51–53.
- [19] Исследование упругопластического изгиба и потери устойчивости оболочек вращения с учетом контактного взаимодействия с сыпучим наполнителем / Е. Г. Гоник, А. И. Кибец, М. В. Петров [и др.] // Динамические и технологические проблемы механики и конструкций и сплошных сред: мат. XXIII Междунар. симп. им. А. Г. Горшкова. 2017. С. 57–59.
- [20] Влияние геометрических размеров тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом, на устойчивость при изгибе / Е. Г. Гоник, М. В. Петров, Т. Г. Федорова [и др.] // Мат. X Всеросс. конф. по механике деформируемого твердого тела. 2017. С. 170–173.
- [21] Влияние несовершенств геометрии тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, на их устойчивость при изгибе / М. В. Петров, Т. Г. Федорова, Б. В. Михайлов [и др.] // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: Мат. IV Междунар. (X Всеросс.) конф. НАСКР-2018. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2018. С. 148–156.
- [22] Способ приближенного расчета на устойчивость при поперечном изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины, заполненных сыпучим материалом / М. В. Петров, Т. Г. Федорова, Е. Г. Гоник [и др.] // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2018. № 4(38). С. 120–128.
- [23] Гоник Е. Г., Петров М. В. Расчет предельного состояния тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе, заполненных сыпучим наполнителем // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2019. № 2(40). С. 117–127.
- [24] Вычислительный комплекс “Динамика-3”. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС№325 от 18.04.2013.
- [25] Программный продукт “Пакет прикладных программ для решения трехмерных задач нестационарного деформирования конструкций, включающих массивные тела и оболочки, “Динамика-3” (ППП “Динамика 3”): Сертификат соответствия Госстандарта России № РОССТРУ.МЕ20.Н00338.

M. V. Petrov, E. G. Gonik, B. V. Mikhailov

INFLUENCE OF INITIAL IMPERFECTIONS OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS WITH LOOSE AGGREGATE ON THEIR BENDING STABILITY

Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. The limit state for bending thin-walled cylindrical shells with initial geometry imperfections has been studied experimentally and theoretically. High-quality samples are made by deep drawing in a matrix from a sheet and from a pipe by turning on a lathe, which have geometric imperfections (thickness, diameter). The material of the samples is aluminum alloys 3004 and D16T. Before testing, the samples were carefully measured and examined for defects. A special stand was made, to which samples were rigidly attached at one end, while the other end was free. A transverse force was applied to the free end in steps until it lost stability. Empty and iron-powder-filled samples were tested. The load and deflection of the free end of the sample were recorded by an ICH-10 clock type indicator. Linear dependences of the deflection on the load were obtained; stability was lost in elasticity. Numerical calculations were performed in the Dynamics-3 software package. Ideal samples were taken for calculations. Comparing the critical loads obtained by experiments and numerical calculations, we judged the effect of initial imperfections on the limit state. The numerically calculated critical force was always greater than the experimental value. Initial imperfections of the samples reduced the critical force from 2.3% to 32.5%. For samples with small dents in the zone of loss of stability, the critical force decreased by 1.2 times. In iron powder-filled samples, the critical force was greater by up to 40.5% than in empty samples.

Keywords: shell, stability, defects, bulk material, bending, critical force, sample.

REFERENCES

- [1] Mossakovsky V. I., Manevich L. I., Miltsyn A. M. Modeling the bearing capacity of cylindrical shells. Kiev: Naukova Dumka, 1977. 141 p. (in Russian).
- [2] Vol'mir A. S. Stability of deformable systems. Moscow: Nauka, 1967. 984 p. (in Russian).
- [3] Grigolyuk E. I., Kabanov V. V. Stability of shells. Moscow: Nauka, 1978. 360 p. (in Russian).
- [4] Sachenkov A. V. On the local stability of shells // *Izv. Kazan. branch of the USSR Academy of Sciences. Ser. Phys.-Mat. and tech. sciences*. 1960. no. 14. P. 35–42. (in Russian).
- [5] Konoplev Y. G. Experimental study of the problem of the action of a concentrated force on a cylindrical shell // *Research on the theory of plates and shells*. 1966. no. 4. P. 83–90. (in Russian).
- [6] Ilgamov M. A. Experimental study of the stability of a cantilevered cylindrical shell under the action of a transverse force and internal pressure // *Research on the theory of plates and shells*. 1964. no. 2. P. 186–191. (in Russian).
- [7] Sachenkov A. V. Theoretical and experimental method for studying the stability of plates and shells // *Research on the theory of plates and shells*. 1970. no. 6/7. P. 391–433. (in Russian).
- [8] Boyko D. V., Zheleznov L. P., Kabanov V. V. Investigation of nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under combined loading by bending and torques // *News of higher educational institutions. Aviation equipment*. 2007. no. 3. P. 3–7. (in Russian).

Mikhail Vasilyevich Petrov, Doctor of Engineering, Professor, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Ekaterina Grigoryevna Gonik, Senior Lecturer, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Boris Vasilyevich Mikhailov, Candidate of technical Sciences, Associate Professor, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

- [9] Mathon C., Limam A. Experimental collapse of thin cylindrical shells submitted to internal pressure and pure bending // *Thin-Walled Structure*. 2006. Vol. 44. P. 39–50.
- [10] Li L.-Y., Kettle R. Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending // *Int. Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39, no. 3. P. 765–781.
- [11] Brazier L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other “Thin” Sections // *Proceedings of the Royal Society*. Vol. 116(773) of *A*. 1927. P. 104–114.
- [12] Chen L., Doerich C., Rotter J. M. A study of cylindrical shells under global bending in the elastic-plastic range // *Steel Construction — Design and Research*. 2008. Vol. 1, no. 1. P. 59–65.
- [13] Houliara S., Karamanos S. Stability of long transversely-isotropic elastic cylindrical shells under bending // *Int. Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47. P. 10–24.
- [14] Rotter J. M., Sadowski A. J., Chen L. Nonlinear stability of thin elastic cylinders of different length under global bending // *Int. Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. P. 2826–2839.
- [15] Nonlinear behaviour of short elastic cylindrical shells under global bending / O. K. Fajuyitan, A. J. Sadowski, M. A. Wadee et al. // *Thin-Walled Structures*. 2018. Vol. 124. P. 574–587.
- [16] Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonik E. G. Experimental study of the loss of stability of thin-walled shells under pure bending // *Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. ya. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state*. 2015. no. 2(24). P. 119–125. (in Russian).
- [17] Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending / V. G. Bazhenov, E. G. Gonik, A. I. Kibets et al. // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28. P. 16–20.
- [18] Gonik E. G., Fedorova T. G. Finite element modeling of the interaction of an elastic-plastic bulk filler with a shell during bending // *Abstracts of reports V Int. scientific seminar “Dynamic deformation and contact interaction of thin-walled structures under the influence of fields of different physical nature” / Moscow aviation Institute (national research University)*. 2016. P. 51–53. (in Russian).
- [19] Investigation of elastic-plastic bending and loss of stability of the shells of rotation, taking into account contact interaction with a loose aggregate / E. G. Gonik, A. I. Kibets, M. V. Petrov et al. // *Dynamic and technological problems of mechanics and structures and continuous media: materials of the XXIII Int. Symposium is named after A. G. Gorshkov*. 2017. P. 57–59. (in Russian).
- [20] Influence of geometric dimensions of thin-walled shells filled with bulk material on bending stability / E. G. Gonik, M. V. Petrov, T. G. Fedorova et al. // *Proceedings of the X all-Russian conference on deformable solid mechanics*. 2017. P. 170–173. (in Russian).
- [21] Influence of imperfections in the geometry of thin-walled cylindrical shells filled with bulk material on their bending stability / M. V. Petrov, T. G. Fedorova, B. V. Mikhailov et al. // *New in architecture, design of building structures and reconstruction: materials of the IV International (X all-Russian) conference NASKR-2018. Cheboksary: Publishing house of the Chuvash. University’s, 2018. P. 148–156. (in Russian)*.
- [22] Method for approximate calculation of stability under transverse bending of thin-walled cylindrical shells of medium length filled with bulk material / M. V. Petrov, T. G. Fedorova, E. G. Gonik et al. // *Bulletin of ChGPU named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state*. 2018. no. 4(38). P. 120–128. (in Russian).
- [23] Gonik E. G., Petrov M. V. Calculation of the limit state of thin-walled cylindrical shells filled with loose aggregate during bending // *Bulletin of ChGPU named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state*. 2019. no. 2(40). P. 117–127. (in Russian).
- [24] Computer complex “Dynamics-3”. Scientific and technical center for nuclear and radiation safety. Certification passport of the software. Registration passport of certification PS No. 325 dated 18.04.2013. (in Russian).
- [25] Software product “Package of application programs for solving three-dimensional problems of non-stationary deformation of structures including massive bodies and shells, “Dynamics-3” (SPP “Dynamics 3”): Certificate of conformity of the state standard of Russia no. ROSRU.ME20.H00338. (in Russian).

Ю. В. Астапов, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич

ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОНИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА С УПРУГИМ ЦИЛИНДРОМ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. В данной работе исследуется поведение эластомера при взаимодействии с жестким штампом, вершина которого имеет форму конуса. В качестве определяющих соотношений используются модель материала Генки и ее обобщение для описания физически-нелинейного отклика. Проведено сравнение результатов численного решения с кривыми, полученными из рассмотрения поставленной задачи в рамках линейной модели с использованием теории Герца. В работах [10, 11] показана принципиальная возможность определения параметров модели гиперупругости на основе определяющих соотношений Генки-Мурнагана из экспериментов по индентированию сферическим штампом. Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы для построения методики определения параметров нелинейно-упругой модели из экспериментов по индентированию коническим штампом.

Ключевые слова: конечные деформации, тензор Генки, модель Генки-Мурнагана, индентирование, конический индентор, определяющие соотношения, метод конечных элементов

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.002

УДК: 539.3

Введение. В статье построена численная модель процесса индентирования слабо-сжимаемого нелинейно упругого цилиндрического тела из резиноподобного материала коническим индентором, рассматриваемым как абсолютно твердое тело. Задача относится к классу контактных задач с переменной зоной контакта. Известно [1–3],

© Астапов Ю. В., Соколова М. Ю., Христич Д. В., 2020

Астапов Юрий Владимирович

e-mail: ast3x3@gmail.com,

аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Соколова Марина Юрьевна

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Христич Дмитрий Викторович

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1)

Поступила 10.08.2020

что общая вариационная постановка контактной задачи, относящаяся к классу задач с ограничениями в виде неравенств, может быть представлена в форме квазивариационного неравенства. В работах А.С. Кравчука [4, 5] приведены необходимые выкладки, обосновывающие численное решение упругих и упругопластических задач в квазивариационной постановке с использованием модификации итерационного алгоритма Удзавы для поиска седловой точки соответствующего функционала. Существует множество подходов, реализующих численное решение краевой задачи конечного деформирования твердого тела с учетом механического взаимодействия. Обычно используется сеточная дискретизация расчетной области в рамках метода конечных элементов [2, 6–8]. Одной из основных проблем при использовании сеточных методов является определение пар взаимодействующих поверхностей контактирующих тел. В данной статье вариационная постановка задачи основывается на использовании условия равновесного протекания процесса, предложенного в работах Маркина А.А. [9]. Задача об изменении зоны контакта деформируемого материала с жестким индентором решается на уровне алгоритма, предложенного в работах [10, 11]. Для описания конечных деформаций цилиндрического тела используется модель Генки-Мурнагана, предложенная в работах [11, 12].

Постановка задачи подробно изложена в статье [10] и включает в себя:

1) определяющие соотношения модели Генки-Мурнагана, связывающие обобщенный «повернутый» тензор напряжений $\Sigma_{\mathbf{R}} = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^{-1}$ и тензор логарифмических деформаций Генки $\mathbf{\Gamma}$:

$$\Sigma_{\mathbf{R}} = \sigma_0 \mathbf{E} + \tau_e \tilde{\mathbf{\Gamma}} + \tau_q \mathbf{Q}, \quad (1)$$

где σ_0 , τ_e , τ_q – функции инвариантов меры деформации: θ – относительного изменения объема и $e = \sqrt{\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}}$ – интенсивности формоизменения, определенные следующим образом: $\sigma_0 = K\theta + \frac{C_1}{6\sqrt{3}}\theta^2 + \frac{C_2}{6\sqrt{3}}e^2$, $\tau_e = 2G + \frac{C_2}{3\sqrt{3}}\theta$, $\tau_q = C_3$. Тензор $\tilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{E}$ – дивидатор тензора логарифмических деформаций, а тензор \mathbf{Q} определяется как дивидатор тензора $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^2$;

2) кинематические соотношения, определяющие тензор логарифмических деформаций $\mathbf{\Gamma}$ через аффинор деформаций $\mathbf{\Phi}$ и его симметричную составляющую \mathbf{U} в полярном разложении $\mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$:

$$\mathbf{\Gamma} = \ln \mathbf{U}; \quad (2)$$

3) условия равновесного протекания процесса деформирования в вариационной форме [9]

$$\int_V \left(\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \int_{\Sigma} \left(\dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} \left(\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma, \quad (3)$$

где \mathbf{S} – тензор истинных напряжений Коши, $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla)$ – тензор деформации скорости, $\mathbf{P}^{(n)}$ и $\dot{\mathbf{P}}^{(n)}$ – поверхностная нагрузка и скорость ее изменения соответственно;

4) начальные условия определяют в начальный момент времени перемещения и напряжения:

$$\mathbf{S}|_{t=0} = 0, \mathbf{u}|_{t=0} = 0; \quad (4)$$

5) граничные условия, задающие на части поверхности тела нагрузку, а на части поверхности – перемещения:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_P, \quad \forall t > t_0, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_u, \quad \forall t > t_0. \quad (6)$$

Уравнения (1) - (3) с условиями (4) - (6) составляют систему уравнений, которая решается численными методами конечных элементов и пошагового нагружения.

Учет переменной зоны контакта. В общем случае зона контакта деформируемого тела с жесткой преградой Σ_c переменна и подлежит определению. Форма абсолютно жесткой матрицы может быть задана кусочно-гладкой поверхностью в параметрическом виде $\psi(r, z) : r = r(\xi), z = z(\xi)$, где $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$ – монотонный параметр, причем $\psi(r, z) < 0$, если точка (r, z) находится внутри поверхности матрицы, $\psi(r, z) > 0$, если точка (r, z) находится с внешней стороны поверхности матрицы и $\psi(r, z) = 0$ на поверхности.

На поверхности взаимодействия Σ_c могут быть заданы следующие условия:

- условие полного прилипания:

$$\mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Sigma_c, \quad (7)$$

- условие свободного скольжения:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Sigma_c, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ – вектор контактного давления, \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ – соответственно внешняя нормаль и касательная к кривой ψ .

Для всех точек упругого тела, занимающего объем V , должно выполняться условие взаимного непроникновения с жесткой матрицей:

$$\psi(r_M, z_M) > 0, \quad \forall M \in V \quad (9)$$

На границе контакта Σ_c упругого тела и жесткой матрицы принимается условие неотрицательности нормальных реакций:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Sigma_c. \quad (10)$$

Для отслеживания изменения зоны Σ_c и корректного задания граничных условий на ней используется процедура, дополняющая процедуру пошагового нагружения. На внешней стороне штампа вводится полоса достаточно малой по сравнению с характерным размером элемента ширины ε , как показано на рисунке 1. На начало шага нагружения для всех контактных узлов, то есть узлов, попавших в зону ε , задается условие полного прилипания (7). Далее производится решение краевой задачи.

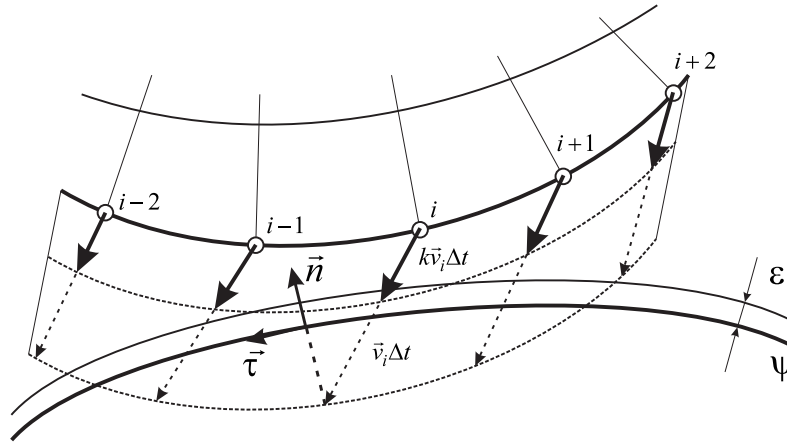


Рис. 1. Схема учета изменяющейся зоны контакта

После этого условия (9) и (10) проверяются для всех граничных узлов сетки. Если хотя бы для одного узла одно из условий не выполняется, шаг интегрирования уменьшается, и интегрирование производится повторно. Цикл продолжается до тех пор, пока для всех узлов не будут удовлетворены условия (9) и (10). После этого производится проверка всех узлов границы, и узлы, попавшие в полосу ε , считаются контактными. Для них задаются кинематические ограничения (7) или (8). Для каждого элемента, узлы которого считаются контактными, вычисляются текущие величины реакции штампа σ . Если в каком-либо элементе на границе условие (10) не выполняется, то на его контактном ребре задается касательная нагрузка $\sigma_{\tau} = -\mu |\sigma_n| \frac{(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}}{|\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}|}$, а контактирующие узлы полагаются свободно-скользящими. Блок-схема описанной процедуры приведена на рисунке 2.

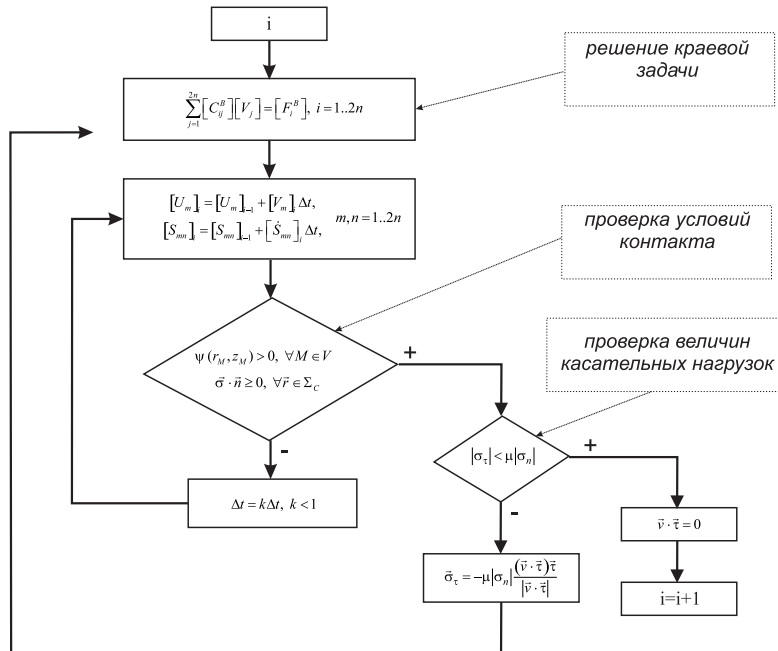


Рис. 2. Блок-схема процедуры дробления шага интегрирования и учета граничных условий

Процедура, описанная блок-схемой, необходима для определения значения параметра дробления k шага нагружения Δt , при котором условия (9) и (10) выполняются для всех контактных узлов сетки. Работа алгоритма была отработана и проверена на задачах, имеющих аналитическое решение [10, 13, 14].

Результаты решения задачи об индентировании упругого цилиндра коническим индентором. Индентированием называют процесс осесимметричного взаимодействия деформируемого тела с жесткой матрицей, имеющей вершину специальной формы. Схема нагружения, описывающая индентирование конической матрицей, показана на рисунке 3. Произведены расчеты для различных углов раствора индентора β . Граничные и начальные условия для этой схемы нагружения также приведены на рисунке 3.

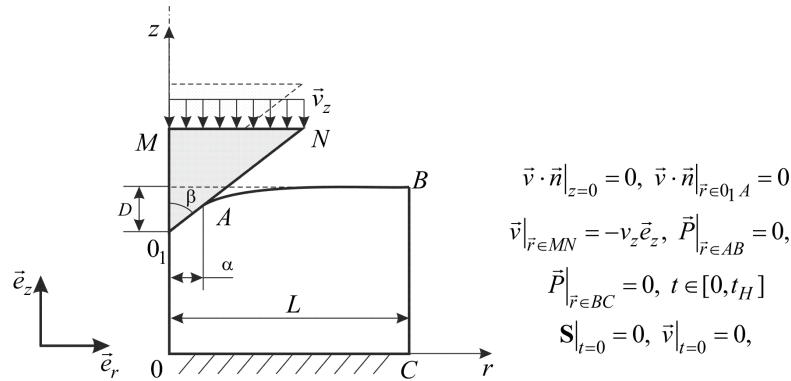


Рис. 3. Расчетная схема задачи о взаимодействии конической матрицы с основанием цилиндра

В статье [15] приведено решение этой задачи для случая малых деформаций. Зависимость главного вектора усилия P от осадки D имеет вид:

$$P(D) = \frac{8D^2 E}{3\pi c t g \beta}. \quad (11)$$

Зависимость радиуса области контакта α от главного вектора приложенной нагрузки P имеет вид:

$$\alpha(P) = \sqrt{\frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E c t g \beta}}. \quad (12)$$

Распределение величины контактных напряжений σ_n в зоне контакта $[0, \alpha]$ имеет следующий вид:

$$\sigma_n(r) = \sigma_0 \ln \left(\frac{\alpha}{r} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 - 1} \right), \quad \sigma_0 = \frac{ED}{\pi \alpha (1-\nu^2)}, \quad r \in [0, \alpha]. \quad (13)$$

В данной статье расчеты проводились для материала, механические характеристики которого в рамках модели Генки-Мурнагана определяются следующими значениями констант: $E = 2$ МПа, $\nu = 0,499$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = -50$ МПа. Основные результаты расчетов приведены на рисунках 4-6. На рисунке 4 приведены распределения нормального контактного давления σ_n , вычисленного по формуле (13), для различных значений действующего главного вектора нагрузки P при взаимодействии с индентором с углом $\beta = 80^\circ$.

Кривые распределения давлений показывают, что при малых деформациях численная модель дает удовлетворительное совпадение с аналитическим решением, что, в первую очередь, подтверждает работоспособность предложенного алгоритма учета граничных условий. С ростом приложенного усилия деформации увеличиваются, и между аналитическим и численным решениями возникают отклонения, связанные с тем, что в численной модели учитывается геометрическая и физическая нелинейность в поведении деформируемого цилиндра. Учет нелинейности деформирования вносит поправки в вычисления нормального давления на матрицу, не превышающие 10%.

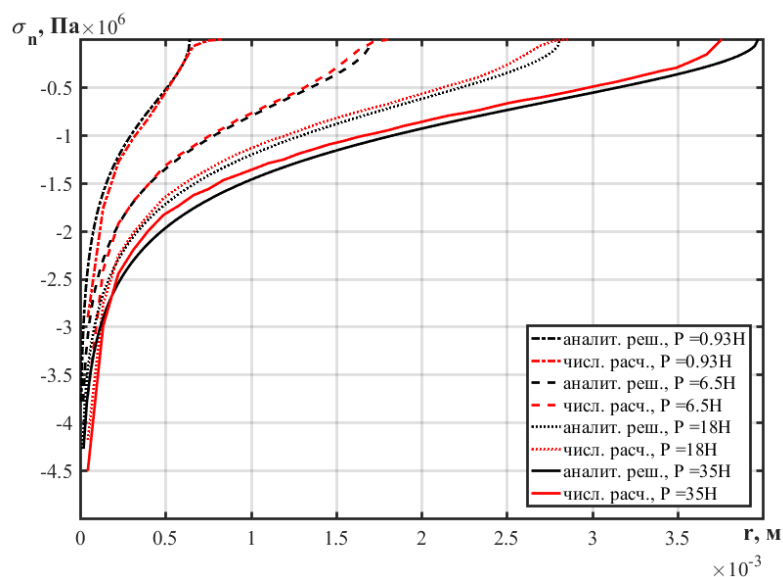


Рис. 4. Распределение давления σ_n на границе Σ_c для различных стадий индентирования конической матрицей для $\beta = 80^\circ$

На рисунке 5 приведены кривые индентирования, представляющие собой зависимость главного усилия P от осадки D , для значений угла раствора конического индентора $\beta = 70^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, полученные как численно, так и аналитически. С увеличением угла раствора конического индентора усилие возрастает и увеличивается влияние нелинейности модели на результаты расчета.

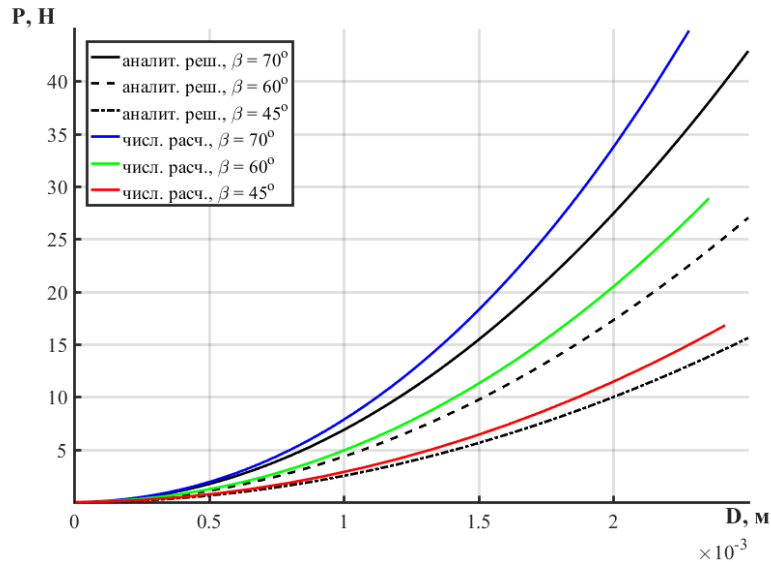


Рис. 5. Зависимость главного вектора усилия P от величины осадки конической матрицы D

Конечно-элементная модель позволяет получить не только интегральные характеристики процесса индентирования (рисунки 4 и 5), но и проанализировать распределение напряжений в деформируемом теле. На рисунке 6 приведены поля компонент тензора истинных напряжений Коши в цилиндре радиусом 0,03 м при индентировании его конической матрицей с углом раствора 60° . Графики, приведенные на рисунке 6, показывают, что наибольшие напряжения действуют в очаге напряжений под индентором. В части цилиндра, находящейся под свободной поверхностью, напряжения практически отсутствуют.

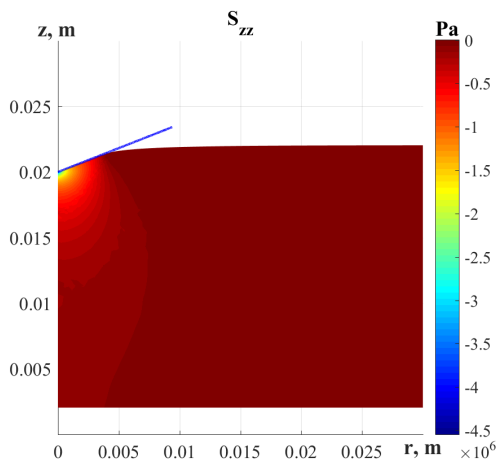


Рис. 6а. Распределение осевых S_{zz} напряжений в цилиндре при $P=35\text{Н}$

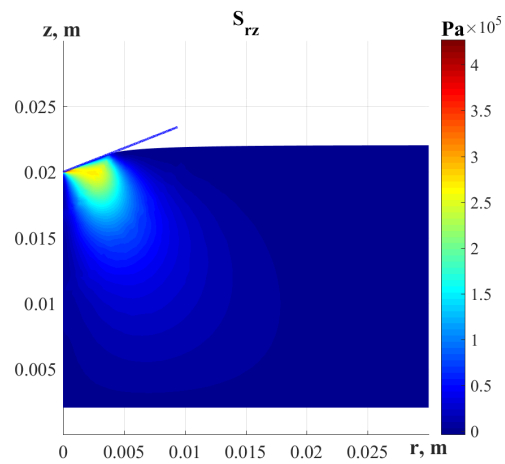


Рис. 6б. Распределение сдвиговых S_{rz} напряжений в цилиндре при $P=35\text{Н}$

Выводы. Результаты моделирования процесса индентирования упругого цилиндра коническим индентором демонстрируют применимость построенной процедуры учета

смешанных граничных условий контактного типа к решению задач о взаимодействии нелинейно-упругих тел с абсолютно-жесткими матрицами. Модель дает удовлетворительное соответствие результатов аналитическому решению, полученному в [15] для малых деформаций, при относительно небольших значениях усилий. Отклонения, связанные с учетом нелинейности материала и конечности деформаций, в рассмотренной задаче не превышают 10-15%.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 45–87.
- [2] Wriggers P. Finite Element Algorithms for Contact Problems // Archives of Computational Methods in Engineering. 1995. Vol. 2, no. 4. P. 1–49.
- [3] G. Xiaoming Z. R., Yingle S. On the mathematical modeling for elastoplastic contact problem and its solution by quadratic programming // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 2. P. 8133–8150.
- [4] Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44, № 1. С. 122–129.
- [5] Кравчук А.С. О решении трехмерных контактных задач с трением // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 3. С. 485–496.
- [6] Z.-Q. Feng F. P., Labed N. Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz-Ko hyperelastic bodies // International Journal of Engineering Science. 2003. Vol. 41, no. 1. P. 2213–2225.
- [7] F.J. Cavalieri A. Cardona V. F., Risso J. A finite element formulation for nonlinear 3d contact problems // Mecanica Computacional. Solid Mechanics. 2007. Vol. V. XXVI, no. 16. P. 1357–1372.
- [8] Morev P. A variational statement of quasistatic “rigid-deformable” contact problems at large strain involving generalized forces and friction // Acta Mechanica. 2011. Vol. 222. P. 115–130.
- [9] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [10] Астапов Ю.В., Христич Д.В. Численное и экспериментальное моделирование процесса индентирования резиновых образцов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 36, № 2. С. 65–73.
- [11] A.A. Markin D.V. Kchristich S., Astapov Y. The physically nonlinear model of an elastic material and its identification // International Journal of Applied Mechanics. 2019. Vol. 11, no. 7. p. 1950064 (13 p.).
- [12] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 68–75.
- [13] Астапов Ю.В., Маркин А.А. Конечные деформации упругих тел при взаимодействии с жесткой шероховатой плоскостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. Т. 29, № 3. С. 64–75.
- [14] Астапов Ю.В. Внедрение сферического индентора в основание упругого и гипопругого круговых цилиндров при конечных деформациях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. Т. 32, № 2. С. 107–116.
- [15] Giannakopoulos A., Panagiotopoulos D. Conical indentation of incompressible rubber-like materials // International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46. P. 1436–1447.

Iu. V. Astapov, M. Iu. Sokolova, D. V. Khristich

THE PROBLEM OF THE INTERACTION OF A CONICAL INDENTER WITH AN ELASTIC CYLINDER

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. In this paper, we investigate the behavior of an elastomer when interacting with a rigid punch, the top of which is cone-shaped. Hencky's material model and its generalization to describe the physically nonlinear response are used as the constitutive relations. The results of the numerical solution are compared with the curves obtained from considering the problem in the framework of a linear model using the Hertz theory. The works [10, 11] show the fundamental possibility of determining the parameters of the hyperelasticity model based on the Hencky-Murnaghan constitutive relations from experiments on indentation with a spherical stamp. The results obtained in this work can be used to construct a method for determining the parameters of a nonlinear elastic model from experiments on indentation with a conical stamp.

Keywords: finite deformations, Hencky tensor, Hencky-Murnaghan model, indentation, conical indenter, constitutive relations, finite element method.

REFERENCES

- [1] Bourago N.G., Kukudzhanov V.N. A review of contact algorithms // Russian Academy of Sciences tidings. Mechanics of Solids. 2005. № 1. С. 45–87. (in Russian).
- [2] Wriggers P. Finite Element Algorithms for Contact Problems // Archives of Computational Methods in Engineering. 1995. Vol. 2, no. 4. P. 1–49.
- [3] G. Xiaoming Z. R., Yingle S. On the mathematical modeling for elastoplastic contact problem and its solution by quadratic programming // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 2. P. 8133–8150.
- [4] Kravchuk A.S. On the theory of contact problems taking account of friction on the contact surface // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1980. T. 44, № 1. С. 122–129. (in Russian).
- [5] Kravchuk A.S. The solution of three-dimensional friction contact problems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2008. T. 72, № 3. С. 485–496. (in Russian).
- [6] Z.-Q. Feng F. P., Labeid N. Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz-Ko hyperelastic bodies // International Journal of Engineering Science. 2003. Vol. 41, no. I.19. P. 2213–2225.
- [7] F.J. Cavalieri A. Cardona V. F., Risso J. A finite element formulation for nonlinear 3d contact problems // Mecanica Computacional. Solid Mechanics. 2007. Vol. V. XXVI, no. 16. P. 1357–1372.
- [8] Morev P. A variational statement of quasistatic rigid-deformable contact problems at large strain involving generalized forces and friction // Acta Mechanica. 2011. Vol. 222. P. 115–130.
- [9] Markin A. A., Sokolova M. Iu. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 c.

Astapov Iurii Vladimirovich

e-mail: ast3x3@gmail.com, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

Sokolova Marina Iurevna

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Khristich Dmitrii Viktorovich

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

-
- [10] Astapov Yu. V., Khristich D. V. Numerical and experimental modeling of indentation process of resin specimens // Vestnik ChGPU Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2018. T. 36, № 2. С. 65–73. (in Russian).
- [11] A.A. Markin D.V. Khristich S., Astapov Y. The physically nonlinear model of an elastic material and its identification // *International Journal of Applied Mechanics*. 2019. Vol. 11, no. 7. p. 1950064 (13 p.).
- [12] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Variant of the relations of nonlinear elasticity // *Mechanics of Solids*. 2019. № 6. С. 68–75. (in Russian).
- [13] Astapov Yu.V., Markin A.A. Finite deformations of the elastic bodies under the interaction with the rigid rough plane // Vestnik ChGPU Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2016. T. 29, № 3. С. 64–75. (in Russian).
- [14] Astapov Yu.V. The rigid spherical indentation into the bottom of elastic and hypoelastic circular cylinders under finite deformations // Vestnik ChGPU Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2017. T. 32, № 2. С. 107–116. (in Russian).
- [15] Giannakopoulos A., Panagiotopoulos D. Conical indentation of incompressible rubber-like materials // *International Journal of Solids and Structures*. 2009. Vol. 46. P. 1436–1447.

Ю. Н. Радаев

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО АЗИМУТА В МИКРОПОЛЯРНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается система двух связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости, сформулированная в терминах перемещений и микровращений в случае гармонической зависимости перемещений и микровращений от времени. Вводятся потенциалы перемещений и микровращений. Выполнено расщепление связанных векторных дифференциальных уравнений микрополярной теории упругости для потенциалов на несвязанные винтовые уравнения, опираясь на пропорциональность (с разными масштабными факторами) вихревых составляющих перемещений и микровращений только одному вихревому винтовому полю. Найдено представление векторов перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторов. Оно обеспечивает выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости. Проблема нахождения вихревых составляющих перемещений и микровращений приведена к решению четырех несвязанных между собой векторных винтовых дифференциальных уравнений. Получено представление перемещений и микровращений с помощью двух несвязанных метагармонических векторов. Выполнено разделение пространственных переменных в уравнениях Гельмгольца в цилиндрической системе координат. Определены решения скалярного и векторного уравнений Гельмгольца в бесконечной цилиндрической области, содержащие ряд произвольных постоянных. В явном виде найдены представления векторов перемещений и микровращений в длинном линейном микрополярном цилиндре, содержащие восемь произвольных постоянных. Такого рода решения определяют формы гармонических волн перемещений и микровращений, распространяющихся вдоль оси длинного кругового цилиндра. Полученные представления для гармонических волн перемещений и микровращений имеют смысл только для волн, характеризующихся заданным азимутальным числом.

Ключевые слова: микрополярная теория упругости, вектор перемещения, вектор микровращения, векторный потенциал, вихревая часть, уравнение Гельмгольца, волна, цилиндр, волновое число, азимутальное число

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.003

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Микрополярная теория упругости в исторической перспективе восходит к классическому сочинению [1]. Модель микрополярного континуума несомненно обладает более высокой общностью, по сравнению с классической теорией упругости [2], что в конечном счете позволяет получать качественно новые теоретические результаты при решении краевых задач статики и динамики. Отличительной особенностью микрополярного тела является наличие помимо силовых также и моментных напряжений. Они характеризуются асимметричными тензорами второго ранга (при псевдотензорном описании — соответственно абсолютным и относительным тензором веса $+2$). То же самое относится и к тензору деформации. Генераторами моментных напряжений могут выступать многие реальные материалы с микроструктурными неоднородностями: поликристаллические материалы, композиты, суспензии, бетоны, горные породы, тканые материалы и биоматериалы.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением упругого изотропного и центрально-симметричного тела при малых деформациях в изотермических условиях и для состояний, мало отличающихся от естественного состояния. Такое тело характеризуется 6-ю независимыми определяющими постоянными (общий случай анизотропии требует оперирования с 171-ой постоянной).

Уравнения микрополярной теории упругости достаточно хорошо известны [3–5] (см. также более ранние первоисточники [6–9]); их вывод, основанный на принципе виртуальных перемещений, имеется в статье [10]. Второй раздел работы будет посвящен уравнениям динамики микрополярного упругого тела, полученным различными авторами, в трех основных вариантах (двумя из них мы обязаны В. Новацкому и Г. Нейберу). Следует отметить, что уравнения, предложенные В. Новацким, получили наиболее широкое распространение в научной литературе, несмотря на то, что их абсолютная тензорная форма часто (как в случае с гемитропными средами) скрывает по существу их псевдотензорный характер.

С точки зрения кинематики микрополярный континуум характеризуется двумя векторными полями: полем перемещений и полем микровращений (микроповоротов). Вектор перемещений является абсолютным тензором, т.е. преобразуется по обычному тензорному закону. Вектор микровращений вводится в теорию микрополярной упругости как относительный тензор веса $+1$. Поэтому, например, его компоненты не меняют знак при полной инверсии трехмерного пространства или простой перенумерации осей координатной системы, преобразующей ее из левоориентированной в правоориентированную. Переход от относительного вектора микровращений к абсолютному без

© Радаев Ю. Н., 2020

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 01.09.2020

труда осуществляется с помощью ориентирующего трехмерное пространство псевдо-скаляра. Последнее обстоятельство позволяет сразу же вести все дальнейшее изложение в терминах абсолютных векторов, что характерно для подавляющего числа публикаций, посвященных микрополярной теории упругости.

Целью представляемой работы является исследование связанной системы векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории изотропного упругого тела в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени. Их изучение и преобразование с помощью динамических потенциалов (безвихревых и вихревых) приводит к различным системам векторных дифференциальных уравнений (как связанным, так и не связанным). С теоретической и прикладной точек зрения наиболее интересны только те, которые обеспечивают переход от связанных уравнений к несвязанным. Родственные проблемы и постановки задач возникают также в прикладных задачах связанной термоупругости [11] и особенно в вопросах распространения гармонических волн в *гиперболических* термоупругих средах [12].

В представляемой работе, которая по-существу представляет собой обобщение методов и результатов [13], развивается альтернативная схема расщепления основной связанной системы векторных дифференциальных уравнений гармонической микрополярной теории упругости на несвязанные уравнения. Последние будут иметь форму *винтовых уравнений*. Полнота рассматриваемых в работе представлений гармонических полей перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторных полей может быть установлена известными достаточно простыми методами, изложение которых может быть найдено в работе [13]. Приведенные в статье результаты подразумевают их дальнейшее использование в прикладных задачах, связанных с распространением гармонических (монохроматических) волн перемещений и микровращений вдоль длинных цилиндрических волноводов и в этом смысле выступают как дальнейшее развитие методов и результатов, содержащихся в книге [12]. В целом, данная статья может рассматриваться как наиболее полный источник сведений, касающихся гармонической задачи линейной микрополярной теории упругости.

2. Три основных варианта динамических уравнений линейной теории микрополярной упругости. Система связанных векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории упругости имеет вид [10]:

$$\begin{cases} G[(1 + c_1)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2c_1 \nabla \times \boldsymbol{\phi}] = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ GL^2[(1 + c_2)\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} + (1 - c_2 + 2c_3)\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi}] - 2Gc_1(2\boldsymbol{\phi} - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathcal{J} \partial_t^2 \boldsymbol{\phi}. \end{cases} \quad (1)$$

где ρ — плотность; \mathcal{J} — коэффициент микроинерции; \mathbf{u} — вектор перемещения; $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращения; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная длина микрополярной теории упругости; c_1, c_2, c_3 — физически безразмерные определяющие постоянные; ∇ — трехмерный оператор Гамильтона; ∂_t — частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных.

Приведенная выше система векторных дифференциальных уравнений с частными производными (1) представляется наиболее приемлемой с физической точки зрения. Однако в современной литературе она не получила широкого распространения, поскольку оптимальным считается другой набор определяющих постоянных. По этой

причине введем новые определяющие постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \varepsilon$ согласно

$$G = \mu, \quad \frac{2\nu}{1-2\nu} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad GL^2 = \gamma,$$

$$c_1 = \frac{\alpha}{\mu}, \quad c_2 = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad c_3 = \frac{\beta}{2\gamma}.$$

Заметим, что они систематически используются в монографиях [3, 4] и множестве других публикаций, посвященных линейной микрополярной теории упругости изотропного тела. В результате система связанных уравнений линейной микрополярной теории упругости (1) преобразуется к следующей форме:

$$\begin{cases} (\mu + \alpha)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (\mu - \alpha + \lambda)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\alpha \nabla \times \phi = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ (\gamma + \varepsilon)\nabla \cdot \nabla \phi + (\gamma - \varepsilon + \beta)\nabla \nabla \cdot \phi - 2\alpha(2\phi - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathfrak{I} \partial_t^2 \phi; \end{cases} \quad (2)$$

или также

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha \nabla \times \phi = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ (\beta + 2\gamma)\nabla \nabla \cdot \phi - (\gamma + \varepsilon)\nabla \times (\nabla \times \phi) - 2\alpha(2\phi - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathfrak{I} \partial_t^2 \phi. \end{cases} \quad (3)$$

Векторное дифференциальное уравнение (3) будет рассматриваться в областях трехмерного пространства, обладающих свойством *поверхностной односвязности*: любая замкнутая поверхность, целиком расположенная в области может быть стянута в точку, не выходя за границу области. Такое требование совершенно необходимо для того, чтобы любое безвихревое векторное поле имело бы потенциал, а любое векторное поле с нулевой расходимостью оказывалось бы вихревым, т.е. имело бы векторный потенциал.

Зависимость от времени предполагается гармонической, т.е. физические поля представляются как произведения комплексных амплитуд (за которыми мы сохраним те же обозначения, что и для самих полей) на комплексную гармоническую экспоненту $e^{i\omega t}$, где ω — циклическая частота.

Заканчивая этот раздел работы, приведем также дифференциальные уравнения микрополярной теории упругости, данные Нейбером [9] (H. Neuber, 1965). С этой целью введем (в обозначениях Нейбера) следующие абсолютные тензоры и векторы:

$g^{\lambda\mu}$ — метрический тензор,

$e^{\mu\lambda\eta}$ — абсолютный тензор перестановок,

V_λ — ковариантный вектор перемещений,

ω_λ — ковариантный вектор микровращений,

$t^{\lambda\mu}$ — тензор силовых напряжений,

$m^{\lambda\mu}$ — тензор моментных напряжений.

В обозначениях Нейбера имеем следующие дифференциальные уравнения равновесия:

$$\nabla_\lambda t^{\lambda\mu} = 0,$$

$$\nabla_\lambda m^{\lambda\mu} + e^{\mu\lambda\eta} t_{\lambda\eta} = 0.$$

Определяющие уравнения изотропного микрополярного упругого тела будут иметь следующую форму:

$$t^{\lambda\mu} = G[(1+a)\nabla^\lambda V^\mu + (1-a)\nabla^\mu V^\lambda - 2ae^{\mu\lambda\eta}\omega_\eta + 2\nu(1-2\nu)^{-1}g^{\lambda\mu}\nabla_\eta V^\eta],$$

$$m^{\lambda\mu} = 4Gl^2[\nabla^\lambda \omega^\mu + b\nabla^\mu \omega^\lambda + cg^{\lambda\mu}\nabla_\eta \omega^\eta],$$

где

G — модуль сдвига,

ν — коэффициент Пуассона,

l — характеристическая длина (масштабный параметр длины),

a, b, c — физически безразмерные определяющие постоянные.

Нетрудно видеть, что определяющие постоянные L, c_1, c_2, c_3 выражаются в терминах l, a, b, c согласно

$$L^2 = 2l^2(1 + b), \quad c_1 = a, \quad c_2 = \frac{1 - b}{1 + b}, \quad c_3 = \frac{c}{1 + b}.$$

Динамические уравнения микрополярной теории упругости, данные Нейбером, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (1 + a)\Delta V^\mu + [(1 - 2\nu)^{-1} - a]\nabla^\mu\nabla_\lambda V^\lambda + 2ae^{\mu\lambda\eta}\nabla_\lambda\omega_\eta &= \rho G^{-1}\partial_{..}^2 V^\mu, \\ (a - l^2\Delta)\omega^\mu - l^2(b + c)\nabla^\mu\nabla_\lambda\omega^\lambda - \frac{a}{2}e^{\mu\eta\sigma}\nabla_\eta V_\sigma &= -(4G)^{-1}\mathfrak{J}\partial_{..}^2\omega^\mu, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \nabla_\lambda\nabla^\lambda$$

есть оператор Лапласа, который представляет собой полностью свернутый оператор повторного ковариантного дифференцирования, т.е.

$$\Delta = g^{\lambda\mu}\nabla_\lambda\nabla_\mu.$$

Динамические уравнения микрополярного упругого тела никак не согласованы по степени приближения по масштабному параметру длины l : первое из них имеет нулевой порядок, а второе — второй.

3. Потенциалы перемещений и микровращений. Связанные уравнения для потенциалов. Воспользуемся разложениями Гельмгольца для векторов перемещений и микровращений

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \\ \phi &= \nabla\Sigma + \nabla \times \mathbf{H}, \end{aligned} \tag{1}$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных потенциалов Φ, Σ и векторных потенциалов Ψ, \mathbf{H} .

К ним можно присоединять (а можно и не присоединять) различные калибровочные условия. В частности, стандартными принято считать условия, фиксирующие нулевую расходимость векторных потенциалов

$$\nabla \cdot \Psi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \tag{2}$$

Подстановка разложений (1) в систему дифференциальных уравнений (3) позволяет получить уравнения для скалярных и векторных потенциалов.

Дифференциальные уравнения для скалярных потенциалов Φ, Σ не связаны между собой и поэтому рассматриваются как два независимых уравнения

$$\begin{aligned} \Delta\Phi - \frac{1}{c_{\parallel}^2}(\partial_{..})^2\Phi &= 0, \\ \Delta\Sigma - \frac{1}{\mu c_{\parallel}^2}(\partial_{..})^2\Sigma - \frac{\Omega^2}{\mu c_{\parallel}^2}\Sigma &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь постоянные c_{\parallel}^2 , ${}_{\mu}c_{\parallel}^2$ и Ω^2 выражаются в терминах определяющих постоянных согласно

$$c_{\parallel}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad {}_{\mu}c_{\parallel}^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{\mathfrak{J}}, \quad \Omega^2 = \frac{4\alpha}{\mathfrak{J}}.$$

Для векторных потенциалов Ψ , \mathbf{H} получаются два связанных между собой векторных дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\perp} \Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ \mathcal{B}_{\perp} \mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2 {}_{\mu}c_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4)$$

где были введены постоянные

$$d_{\perp}^2 = \frac{{}_{\nu}c_{\perp}^2}{{}_{\mu}c_{\perp}^2}, \quad {}_{\nu}c_{\perp}^2 = \frac{\alpha}{\rho}, \quad {}_{\mu}c_{\perp}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad {}_{\mu}c_{\perp}^2 = \frac{\gamma + \epsilon}{\mathfrak{J}}; \quad (5)$$

и, кроме того, — два дифференциальных оператора второго порядка

$$\mathcal{A}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}_{\nu}c_{\perp}^2} (\partial.)^2, \quad \mathcal{B}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}_{\mu}c_{\perp}^2} (\partial.)^2 - \frac{\Omega^2}{{}_{\mu}c_{\perp}^2}. \quad (6)$$

Система (4) сохраняет свой вид независимо от использования того или иного условия калибровки. В частности, можно вообще отказаться от калибровочных условий (2).

Исследование связанных уравнений для векторных потенциалов перемещений и микровращений вызывает значительные трудности и поэтому мы сосредоточимся именно на этих уравнениях. Начнем с того, что дифференциальные операторы \mathcal{A}_{\perp} и \mathcal{B}_{\perp} в условиях гармонической зависимости от времени сводятся к

$$\mathcal{A}_{\perp} = \Delta + \frac{\omega^2}{{}_{\nu}c_{\perp}^2}, \quad \mathcal{B}_{\perp} = \Delta + \frac{\omega^2}{{}_{\mu}c_{\perp}^2} - \frac{\Omega^2}{{}_{\mu}c_{\perp}^2}. \quad (7)$$

В рамках настоящего исследования удобно ввести следующие две постоянные

$$\alpha_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{{}_{\nu}c_{\perp}^2}, \quad \beta_{\perp}^2 = \text{Abs} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{{}_{\mu}c_{\perp}^2}$$

и привести операторы \mathcal{A}_{\perp} и \mathcal{B}_{\perp} к следующему виду:

$$\mathcal{A}_{\perp} = \Delta + \alpha_{\perp}^2, \quad \mathcal{B}_{\perp} = \Delta \pm \beta_{\perp}^2, \quad (8)$$

где выбор того или иного знака в выражении для \mathcal{B}_{\perp} зависит от величины циклической частоты

$$\omega^2 - \Omega^2 \gtrless 0.$$

В итоге в гармоническом случае связанная система уравнений для потенциалов приобретает вид

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^2) \Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta \pm \beta_{\perp}^2) \mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2 {}_{\mu}c_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (9)$$

Ограничимся исследованием высокочастотных гармонических волн, когда циклическая частота ω оказывается выше порогового значения, определяемого постоянной Ω . Тогда последняя система уравнений приводится к

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^2)\Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_{\perp}^2)\mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2\sqrt{\mu}c_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}; \end{cases} \quad (10)$$

с целью сокращения записи введем обозначение

$$g_{\perp}^2 = \frac{\Omega^2}{\sqrt{\mu}c_{\perp}^2} d_{\perp}^2,$$

после чего окончательно приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^2)\Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_{\perp}^2)\mathbf{H} + \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (11)$$

Внимательный анализ проведенных рассуждений показывает, что связанная система уравнений для потенциалов (11) получается также и в несколько иной форме (и снова без учета калибровки потенциалов):

$$\begin{cases} -\nabla \times (\nabla \times \Psi) + \alpha_{\perp}^2 \Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \beta_{\perp}^2 \mathbf{H} + \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (12)$$

Для скалярных потенциалов Φ , Σ в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени на основании (3) приходим к уравнениям

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \nabla) \Phi + \alpha_{\parallel}^2 \Phi = 0, \\ (\nabla \cdot \nabla) \Sigma + \beta_{\parallel}^2 \Sigma = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\alpha_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c_{\parallel}^2}, \quad \beta_{\parallel}^2 = \text{Abs} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{\mu}c_{\parallel}^2}.$$

4. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторных полей. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений с помощью винтовых векторных полей решает главную задачу настоящего исследования: переход от связанной системы дифференциальных уравнений (12) к несвязанным уравнениям, что в конечном итоге должно позволить найти аналитические подходы к решению прикладных задач механики микрополярных континуумов.

Достижение этой цели начинается с рассмотрения вихревых составляющих перемещений и микровращений как одного и того же вихревого векторного поля Υ , но с различными масштабными факторами:

$$\begin{cases} \nabla \times \Psi = a\Upsilon, \\ \nabla \times \mathbf{H} = b\Upsilon; \end{cases} \quad (1)$$

при этом буде выполнено *естественное* калибровочное условие

$$\nabla \cdot \Upsilon = 0.$$

Подстановка (1) в систему векторных дифференциальных уравнений (12) позволяет получить следующую систему уравнений относительно поля $\mathbf{\Upsilon}$:

$$\begin{cases} -a\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Upsilon}) + \alpha_{\perp}^2 a \mathbf{\Upsilon} + 2d_{\perp}^2 b \nabla \times \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -b\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Upsilon}) + \beta_{\perp}^2 b \mathbf{\Upsilon} + \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} a \nabla \times \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

В левой части первого из уравнений приведенной выше системы добавим и отнимем одно и то же слагаемое (c — некоторая постоянная)

$$c\nabla \times \mathbf{\Upsilon};$$

то же самое выполним и со вторым уравнением и слагаемым (d — некоторая постоянная)

$$d\nabla \times \mathbf{\Upsilon}.$$

После ряда преобразований убеждаемся в том, что, если положить

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2d_{\perp}^2 b}{a\alpha_{\perp}^2}, \quad \frac{b}{d} = \frac{d + (2d_{\perp}^2)^{-1} g_{\perp}^2 a}{b\beta_{\perp}^2},$$

то связанные уравнения для потенциалов будут удовлетворяться, когда

$$\begin{cases} -c\nabla \times \mathbf{\Upsilon} + a\alpha_{\perp}^2 \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -d\nabla \times \mathbf{\Upsilon} + b\beta_{\perp}^2 \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Получить одно независимое уравнение для определения векторного поля $\mathbf{\Upsilon}$ удастся, если принять, что

$$\frac{c}{d} = \frac{\alpha_{\perp}^2 a}{\beta_{\perp}^2 b};$$

тогда оказывается достаточной выполнимость следующего *винтового* уравнения

$$-\nabla \times \mathbf{\Upsilon} + p\alpha_{\perp}^2 \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

где p представляет собой отношение

$$p = \frac{a}{c}.$$

Обратимся далее к нахождению постоянных. Всего их четыре: a , b , c , d . Из них можно образовать три независимых отношения:

$$p = \frac{a}{c}, \quad q = \frac{b}{c}, \quad s = \frac{d}{c}.$$

Для указанных отношений из предыдущих рассуждений получаются ровно три независимых уравнения

$$\begin{cases} p^2 \alpha_{\perp}^2 = 1 + 2qd_{\perp}^2, \\ q^2 \beta_{\perp}^2 = s^2 + ps \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2}, \\ ps \frac{\alpha_{\perp}^2}{\beta_{\perp}^2} = q. \end{cases}$$

Из данной выше системы уравнений можно определить постоянную q , получив сначала квадратное уравнение

$$2d_{\perp}^2 \alpha_{\perp}^2 q^2 + (\alpha_{\perp}^2 - \beta_{\perp}^2 - g_{\perp}^2)q - \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} = 0,$$

из которого находятся два различных вещественных значения для q :

$$4d_{\perp}^2 \alpha_{\perp}^2 q = \beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2)^2 + 4g_{\perp}^2 \alpha_{\perp}^2}.$$

Для постоянной p^2 также получаются два различных вещественных значения согласно

$$2\alpha_{\perp}^4 p^2 = \beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2)^2 - 4\alpha_{\perp}^2 \beta_{\perp}^2}.$$

Начиная с этого момента, введем два значения p_1, p_2 , которые соответствуют положительному и отрицательному знакам в приведенной только что формуле, и введем также два *положительных* значения K_1, K_2 с помощью соотношений

$$\alpha_{\perp}^4 p_{1,2}^2 = K_{2,1}^2, \quad \alpha_{\perp}^2 p_1 = \mp K_2, \quad \alpha_{\perp}^2 p_2 = \mp K_1.$$

Ясно, что постоянные (волновые числа) K_1, K_2 могут быть вычислены на основании

$$\begin{aligned} \sqrt{2}K_2 &= \sqrt{\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2 + \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2)^2 - 4\alpha_{\perp}^2 \beta_{\perp}^2}}, \\ \sqrt{2}K_1 &= \sqrt{\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2 - \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2)^2 - 4\alpha_{\perp}^2 \beta_{\perp}^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что волновые числа K_1, K_2 в силу своего определения упорядочены согласно

$$K_2 > K_1 > 0.$$

Таким образом, всего для параметра p имеется *четыре* различных вещественных значения

$$\mp K_1, \quad \mp K_2;$$

в результате векторное поле Υ должно удовлетворять одному из *четырех* винтовых уравнений

$$-\nabla \times \Upsilon \mp K_{2,1} \Upsilon = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где знаки \mp и индексы 1, 2 между собой никак не согласованы.

Векторное поле Υ в трехмерном пространстве называется винтовым (screw field), если оно удовлетворяет следующему соотношению:

$$\Upsilon \times (\nabla \times \Upsilon) = \mathbf{0},$$

т.е. вихрь векторного поля оказывается коллинеарным направлению самого поля

$$\nabla \times \Upsilon = A \Upsilon,$$

где множитель A характеризуется термином аномальность (abnormality) поля.

В том случае, когда множитель A есть постоянная величина можно утверждать, что (см., например, [14]):

1) все кратные (повторные) вихри векторного поля Υ

$$\nabla \times \Upsilon, \quad \nabla \times (\nabla \times \Upsilon), \quad \nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \Upsilon)), \dots$$

также будут винтовыми полями, причем с той же самой аномальностью A ;

2) поле Υ будет удовлетворять векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Upsilon + A^2 \Upsilon = \mathbf{0};$$

3) винтовое поле Υ с постоянной аномальностью A всегда представимо в форме

$$\Upsilon = A(\nabla h) \times \mathbf{d} + A^2 h \mathbf{d} + (\mathbf{d} \cdot \nabla) \nabla h,$$

где \mathbf{d} — постоянный единичный директор в трехмерном пространстве, h — некоторое скалярное поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца

$$\Delta h + A^2 h = 0.$$

Таким образом, имеется ровно четыре независимых поля⁴

$$\Upsilon_{2-}, \quad \Upsilon_{2+}, \quad \Upsilon_{1-}, \quad \Upsilon_{1+},$$

которые должны быть интегралами несвязанных векторных уравнений (4) и линейные комбинации которых будут определять вихревые части векторов перемещений и микровращений в соответствии с (1). При этом следует учитывать, что однозначно определяется лишь отношение b/a и, поскольку

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p},$$

то отношение b/a имеет четыре различных значения, которые без труда находятся из данных выше формул.

Обозначая четыре указанных значения отношения b/a через

$$\frac{b}{a} = \mp g_{2,1},$$

в итоге приходим к формуле для вихревых частей перемещений и микровращений

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -g_2 \end{pmatrix} \Upsilon_{2-} + \begin{pmatrix} 1 \\ g_2 \end{pmatrix} \Upsilon_{2+} + \begin{pmatrix} 1 \\ -g_1 \end{pmatrix} \Upsilon_{1-} + \begin{pmatrix} 1 \\ g_1 \end{pmatrix} \Upsilon_{1+}. \quad (5)$$

В этой формуле мы полагаем

$$g_{2,1} = \frac{\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2)^2 + 4\alpha_{\perp}^2 g_{\perp}^2}}{4d_{\perp}^2 K_{2,1}}. \quad (6)$$

Заметим, что здесь знаки \pm согласованы с индексами 2, 1, т.е. последняя формула на самом деле определяет два вещественных значения параметра g .

5. Представление с помощью метагармоических потенциалов. Следуя [13], винтовые уравнения (4) будем решать, вводя два новых вихревых векторных потенциала Π_1 и Π_2 в соответствии с

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1\mp} &= \nabla \times \Pi_1 \mp K_1 \Pi_1, \\ \Upsilon_{2\mp} &= \nabla \times \Pi_2 \mp K_2 \Pi_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти два потенциала предполагаются вихревыми, т.е.

$$\nabla \cdot \Pi_1 = 0, \quad \nabla \cdot \Pi_2 = 0.$$

⁴Приводимые ниже обозначения для четырех различных вариантов векторного поля Υ согласованы с четырьмя уравнениями (4), выписанными в сокращенной форме.

Для того, чтобы векторные поля \mathbf{Y}_{2-} , \mathbf{Y}_{2+} , \mathbf{Y}_{1-} , \mathbf{Y}_{1+} удовлетворяли винтовым уравнениям (4) потенциалы $\mathbf{\Pi}_1$ и $\mathbf{\Pi}_2$, в свою очередь, должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца⁵

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{\Pi}_1 + K_1^2 \mathbf{\Pi}_1 &= \mathbf{0}, \\ (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{\Pi}_2 + K_2^2 \mathbf{\Pi}_2 &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя в формулу (5) представления (1) для векторных полей \mathbf{Y}_{2-} , \mathbf{Y}_{2+} , \mathbf{Y}_{1-} , \mathbf{Y}_{1+} , пренебрегая затем несущественным множителем 2, после ряда преобразований получаем

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \times \mathbf{\Pi}_1 + \nabla \times \mathbf{\Pi}_2 \\ g_1 K_1 \mathbf{\Pi}_1 + g_2 K_2 \mathbf{\Pi}_2 \end{pmatrix}$$

или также

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \times & \nabla \times \\ g_1 K_1 & g_2 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_1 \\ \mathbf{\Pi}_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Заметим, что

$$g_{2,1} K_{2,1} = \frac{\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2)^2 + 4\alpha_{\perp}^2 g_{\perp}^2}}{4d_{\perp}^2}$$

и справедливы неравенства

$$g_2 > 0 > g_1.$$

Принимая во внимание разложения (1) и (3), приходим к следующему представлению перемещений и микровращений в терминах двух метагармонических потенциалов:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{pmatrix} = \nabla \begin{pmatrix} \Phi \\ \Sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \times \mathbf{\Pi}_1 + \nabla \times \mathbf{\Pi}_2 \\ g_1 K_1 \mathbf{\Pi}_1 + g_2 K_2 \mathbf{\Pi}_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь скалярные и векторные потенциалы должны удовлетворять метагармоническим уравнениям (см. (13) и (2)) с волновыми числами α_{\parallel} , β_{\parallel} , K_1 , K_2 :

$$\begin{aligned} ((\nabla \cdot \nabla) + \alpha_{\parallel}^2) \Phi &= 0, \\ ((\nabla \cdot \nabla) + \beta_{\parallel}^2) \Sigma &= 0; \\ ((\nabla \cdot \nabla) + K_1^2) \mathbf{\Pi}_1 &= \mathbf{0}, \\ ((\nabla \cdot \nabla) + K_2^2) \mathbf{\Pi}_2 &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5)$$

На основании представлений (4) могут быть получены также выражения для тензоров деформаций, силовых и моментных напряжений в терминах метагармонических потенциалов. Однако сначала нам потребуются вспомогательные представления и некоторые базовые формулы микрополярной теории упругости.

⁵В современной научной литературе уравнения Гельмгольца часто называют метагармоническими уравнениями (metaharmonic equations), а их регулярные решения — метагармоническими функциями (в данном случае — метагармоническими векторными полями).

6. Деформации, силовые и моментные напряжения в изотропном микрополярном упругом теле. Микрополярная теория упругости в плане своих основных положений не может быть удовлетворительно развита без привлечения представления об относительных тензорах, характеризующихся рангом и весом. Однако следует помнить о том, что при этом в микрополярной теории упругости не возникает никаких существенных препятствий для перехода к абсолютным тензорным представлениям за счет умножения или деления (возможно, на целые степени) исходных относительных тензоров на ориентирующий относительный скаляр.

Мы начнем с фундаментальной метрической формы

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k,$$

который определяет длину линейного элемента, задаваемого дифференциалами dx^k криволинейных координат x^k . Здесь g_{ik} — компоненты метрического тензора.

Детерминант метрического тензора

$$g = \det (g_{ik}),$$

как нетрудно видеть, всегда положителен (поскольку положительно определена фундаментальная метрическая форма) и представляет собой относительный скаляр веса +2.

Определим далее имеющие фундаментальное значение в микрополярных теориях символы перестановок ϵ^{ijk} , ϵ_{ijk} соотношениями

$$\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } i, j, k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{если } i, j, k = 132, 213, 321; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (1)$$

Символы перестановок — относительные тензоры весов +1 и -1 соответственно. Они антисимметричны по всем трем индексам. Подчеркнем, что символы перестановок одновременно образуют контравариантный и контравариантный относительные тензоры, различающиеся весами.

Далее рассмотрим локальные базисные триэдры, связанные с выбранной координатной системой в трехмерном пространстве: \mathbf{z}_s ($s = 1, 2, 3$) — локальный ковариантный базис; \mathbf{i}^s ($s = 1, 2, 3$) — локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\mathbf{z}_s \cdot \mathbf{i}^k = \delta_s^k \quad (k = 1, 2, 3; s = 1, 2, 3).$$

Наряду с символами перестановок определим фундаментальный ориентирующий относительный скаляр веса +1 согласно

$$e = \mathbf{z}_1 \cdot (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3). \quad (2)$$

Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированной координатной системы, $e < 0$ для левоориентированной координатной системы.

Заметим, что справедливо равенство

$$e^2 = g,$$

т.е.

$$|e| = \sqrt{g}.$$

Введем также следующий относительный скаляр отрицательного веса -1 как смешанное произведение контравариантных векторов локального базиса:

$$e^{-1} = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{i}^2 \times \mathbf{i}^3). \quad (3)$$

Наконец, рассмотрим истинные (абсолютные) e -тензоры (так называемые тензоры перестановок) e^{ijk} , e_{ijk} , определив их согласно

$$\begin{aligned} e_{ijk} &= e \epsilon_{ijk}, \\ e^{ijk} &= e^{-1} \epsilon^{ijk}, \end{aligned} \quad (4)$$

т.е.

$$e_{skl} = \begin{cases} +\sqrt{g} \epsilon_{skl}, & \text{если } e > 0; \\ -\sqrt{g} \epsilon_{skl}, & \text{если } e < 0; \end{cases}$$

$$e^{skl} = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{skl}, & \text{если } e > 0; \\ -\frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{skl}, & \text{если } e < 0. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_k = e_{skl} \mathbf{i}_l, \quad (5)$$

$$\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_l = e^{skl} \mathbf{i}_k. \quad (6)$$

Тензоры перестановок, следовательно, представляются также формулами

$$e_{skl} = \mathbf{i}_s \cdot (\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l), \quad (7)$$

$$e^{skl} = \mathbf{i}_l \cdot (\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_k). \quad (8)$$

Учитывая изложенное выше, для антисимметричного e -тензора третьего ранга

$$\mathbf{e} = e^{skl} \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l$$

нетрудно получить формулу

$$-\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \mathbf{e}, \quad (9)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор.

Далее рассмотрим асимметричный тензор деформации линейной микрополярной теории упругости

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\phi}, \quad (10)$$

или

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{e},$$

а также

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{I} \times \mathbf{I})$$

и

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\phi}.$$

Тензор изгиба—кручения представляет собой градиент поля микроповоротов, т.е. он представляет собой тензор второго ранга

$$\boldsymbol{\kappa} = \nabla \otimes \boldsymbol{\phi} \quad (11)$$

Следующие фундаментальные соотношения позволяют определить тензоры силовых и моментных напряжений

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}, \quad (12)$$

где \mathbf{t} , \mathbf{m} — векторы сил и моментов, действующих на плоский элемент, нормальный единичному директору \mathbf{n} .

В случае изотропной среды определяющие уравнения линейного микрополярного упругого тела будут иметь вид

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mu + \alpha)\boldsymbol{\epsilon} + (\mu - \alpha)\boldsymbol{\epsilon}^T + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I}, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\gamma + \varepsilon)\boldsymbol{\kappa} + (\gamma - \varepsilon)\boldsymbol{\kappa}^T + \beta(\text{tr } \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{I}. \quad (14)$$

С их помощью без труда получаются формулы для векторов силовых и моментных напряжений \mathbf{t} и \mathbf{m}

$$\begin{cases} \mathbf{t} = 2\mu(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mu - \alpha)\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \lambda\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\alpha\mathbf{n} \times \boldsymbol{\phi}, \\ \mathbf{m} = \beta\mathbf{n}(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) + 2\gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{\phi} + (\gamma - \varepsilon)\mathbf{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{\phi}). \end{cases} \quad (15)$$

Они используются в прикладных задачах микрополярной теории упругости при постановке граничных условий.

Метагармонические потенциалы вводятся в данные выше формулы на основании

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= -\alpha_{\parallel}^2 \Phi, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} &= -\beta_{\parallel}^2 \Sigma; \\ \nabla \times \mathbf{u} &= -(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{\Pi}_1 - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{\Pi}_2 = K_1^2 \mathbf{\Pi}_1 + K_2^2 \mathbf{\Pi}_2, \\ \nabla \times \boldsymbol{\phi} &= g_1 K_1 \nabla \times \mathbf{\Pi}_1 + g_2 K_2 \nabla \times \mathbf{\Pi}_2. \end{aligned}$$

7. Некоторые формулы теории поля в цилиндрической системе координат. Рассмотрим в трехмерном пространстве цилиндрическую систему координат r , φ , z . Метрический элемент в указанной системе координат вычисляется согласно

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Введем следующие обозначения для *единичных* локальных базисных векторов:

$$\mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_\varphi, \quad \mathbf{v}_z.$$

Не следует путать указанные единичные векторы с ковариантными локальными базисными векторами, за которыми мы зарезервируем следующие символы:

$$\mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_\varphi, \quad \mathbf{v}_z.$$

Они образуют правоориентированную систему $e > 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_\varphi = \mathbf{v}_z, \quad \mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_z = -\mathbf{v}_\varphi, \quad \mathbf{v}_\varphi \times \mathbf{v}_z = \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_z \times \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_\varphi, \quad \mathbf{v}_z \times \mathbf{v}_\varphi = -\mathbf{v}_r.$$

Частные производные от локальных базисных векторов есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial r} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial \varphi} &= \mathbf{v}_\varphi, & \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial z} &= \mathbf{0}; \\ \frac{\partial \mathbf{v}_\varphi}{\partial r} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \mathbf{v}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\mathbf{v}_r, & \frac{\partial \mathbf{v}_\varphi}{\partial z} &= \mathbf{0}; \\ \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial r} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial \varphi} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Пространственный оператор Гамильтона будет иметь вид

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1)$$

следовательно, можно получить следующие основные формулы (F — скалярное поле, $\mathbf{\Gamma}$ — векторное поле, $\mathbf{\Gamma} = \Gamma_r \mathbf{e}_r + \Gamma_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \Gamma_z \mathbf{e}_z$):

$$\begin{aligned} \nabla F &= \mathbf{e}_r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial F}{\partial z}, \\ \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Gamma_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z}, \\ \nabla \times \mathbf{\Gamma} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial \Gamma_r}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r\Gamma_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \\ (\nabla \cdot \nabla) F &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

8. Разделение пространственных переменных в уравнениях Гельмгольца в цилиндрической системе координат. В этом разделе приводятся решения скалярного и векторного уравнений Гельмгольца в бесконечном цилиндре, которые получаются методом разделения переменных в цилиндрической системе координат.

Сначала рассмотрим уравнение Гельмгольца относительно скалярного поля F . Обозначим через k_* волновое число, квадрат которого фигурирует в качестве параметра в этом уравнении.

Уравнение Гельмгольца относительно скалярного поля F

$$(\nabla \cdot \nabla + k_*^2) F = 0$$

обладает решениями, соответствующими формам распространяющейся в цилиндре вдоль вертикальной оси гармонической волны, характеризующейся волновым числом k и азимутальным числом n .

Стандартная процедура разделения переменных позволяет заключить, что поле

$$F = C I_n(p_* r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная, n — азимутальное число поля, $I_k(\cdot)$ — функция Бесселя порядка k мнимого аргумента, постоянная p_* определена согласно

$$p_*^2 = k^2 - k_*^2.$$

Уравнение Гельмгольца с параметром k_{**} относительно векторного поля $\mathbf{\Gamma}$ имеет вид

$$(\nabla \cdot \nabla + k_{**}^2) \mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}.$$

Можно показать, что метод разделения переменных в цилиндрических координатах в этом случае также оказывается эффективным. В итоге, раскладывая поле на составляющие по локальным базисным директорам

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma_r \mathbf{e}_r + \Gamma_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \Gamma_z \mathbf{e}_z,$$

удаётся получить волновые решения в бесконечном цилиндре с волновым числом k и азимутальным числом n следующего вида:

$$\begin{aligned}\Gamma_r &= (C_1 I_{n-1}(q_* r) + C_2 I_{n+1}(q_* r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Gamma_\varphi &= (C_1 I_{n-1}(q_* r) - C_2 I_{n+1}(q_* r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Gamma_z &= C_3 I_n(q_* r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},\end{aligned}\quad (2)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные,

$$q_*^2 = k^2 - k_{**}^2.$$

Векторное поле $\mathbf{\Gamma}$ при этом имеет нулевую расходимость, только если

$$q_*(C_1 + C_2) \pm ikC_3 = 0.$$

9. Метагармонические потенциалы перемещений и микровращений в длинном круговом цилиндре. Будем исходить из основного представления векторов перемещений и микровращений в линейной микрополяризованной среде (4), где скалярные и векторные потенциалы удовлетворяют метагармоническим уравнениям (5).

Воспользуемся формулой (1) для представления скалярных потенциалов векторов перемещений и микровращений в волне данного азимута n . Полагая в (1) $k_* = \alpha_{||}$, находим

$$\Phi = C_1 I_n(p_1 r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (1)$$

где

$$p_1^2 = k^2 - \alpha_{||}^2;$$

полагая затем $k_* = \beta_{||}$, получаем

$$\Sigma = C_2 I_n(p_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (2)$$

где

$$p_2^2 = k^2 - \beta_{||}^2.$$

Воспользуемся формулой (2) для представления векторных потенциалов векторов перемещений и микровращений в волне данного азимута n . Предварительно введем сокращенные обозначения для метагармонических векторных потенциалов

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Pi}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{\Pi}_2,$$

и их разложения по единичным векторам локального базиса

$$\mathbf{L} = L_r \mathbf{v}_r + L_\varphi \mathbf{v}_\varphi + L_z \mathbf{v}_z, \quad \mathbf{M} = M_r \mathbf{v}_r + M_\varphi \mathbf{v}_\varphi + M_z \mathbf{v}_z.$$

Компоненты векторных потенциалов на основании (2) определим согласно

$$\begin{aligned} L_r &= (C_3 I_{n-1}(q_1 r) + C_4 I_{n+1}(q_1 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ L_\varphi &= (C_3 I_{n-1}(q_1 r) - C_4 I_{n+1}(q_1 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ L_z &= C_5 I_n(q_1 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$q_1^2 = k^2 - K_1^2,$$

и

$$\begin{aligned} M_r &= (C_6 I_{n-1}(q_2 r) + C_7 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ M_\varphi &= (C_6 I_{n-1}(q_2 r) - C_7 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ M_z &= C_8 I_n(q_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$q_2^2 = k^2 - K_2^2.$$

Потенциалы \mathbf{L} и \mathbf{M} обладают нулевой расходимостью, только если

$$q_1(C_3 + C_4) \pm ikC_5 = 0,$$

$$q_2(C_6 + C_7) \pm ikC_8 = 0.$$

Таким образом, в явном виде получены основные представления векторов перемещений и микровращений в длинном линейном микрополярном цилиндре (4), где скалярные и векторные потенциалы задаются в формах (1), (2) и (3), (4). Такого рода решения содержат восемь произвольных постоянных и определяют формы гармонических волн перемещений и микровращений, распространяющихся вдоль оси длинного кругового цилиндра. Волны имеют заданный азимут n и характеризуются волновым числом k .

10. Заключительные замечания.

1. Рассматривается система связанных динамических векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости в терминах перемещений и микровращений в случае гармонической зависимости физических полей от времени. Приводятся три основных варианта уравнений.
2. Выполнено расщепление связанных векторных дифференциальных уравнений микрополярной теории упругости для векторных потенциалов на несвязанные винтовые уравнения.
3. Получено представление векторов перемещений и микровращений с помощью двух несвязанных метагармонических векторных потенциалов.
4. Определены решения скалярного и векторного уравнений Гельмгольца в бесконечной цилиндрической области, содержащие ряд произвольных постоянных.

5. В явной форме указаны представления векторов перемещений и микровращений в длинном линейном микрополярном цилиндре, содержащие восемь произвольных постоянных. Тем самым определяют формы гармонических волн перемещений и микровращений, распространяющихся вдоль оси длинного кругового цилиндра.
6. Полученные результаты находят применение в прикладных задачах волновой механики, связанных с распространением гармонических волн перемещений и микровращений вдоль длинных цилиндрических волноводов.
7. Рассматриваемые гармонические волны перемещений и микровращений в цилиндре имеют смысл только для волновых форм, характеризующихся заданным азимутальным числом (азимутом).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
- [2] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.
- [3] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
- [4] Новацкий В. *Теория упругости*. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [5] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.) Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv+345 pp.
- [6] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums// *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. Band 10. 1958. S. 195–213.
- [7] Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums// *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. Band 16. 1964. S. 1–22.
- [8] Palmov V.A. Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity// *Prikl. Math. Mech.* Vol. 28, No. 3. 1964. Pp. 401–408.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper// *Acta Mechanica*. Vol. 2. 1966. pp. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729
- [10] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума// *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.
- [11] Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. In: *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Eds. H.A. Lauwerier, W.T. Koiter. Vol. 16. Amsterdam, London: North-Holland; New York: American Elsevier, 1973. xiv+425 pp.
- [12] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика*. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
- [13] Радаев Ю.Н. Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов// *Изв. РАН. Мех. тверд. тела*. №1. 2021. (в печати)
- [14] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories*/ In: *Encyclopedia of Physics*. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226–902.

Y. N. Radayev

HARMONIC WAVES OF A GIVEN AZIMUTHAL NUMBER IN A MICROPOLAR CYLINDRICAL WAVEGUIDE

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The coupled system of vector differential equations of the linear theory of micropolar elasticity presented in terms of displacements and micro-rotations in the case of a harmonic dependence of physical fields on time is considered in the three different variants of which the two are due to W. Nowacki and H. Neuber. A new scheme of splitting the coupled vector differential equation of the linear theory of micropolar elasticity into uncoupled ones is proposed. The scheme is based on proportionality of the vortex parts of the displacements and micro-rotations to the single vector, which satisfies the screw equation. The problem of determination of the vortex parts of the displacements and micro-rotations fields is reduced to solution of four uncoupled screw differential equations. A new representation of displacement and micro-rotation vectors is obtained by using two uncoupled metaharmonic vectors. The separation of spatial variables in the Helmholtz metaharmonic equations in a cylindrical coordinate net is described. Solutions of the scalar and vector Helmholtz equations in an infinite cylindrical domain containing a series of arbitrary constants are obtained. Representation of displacement and micro-rotation vectors in a long micropolar cylinder containing eight arbitrary constants are explicitly found. The corresponding solutions are proved to determine the modes of harmonic waves of displacements and micro-rotations propagating along the axis of a long circular cylinder. The obtained modes of the harmonic displacements and micro-rotations waves are valid only for those characterized by a given azimuthal number.

Keywords: micropolar elasticity, displacement vector, micro-rotation vector, vector potential, vortex part, Helmholtz equation, wave, cylinder, wavenumber, azimuthal number

REFERENCES

- [1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi + 226 pp.
- [2] Southwell R.V. An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Moscow: State publishing house of foreign literature, 1948.676 p.
- [3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii + 383 pp.
- [4] Novatsky V. Theory of elasticity. Moscow: Mir, 1975.872 p.
- [5] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.) Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv + 345 pp.
- [6] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 10.1958.S. 195-213.
- [7] Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 16.1964, pp. 1-22.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00844).

Radayev Yuri Nickolaevich

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

-
- [8] Palmov V.A. Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity // Prikl. Math. Mech. Vol. 28, No. 3.1964. Pp. 401-408.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. Vol. 2. 1966. pp. 48-69. Doi: 10.1007 / BF01176729
- [10] Radaev Yu.N. The rule of factors in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Himsel'f. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. Science, 2018. T. 22. No. 3. S. 504-517. doi: 10.14498 / vsgtu1635.
- [11] Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. In: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Eds. H.A. Lauwerier, W.T. Koiter. Vol. 16. Amsterdam, London: North-Holland; New York: American Elsevier, 1973. xiv + 425 pp.
- [12] Kovalev V.A., Radaev Yu.N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Publishing house of Saratov university, 2010.328 p.
- [13] Radaev Yu.N. Representation of displacements in the spatial harmonic theory of elasticity using two screw vectors // Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela No 1. 2021. (in press)
- [14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories / In: Encyclopedia of Physics. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226-902.

А. В. Казанцев¹, И. Э. Келлер²

РАСЧЕТ МНОГОЭТАПНОГО ПРОЦЕССА ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ ТОНКОСТЕННОГО СОСУДА И ЕГО ОЦЕНКА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия

²Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

Аннотация. Построена численная модель процесса многоэтапного процесса холодной штамповки тонкостенного стального сосуда с учётом технологической наследственности. Используются соотношения больших пластических деформаций анизотропной оболочки с учетом динамики и контактного взаимодействия с инструментом, реализованные в пакете LS-DYNA. Материальные константы модели Барлата Yld 2000-2d со степенным изотропным деформационным упрочнением для малоуглеродистой листовой стали DC04ЕК толщиной 0,7 мм определены по данным собственных экспериментов. Кривая предельных деформаций построена по искажению координатной сетки вблизи зон локализации деформации и разрушения сосуда в технологическом процессе, из которого исключен промежуточный отжиг, и по результатам теста на разрушение при одноосном растяжении. Исследованы особенности траекторий деформации в контрольных точках боковой поверхности изделия на каждом этапе технологического процесса, состоящего из последовательности операций вытяжки, раздачи и ссаживания. Расчёты траекторий подтверждены экспериментом на прессовом оборудовании, используемом в качестве испытательного. Оценка качества изделия связывается с остаточным ресурсом пластичности — удалённостью его деформированного состояния от кривой предельных деформаций. Установлено, что операция раздачи заготовки после её вытяжки быстро приближает материал к предельному состоянию и требует предварительного восстановления ресурса пластичности путём отжига. Отмечена перспективность технологий штамповки с меньшими степенями раздачи и с большими степенями ссаживания, способных сохранять ресурс пластичности без промежуточного отжига.

Ключевые слова: многоэтапный технологический процесс, холодная листовая штамповка, численный расчет, пластичность, предельные деформации, оценка

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.004

УДК: 539.374

Введение

Производство стальных эмалированных чайников и кастрюль на АО «Лысьвенский завод эмалированной посуды» (г. Лысьва Пермского края) холодной листовой штамповкой предусматривает ряд последовательных операций вытяжки, раздачи и ссаживания, оптимизированных для предотвращения образования дефектов изделия. Существующая технология не может обойтись без промежуточного восстановления ресурса пластичности заготовки отжигом. Проектирование оптимального с точки зрения себестоимости и качества изделия процесса, исключая эту операцию, требует численное моделирование, для которого необходимо построение математической модели пластичности и разрушения материала вместе с процедурой идентификации ее констант и разработка методики численного расчета процесса и экспериментального подтверждения его результатов [1,2]. Для численного решения геометрически и физически нелинейной динамической задачи с обширной поверхностью контакта заготовки и инструмента использован пакет программ LS-DYNA, в котором реализован метод конечных элементов в сочетании с явным методом интегрирования дифференциальных уравнений по времени и имеется обширная библиотека моделей материала.

1. Основные операции технологического процесса

Процесс штамповки чайника включает последовательные этапы (рис. 1) I, II, III — вытяжки стакана с формированием дна, IV — раздачи полиуретановым штампом и V — ссаживания горловины. Размеры исходной и промежуточных заготовок приведены на рис. 2. Там же приводится сетка материальных координат, наносимая на недеформированную заготовку лазерной гравировкой, на пересечении которых располагаются контрольные точки для сопоставления результатов численного расчета с экспериментом. На этапах I, II, III могут появляться гофры на краях и в верхней части заготовок-стаканов, а на этапе V — недопустимые утонения стенки в местах перехода диаметров в области горловины. Основные дефекты — полосы сдвига и трещины, образуются в зонах предельных деформаций на боковой поверхности заготовки на этапе IV без предварительного рекристаллизационного отжига. Для прогнозирования возникновения и наследования данных дефектов в технологическом процессе необходим расчет истории изменения состояния материала в контрольных точках боковой поверхности осесимметричного сосуда и их близость к предельным состояниям. Все эти состояния отражаются на диаграмме предельных деформаций — части плоскости главных деформаций оболочки вдоль продольной ($\varepsilon_1 \geq 0$) и окружной ($\varepsilon_2 \leq 0$) координат.

© Казанцев А. В., Келлер И. Э., 2020

Казанцев Александр Владимирович

e-mail: alexkazancev@bk.ru, старший преподаватель кафедры динамики и прочности машин, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия.

Келлер Илья Эрнстович

e-mail: kie@icmm.ru, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твердого тела, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-48-590310-а).

Поступила 01.06.2020

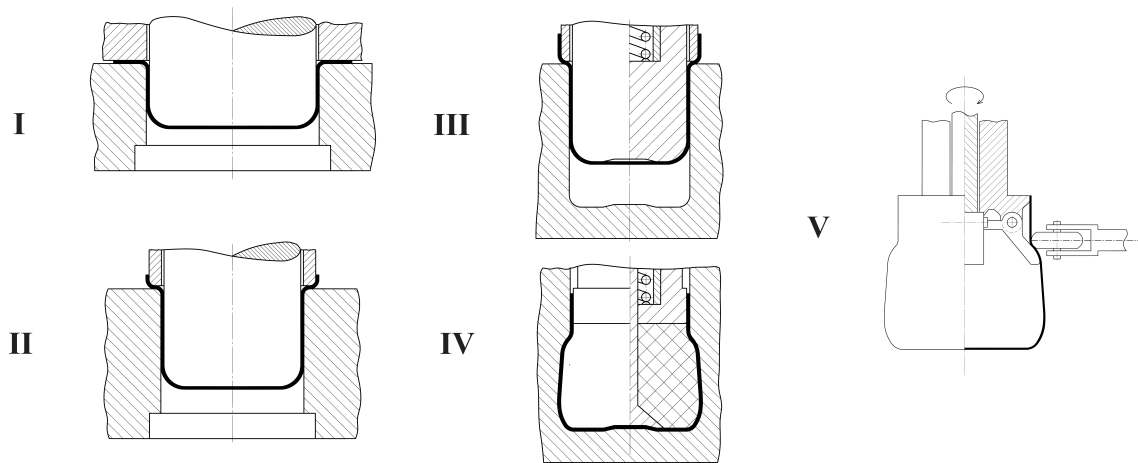


Рис. 1. Этапы технологического процесса производства чайника.

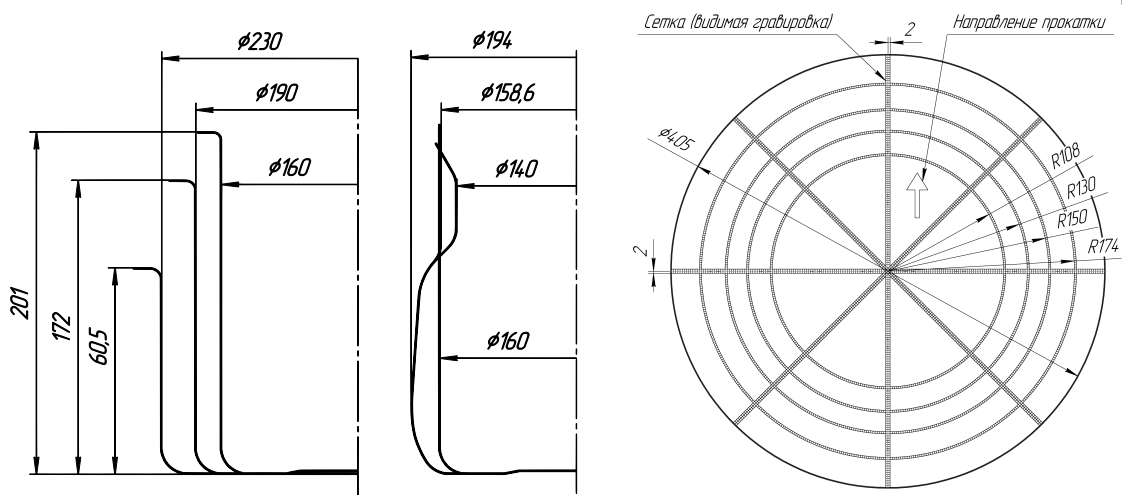


Рис. 2. Размеры заготовок (слева) и сетка материальных координат на недеформированной заготовке (справа).

Для проектирования технологии производства изделия, исключая отжиг, необходим критерий качества изделия, учитывающий историю изменения состояния материала в ходе многоэтапного процесса деформирования. С этой целью выполняется численный расчет процесса и делается его оценка с точки зрения остаточного ресурса пластичности изделия, в качестве меры которого рассматривается близость деформированного состояния к предельно допустимым. На основе данной оценки даются рекомендации по изменению технологии, позволяющие исключить из нее промежуточный отжиг.

2. О математической модели и её численной реализации

Для численного расчёта процесса, сопровождаемого большими пластическими и малыми упругими деформациями металлов, использована стандартная модель [3] с

формулировкой в терминах текущего лагранжева подхода в скоростях. Принята аддитивность упругих и пластических тензоров деформаций скорости, при этом упругий тензор связывается линейно с производной Яуманна тензора напряжений Кирхгоффа, а пластический — ассоциированным законом пластического течения с изотропным упрочнением с материальной производной этого тензора. Поскольку пластические деформации в точках боковой поверхности сосуда на любом этапе технологического процесса на три порядка превосходят упругие, в анализе результатов фигурируют полные деформации, а среда приближенно полагается несжимаемой. Тогда главная деформация по толщине оболочки ε_3 приближенно равна $-\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные значения левой логарифмической меры деформации (индекс 1 отвечает продольному, 2 — окружному, а 3 — радиальному направлению цилиндрической системы координат).

Для описания холодного пластического деформирования анизотропной листовой стали используется функция текучести Барлата Yld 2000-2d и закон изотропного деформационного упрочнения, константы которых определены экспериментально в работе [4]. В пакете LS-DYNA данной модели соответствует стандартный материал MAT 133. Нелинейно-упругие свойства литьевого полиуретана СКУ-ПФЛ, используемого в операции раздачи, описываются потенциалом Пенга – Ландела, константы которого определены в работе [5] и которому отвечает стандартный материал MAT 077 пакета LS-DYNA.

Вычислительный эксперимент проводился в соответствии с рекомендациями разработчиков программного обеспечения по снижению времени счёта путём искусственного увеличения плотности материала заготовки и подбора коэффициентов диссипации кинетической энергии системы для устранения возникающих динамических эффектов. Взято 10 точек интегрирования по толщине оболочечного конечного элемента с формулировкой №16. Использовались контакты *AUTOMATIC SURFACE TO SURFACE с кулоновской моделью статического трения. Обнаружено исчезающе малое влияние трения на напряжённо-деформированное состояние заготовки и значительное влияние на устойчивость процесса технологических зазоров между инструментом и заготовкой. Использование автоматических контактов, повышенного числа точек интегрирования, выбора решателя двойной вещественной точности и явной схемы интегрирования уравнений движения системы, применение нелинейного анизотропного материала и наличие 50-80 тысяч узлов в конечноэлементной сетке, моделирование на персональном компьютере одного этапа вытяжки или раздачи требовало около 10 минут, а динамический расчёт операции ссаживания горловины изделия требовал порядка полутора часов.

3. Расчёт операций штамповки

На рис. 3 приведены траектории деформаций двух контрольных точек боковой поверхности изделия, соответствующие расчету этапов I-IV технологического процесса [5]. Рассчитанные кривые практически проходят через экспериментальные точки (отмеченные маркерами). Расчёт и эксперимент показывают, что каждому этапу вытяжки стакана отвечает почти пропорциональное изменение компонент деформаций (простое нагружение), а этап раздачи сопровождается изломом траектории приблизительно на 150° . Эта особенность может выводить принятые модели пластичности и разрушения листовой стали за пределы областей их применимости. Расчёт прогнозирует, что деформированное состояние сосуда достигает предельного уровня на

полосе боковой поверхности вблизи его максимального диаметра (в окрестности маркера \otimes), что подтверждается экспериментом. Деформированное состояние заготовки после этапа IV почти нечувствительно к отжигу, если его моделировать обнулением внутренней переменной накопленной деформации во всем объеме материала [4]. Этот факт, также подтверждаемый экспериментом, не проливает свет на причину фактического разрушения заготовки.

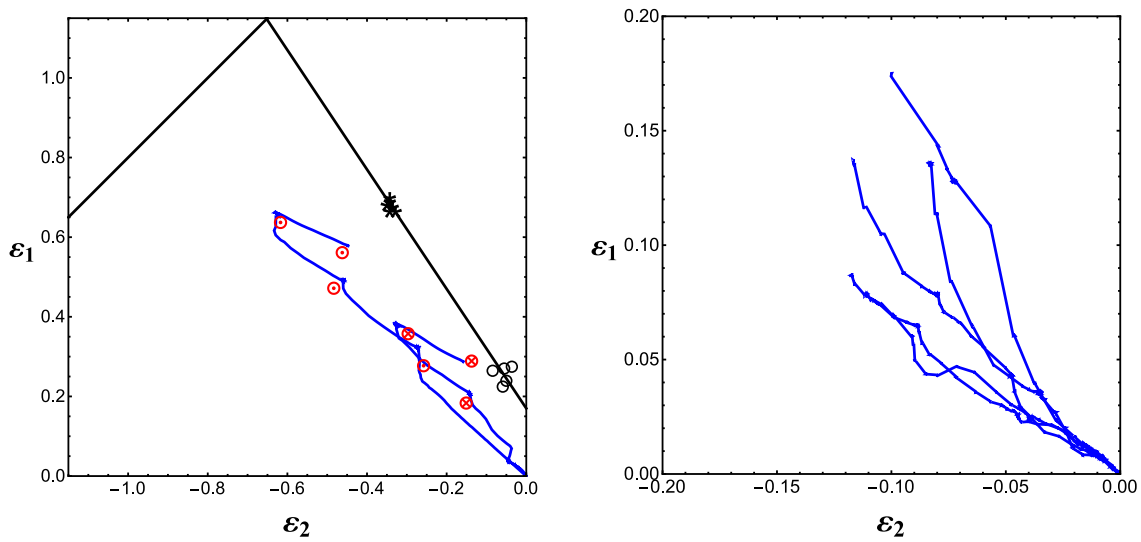


Рис. 3. Траектории деформаций контрольных точек при операциях вытяжки и раздачи (слева) и ссаживания (справа).

Операция ссаживания горловины сосуда, выполняемая обкаткой роликом на специальной оправке (рис. 1, V), моделировалась как с учетом технологической наследственности, так и без него. Для формирования горловины задавалась программа обкатки, включающая четыре вертикальных прохода вдоль горловины, первые три из которых сопровождаются двадцатью, а последний ? десятью оборотами ролика вокруг горловины за один проход. На рис. 3 показаны траектории деформаций в контрольных точках боковой поверхности. Расчет обнаруживает большее утонение стенки сосуда в зонах переходов диаметров. Близость этих зон к предельному состоянию подтверждается известными случаями срезания горловины инструментом. Расчет при условии однородно распределенного деформационного упрочнения дает результаты, практически неотличимые от приведённых на рис. 3, полный учёт технологической наследственности ведет к неустойчивости процесса из-за неравножесткости заготовки вследствие неоднородности распределения толщин по угловой координате.

4. Траектории деформаций и их близость к предельному состоянию

Качество заготовки в результате выполнения каждого этапа и технологического процесса в целом оценивалось с помощью меры близости состояния материала в контрольных точках боковой поверхности заготовки к предельным деформациям на диаграмме ($\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \leq 0$). На этой диаграмме выделяют линию предельных деформаций [1], при достижении которой недопустимо развивается утонение стенки (на плоском

образце образуется шейка). Положение этой линии для используемой стали определено в работах [3, 4] по данным испытаний (рис. 3), в которых обеспечивались одноосное растяжение и состояние, близкое к плоской деформации. Достижение линии предельных сдвиговых деформаций [1] означает пластическое разрушение по сдвиговой моде. Эта линия также показана на рис. 3. Следует отметить, что вблизи оси ε_2 на диаграмме деформаций находятся состояния, опасные с точки зрения гофрообразования [1], в которых сжимающая главная деформация критически превосходит растягивающую. Дефекты, возникающие в рассматриваемой технологии производства чайника без промежуточного отжига, представляют собой полосы утонения вдоль линий максимальных касательных напряжений, то есть образуют картину, характерную для состояний, отвечающих области предельных деформаций.

Необходимо сказать, что экспериментальные точки для построения кривой предельных деформаций получаются в результате панч-тестов и подобных испытаний, в которых реализуется простое нагружение [1,2]. Траектории деформации, характерные для рассматриваемого многоэтапного процесса (рис. 3), являются непропорциональными, поскольку после излома они соответствуют активному нагружению (упругие деформации ввиду своей малости на рисунке неразличимы). Существуют систематические эксперименты Графа и Хосфорда [7], свидетельствующие об эволюции кривой предельного деформирования в процессе простого нагружения, в ходе которого граница смещается внутрь безопасной области. В многоэтапных процессах это указывает на возможность проблем при раздаче, следующей после вытяжки осесимметричного сосуда. В то же время ссаживание после вытяжки практически продолжает пропорциональное нагружение (рис. 3) и не приближает материал боковой поверхности сосуда к предельному состоянию.

Наглядное изображение изменения деформированного состояния изделия и его близости к предельному состоянию позволяют сделать общие выводы о предпочтительных технологиях получения качественного изделия (в том числе и о возможности исключения промежуточного отжига). Менее опасной выглядит технология с последовательными этапами раздачи и ссаживания стакана большего диаметра после вытяжки. Диаметр стакана определяется степенью раздачи, не требующей восстановления ресурса пластичности предварительным отжигом. Повышение степени ссаживания горловины может быть достигнуто за счёт увеличения числа проходов обкатки роликом. Меньшая степень вытяжки стакана сохраняет его равновесность по окружной координате и, следовательно, — устойчивость процесса ссаживания.

Заключение

С использованием численного расчета последовательных этапов вытяжки, раздачи и ссаживания тонкостенного осесимметричного сосуда построены траектории деформации его боковой поверхности в контрольных точках. Установлено, что траектории деформаций материала приближаются к предельному состоянию в основном во время раздачи заготовки, следующей после вытяжки. Такая смена операций ведёт к резкому излому траекторий деформаций и к смещению предельных деформаций внутрь безопасной зоны, что было показано в экспериментах Графа и Хосфорда. Отмечено, что операция ссаживания после вытяжки практически соответствует продолжению траектории деформирования точки материала в прежнем направлении. Поскольку этими операциями достигается получение заданной формы сосуда, обеспечить его можно сочетанием меньшей степени раздачи и большей степени ссаживания заготовки с увеличенным диаметром. Позволит ли оптимальный подбор параметров альтернативной

технологии исключить операцию отжига — вопрос, требующий обязательного подтверждения натурными испытаниями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Banabic D. Sheet metal forming processes. Constitutive modelling and numerical simulation. Springer, 2010. 301 p.
- [2] Келлер И. Э., Петухов Д. С., Казанцев А. В., Трофимов В. Н. Диаграмма предельных деформаций при горячей листовой штамповке металлов. Обзор моделей материала, критериев вязкого разрушения и стандартных испытаний. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 3. С. 447-486.
- [3] Khan A. S., Huang S. Continuum theory of plasticity. John Wiley and Sons, 1995. 421 p.
- [4] Адамов А. А., Келлер И. Э., Петухов Д. С. Экспериментальная идентификация законов пластичности и разрушения малоуглеродистой листовой стали для моделирования холодной штамповки. Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81, № 2. С. 202-211.
- [5] Келлер И. Э., Казанцев А. В., Адамов А. А., Петухов Д. С. Моделирование многоэтапной холодной штамповки тонкостенного сосуда. Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 1. С. 75-88.
- [6] Казанцев А. В., Келлер И. Э. Оценка многоэтапного технологического процесса холодной листовой штамповки тонкостенного сосуда с точки зрения предельных деформаций. Вычисл. мех. сплош. сред. 2020. Т. 13. № 2. С. 123-133.
- [7] Graf, A., Hosford, W.F. The influence of strain-path changes on forming limit diagrams of Al 6111 T4. Int. J. Mech. Sci. 1994. Vol. 36. P. 897-910.

A. V. Kazantsev, I. E. Keller

THE LIMIT FORMING ESTIMATION OF MULTI-STAGE THIN-WALLED VESSEL FORMING PROCESS

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science,
Perm, Russia*

Abstract. A numerical model of multi-stage technological process of cold stamping of a thin-walled vessel made of sheet steel was built taking into account technological heredity. Relations of large plastic deformations of the anisotropic shell is used, taking into account the dynamics and contact interactions with the tool, which was implemented in the LS-DYNA package. Barlat's plasticity model Yld 2000-2d with the power law of isotropic strain hardening is used with material constants identified from experimental data for low-carbon sheet steel DC04EK 0.7 mm. The forming limit curve was built on the distortion of the coordinate grid near the zones of strain localization and failure of the vessel in the technological process without intermediate annealing and in the failure test under uniaxial tension. The features of the strain paths in the control points of the vessel at each stage of the technological process, including the sequence of operations of drawing, distributing and reduction, are studied. The path calculation was confirmed by an experiment using pressing equipment as a test. The quality estimation of the product is evaluated by the distance of its deformed state from the limit states on the strain diagram. It is established that the operation of distributing the workpiece after its drawing quickly leads to the limit state and therefore requires a preliminary recovering the plasticity resource by annealing. There is a preference for forming the relief of the vessel by smaller degrees of distribution and greater degrees of reduction for elimination of the limit states and the operation of intermediate annealing.

Keywords: multi-stage technological process, cold sheet stamping, numerical calculation, plasticity, limit strains, estimation.

REFERENCES

- [1] Banabic D. Sheet metal forming processes. Constitutive modeling and numerical simulation. Springer, 2010.301 p.
- [2] Keller I. E., Petukhov D. S., Kazantsev A. V., Trofimov V. N. Diagram of ultimate deformations during hot sheet stamping of metals. Review of material models, ductile fracture criteria and standard tests. Vestn. Himsel. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. science. 2018.Vol. 22. No. 3. P. 447-486.
- [3] Khan A. S., Huang S. Continuum theory of plasticity. John Wiley and Sons, 1995.421 p.
- [4] Adamov A. A., Keller I. E., Petukhov D. S. Experimental identification of the laws of plasticity and fracture of low-carbon steel sheet for cold forming simulation. Strength and ductility problems. 2019.Vol. 81, no. 2. P. 202-211.
- [5] Keller I. E., Kazantsev A. V., Adamov A. A., Petukhov D. S. Modeling of multistage cold stamping of a thin-walled vessel. Strength and ductility problems. 2020.Vol. 82. No. 1. P. 75-88.

Keller, Ilya Ernstovich Head of laboratory, Laboratory of Nonlinear Mechanics of Deformable Solids, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Perm, Russia.

Kazantsev, Alexander Vladimirovich Senior lecturer, Department of Dynamics and Strength of Machines, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia.

- [6] Kazantsev A. V., Keller I. E. Evaluation of the multistage technological process of cold sheet stamping of a thin-walled vessel from the point of view of ultimate deformations. *Calculated fur. solid.* Wednesday 2020. Vol. 13. No. 2. P. 123-133.
- [7] Graf, A., Hosford, W.F. The influence of strain-path changes on forming limit diagrams of Al 6111 T4. *Int. J. Mech. Sci.* 1994. Vol. 36. P. 897-910.

Д. В. Гоцев^{1,2}, А. В. Ковалев^{1,2}, А. И. Шашкин¹, А. Ю. Яковлев¹

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ
В ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ, ИЗ СТАРЕЮЩЕГО
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия

Аннотация. В работе в аналитическом виде определяется распределение полей напряжений в эксцентрической трубе, находящейся под действием внутреннего давления. Материал трубы моделировался средой, обладающей наследственно стареющими упругопластическими свойствами. Решение задачи проводилось в рамках метода возмущений. За малый параметр бралась величина эксцентриситета. В качестве невозмущенного состояния принималось осесимметричное упругопластическое напряженное состояние трубы, определенное с учетом возраста и истории нагружения материала. В результате моделирования выведено уравнение для определения формы и размера границы раздела упругой и пластической зон в трубе с эксцентриситетом, а также получены аналитические выражения для компонент напряжений в каждой из областей деформирования.

Ключевые слова: стареющий упругопластический материал, эксцентрическая труба, метод малого параметра, поле напряжений.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.005

УДК: 539.374

Известно, что физико-механические характеристики у таких материалов как бетон, различного рода полимеров, горных пород, льда и других меняются во времени. В связи с этим такие материалы могут быть классифицированы как стареющие (зависящие от возраста материала). При этом процесс их старения может быть обусловлен действием различного рода полей (температурного, радиационного, магнитного и т.д.) — искусственное старение или за счет протекания в них физико-химических превращений — естественное старение.

Отличительной особенностью большинства стареющих материалов является лишь частичная необратимость деформации ползучести. При этом часть необратимой деформации в основном зависит от скорости процесса старения, а также от возраста материала к моменту разгрузки.

Развитию теории пластичности стареющих материалов посвящена работа [1], а также исследования ряда других авторов. В работе [2] развита теория ползучести неоднородно-стареющих тел.

При описании напряженно-деформированного состояния конструкций, выполненных из стареющих материалов с учетом их неупругой работы необходимо учитывать зависимость величины предела текучести от возраста материала. Простейшая модель, учитывающая изменение со временем предела текучести материала, согласно [3], может быть определена следующими соотношениями:

$$e_{ij}^p(t) = \sqrt{I_2(t)} \frac{S_{ij}}{k(t)}, \quad \frac{S_{ij}}{k(t)} \frac{S_{ij}}{k(t)} = 2, \quad (1)$$

где $e_{ij}^p(t)$, S_{ij} — компоненты тензора скоростей пластических деформаций и девиатора тензора напряжений соответственно; $I_2(t) = \frac{1}{2} e_{ij}^p(t) e_{ij}^p(t)$; $k(t)$ — предел текучести материала.

Отметим, что модель (1) может быть использована для описания механического поведения тела в случае, если предел текучести материала во всех точках тела имеет одинаковую величину, изменяющуюся во времени по одному и тому же закону для любого фиксированного возраста материала.

© Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. И. Шашкин, А. Ю. Яковлев, 2020

Гоцев Дмитрий Викторович

e-mail: rbgotsev@mail.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет; профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kav-mail@mail.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет; ст. научный сотрудник, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Шашкин Александр Иванович

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Яковлев Александр Юрьевич

e-mail: yakovlev@amm.vsu.ru, доцент, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.09.2020

Модель (1) может быть обобщена на случай вязко-пластического тела с неоднородно-стареющим пределом текучести в виде [3]

$$e_{ij}^p(t) = \sqrt{I_2(t)} \frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))}, \quad \frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))} \frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))} = 2, \quad (2)$$

где r — радиус-вектор точки тела; $\chi(r)$ — функция, характеризующая изменение возраста материала в элементах стареющего тела относительно элемента с $r = \{0, 0, 0\}$. В выражении (2) предел текучести различных элементов рассматриваемого тела изменяется по одному и тому же временному закону, но с тем или иным запаздыванием, зависящим от возраста материала данного элемента тела.

Определяющие соотношения теории идеальной вязко-пластичности для неоднородно-стареющих тел с “памятью” можно представить в форме [3]

$$e_{ij}^p(t) = \sqrt{I_2(t)} \left(\frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))} + \int_{\tau_0}^t S_{ij}(\tau) K(t + \chi(r), \tau + \chi(r)) d\tau \right),$$

$$\left(\frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))} + \int_{\tau_0}^t S_{ij}(\tau) K(t + \chi(r), \tau + \chi(r)) d\tau \right)^2 = 2, \quad (3)$$

где τ_0 — момент приложения напряжений к телу; $K(t, r)$ — ядро наследственного оператора, учитывающего эффект последствия в процессе деформирования.

Заметим, что поскольку процесс естественного или искусственного старения в теле протекает неодинаково во всех его элементах, то в (3) предел текучести материала будет являться функцией момента наблюдения и пространственных координат.

Исследованию модельных задач теории ползучести неоднородно-стареющих тел, допускающих нахождение точных или приближенных аналитических решений, посвящены работы [2, 6, 7] и др.

В исследованиях [4, 5] получены приближенные аналитические выражения, описывающие распределения полей напряжений в толстой плите в окрестности эллиптического [4] или кругового [5] отверстий при двухосном растяжении с учетом возраста и истории нагружения упруго-пластического материала.

Настоящая работа посвящена исследованию напряженного состояния эксцентрической трубы, находящейся под действием внутреннего равномерно распределенного давления интенсивностью $P_0(t)$, меняющегося со временем. Свойства материала трубы моделируются однородной наследственно стареющей средой, обладающей одновременно упругими и пластическими свойствами. Предполагается, что при рассматриваемой схеме нагружения в трубе возникает пластическая зона, которая полностью охватывает ее внутреннюю поверхность. Для реализации такого состояния необходимым является условие монотонного возрастания внутреннего давления $P_0(t)$ со временем. Задача решается в рамках плоско-деформированного состояния в цилиндрической системе координат (ρ, θ, z) , при этом ось Oz направлена вдоль центральной оси внутреннего отверстия трубы. В этом случае напряженное состояние будет характеризоваться двумя главными компонентами тензора напряжений: радиальной $\sigma_\rho(\rho, \theta, t)$, окружной $\sigma_\theta(\rho, \theta, t)$ и одной касательной $\tau_{\rho\theta}(\rho, \theta, t)$.

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \quad (4)$$

Пусть к рассматриваемому моменту времени $t = 0$ вблизи внутренней поверхности трубы (область пластического деформирования) выполняется условие наследственной пластичности [2], которое имеет вид

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_\rho(t) - \sigma_\theta(t)}{k(t)} + \int_0^t (\sigma_\rho(\tau) - \sigma_\theta(\tau)) K(t, \tau) d\tau \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\rho\theta}}{k(t)} + \int_0^t K(t, \tau) \tau_{\rho\theta}(\tau) d\tau \right)^2 = 1. \quad (5)$$

Решение поставленной задачи будем проводить в рамках метода малого параметра, в качестве которого выбирается величина δ , характеризующая отклонение центров внутреннего и внешнего контуров трубы друг от друга. Суть данного метода состоит в том, что все неизвестные компоненты представляются в виде рядов по степеням этого малого параметра [8, 9]. Далее выделяются члены разложения при одинаковых степенях этого параметра, которые определяют систему уравнений, позволяющую развить метод последовательных приближений при условии того, что решение при $\delta = 0$ (нулевое приближение) известно.

В настоящей работе ограничимся только линейными по δ членами разложений

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^{(0)} + \delta \sigma_\rho^{(1)}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^{(0)} + \delta \sigma_\theta^{(1)}, \quad \tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}^{(0)} + \delta \tau_{\rho\theta}^{(1)}, \quad r_s(t) = r_s^{(0)}(t) + \delta r_s^{(1)}(t), \quad (6)$$

где $r_s(t)$ — радиус раздела зон упругого и пластического деформирования в трубе; верхний индекс указывает на номер приближения.

Уравнение внешнего контура трубы в плоскости, перпендикулярной оси Oz , до деформации согласно [8] примем в форме

$$\rho = \beta + \delta \cos \theta, \quad (7)$$

где β — радиус внешнего контура трубы в невозмущенном состоянии.

Решение проведем в относительных величинах, оставив им их прежние обозначения. При этом параметры и переменные, имеющие размерность напряжений, отнесем к значению предела текучести на сдвиг материала трубы $k(t)$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. $k_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t)$; геометрические характеристики отнесем к радиусу $r_s^{(0)}(0)$ упругопластической границы в нулевом приближении в начальный момент времени; время t отнесем к некоторой константе t_0 , имеющей размерность времени.

За нулевое приближение выберем осесимметричное состояние трубы без эксцентриситета с внешним радиусом β и внутренним α . По внутренней поверхности трубы действует равномерно распределенное нормальное давление интенсивностью $P_0(t) = P_0(t)/k_\infty$.

В случае нулевого приближения имеет место осесимметричная задача и два уравнения равновесия (4) сведутся к одному:

$$\frac{\partial \sigma_\rho^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0, \quad (8)$$

условие наследственной пластичности (5) переписывается в форме

$$\frac{\sigma_\rho^{(0)}(t) - \sigma_\theta^{(0)}(t)}{k(t)} \eta + \int_0^t \eta (\sigma_\rho(\tau) - \sigma_\theta(\tau)) K^0(\tau) d\tau = 2, \quad (9)$$

где

$$\eta = \sigma_\rho^{(0)}(t) - \sigma_\theta^{(0)}(t), \quad K^0(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{k(\tau)} \right).$$

Пусть в пластической зоне $\sigma_\rho^{(0)}(t) < \sigma_\theta^{(0)}(t)$, то есть $\eta = -1$. В этом случае, решая уравнения (8), (9) с учетом непрерывности обоих компонент тензора напряжений на упругопластической границе, согласно работам [4,5] распределение полей напряжений в упругой зоне деформирования описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)e}(\rho, t) &= \varphi(t)k(t) \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\rho^2} \right), \\ \sigma_\theta^{(0)e}(\rho, t) &= \varphi(t)k(t) \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\rho^2} \right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

в пластической области — формулами

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)p}(\rho, t) &= 2k(t)\varphi(t) \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) - P_0(t), \\ \sigma_\theta^{(0)p}(\rho, t) &= 2k(t)\varphi(t) \left(\ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) + 1 \right) - P_0(t), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь и далее индекс “*p*” сверху величин указывает их принадлежность к пластической зоне, а индекс “*e*” — к упругой; $\varphi(t)$ — функция времени.

Трансцендентное уравнение для нахождения радиуса раздела зон упругого и пластического деформирования в нулевом приближении имеет вид

$$\left(e_s^{(0)}(t) \right)^2 + \beta^2 \left(2k(t)\varphi(t)(\ln(\alpha r_s^{(0)}(t)) - 1) + 1 + P_0(t) \right) = 0. \quad (12)$$

Аналитические зависимости (10)–(12), описывающие распределение поля напряжений в нулевом приближении, позволяют перейти к решению задачи в первом приближении.

Линеаризованные граничные условия на внешнем контуре трубы при $\rho = \beta$ для первого приближения имеют форму [8]

$$\sigma_\rho^{e(1)} = -2k(t)\varphi(t)\beta^{-3} \cos \theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{e(1)} = -2k(t)\varphi(t)\beta^{-3} \sin \theta. \quad (13)$$

Линеаризованные условия сопряжения напряжений на упругопластической границе в трубе для первого приближения в общем виде описываются соотношениями

$$\left[\sigma_{ij}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial \rho} r_s^{(1)} \right] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (14)$$

где $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$ — компоненты тензора напряжений для нулевого и первого приближения; $r_s^{(1)}$ — величина, описывающая контур границы упругой и пластической областей деформирования в первом приближении. Здесь и далее квадратные скобки обозначают разность стоящих в них величин, посчитанных в упругой и пластической областях деформирования.

Граничные условия для первого и последующих приближений на внутреннем контуре отверстия в трубе [2, 8, 9] представляются следующими выражениями:

$$\sigma_{\rho}^{(n)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(n)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

В зоне упругого деформирования трубы из стареющего материала согласно [2, 8, 9] и с учетом условий (13) компоненты напряжений в первом приближении будут описываться формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)e} &= -\frac{2k(t)\varphi(t)}{\beta^4} \left(\rho + \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) \right) \cos \theta, \\ \sigma_{\theta}^{(1)e} &= -\frac{2k(t)\varphi(t)}{\beta^4} \left(3\rho + \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(3\rho + \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) \right) \cos \theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= -\frac{2k(t)\varphi(t)}{\beta^4} \left(\rho + \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

В пластической области трубы с учетом нулевых граничных условий (15) и однородности разрешающего дифференциального уравнения получаем нулевые компоненты напряжений в первом приближении.

Вид упругопластической границы в первом приближении $r_s^{(1)}$ определяется линеаризованным условием вида [2, 8]

$$r_s^{(1)} = - \left[\sigma_{\theta}^{(1)} \right] \left[\frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \Big|_{\rho=1}$$

или, с учетом (11) и (16), соотношением

$$r_s^{(1)} = -\frac{2}{\beta^4 - 1} \cos \theta. \quad (17)$$

Таким образом, полученные соотношения (6), (10)–(12), (10) описывают напряженное состояние в эксцентрической трубе из стареющего упругопластического материала для нулевого и первого приближений. При этом граница раздела зон упругого и пластического деформирования определяется соотношениями (6), (12), (17).

Если в формулах (10)–(12), (16), (17) принять, что нагрузка не изменяется со временем и положить $k(t) = k(0)$, то полученные решения совпадут с результатами для упругопластической задачи [8].

В качестве исходных данных для проведения численного эксперимента по полученным соотношениям примем

$$k(t) = \frac{1 - \gamma e^{-0,1t}}{1 - \gamma}, \quad \varphi(t) = \frac{(1 - \gamma e^{-0,1t})^2}{(1 - \gamma)^2},$$

$$P_0(t) = 2, \quad \alpha = 0,5, \quad \beta = \frac{5}{3}, \quad \delta = 0,1, \quad \gamma = 0,2.$$

На рис. 1 представлены внешний (кривая Л1) и внутренний (кривая Л2) контуры трубы, а также форма и размер границы раздела зон упругого и пластического деформирования материала в различные моменты времени: кривая Л3 — в нулевой момент времени, кривая Л4 — при $t = 10$, кривая Л5 — при $t \rightarrow \infty$.

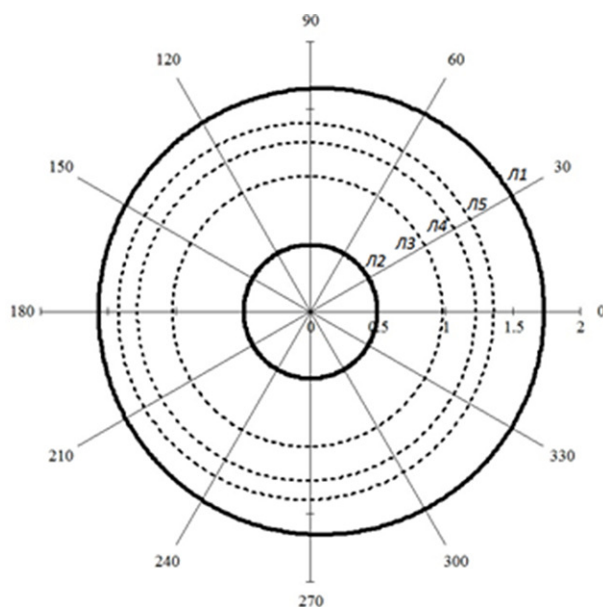


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян Р. А., Каменцева Э. П. Упрочнение стареющих сплавов // Изв. АН СССР, МТТ. 1976. № 4.
- [2] Арутюнян Н. Х., Ивлев Д. Д. К теории вязкопластичности неоднородно-стареющих тел // Изв. АН АрмССР. Механика. 1996. Т. 35, № 5. С. 22–26.
- [3] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. Т. 2. 448 с.
- [4] Милявская Ф. Б. О двусосном растяжении толстой пластины с эллиптическим отверстием из стареющего материала // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1987. С. 169–174.
- [5] Милявская Ф. Б. Двусосное растяжение пластины с круговым отверстием из стареющего упругопластического материала // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1986. С. 82–90.
- [6] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Институт механики НАН, 1999. 320 с.
- [7] Manzhirou A. V. Fundamentals of mechanical design and analysis for am fabricated parts // Procedia Manufacturing. 2017. Vol. 7. P. 59–65. doi:10.1016/j.promfg.2016.12.017.
- [8] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [9] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. 219 с.

D. V. Gotsev^{1,2}, A. V. Kovalev^{1,2}, A. I. Shashkin¹, A. U. Yakovlev¹

ON THE DETERMINATION OF THE VOLTAGE FIELD IN THE ECCENTRIC TUBE, FROM AN AGING ELASTICPLASTIC MATERIAL

¹ Voronezh State University, Voronezh, Russia

² Training and scientific center of the air force "AirForce academy named after professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia

Abstract. In this work, the distribution of stress fields in an eccentric pipe under the action of internal pressure is determined in an analytical form. The pipe material was modeled by a medium with hereditarily aging elastoplastic properties. The problem was solved within the framework of the perturbation method. The eccentricity value was taken as a small parameter. The unperturbed state was taken to be the axisymmetric elastoplastic stress state of the pipe, determined taking into account the age and loading history of the material. As a result of modeling, an equation was derived to determine the shape and size of the interface between the elastic and plastic zones in a pipe with eccentricity, and analytical expressions were obtained for the stress components in each of the deformation regions.

Keywords: aging elastoplastic material, eccentric tube, small parameter method, stress field.

REFERENCES

- [1] Harutyunyan P. A., Kamentseva E. P. Hardening of aging alloys // *Izv. USSR Academy of Sciences, MTT*. 1976. no. 4. (in Russian).
- [2] Harutyunyan H. H., Ivlev D. D. To the theory of viscoplasticity, not -od -but -gender -no one hundred -special bodies // *Izv. Academy of Sciences of the Armenian SSR. Mechanics*. 1996. Vol. 35, no. 5. P. 22–26. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D. *Mechanics of Plastic Media*. Moscow: FISMATLIT, 2002. Vol. 2. 448 p. (in Russian).
- [4] Milyavskaya B. About biaxial stretching of a thick plate with an elliptical hole made of aging material // *Boundary value problems and their applications*. Cheboksary: Chuvash. un-t, 1987. P. 169–174. (in Russian).
- [5] Milyavskaya B. Biaxial tension of a plate with a circular hole from an aging elastoplastic material // *Boundary value problems and their applications*. Cheboksary: Chuvash. un-t, 1986. P. 82–90. (in Russian).
- [6] Harutyunyan H. H., Manzhairov A. V. *Contact problems of creep theory*. Yerevan: Institute of Mechanics NAS, 1999. 320 p. (in Russian).
- [7] Manzhairov A. V. Fundamentals of mechanical design and analysis for am fabricated parts // *Procedia Manufacturing*. 2017. Vol. 7. P. 59–65. doi: 10.1016 / j.promfg.2016.12.017.
- [8] Ivlev D. D., Ershov L. V. *Perturbation method in the theory of an elastoplastic body*. Moscow: Science, 1978. 208 p. (in Russian).
- [9] Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Y. D. *Non-one-dimensional elastic-viscoplastic problems with unknown boundary*. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 2004. 219 p. (in Russian).

Gotsev Dmitry Viktorovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University; Professor, Training and scientific center of the air force "AirForce academy named after professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia.

Kovalev Alexey Viktorovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University; Professor, Training and scientific center of the air force "AirForce academy named after professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia.

Shashkin Alexander Ivanovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Yakovlev Alexander Yurievich, Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Н. А. Локтева, Д. О. Сердюк, П. Д. Скопинцев

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ КИРХГОФА-ЛЯВА

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г.
Москва, Россия

Аннотация. Строится нестационарная функция прогиба для тонкой бесконечной цилиндрической оболочки постоянной толщины при воздействии на ее боковую поверхность вынужденной нестационарной движущейся нагрузки, распределенной по прямоугольной области. Материал рассматриваемой цилиндрической оболочки принят упругим и анизотропным, обладающим симметрией относительно ее срединной плоскости. Теория тонких упругих оболочек строится на гипотезах Кирхгофа-Лява. Для математического описания мгновенно приложенной нагрузки используются дельта-функции Дирака.

Ключевые слова: анизотропная цилиндрическая оболочка, нестационарная динамика, функция влияния, функция прогиба, обобщенные функции, интегральные преобразования, квадратурные формулы, нормальное перемещение, оболочка Кирхгофа-Лява.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.006

УДК: 539.31

Введение. Задачи по исследованию нестационарной динамики изотропных упругих пластин Кирхгофа-Лява наиболее полно изучены на данный момент [1]. В работах [2,3] рассмотрен широкий круг проблем динамики ортотропных цилиндрических оболочек, их осесимметричное и неосесимметричное деформирование при продольном

© Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., 2020

Локтева Наталья Александровна

e-mail: nlok@ Rambler.ru, к.т.н., доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, динамика и прочность машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

Сердюк Дмитрий Олегович

e-mail: d.serduk55@gmail.com, к.т.н., доцент кафедры сопротивления материалов, динамика и прочность машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

Скопинцев Павел Дмитриевич

e-mail: chgpashka@gmail.com, аспирант кафедры сопротивления материалов, динамика и прочность машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00968 А).

Поступила 01.07.2020

ударе. В работе [4] отражены проблемы деформирования подкрепленных цилиндрических оболочек при действии динамических сжимающих осевых нагрузок и внешнего давления. В работе [5] по изучению динамики оболочек автор рассматривал тонкостенные однородные цилиндрические оболочки из композиционных материалов при импульсном воздействии.

В данной работе исследуется процесс воздействия движущейся нестационарной нагрузки на упругую анизотропную неограниченную цилиндрическую оболочку.

1. Постановка задачи. Объектом исследования является бесконечная тонкая цилиндрическая оболочка (см. рис. 1). Оболочка имеет радиус R и постоянную толщину h . Материал оболочки принимается упругим и анизотропным. Упругая среда в рассматриваемом случае анизотропии имеет одну плоскость симметрии - срединная плоскость оболочки.

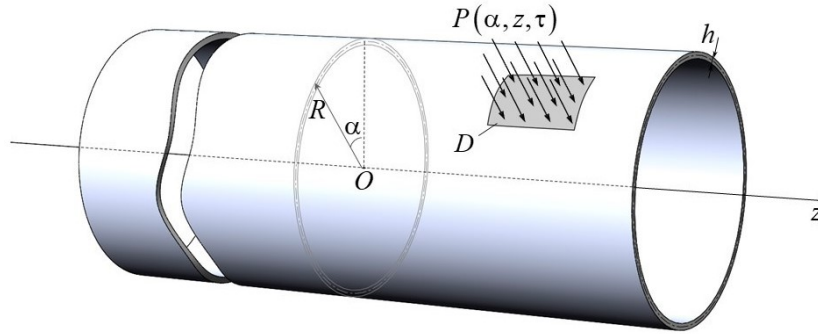


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка под воздействием нестационарной нагрузки

Рассматриваемый материал, применительно к тонкой оболочке типа Кирхгофа-Лява, характеризуется шестью независимыми упругими постоянными:

$$c_{11} = C^{1111}, \quad c_{12} = C^{1122}, \quad c_{16} = C^{1112}, \quad c_{22} = C^{2222}, \quad c_{26} = C^{1222}, \quad c_{66} = C^{1212}.$$

В начальный момент времени оболочка находится в состоянии покоя. Далее на нее воздействует нестационарная нагрузка $P(\alpha, z, \tau)$, распределенная по области D , принадлежащей боковой поверхности оболочки. Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат $OR\alpha z$.

Постановка задачи включает в себя безразмерные уравнения движения упругой оболочки Кирхгофа-Лява, соответствующие геометрические и физические соотношения с учетом симметрии свойств материала исследуемой оболочки [1, 6, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \tau^2} &= K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w) + q_\alpha, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} &= K_{21}(u_\alpha) + K_{22}(u_z) + K_{23}(w) + q_z, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= K_{31}(u_\alpha) + K_{32}(u_z) + K_{33}(w) + p. \end{aligned} \quad (1)$$

$$K_{11}(u_\alpha) = \frac{1}{k^2} u_{\alpha, \alpha \alpha} + \frac{2C_2}{k} u_{\alpha, \alpha z} + \left(\frac{C_5}{12k^2} + C_5 \right) u_{\alpha, z z},$$

$$K_{12}(u_z) = \frac{C_2}{k^2} u_{z,\alpha\alpha} + \left(\frac{C_1}{k} + \frac{C_5}{k} - \frac{C_5}{12k^3} \right) u_{z,\alpha z} + C_4 u_{z,zz}, \quad (2)$$

$$K_{13}(w) = \frac{1}{k^2} w_{,\alpha} - \frac{C_5}{6k^2} w_{,\alpha zz} - \frac{C_2}{12k^3} w_{,\alpha\alpha z} + \left(\frac{C_2}{k} - \frac{C_2}{12k^3} \right) w_{,z} - \frac{C_4}{12k} w_{,zzz}.$$

$$K_{21}(u_\alpha) = K_{12}(u_\alpha),$$

$$K_{22}(u_z) = \left(\frac{C_5}{k^2} + \frac{C_5}{12k^4} \right) u_{z,\alpha\alpha} + \frac{2C_4}{k} u_{z,\alpha z} + C_3 u_{z,zz}, \quad (3)$$

$$K_{23}(w) = \frac{C_2}{12k^4} w_{,\alpha\alpha\alpha} + \left(\frac{C_2}{k^2} + \frac{C_2}{12k^4} \right) w_{,\alpha} + \frac{C_5}{6k^3} w_{,\alpha\alpha z} + \frac{C_4}{12k^2} w_{,\alpha zz} + C_1 w_{,z}.$$

$$K_{31}(u_\alpha) = -K_{13}(u_\alpha), \quad K_{32}(u_z) = -K_{23}(u_z),$$

$$K_{33}(w) = -\frac{1}{12k^4} w_{,\alpha\alpha\alpha\alpha} - \frac{1}{6k^4} w_{,\alpha\alpha} - \frac{C_1}{6k^2} w_{,\alpha\alpha z z} - \frac{C_4}{3k} w_{,\alpha z z z} - \frac{C_2}{3k^3} w_{,\alpha\alpha\alpha z} - \frac{C_5}{3k^2} w_{,\alpha\alpha z z} - \frac{C_2}{3k^3} w_{,\alpha z} - \frac{C_3}{12} w_{,zzzz} - \frac{C_1}{6k^2} w_{,zz} - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{12k^4} \right) w. \quad (4)$$

В (1) – (4) следующие безразмерные величины: τ – время, k – коэффициент отношения радиуса оболочки к ее толщине, C_i – упругие константы, w – нормальное перемещение, u_α, u_z – компоненты вектора тангенциальных перемещений, q_i – тангенциальное давление, p – нормальное давление.

Безразмерные упругие константы в (2)-(4) заданы следующим образом:

$$C_1 = \frac{c_{12}}{c_{11}}, \quad C_2 = \frac{c_{16}}{c_{11}}, \quad C_3 = \frac{c_{22}}{c_{11}}, \quad C_4 = \frac{c_{26}}{c_{11}}, \quad C_5 = \frac{c_{66}}{c_{11}}.$$

Уравнения (1) – (4) совместно с начальными условиями

$$u_\alpha|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad u_z|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad w|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (5)$$

образуют начальную задачу.

Цель заключается в построении нестационарной функции нормальных перемещений $w(\alpha, z, \tau)$ в ответ на действие нестационарной нагрузки $P(\alpha, z, \tau)$.

2. Нестационарная функции прогиба. Решение начальной задачи (1) – (5) может быть построено с помощью функции влияния $G_w(\alpha, z, \tau)$ для нормального перемещения [1]:

$$w(\alpha, z, \tau) = G_w(\alpha, z, \tau) * * * P(\alpha, z, \tau). \quad (6)$$

В (6) через * обозначены свертки по пространственным координатам α, z и безразмерному времени τ .

Функции влияния нормальных перемещений $G_w(\alpha, z, \tau)$ и тангенциальных перемещений $G_{u_\alpha}(\alpha, z, \tau)$ и $G_{u_z}(\alpha, z, \tau)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{u_\alpha}}{\partial \tau^2} &= K_{11}(G_{u_\alpha}) + K_{12}(G_{u_z}) + K_{13}(G_w), \\ \frac{\partial^2 G_{u_z}}{\partial \tau^2} &= K_{21}(G_{u_\alpha}) + K_{22}(G_{u_z}) + K_{23}(G_w), \\ \frac{\partial^2 G_w}{\partial \tau^2} &= K_{31}(G_{u_\alpha}) + K_{32}(G_{u_z}) + K_{33}(G_w) + \delta(\alpha, z) \delta(\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

$$G_{u_\alpha}|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} G_{u_\alpha} \Big|_{\tau=0} = G_{u_z}|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} G_{u_z} \Big|_{\tau=0} = G_w|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} G_w \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Где $\delta(*)$ – дельта-функция Дирака, а дифференциальные операторы $K_{ij}(G_k)$ имеют вид (2) – (4), где необходимо заменить соответствующие искомые функции на функции влияния.

Для решения поставленной начальной задачи применим к (7) разложения в экспоненциальные ряды Фурье по углу α , а также интегральные преобразования Фурье по координате z и Лапласа по времени τ . В результате получим систему алгебраических уравнений относительно изображений функций влияния в пространстве преобразований Фурье и Лапласа в коэффициентах рядов.

Оригинал функции влияния прогиба по Лапласу найден аналитически при помощи таблиц [8] с предварительным применением метода неопределенных коэффициентов. Для нахождения оригинала по Фурье применим численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций [9].

С учетом разложения в экспоненциальные ряды нестационарная функция влияния для нормального прогиба анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява примет вид:

$$G_w(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \frac{\Delta}{2} \left(e^{i \frac{q_{k+1}z + q_k z}{2}} \cdot (D_1 G_{wn}^F(q_k, \tau) + D_2 G_{wn}^F(q_{k+1}, \tau)) \right). \quad (8)$$

Где:

$$\Delta = \frac{2A}{N}, \quad m = \frac{\Delta}{2}, \quad D_{1,2} = \frac{\sin m}{m} \pm \frac{m \cos m - \sin m}{m^2} i, \\ q_k = A + k\Delta, \quad q_{k+1} = A + (k+1)\Delta, \quad k = 0..N-1.$$

При воздействии на боковую поверхность оболочки движущейся нагрузки, распределенной в виде полосы, выражение для $P(\alpha, z, \tau)$ примет вид:

$$P(\alpha, z, \tau) = p(\tau) H(\tau) \left[H\left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \tau\right) - H\left(\alpha - \frac{\beta}{2} - \tau\right) \right] \times \\ \times \left[H\left(z + \frac{b}{2} - \tau\right) - H\left(z - \frac{b}{2} - \tau\right) \right], \quad (9)$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда.

Интегралы свертки (6) с учетом (8) и (9) берутся численным методом прямоугольников [9]. Приближенное выражение для искомой функции нестационарного прогиба примет вид:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^s \frac{a}{n} \frac{b}{m} \frac{\tau}{s} G_{wijk}(\alpha, z, \tau) p\left(\frac{\tau}{s} k\right), \quad (10)$$

$$G_{wijk}(\alpha, z, \tau) = G_w\left(\alpha - \frac{\beta}{n} i + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{s} k, z - \frac{b}{m} j + \frac{b}{2} - \frac{\tau}{s} k, \tau - \frac{\tau}{s} k\right).$$

Соотношение (10) позволяет исследовать пространственно-временные распространения нестационарных колебаний в неограниченной анизотропной оболочке Кирхгофа-Лява от воздействия вынужденной нестационарной движущейся распределенной нагрузки.

На рис. 2 представлены пространственные зависимости нестационарного прогиба оболочки при воздействии нестационарной движущейся распределенной по области с размерами $z = 0.2$, $\alpha = \pi/12$ нагрузки вида:

$$p(\tau) = (150 \sin(0.09\tau))^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\tau}{5}},$$

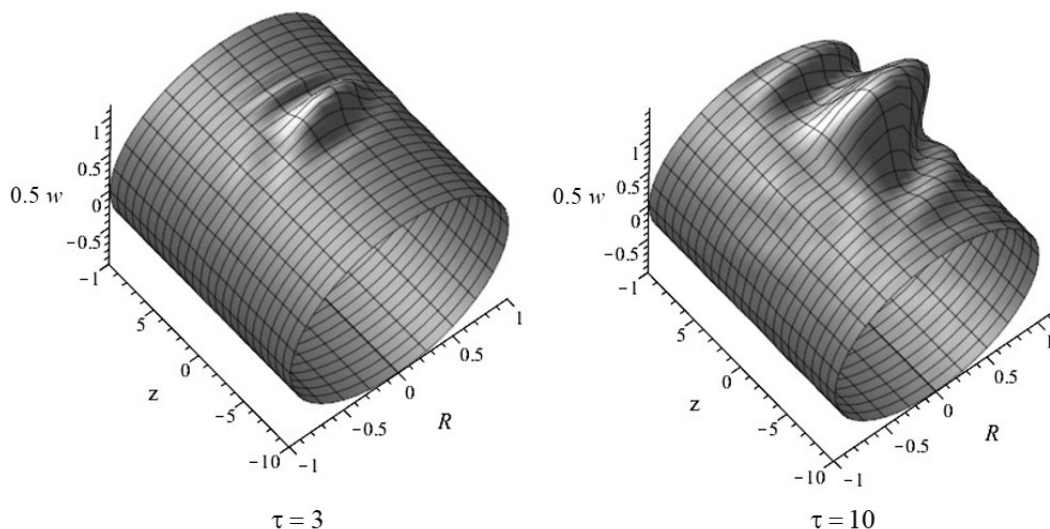


Рис. 2. Нестационарный прогиб оболочки

в безразмерные моменты времени 3 сек и 10 сек при следующих безразмерных параметрах:

$$C_1 = 0.814, C_2 = -0.735, C_3 = 0.717, C_4 = -0.630, C_5 = 0.574, k = 45.$$

На рис. 2 видно смещение максимального прогиба оболочки вдоль оси z и по углу α с течением времени, при этом виден несимметричный характер прогиба оболочки, что соответствует особенностям анизотропной упругой среды.

Выводы. Построена нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява при воздействии движущейся распределенной нестационарной нагрузки. Для построения функции прогиба была поставлена задача о нестационарной функции влияния, отыскание которой велось при помощи прямых и обратных интегральных преобразований Лапласа и Фурье, а также с применением разложений в экспоненциальные ряды. Приведен пример расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н. Волны в сплошных средах: Учеб. пособие.: для вузов. -М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 472 с.
- [2] Богданович А. Е. Деформирование и прочность цилиндрических композитных оболочек при динамических нагрузках. Рига, 1985. 560 с.
- [3] Богданович А. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига, 1987. 295 с.
- [4] Кошкина Т. Б. Деформирование и прочность подкрепленных композитных цилиндрических оболочек при динамических сжимающих нагрузках. Академия наук Латвийской ССР. Рига, 1984. 180 с.

- [5] Сибиряков А. В. Динамика слоистых композиционных пластин и оболочек при импульсном нагружении: диссертация доктора технических наук: 01.02.06. М., 2002. 319 с.
- [6] Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости: Учебное пособие. М. : МАИ-ПРИНТ, 2009. 112 с.
- [7] Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Упругие пластины и пологие оболочки: Учебное пособие. М. : МАИ, 2018. 92 с.
- [8] Деч Г., Ивлев Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразований. М. : Наука, 1971. 288 с.
- [9] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : Наука, 1975. 630 с.

N. A. Lokteva, D. O. Serdyuk, P. D. Skopintsev

NON-STATIONARY DYNAMICS OF ANISOTROPIC KIRCHHOFF-LOVE TYPE SHELL

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

Abstract. A non-stationary deflection function is determined for a thin infinite cylindrical shell of constant thickness under the influence of non-stationary moving pressure. The pressure is distributed over a rectangular region, which belongs to the side surface of the shell. The shell material is elastic, anisotropic, and has symmetry to the median surface. The theory of thin elastic shells is based on the Kirchhoff-Love's hypotheses. The Dirac delta-functions are used to describe an instantaneously applied pressure.

Keywords: anisotropic cylindrical shell, non-stationary dynamics, influence function, deflection function, summarize function, integral transformation, quadrature equations, normal deflection, Kirchhoff-Love type shell.

REFERENCES

- [1] Gorshkov A. G., Medvedsky A. L., Rabinsky L. N. Waves in Continuous Media: Textbook. allowance : for universities. -M. : FIZMATLIT, 2004. 472 p.
- [2] Bogdanovich A. E. Deformation and strength of cylindrical composite shells under dynamic loads. Riga, 1985. 560 p.
- [3] Bogdanovich A. E. Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells. Riga, 1987. 295 p.
- [4] Koshkina T. B. Deformation and strength of reinforced composite cylindrical shells under dynamic compressive loads. Academy of Sciences of the Latvian SSR. Riga, 1984. 180 p.
- [5] Sibiryakov A. V. Dynamics of layered composite plates and shells under pulsed loading: dissertation of Doctor of Technical Sciences: 01.02.06. М., 2002. 319 p.
- [6] Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. General relations and variational principles of the mathematical theory of elasticity: Textbook. М. : MAI-PRINT, 2009. 112 p.
- [7] Mikhailova E. Yu., Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. Elastic Plates and Shallow Shells: A Tutorial. М. : MAI, 2018. 92 p.
- [8] Dech G., Ivlev G. A guide to the practical application of the Laplace transform and Z-transformations. М. : Nauka, 1971. 288 p.
- [9] Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Numerical methods. М. : Science, 1975. 630 p.

Lokteva Natalya Alexandrovna Ph.D and Associate Professor, Associate Professor, Department of Strength of Materials, Machinery Dynamics and Strength, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia.

Serdyuk Dmitriy Olegovich Ph.D, Associate Professor, Department of Strength of Materials, Machinery Dynamics and Strength, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia.

Skopintsev Pavel Dmitrievich Postgraduate student, Department of Strength of Materials, Machinery Dynamics and Strength, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia.

А. В. Земсков, Г. М. Файкин

ИЗГИБ УПРУГОДИФФУЗИОННОЙ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПОТОКОВ

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) г. Москва, Россия

Аннотация. Исследуются нестационарные колебания балки Эйлера-Бернулли с учетом массопереноса. Используется модель упругой диффузии для многокомпонентных сред. Для получения решения задачи используются вариационный принцип Даламбера и метод эквивалентный граничных условий.

Ключевые слова: упругая диффузия, Функция Грина, Балка Эйлера-Бернулли

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.007

УДК: 539.374

Рассматривается нестационарная задача о плоском упругодиффузионном изгибе консольно-закрепленной однородной изотропной балки Бернулли-Эйлера.

Математическая модель поперечных колебаний имеет вид [1,2]:

$$\ddot{v}'' - a\ddot{v} = v^{(IV)} + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j'', \quad \dot{H}_q + \tau_q \ddot{H}_q = D_q H_q'' + \Lambda_q v^{(IV)}, \quad \frac{F}{J_3} = a \quad (1)$$

Здесь точки обозначают произвольную по времени, штрихи - производную по координате x_1 . Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следующие

© Земсков А. В., Файкин Г. М., 2020

Земсков Андрей Владимирович

e-mail: azemskov1975@mail.ru, профессор кафедры «Прикладные программные средства и математические методы», Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт), с.н.с. лаборатории динамических испытаний НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, д.ф.-м.н., доцент, Москва, Россия.

Файкин Георгий Михайлович

e-mail: Egorc16@mail.ru, Магистрант кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин», Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт), г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-19-00217).

Поступила 01.07.2020

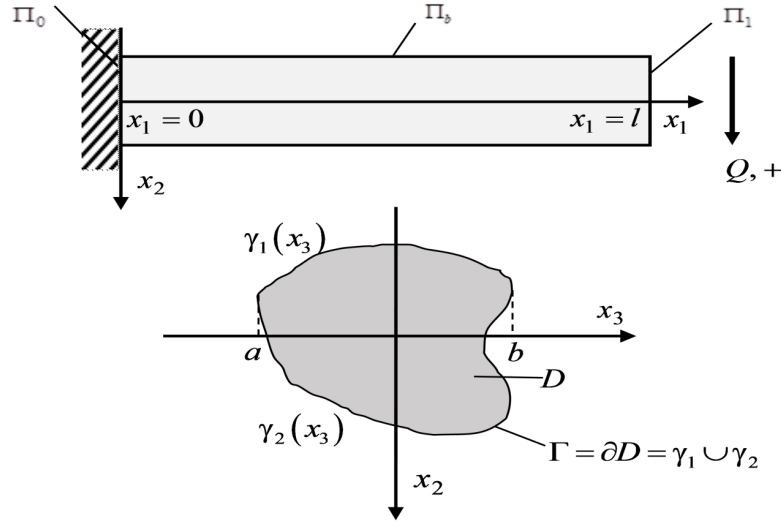


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи

обозначения

$$x_i = \frac{x_i^*}{l}, v = \frac{v^*}{l}, \tau = \frac{Ct}{l}, C^2 = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}, \alpha_q = \frac{\alpha^{(q)}}{\lambda^* + 2\mu^*}, D^q = \frac{D^{(q)}}{Cl},$$

$$\Lambda_q = \frac{m^{(q)} D^{(q)} \alpha^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 C l}, \lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, \mu = \frac{\mu^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, F = \frac{F^*}{l^2}, J_3 = \frac{J_3^*}{l^2}, \tau_q = \frac{C \tau^{(q)}}{l},$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; v^* – поперечный прогиб балки; l – длина балки; H_q – приращение концентрации q -ой компоненты вещества в составе N – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q -го вещества; λ^* и μ^* – упругие постоянные Ламе; ρ – плотность; $\alpha^{(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q -ого вещества, F^* – площадь сечения, J_3^* – момент инерции сечения балки относительно оси Ox_3 ; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков.

Начальные условия полагаем нулевыми. Граничные условия в соответствии с моделью консольного изгиба балки имеют вид ($x = x_1$):

$$v' \Big|_{x=0} = 0, v \Big|_{x=0} = 0, H_q \Big|_{x=0} = 0, \left(v'' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j \right) \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\left(v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j' - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=1} = f_{22}(\tau), (D_q H_q' + \Lambda_q v''') \Big|_{x=1} = 0 \quad (2)$$

Решение задачи ищется с помощью метода эквивалентных граничных условий [3,4]. Для этого рассматривается вспомогательная задача

$$\begin{aligned} v' \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H'_j - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=0} = f_{21}^*(\tau), \quad (D_q H'_q + \Lambda_q v''') \Big|_{x=0} = f_{q+2,1}^*(\tau) \\ v' \Big|_{x=1} = f_{12}^*(\tau), \quad \left(v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H'_j - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=1} = f_{22}(\tau), \quad (D_q H'_q + \Lambda_q v''') \Big|_{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где функции $f_{12}^*(\tau)$, $f_{1,q+2}^*(\tau)$, $f_{21}^*(\tau)$ подлежат определению.

Выражения для искомых функций в задаче (1),(3) записываются следующим образом [1,2]

$$\begin{aligned} v(x, \tau) = \int_0^b [G_{12}(x, \tau - t) f_{21}^*(t) - G_{12}(1 - x, \tau - t) f_{22}(t)] dt + \\ + \sum_{p=1}^N \int_0^\tau G_{1,p+2}(x, \tau - t) f_{p+2,1}^*(t) dt - \int_0^\tau G_{11}(1 - x, \tau - t) f_{12}^*(t) dt, \\ \eta_q(x, \tau) = \int_0^\tau [G_{q+2,2}(x, \tau - t) f_{21}^*(t) - G_{q+2,2}(1 - x, \tau - t) f_{22}(t)] dt + \\ + \sum_{k=1}^N \int_0^\tau G_{q+2,p+2}(x, \tau - t) f_{p+2,1}^*(t) dt - \int_0^\tau G_{q+2,1}(1 - x, \tau - t) f_{12}^*(t) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где G_{mk} – поверхностные функции Грина задачи (1), (3), которые являются решениями следующих задач

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{1k}'' - a \ddot{G}_{1k} = G_{1k}^{IV} + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}'', \quad \dot{G}_{q+1,k} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,k} = D_q G_{q+1,k}'' + \Lambda_q G_{1k}^{IV}, \\ (G_{1k}''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}' - \ddot{G}_{1k}') \Big|_{x_1=0} = \delta_{2k} \delta(\tau), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (G_{1k}''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}' - \ddot{G}_{1k}') \Big|_{x_1=1} = 0, \\ G_{1k}' \Big|_{x_1=0} = \delta_{1k} \delta(\tau), \quad (D_q G_{q+1,k}' + \Lambda_q G_{1k}''') \Big|_{x_1=1} = 0, \\ G_{1k}' \Big|_{x_1=1} = 0, \quad (D_q G_{q+1,k}' + \Lambda_q G_{1k}''') \Big|_{x_1=0} = \delta_{q+2,k} \delta(\tau), \end{aligned} \quad (6)$$

Прогибы и приращения концентраций (4) будут удовлетворять задаче (1), (2) если функции $f_{12}^*(\tau)$, $f_{1,q+2}^*(\tau)$, $f_{21}^*(\tau)$ будут удовлетворять следующей системе интегральных уравнений [3,4]

$$\sum_{j=1}^4 \int_0^{\tau} a_{ij}(\tau-t)y_j(t)dt = \varphi_i(\tau), \quad (7)$$

где:

$$\begin{aligned} y_1(\tau) &= f_{21}^*(\tau), \quad y_2(\tau) = f_{12}^*(\tau), \quad y_{p+2}(\tau) = f_{p+2,1}^*(\tau), \\ a_{11}(\tau) &= G_{12}(0, \tau), \quad a_{12}(\tau) = -G_{11}(1, \tau), \quad a_{1,p+2}(\tau) = G_{1,p+2}(0, \tau), \\ a_{q+2,1}(\tau) &= G_{q+2,2}(0, \tau), \quad a_{q+2,2}(\tau) = -G_{q+2,1}(1, \tau), \quad a_{q+2,p+2}(\tau) = G_{q+2,p+2}(0, \tau), \\ a_{21}(\tau) &= G_{12}''(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{q+2,2}(1, \tau), \quad a_{22}(\tau) = -G_{11}''(0, \tau) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{q+2,1}(0, \tau), \\ a_{q+2,p+2}(\tau) &= \sum_{p=1}^N [G_{1,p+2}''(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{q+2,p+2}(1, \tau)], \\ \varphi_1(\tau) &= \int_0^{\tau} G_{12}(1, \tau-t)f_{22}(t)dt, \quad \varphi_{p+2}(\tau) = \int_0^{\tau} G_{p+2,2}(1, \tau-t)f_{22}(t)dt, \\ \varphi_2(\tau) &= \int_0^{\tau} [G_{12}''(0, \tau-t) + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j=2,2}(0, \tau-t)]f_{22}(t)dt. \end{aligned}$$

Решение задачи (5), (6) ищется с помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды по косинусам. В этом случае задача (5), (6) сводится к следующей систем елинейных алгебраических уравнений (верхний индекс "L" обозначает трансформанту Лапласа, s – параметр преобразования Лапласа)

$$\begin{aligned} k_1(\lambda_n, s)G_{1k}^{LF}(\lambda_n, s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}^{LF}(\lambda_n, s) &= -2\lambda_n^2 \delta_{1k} + 2\delta_{2k}, \\ -\Lambda_q \lambda_n^4 G_{1k}^{LF}(\lambda_n, s) + k_{q+1} G_{q+1,k}^{LF}(\lambda_n, s) &= 2\lambda_n^2 \Lambda_q \delta_{1k} - 2\delta_{q+2,k}, \\ k_1(\lambda_n, s) &= \lambda_n^2 s^2 + as^2 + \lambda_n^4, \quad k_{q+1}(\lambda_n, s) = s + \tau_q s^2 + \lambda_n^2 D_q, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G_{mk}^{LF}(\lambda_n, s) &= 2 \int_0^1 G_{mk}^L(x, s) \cos(\lambda_n x) dx \quad (m = \overline{1, N+1}, k = \overline{1, N+2}), \\ G_{mk}^L(x, s) &= \frac{G_{mk}^{LF}(\lambda_n, s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{mk}^{LF}(\lambda_n s) \cos(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \pi n. \end{aligned}$$

Решение системы (8) имеет вид

$$\begin{aligned} G_{1k}^{LF} &= \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}, \quad G_{q+1,1}^{LF} = \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2}{k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \\ G_{q+1,2}^{LF} &= \frac{P_{q+1,2}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \quad G_{q+1,p+2}^{LF} = -\frac{2\delta_{qp}}{k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,p+2}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \\ G_{q+1,k}^{LF} &= \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1k}}{k_{q+1}} - \frac{2\delta_{q+2,k}}{k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_q(\lambda_n, s) &= k_{q+1}(\lambda_n, s)P(\lambda_n, s), \\ P(\lambda_n, s) &= k_1(\lambda_n, s) \prod_{q=1}^N k_{q+1}(\lambda_n, s) - \lambda_n^6 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{q=1, q \neq j}^N k_{q+1}(\lambda_n, s) \\ \Pi(\lambda_n, s) &= \prod_{q=1}^N k_{q+1}(\lambda_n, s), \quad \Pi_j(\lambda_n, s) = \prod_{q=1, q \neq j}^N k_{q+1}(\lambda_n, s) \\ P_{11}(\lambda_n, s) &= -2\lambda_n^2 [\Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j(\lambda_n, s)], \\ P_{12}(\lambda_n, s) &= 2\Pi(\lambda_n, s), \quad P_{1,q+2}(\lambda_n, s) = -2\lambda_n^2 \alpha_q \Pi_q(\lambda_n, s), \\ P_{q+1,k}(\lambda_n, s) &= \lambda_n^4 \Lambda_q P_{1k}(\lambda_n, s). \end{aligned}$$

Так как многочлены $P_{mk}(\lambda_n, s)$ являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа s , то переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Оригиналы функций Грина:

$$\begin{aligned} G_{1k}^F(\lambda_n, \varepsilon, s) &= \sum_{j=1}^{2N+2} A_{1k}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau}, \quad G_{q+1,2}^F = \sum_{j=1}^{2N+4} A_{q+1,2}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau}, \\ G_{q+1,1}^F &= 2\Lambda_q \lambda_n^2 \sum_{l=1}^2 \frac{e^{\xi_l(\lambda_n)\tau}}{k_{q+1}(\lambda_n, \varepsilon_l)} + \sum_{j=1}^{2N+4} A_{q+1,1}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j\tau}, \\ G_{q+1,p+2}^F &= -2\delta_{qp} \sum_{l=1}^2 \frac{e^{\xi_l(\lambda_n)\tau}}{k_{q+1}(\lambda_n, \varepsilon_l)} + \sum_{j=1}^{2N+4} A_{q+1,p+2}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau}, \\ A_{1k}^{(j)}(\lambda_n) &= \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}{P'(\lambda_n, s_j(\lambda_n))} \quad (j = \overline{1, 2N+2}, \quad q = \overline{1, N}), \\ A_{q+1,k}^{(l)}(\lambda_n) &= \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}{Q'_q(\lambda_n, s_j(\lambda_n))} \quad (l = \overline{1, 2N+4}), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
G_{1k}(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^F(\lambda_n, \tau) \cos(\lambda_n x), \\
G_{q+1,1}(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,1}^F(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \\
G_{q+1,2}(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,2}^F(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \\
G_{q+1,p+2}(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,p+2}^F(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x,
\end{aligned}$$

где $s_j(\lambda_n)$ ($j = \overline{1, N+2}$) – нули многочлена $P(\lambda_n, s)$, $s_{2N+3}(\lambda_n)$ и $s_{2N+4}(\lambda_n)$ – дополнительные нули многочленов $Q_q(\lambda_n, s)$:

$$\begin{aligned}
\xi_1(\lambda_n) = s_{2N+3}(\lambda_n) &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}, \\
\xi_2(\lambda_n) = s_{2N+4}(\lambda_n) &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}.
\end{aligned}$$

Далее, для решения системы (7) разбиваем область $[0, T]$, изменения времени τ на N_τ отрезков точками $\tau_m = mh$ ($m = \overline{0, N_\tau}$) с равномерным шагом $h = \frac{T}{N_\tau}$ и вводим сеточные функции $y_m^j = y_j(\tau_m)$, $a_m^{ij} = a_{ij}(\tau_m)$. Каждый из интегралов при $\tau = \tau_m$ приближенно заменяем суммой, соответствующей формуле средних прямоугольников:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau_j} a_{ij}(\tau_m - t) y_j(t) dt &\approx h S_{m-1/2}^{ij} + h a_{1/2}^{ij} y_{m-1/2}^j, \\
S_{m-1/2}^{ij} &= \sum_{l=1}^{m-1/2} a_{m-l+1/2}^{ij} y_{l-1/2}^j, \quad \tau_{m-1/2} = \frac{\tau_{m-1} + \tau_m}{2} = h \left(m - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

В результате приходим к рекуррентной системе линейных алгебраических уравнений:

$$A y_{m-1/2} = b_{m-1/2}$$

Где $y_{m-1/2} = (y_{m-1/2}^i)_{4 \times 1}$ – столбец неизвестных, а остальные величины определяются так:

$$A = (a_{1/2}^{ij})_{4 \times 4}, \quad b_{m-1/2} = (b_{m-1/2}^i)_{4 \times 1}, \quad b_{m-1/2}^i = \frac{\varphi_i(\tau_m)}{h} - \sum_{j=1}^4 S_{m-1/2}^{ij}.$$

Решение полученной системы находится методом Крамера. Решение исходной задачи получается путём численного вычисления свёрток (4) функций Грина (9) вспомогательной задачи с функциями, полученными в результате численного решения системы уравнений (10). Эти свёртки вычисляются с помощью квадратурной формулы средних прямоугольников.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тарлаковский Д.В., Земсков А.В., Файкин Г.М. Постановка задачи о Консольном изгибе балки Эйлера-Бернулли с учетом диффузии // Материалы XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. М.: ООО «ТРП», 2019. С. 136-139.
- [2] Тарлаковский Д.В., Земсков А.В., Файкин Г.М. Постановка задачи о нестационарном изгибе консольно-закрепленной балки Эйлера-Бернулли с учетом диффузии // Проблемы безопасности на транспорте: матер. IX Междунар. научн.-практ. конф., Гомель, 28–29 ноябр. 2019 г. Гомель: БелГУТ, 2019. Ч. 2. С. 215-217
- [3] Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // Materials Physics and Mechanics. No 1. Vol 23. 2015. pp. 36-41
- [4] Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Решение двумерных задач механодиффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. №1. С. 49-56.

A. V. Zemskov, G. M. Faykin

EULER-BERNOULLI CANTILEVER BEAM BENDING CONSIDERING THE INNER DIFFUSION FLOWS FINITE PROPAGATION SPEED

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Abstract. Unsteady vibrations of the Euler-Bernoulli beam are studied taking into account mass transfer. The model of elastic diffusion for multicomponent media is used. To obtain a solution to the problem, the d'Alembert variational principle and the equivalent boundary conditions method are used.

Keywords: elastic diffusion, Green's function, Euler-Bernoulli beam

REFERENCES

- [1] Tarlakovsky D. V., Zemskov A. V., Faikin G. M. Statement of the Problem of Cantilever Bending of the Euler-Bernoulli Beam Taking Diffusion into Account. Proceedings of the XXV International Symposium "Dynamic and Technological Problems of Structural Mechanics and Continuous Media" A.G. Gorshkov. T. 2.M.: LLC "TRP 2019. P. 136-139.
- [2] Tarlakovsky D. V., Zemskov A. V., Faikin G. M. Formulation of the problem of unsteady bending of a cantilever-fixed Euler-Bernoulli beam taking into account diffusion // Problems of safety in transport: mater. IX Int. scientific-practical. Conf., Gomel, 28–29 Nov. 2019 Gomel: BelSUT, 2019. Part 2. P. 215-217
- [3] Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // Materials Physics and Mechanics. No 1. Vol 23. 2015. pp. 36-41
- [4] Zemskov A. V., Tarlakovsky D. V. Solution of two-dimensional problems of mechanodiffusion using integral equations of Volterra of the 1st kind // Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation. 2016. No. 1. P. 49-56.

Zemskov Andrey Vladimirovich Professor, Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Senior Researcher of Dynamic Testing Laboratory, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Doctor of Physics and Mathematics Science, assistant professor, Moscow, Russia.

Faykin Georgy Mikhailovich Master student, Department of materials resistance, dynamics and machine strength, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia.

Ю. В. Немировский

ДИНАМИКА ГИБРИДНЫХ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК ПРИ ВЗРЫВНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, г. Новосибирск,
Россия*

Аннотация. Рассматриваются полиметаллические балки постоянного поперечного сечения из наборов упрочняющихся и вязкопластичных материалов с двухсимметричным их расположением в поперечном сечении. Считается, что балки находятся под воздействием нагрузок взрывного типа. Для всех материалов использована модель жестко-вязкопластического деформирования и приняты классические гипотезы деформирования Кирхгофа. Для биметаллических шарнирно-опертых балок получены общие уравнения деформирования и описан метод их решения. Определены остаточные формы динамического повреждения.

Ключевые слова: взрывные нагрузки, слоистые полиметаллические балки, модели жесткопластических материалов, пределы текучести, модули упрочнения, предельные нагрузки, остаточные прогибы, вязкость.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.008

УДК: 539.374

Введение. В настоящее время в России и за рубежом проводятся интенсивные исследования по созданию разнообразных гибридных конструкций, предназначенных для защиты от ударных волн при воздушных, подводных и подземных взрывах. Существуют успешно работающие многочисленные технологические приемы создания таких гибридных конструкций (методы склейки, сваривания, холодного и плазменного напыления, электронной наплавки и др.) практически из любых наборов материалов и любых форм сечений. Значительно отстают от инженерных потребностей разработки расчетных методов оценки повреждаемости таких гибридных конструкций при

© Немировский Ю. В., 2020

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiruy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 20.06.2020

воздействии интенсивных давлений взрывных волн. Применительно к конструкциям из однородных материалов по модели идеального жестко-пластического тела такие разработки широко применялись в исследованиях А.А. Гвоздева и Norman Jones в 1940-1970 г. Наличие гибридной совокупности разнообразных материалов в конструкции привлекает внимание к таким важным эффектам пластического деформирования как упрочнение и вязкое сопротивление. В данной статье сделана попытка разработки модели динамического деформирования балок с учетом упомянутых явлений.

Основные уравнения. Рассмотрим полиметаллические балки длины $2l$ постоянного поперечного сечения шарнирно опертые и равномерно нагружаемые давлением взрывной волны $q(x, t) = q^* \phi(t)$, q^* – амплитуда, $\phi(t)$ – закон изменения со временем t . Материалы вдоль оси балки распределяются неизменно вдоль оси балки и с двойной симметрией относительно ортогональных осей. Например, для биметаллической балки расположение материалов в ее поперечном сечении изображено на рис. 1

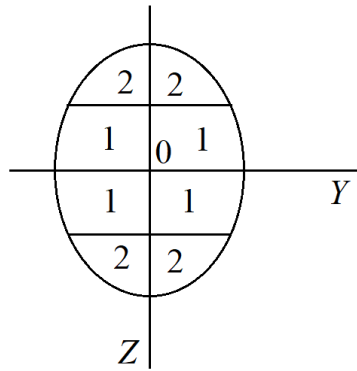


Рис. 1.

где границы расположения определяются функциями

$$b_1(z) : 0 \leq z \leq h_1, \quad b_2(z) : h_1 \leq z \leq h_2, \quad h_1 = \Delta_1, \quad h_2 = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где $\Delta_k = h_k - h_{k-1}$ – толщина k -го слоя. Для слоя k -го материала связь между деформациями $\varepsilon(z, x, t)$ и напряжениями в k -ом слое материала определяется выражениями [1–4]

$$\varepsilon_k = 0, \quad \dot{\varepsilon}_k = 0, \quad \text{при } \sigma_k \leq \sigma_{0k}, \quad \sigma_k = \sigma_{0k} + A_k \varepsilon + B_k \dot{\varepsilon}, \quad \text{при } \sigma_k^* \geq \sigma_k \geq \sigma_{0k}. \quad (1)$$

где σ_k^* , σ_{0k} , A_k , B_k – пределы прочности и текучести, модуль упрочнения и модуль пластической вязкости k -го материала, точка обозначает частную производную по времени. Учитывая для балок классические кинематические гипотезы деформирования Кирхгофа будем иметь выражения

$$\varepsilon = z \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon} = z \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial x}, \quad \Theta = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2)$$

где $w(x, t)$ – прогиб балки при поперечном изгибе. Возникающие в рассматриваемых гибридных балках изгибающие моменты $M(x, t)$ и углы поворота сечения $\Theta(x, t)$ будут связаны равенствами [3–6]

$$\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 \text{ при } |M(x, t)| \leq M_0, \quad (3)$$

$$|M(x, t)| = M_0 + R_2 \left| \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial x} \right| + R_1 \left| \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|, \text{ при } M_0^* \geq |M(x, t)| \geq M_0. \quad (4)$$

Здесь

$$M_0 = 4 \sum_{k=1}^n \left[\sigma_{0k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} b_k(z) z dz \right], \quad R_1 = 4 \sum_{k=1}^n \left[A_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} b_k(z) z^2 dz \right], \quad (5)$$

$$R_2 = 4 \sum_{k=1}^n \left[B_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} b_k(z) z^2 dz \right],$$

где M_0 – первый предельный изгибающий момент, R_1 , R_2 – жесткости пластического упрочнения и вязкого сопротивления при пластическом изгибе гибридных балок, M_0^* – второй предельный изгибающий момент. Удельный вес сечения рассматриваемых балок будет равен

$$q_s = 4 \sum_{j=1}^n \rho_j \int_{h_{j-1}}^{h_j} b_j(z) dz, \quad (6)$$

где ρ_k – плотность материала k -го слоя. Если в процессе динамического деформирования балка также взаимодействует со слоем вязко-упругого основания с коэффициентами вязко-упругого сопротивления k_2 и k_1 , то общие уравнения их динамического изгиба можно записать в виде

$$Q(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + (q + q_s) + \frac{q_s}{g} Lw(x, t) = 0, \quad (7)$$

где $\tilde{L}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \tilde{k}_2 \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{k}_1$ – частный линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами $\tilde{k}_2 = \frac{k_2 h g}{q_s}$, $\tilde{k}_1 = \frac{k_1 h g}{q_s}$, $h = h_n$, где g – ускорение свободного падения.

На отрезке $0 \leq x \leq 2l$ общее динамическое движение рассматриваемых балок будет происходить по симметричной форме относительно середины пролета $x = l$ и в каждой половине пролета будут происходить в двух формах: не изгибаемого поворота в окрестностях шарнирной опоры $0 \leq x \leq x_1(t)$ и пластического изгиба в окрестности середины пролета. При этом должны выполняться граничные условия

$$w(0, t) = w(2l, t) = 0, \quad M(0, t) = M(2l, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (8)$$

$$M(x, t)|_{x=x_1(t)} = M_0. \quad (9)$$

На границе $x = x_1(t)$ должны быть выполнены условия сопряжения

$$M^-(x_1) = M^+(x_1), \quad Q^-(x_1) = Q^+(x_1) = 0, \quad (10)$$

$$\dot{\Theta}^+(x_1) = \dot{\Theta}^-(x_1), \quad \dot{w}^+(x_1) = \dot{w}^-(x_1). \quad (11)$$

Начальные условия движения в некоторый момент времени t_0 определяются равенствами

$$\ddot{w}(x, t_0) = \dot{w}(x, t_0) = w(x, t_0) = 0, \quad (12)$$

которые при заданном законе динамического деформирования позволяют найти предельную амплитуду нагрузки и время t_0 начала движения при амплитудах нагрузок превышающих предельное значение. В некоторый момент времени t_1 энергия взрывной волны будет погашена пластическим сопротивлением, и дальнейшее движение прекратится. Для определения момента времени t_1 должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Тогда форма остаточной повреждаемости $w_1(x)$ будет определена формулой

$$w_1(x) = w(x, t_1). \quad (14)$$

Многочисленные экспериментальные наблюдений давления взрывных волн на жесткие преграды обнаружили [7–11], что в течение короткого промежутка времени $0 \leq t \leq t^*$ давление быстро нарастает почти по линейному закону до максимальной амплитуды q_* и далее быстро снижается по закону, близкому к затухающей экспоненте. Поэтому для конкретных расчетов в дальнейшем будем использовать зависимость, изображенную на рис. 2

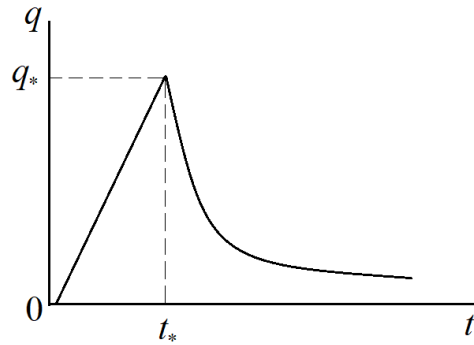


Рис. 2.

$$q(t) = q_0^* \phi(\tau) \quad (15)$$

где

$$\phi(\tau) = \tau e^{-\tau}, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad \tau = \frac{\alpha t}{t_*}, \quad q_0^* = \frac{q_* e^\alpha}{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

t_* — время достижения пикового уровня q_* взрывной нагрузки. Параметры q_* , t_* , α зависят от многих обстоятельств: типа взрывчатого вещества, расстояние от источника взрыва, свойств среды, в которой распространяется взрывная волна. В конкретных ситуациях они считаются известными в результате обработки экспериментальных данных, полученных в специально проводимых сериях испытаний. При малых уровнях пиковой нагрузки в рамках принятой модели деформирования балка может оставаться жесткой на всем отрезке $0 \leq x \leq l$. Тогда с учетом граничных условий (8) будем иметь

$$\Theta(x, t) = \frac{W_1(t)x}{l^2}, \quad \dot{\Theta}(x, t) = \frac{\dot{W}_1(t)x}{l^2}, \quad w(x, t) = \frac{W_1(t)x}{l}, \quad \dot{w}(x, t) = \frac{\dot{W}_1(t)x}{l}, \quad (16)$$

где $W_1(t)$ — величина прогиба балки в середине пролета

Подставляя эти значения в уравнения (7) и дважды интегрируя его с учетом граничных условий (8), (10) и начальных условий (12) получим для амплитуды предельной нагрузки

$$q_0^* \phi(t_0) = \frac{4M_0}{l^2} - q_s, \quad t_0 = \frac{q_0^*}{q_*} t_*, \quad t_0 \leq t_*. \quad (17)$$

И с учетом зависимости (15) определяет время $t_0 < t_*$ начала движения.

Динамическое движение неизгибаемого участка $0 \leq x \leq x_1(t) \leq l$.

При $q^* > q_0^*$ и $t > t_0$ жесткий участок для прогиба $w(x, t)$ имеет те же зависимости (16). Тогда при интегрировании уравнений движения (7) с учетом граничных условий (8) получим зависимость

$$M(x, t) - M[x_1(t), t] + \frac{q + q_s}{2} [x^2 - 2xx_1(t)] + \frac{q_s}{6gl} [x^3 - 3xx_1(t)] \left[\ddot{W}_1(t) + \tilde{k}_2 \dot{W}_1(t) + \tilde{k}_1 W_1(t) \right] = 0, \quad (18)$$

где с учетом условий сопряжения для изгибающих моментов

$$M[x_1(t), t] = M_0 + \frac{R_2 l}{h} \dot{W}_1(t) + \frac{R_1 l}{h} W_1(t).$$

В зависимости от интенсивности действующих динамических режимов нагружения в балке при $t > t_0$ возможны два состояния: с неизменной во времени границей перехода x_1 от жесткого состояния к пластическому и с изменяемой во времени границей.

В первом случае, очевидно, имеем $x_1(t) = l$ при $t > t_0$. Тогда уравнение (18) при $x = x_1(t) = l$ примет для прогиба $W_1(t)$ в середине пролета балки следующую форму

$$\ddot{W}_1 + \beta_2 \dot{W}_1(t) + \beta_1 W_1(t) = p_1(t), \quad (19)$$

где

$$p_1(t) = 3g \left[\frac{(q + q_s)^2}{q_s} - \frac{2M_0}{q_s} \right], \quad \beta_1 = \tilde{k}_1 - \frac{R_1 l}{gH} q_s, \quad \beta_2 = \tilde{k}_2 - \frac{R_2 l}{gH} q_s. \quad (20)$$

Это классическое линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка общее решение которого при начальных условиях

$$\dot{W}_1(t_0) = 0, \quad W_1(t_0) = 0, \quad (21)$$

можно найти в справочной литературе, поэтому выписывать его здесь не станем. Полученное решение следует рассматривать в диапазоне времени $t_0 \leq t \leq t_1^0$, где время t_1^0 при рассматриваемой динамической нагрузке определяется из уравнения $\dot{W}_1(t_1^0) = 0$.

Тогда остаточный прогиб будет равен

$$W_1^0 = W_1(t_1^0). \quad (22)$$

Если M_* – второй предельный изгибающий момент [2, 3, 12] рассматриваемых гибридных балок, то из уравнения

$$W_1(t_1^0) = \frac{(M_* - M_0)}{R_2} \left(\frac{l}{H} \right)^2. \quad (23)$$

определим вторую предельную нагрузку q_1^* при динамическом режиме нагружения.

Таким образом, рассмотренное решение может быть реализовано при пиковых динамических нагрузках в диапазоне [3] $q_0^* \leq q^* \leq q_1^*$.

При достаточно высоких пиковых нагрузках условие $x_1(t) = l = const$ не может реализоваться, и на отрезках $0 \leq x \leq x_1(t)$ и $x_1(t) \leq x \leq l$ будут реализованы два

механизма деформирования: жесткий и пластический. Учитывая, что в рассматриваемой задаче все процессы симметричны относительно середины пролета, в дальнейшем, для сокращения записи формул от переменных x , $x_*(t)$ перейдем к переменным J , $J_*(t)$

$$x - l = J, \quad x_*(t) - l = J_*(t), \quad -l \leq J \leq l, \quad 0 \leq x \leq 2l, \quad (24)$$

при $x_*(t) \leq l$, $J_*(t) \leq 0$, а при $x_*(t) \geq l$, $J_*(t) > 0$.

Тогда на участке $0 \leq J \leq l$ уравнения равновесия будут иметь вид

$$Q'(J, t) = (q(t) + q_s) - \frac{q_s}{g} \left(\ddot{W}_1 + \tilde{k}_2 \dot{W}_1 + \tilde{k}_1 W_1 \right), \quad M'(J, t) = Q(J, t), \quad (25)$$

где штрих обозначает частную производную по J . Интегрируя эти уравнения по J при граничных условиях

$$Q(0, t) = 0, \quad M(l, t) = 0, \quad (26)$$

получим

$$Q(J, t) = \left[q(t) + q_s - \frac{q_s}{g} \left(\ddot{W}_1 + \tilde{k}_2 \dot{W}_1 + \tilde{k}_1 \dot{W}_1(t) \right) \right] (J^2 - l^2), \quad (27)$$

$$M(J, t) = \left\{ \left[q(t) + q_s - \frac{q_s}{g} \dot{W}_1 \right] - \left[k_2 \dot{W}_1 + k_1 W_1(t) \right] \right\} (J^2 - l^2), \quad (28)$$

$$M(0, t) = \frac{q_s l^2}{2g} \left[\ddot{W}_1 + \tilde{k}_2 \dot{W}_1 + \tilde{k}_1 W_1(t) \right] + (q(t) + q_s) l^2. \quad (29)$$

Поскольку при неупругом деформировании наибольший изгибающий момент $M(0, t)$ в течение всего времени движения должен подчиняться закону (4), то при простейших зависимостях удовлетворяющих кинематическим условиям

$$w(s, t) = W_1(t) (J^2 - l^2), \quad \dot{w}(s, t) = \dot{W}_1(t) (J^2 - l^2), \quad (30)$$

из (29) для $W_1(t)$ получим уравнение

$$\ddot{W}_1 + \Psi_2 \dot{W}_1 + \Psi_1 W_1(t) = p(t) = q_0^* p_1(t), \quad (31)$$

где

$$p_1(t) = \phi(\tau) - \left(\frac{g}{q_s} + \frac{M_0}{l^2} \right) \frac{l^2}{q_0^*}, \quad \phi(\tau) = \tau e^{-\tau}, \quad (32)$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{t_*}, \quad q_0^* = \frac{q^* e^\alpha}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \Psi_i = \tilde{k}_i - \frac{2R_i g}{q_s l^2}, \quad (i = 1, 2).$$

Для получения общего решения уравнения (31) с правой частью, соответствующей нагрузке в виде (32) сначала определим соответствующее частное решение

$$W^r(t) = \frac{q_0^* \tau \phi(\tau)}{[\tau - 2 + \Psi_2(1 - \tau) + \Psi_1 \tau]} - \frac{q_0^* D}{\Psi_1}, \quad D = \left(\frac{g}{q_s} + \frac{M_0}{l^2} \right) l^2. \quad (33)$$

Далее будем методом вариации постоянных искать общее решение уравнения без правой части. Подставим его в форме [13–15]:

$$W_1(t) = C_1(t) e^{\Psi_1 t} + C_2(t) e^{\Psi_2 t} \quad (34)$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$ - независимые искомые функции. Примем для них вспомогательное условие

$$\dot{C}_1(t) e^{\Psi_1 t} + \dot{C}_2(t) e^{\Psi_2 t} = 0. \quad (35)$$

Тогда дифференцируя (34) получим

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(t) &= \Psi_1 e^{\Psi_1 t} C_1(t) + \Psi_2 e^{\Psi_2 t} C_2(t), \\ \ddot{W}_1(t) &= (\Psi_1 - \Psi_2) e^{\Psi_1 t} \dot{C}_1(t) + \Psi_1^2 e^{\Psi_1 t} C_1(t) + \Psi_2^2 e^{\Psi_2 t} C_2(t). \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя эти выражения в (31) получим уравнение

$$(\Psi_1 - \Psi_2) e^{\Psi_1 t} \dot{C}_1(t) + \Psi_1 (\Psi_1 + \Psi_2 + 1) e^{\Psi_1 t} C_1(t) + (2\Psi_2^2 + 1) e^{\Psi_2 t} C_2(t) = q^* P_1(t). \quad (37)$$

При отсутствии вязкого сопротивления $\Psi_2 = 0$ уравнение (37) примет вид

$$\dot{C}_1(\tau) + \gamma_1 C_1(\tau) = q_0^* p_2(\tau) e^{-\bar{\Psi}_1 \tau}, \quad \gamma_1 = \frac{\Psi_1 + 1}{\Psi_1}, \quad \bar{\Psi}_1 = \frac{\Psi_1}{1 + \Psi_1}. \quad (38)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$C_1(\tau) = e^{-\gamma_1(\tau-\tau_0)} \left[C_1^0 + q_0^* \int_{\tau_0}^{\tau} p_2(\tau) e^{\gamma_1(\tau-\tau_0)} d\tau \right], \quad (39)$$

$$\dot{C}_1(\tau) = q_0 p_2(\tau) e^{-\Psi_1 \tau} - \gamma_1 C_1(\tau). \quad (40)$$

Это решение позволяет в аналитической форме получить общее решение задачи о развитии во времени максимальных прогибов и изгибающих моментов в середине пролетов рассматриваемых балок. Если до остановки движения изгибающий момент не достиг второго предельного значения M_* , мы будем считать получающиеся состояния приемлемыми. Пользуясь полученными формулами и решениями можно рассчитать во времени для рассматриваемой модели полную картину межслойного перераспределения картины, изменения напряженно-деформированного состояния. Такая информация может оказаться весьма интересной, но для инженерной практики проектирования она, с точки зрения автора, имеет второстепенное значение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Norman J. Structural impact. Second University Edition edition. New York, NY 10013-2473, USA: Cambridge University Press, 32 Avenue of Americas. 584 p.
- [2] Немировский Ю. В. Оптимальное проектирование гибридных тавровых балок по предельно допустимым деформациям // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). с. 76–84.
- [3] Немировский Ю. В. Динамическое поведение полиметаллических круглых пластин из упрочняющихся материалов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). с. 3–10.
- [4] Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости. М.: Наука, 1986. Т. 1. с. 62–83.
- [5] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). с. 26–37.
- [6] Немировский Ю. В. Метод расчета композитных стержневых систем из разномодульных материалов. Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Материалы V Всероссийской научной конференции. Томск: 2006. с. 288–290.
- [7] Расторгуев Б. С., Плотников А. И., Хуснутдинов Д. З. Проектирование зданий и сооружений при аварийных взрывных воздействиях. М.: Издательство АСВ, 2007. с. 152.
- [8] Невская Е. Е. Основные методы оценки параметров ударных волн при аварийных взрывах, принципы проектирования взрывоустойчивых зданий и сооружений // Безопасность труда в промышленности. 2017. № 9. с. 20–29.
- [9] DooJin J., KiTae K., SangEul H. Modified equation of shock wave parameter // Computation. 2017. Vol. 5. P. 41,.

- [10] Karlos V., Solomos G. Martin Larcher Analysis of the blast wave decay coefficient using the Kingery – Bultmash data // International journal of protective structures. 2016. Vol. 7, no. 3. p. 409–429.
- [11] Charis C. J., Nikos G. Pneumatics elastic-plastic response spectra for experimental blast loading // International journal of impact engineering. 2004. Vol. 30. P. 323–343.
- [12] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных композитных балок // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. с. 150–159.
- [13] Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 783 с.
- [14] Бронштейн И. И., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Наука, 1986. 544 с.
- [15] Петровский И. Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 2-е изд. М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

Yu. V. Nemirovskii

DYNAMICS OF HYBRID HARDENING AND VISCOPLASTIC BEAMS UNDER EXPLOSIVE EFFECTS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

Novosibirsk Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. We consider polymetallic beams of constant cross-section from sets of hardening and viscoplastic materials with their two-symmetric arrangement in the cross-section. The beams are considered to be subject to explosive loads. For all materials, a rigid-viscoplastic deformation model was used and the classical Kirchhoff deformation hypotheses were adopted. For bimetallic hinged-supported beams, general equations of deformation are obtained and a method for their solution is described. Residual forms of dynamic damage were determined.

Keywords: explosive loads, layered polymetallic beams, models of rigid-plastic materials, yield strengths, hardening moduli, ultimate loads, residual deflections.

REFERENCES

- [1] Norman J. Structural impact. Second University Edition edition. New York, NY 10013-2473, USA: Cambridge University Press, 32 Avenue of Americas. 584 p.
- [2] Nemirovsky Y. V. Optimal design of hybrid t-beams for maximum permissible deformations // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. no. 3(29). P. 76–84.
- [3] Nemirovsky Y. V. Dynamic behavior of polymetallic round plates made of hardening materials // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. no. 3(29). P. 3–10.
- [4] Ishlinsky A. Y. On equations of deformation of bodies beyond the elastic limit. Nauka, 1986. Vol. 1. P. 62–83.
- [5] Nemirovsky Y. V. pre-Limit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2018. no. 3(37). P. 26–37.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk Technical University, Novosibirsk, Russia.

- [6] Nemirovsky Y. V. Method for calculating composite rod systems made of multi-module materials. Fundamental and applied problems of modern mechanics. Materials of the V all-Russian scientific conference. Tomsk: 2006. p. 288–290.
- [7] Rastorguev B. S., Plotnikov A. I., Khusnutdinov D. Z. Design of buildings and structures in case of emergency explosive impacts. Publishing house ASV, 2007. p. 152.
- [8] Nevskaya E. E. Basic methods for estimating shock wave parameters in emergency explosions, principles for designing explosion-proof buildings and structures // Industrial Safety. 2017. no. 9. P. 20–29.
- [9] DooJin J., KiTae K., SangEul H. Modified equation of shock wave parameter // Computation. 2017. Vol. 5. P. 41,.
- [10] Karlos V., Solomos G. Martin Larcher Analysis of the blast wave decay coefficient using the Kingery – Bultmash data // International journal of protective structures. 2016. Vol. 7, no. 3. p. 409–429.
- [11] Charis C. J., Nikos G. Pneumatics elastic-plastic response spectra for experimental blast loading // International journal of impact engineering. 2004. Vol. 30. P. 323–343,.
- [12] Nemirovsky Y. V. Second limit state of homogeneous composite beams // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2009. no. 1. P. 150–159.
- [13] Vygodsky M. Y. Handbook of higher mathematics. State publishing house of technical and theoretical literature, 1956. 783 p.
- [14] Bronstein I. I., semendyaev K. A. Handbook of mathematics for engineers and university students. Nauka, 1986. 544 c.
- [15] Petrovsky I. G. Lectures on ordinary differential equations. 2nd edition. Gostehizdat, 1947.

М. В Зарецкая

К ИССЛЕДОВАНИЮ ФОНОВОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО МАССИВА

Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия

Аннотация. Методом блочного элемента проведено исследование блочной структуры, моделирующей геологический массив. Состояние геологической среды описывается уравнениями движения для однородной, изотропной упругой среды в форме Ляме. Выписаны функциональные и псевдодифференциальные уравнения, получены интегральные представления блочного элемента. Установлены основные тенденции изменения контактных напряжений в зависимости от значений механических характеристик материала блоков и геометрических параметров структуры.

Ключевые слова: геологический массив, блочная структура, блочный элемент, контактные напряжения, сейсмический риск.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.009

УДК: 539.374

Введение

При решении задач определения общего поля напряжений в литосферной плите необходимо руководствоваться следующими положениями. Земная кора, по мнению академика М. А. Садовского [1], имеет неоднородное строение и разбита разломами и трещинами на блоки различного размера. В блоках и на неоднородностях накапливается упругая энергия, которая обеспечивает развитие динамических процессов и часто разряжается землетрясениями. Движение блоков в коре порождает напряженное состояние, в частности, тектонические напряжения. Динамика блочных структур влияет на распределение напряжений в земной коре.

Рассматриваем литосферную плиту как блочную структуру. При наличии трещин, разломов или включений меньших размерностей в литосферной плите последние надо

© Зарецкая М. В., 2020

Зарецкая Марина Валерьевна

e-mail: zarmv@mail.ru, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования, Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-08-00145-а), Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (код проекта 19-41-230002 p_юг-а).

Поступила 10.06.2020

рассматривать как границы блоков. Наиболее простым блоком, позволяющим моделировать геологические структуры любой сложности, является прямоугольный параллелепипед.

1. Математическая модель исследования напряженности геологической среды

Пусть состояние материала геологической среды описывается уравнениями движения для однородной, изотропной упругой среды в форме Ляме относительно перемещений $\mathbf{u}(x, y, z)$:

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0,$$

где λ, μ — упругие константы Ляме, ρ — плотность материала, ω — частота установившихся колебаний.

Для произвольного вектора-функции $\mathbf{u}(x, y, z)$ справедливо разложение Грина-Ляме:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi},$$

позволяющее перейти от системы уравнений Ляме к двум независимым уравнениям относительно скалярного потенциала φ и векторного потенциала $\boldsymbol{\psi}$:

$$\Delta \varphi + \kappa_1^2 \varphi = 0, \tag{1}$$

$$\Delta \psi_n + \kappa_2^2 \psi_n = 0, \tag{2}$$

где $\kappa_1^2 = \rho\omega^2(\lambda + 2\mu)^{-1}$, $\kappa_2^2 = \rho\omega^2\mu^{-1}$, $n = 1, 2, 3$.

Потенциал φ соответствует продольным волнам, вектор $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ описывает распространение поперечных волн в среде.

В связи с тем, что для конкретных геологических задач корректно сформулировать соответствующие граничные условия сложно, основное внимание уделено построению представлений решений в блочных элементах сложных геологических объектов, основанных на применении уравнений (1)–(2).

Далее приводится пример построения трехмерного блочного элемента в форме прямоугольного параллелепипеда для дифференциального уравнения Гельмгольца, являющегося обобщением уравнений (1) и (2) и имеющего вид

$$(\Delta + k^2)u = 0, \tag{3}$$

где

$$\Delta = A_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + A_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

с некоторыми граничными условиями, например, Дирихле или Неймана.

Область выбранного параллелепипеда обозначим Ω , его границу — $\partial\Omega$. Коэффициенты $A_i(x_1, x_2, x_3)$ и k^2 можно считать постоянными в границах блочного элемента.

Пусть в исходной системе координат область Ω описывается соотношениями

$$\Omega : |x_1| \leq a, \quad |x_2| \leq c, \quad |x_3| \leq b.$$

В процессе применения дифференциального метода факторизации [2,3], являющегося основой метода блочного элемента, осуществляется касательное расслоение ориентированной границы $\partial\Omega$, и вводятся правые локальные системы координат с внешними нормальными x_3^k и касательными x_1^k, x_2^k . Для прямоугольного параллелепипеда $k = 6$. Локальные координаты располагаются на гранях параллелепипеда, следуют против часовой стрелки, с начальным индексом $k = 1$ на верхней грани. Локальные системы

координат на фронтальной грани и ей противоположной имеют индексы $k = 5$ и $k = 6$ соответственно.

В каждой локальной системе координат строятся системы функциональных и псевдодифференциальных уравнений блочного элемента. После обращения последних получаем общее представление решения, то есть блочного элемента, в локальной системе координат. Блочные элементы имеют представление в форме интеграла по границе области носителя.

Введем операторы преобразования Фурье

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k)u = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1^k, x_2^k) e^{i\langle \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\alpha}^k \rangle} dx_1^k dx_2^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k)U = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha_1^k, \alpha_2^k) e^{-i\langle \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\alpha}^k \rangle} d\alpha_1^k d\alpha_2^k,$$

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k)u = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1^k, x_2^k, x_3^k) e^{i\langle \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\alpha}^k \rangle} dx_1^k dx_2^k dx_3^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k, x_3^k)U = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k) e^{-i\langle \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\alpha}^k \rangle} d\alpha_1^k d\alpha_2^k d\alpha_3^k,$$

$$k = 1, 2, \dots, 6.$$

Функциональное уравнение краевой задачи представимо в форме

$$\mathbf{KF}(a_1^k, a_2^k, a_3^k)u = \iint_{\partial\Omega} \omega,$$

где ω — внешняя форма, связанная с краевой задачей.

Приведем вид получающихся функциональных и псевдодифференциальных уравнений в первой локальной системе координат, т.е. для $k = 1$.

Функциональное уравнение:

$$\begin{aligned}
 K_1 U_1 = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1) \left\{ \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_3 (u'_{13} - i\alpha_{3-}^1 u_1) e^{i[\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1]} d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \right. \\
 + \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_1 (u'_{22} + i\alpha_1^1 u_2) e^{i[-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1 - (x_1^2 - b)]} dx_1^2 dx_2^2 + \\
 + \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_3 (u'_{33} + i\alpha_{3-}^1 u_3) e^{i[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 - 2b]} dx_1^3 dx_2^3 - \\
 - \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_1 (u'_{43} - i\alpha_1^1 u_4) e^{i[\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1 - (x_1^4 + b)]} dx_1^4 dx_2^4 + \\
 + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_2 (u'_{53} + i\alpha_2^1 u_5) e^{i[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 - (x_2^5 - b)]} dx_1^5 dx_2^5 + \\
 \left. + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_2 (u'_{63} - i\alpha_2^1 u_6) e^{i[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 - (x_2^6 - b)]} dx_1^6 dx_2^6 \right\} = 0, \\
 |x_1^1| \leq a, \quad |x_2^1| \leq c.
 \end{aligned}$$

Псевдодифференциальное уравнение:

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k) K_1 U_1 = 0, \quad |x_1^1| \leq a, \quad |x_2^1| \leq c.$$

Аналогично получаются псевдодифференциальные уравнения в локальных системах $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

Характеристические уравнения в локальных системах координат представимы в форме

$$K_1(\alpha_1^m, \alpha_2^m, \alpha_3^m) = A_1(\alpha_1^m)^2 + A_2(\alpha_2^m)^2 + A_3(\alpha_3^m)^2 - k^2, \quad m = 1, 3;$$

$$K_2(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n) = A_3(\alpha_1^n)^2 + A_2(\alpha_2^n)^2 + A_1(\alpha_3^n)^2 - k^2, \quad n = 2, 4;$$

$$K_3(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \alpha_3^p) = A_1(\alpha_1^p)^2 + A_3(\alpha_2^p)^2 + A_2(\alpha_3^p)^2 - k^2, \quad p = 5, 6.$$

Корневые множества описываются соотношениями

$$\alpha_{3-}^m(\alpha_1^m, \alpha_2^m) = -i\sqrt{A_3^{-1} [A_1(\alpha_1^m)^2 + A_2(\alpha_2^m)^2 - k^2]}, \quad m = 1, 3;$$

$$\alpha_{3-}^n(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{A_1^{-1} [A_3(\alpha_1^n)^2 + A_2(\alpha_2^n)^2 - k^2]}, \quad n = 2, 4;$$

$$\alpha_{3-}^p(\alpha_1^p, \alpha_2^p) = -i\sqrt{A_2^{-1} [A_1(\alpha_1^p)^2 + A_3(\alpha_2^p)^2 - k^2]}, \quad p = 5, 6.$$

Здесь берутся те ветви аналитических функций, которые обеспечивают принадлежность корней нижней полуплоскости при достаточно больших по модулю вещественных параметрах преобразований Фурье.

Задавая в псевдодифференциальных уравнениях на границах значения функций или производных, получаем интегральные уравнения. Решив последние и внося решения в функциональные уравнения, получим интегральные представления блочного элемента.

В первой локальной системе координат это представление запишется:

$$\begin{aligned}
u_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = & \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \mathbf{K}_1^{-1} \left\{ \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_3 (u'_{13} - i\alpha_3^1 u_1) e^{i[\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1]} d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \right. \\
& + \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_1 (u'_{22} + i\alpha_1^1 u_2) e^{i[-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1 (x_1^1 - b)]} dx_1^2 dx_2^2 + \\
& + \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_3 (u'_{33} + i\alpha_3^1 u_3) e^{i[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b]} dx_1^3 dx_2^3 - \\
& - \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_1 (u'_{43} - i\alpha_1^1 u_4) e^{i[\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1 (x_1^1 + b)]} dx_1^4 dx_2^4 + \\
& + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_2 (u'_{53} + i\alpha_2^1 u_5) e^{i[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^5 - b)]} dx_1^5 dx_2^5 + \\
& \left. + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_2 (u'_{63} - i\alpha_2^1 u_6) e^{i[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^6 - b)]} dx_1^6 dx_2^6 \right\}.
\end{aligned}$$

Для сопряжения блочных элементов необходимо применить гомеоморфизмы, что достигается введением фактор-топологических пространств [4]. В результате для блочных структур выводятся уравнения типа Винера-Хопфа, вид которых зависит от конкретных геометрических параметров блочной структуры. Обращение полученных уравнений позволяет оценить возникающие контактные напряжения.

2. Результаты и выводы

Выполним исследование блочной структуры, состоящей из четырех прямоугольных параллелепипедов на основании (рис. 1) с целью установления основные тенденции изменения контактных напряжений в зависимости от значений механических характеристик материала блоков и геометрических параметров структуры. Модель может соответствовать таким геологическим структурам как глубинные разломы, рифтовые образования, вертикальные трещины или включения, каньоны, некоторые типы вулканических структур.

В качестве варьируемого параметра выбраны: d_1 — расстояние между блоками 2, 4 и d_2 — расстояние между блоками 1, 3. Изменение этих параметров соответственно приводит к изменению размеров блоков.

Рассчитаны контактные напряжения между блоками и основанием при некоторые начальных значениях d_1 и d_2 , которые можно считать фоновыми.

При фиксированном значении d_2 с уменьшением d_1 (блоки сближаются) наблюдается рост контактных напряжений. При этом они остаются величиной конечной.

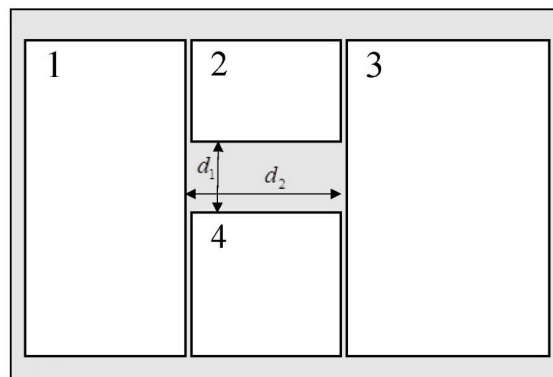


Рис. 1. Модель блочной структуры геологической среды

При проведении расчетов с той же динамикой изменения d_1 , но при увеличивающихся значениях d_2 , наблюдается тенденция нелинейного роста напряжений, которые, тем не менее, остаются конечными.

Не выявлено таких соотношений d_1 и d_2 , при которых наблюдался бы экспоненциальный рост контактных напряжений, описанный в работе [5]. Полученный результат позволяет выдвинуть гипотезу, что бесконечный рост напряжений при «слипании» литосферных плит объясняется, в том числе, и применением для моделирования полубесконечных блочных элементов.

Полученные результаты могут быть полезны организациям, осуществляющим мониторинг региональной сейсмичности для оценки риска сейсмического события по результатам обработки измерений тектонических движений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Садовский М. А., Писаренко В. Ф. Сейсмический процесс в блоковой среде. М.: Наука, 1991. с. 95.
- [2] Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры / В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Доклады академии наук. 2009. Т. 424, № 1. с. 36–39.
- [3] Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О.В. О методе блочного элемента // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 3. с. 155–163.
- [4] Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О.В. Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // Доклады академии наук. 2011. Т. 438, № 5. с. 623–625.
- [5] О стартовых землетрясениях при жёстком сцеплении литосферных плит с основанием / В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Доклады академии наук. 2018. Т. 478. с. 406–412.

M. V Zaretskaya

TO THE STUDY OF THE NATURAL SEISMIC TENSION OF GEOLOGICAL MASSIFS

Kuban State University, Krasnodar, Russia

Abstract. The block structure method is used to study the block structure modeling a geological massif. The state of the geological medium is described by equations of motion for a homogeneous, isotropic elastic medium in the form of a Lamé. Functional and pseudo-differential equations are written out, and integral representations of the block element are obtained. The main tendencies of contact stress variation are established depending on the values of the mechanical characteristics of the material of the blocks and the geometric parameters of the structure.

Keywords: geological massif, block structure, block element, contact stresses, seismic risk.

REFERENCES

- [1] Sadovskiy M. A., Pisarenko V. F. Seismic process in a block environment. M.: Nauka, 1991. p. 95.
- [2] Differential factorization method for block structure / V. A. Babeshko, O. M. Babeshko, O. V. Evdokimova et al. // Doklady akademii nauk. 2009. Vol. 424, no. 1. p. 36–39.
- [3] Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. About the block element method // Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. 2010. no. 3. P. 155–163.
- [4] Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. On automorphism and pseudodifferential equations in the block element method // Doklady akademii nauk. 2011. Vol. 438, no. 5. p. 623–625.
- [5] About starting earthquakes with rigid adhesion of lithospheric plates to the base / V. A. Babeshko, O. M. Babeshko, O. V. Evdokimova et al. // Doklady akademii nauk. 2018. Vol. 478. P. 406–412.

Zaretskaya Marina Valerievna, Professor, Department of Mathematical Modeling, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kuban State University, Krasnodar, Russia.

М. Н. Перельмутер

МОДЕЛЬ АДГЕЗИОННОГО СОЕДИНЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрена механическая модель адгезионного соединения полимеров. Предполагается, что связи между различными полимерами образованы пучками молекул полимера-активатора адгезии. Учитывается, что молекулы полимера-активатора могут образовывать между соединяемыми полимерами однозвенные и многозвенные связи. Получены кривые деформирования связей в концевой области трещины.

Ключевые слова: полимеры, адгезия, кривые деформирования связей, концевая область трещины.

DOI: 10.37972/chgru.2020.46.4.010

УДК: 539.375

Значительное повышение прочности адгезионного соединения различных полимеров происходит при использовании в качестве промежуточного слоя между ними специальных полимерных материалов, химически совместимых с каждым из них [1, 2].

Молекулы такого молекулярного “клея” проникают в соединяемые материалы и образуют связи, значительно повышающие прочность соединения. При наличии на границе соединения полимеров трещины, такие связи формируют концевую область трещины в процессе самозалечивания [3]. Для получения закона деформирования связей в концевой области трещины при квазистатическом нагружении используем подход, предложенный в [2] для связей, образованных пучками молекул полимера со степенью полимеризации N и размером мономерного звена a_0 . Будем полагать, что связи деформируются упруго до определенной величины напряжения σ_m и соответствующего этому напряжению раскрытия трещины u_m . При раскрытии трещины $U \geq u_m$ закон деформирования связей становится нелинейным и напряжения в связях уменьшаются. Молекулы промежуточного слоя могут образовывать между соединяемыми полимерами, по терминологии [2], однозвенные и многозвенные связи (см. рис. 1).

Обозначим число однозвенных связей на единицу поверхности соединения материалов (плотность связей) R_1 , а плотность многозвенных связей - R_2 . В общем случае

© Перельмутер М. Н., 2020

Перельмутер Михаил Натанович

e-mail: perelm@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект №19-19-00616).

Поступила 01.07.2020

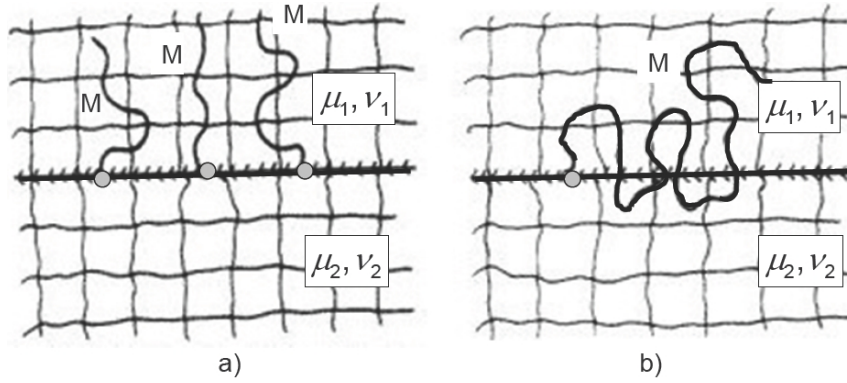


Рис. 1. (а) - Однозвенные и (б) - многозвенные связи, образованные молекулами (M) соединительного слоя

возможно присутствие обоих типов связей. Сегмент полимерной цепи между материалами деформируется упруго до тех пор, пока действующая на него растягивающая сила f не достигнет критической величины

$$f^* = \frac{kT}{a_0}, \quad (1)$$

где k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура.

При $f \leq f^*$ напряжение в связях σ прямо пропорционально раскрытию трещины U (κ - жесткость связей):

$$\sigma = \kappa U \quad (2)$$

При $f = f^*$ начинается процесс вытягивания связей из материала. Зависимость напряжений в связях от раскрытия трещины запишем, исходя из уравнения (4.1) работы [2],

$$\sigma(u) = \sigma_1^* + \frac{\sigma_2^*}{(1 + \xi)^2}, \quad \xi = \frac{U - u_m}{h^*}, \quad (3)$$

где $h^* = a_0\sqrt{N}$, σ_1^* и σ_2^* критические напряжения начала вытягивания однозвенных и многозвенных связей из материала, определяемые как

$$\sigma_1^* = f^* R_1, \quad \sigma_2^* = f^* R_2 \sqrt{N} \quad (4)$$

Из (2) и (4) следует, что критическое напряжение, при котором происходит изменение характера деформирования связей, определяется выражением

$$\sigma(u_m) = \sigma_m = \sigma_1^* + \sigma_2^*, \quad (5)$$

а раскрытие трещины, соответствующее изменению характера деформирования связей, определяется как

$$u_m = \frac{\sigma_m}{\kappa} \quad (6)$$

Оценим жесткость связей κ , образованных пучками полимерных молекул. Пусть f_{cr} - сила, необходимая для разрыва полимерной цепи, а $u_{cr} \sim \vartheta a_0$ - критическое удлинение мономерного звена при разрыве ($\vartheta \leq 1$). Тогда полное удлинение полимерной цепи

$$u_{cr}^* \sim N u_{cr} \sim \vartheta N a_0 \quad (7)$$

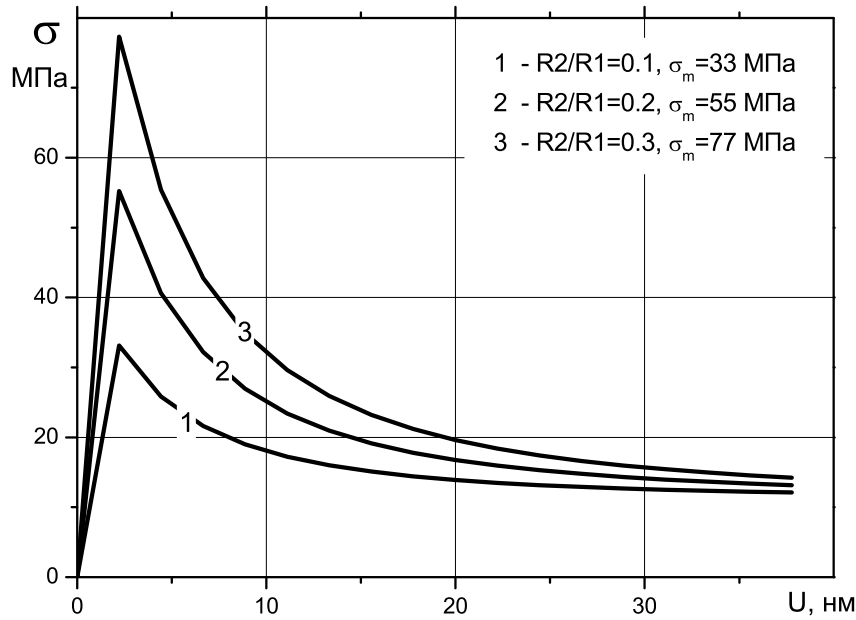


Рис. 2. Кривые деформирования многозвенных связей в концевой области трещины, $u_m = 2.21$ нм, $S = 0.005$ Н/м, $T = 400$ К, $N = 400$

Жесткость полимерной цепи определяется как:

$$S_1 = \frac{f_{cr}}{u_{cr}^*} \cong \frac{f_{cr}}{\vartheta N a_0} \quad (8)$$

Другая оценка жесткости полимерной цепи следует из энергетических соображений [4]:

$$S_2 = \frac{3kT}{N a_0^2} \quad (9)$$

Критическая сила для разрыва полимерной цепи составляет $f_{cr} \approx 1 \cdot 10^{-9}$ Н [4]. При $a_0 \sim 0.5 \cdot 10^{-9}$ м, $N = 400$, $T = 400^\circ$ К и $\vartheta = 1$ (оценка по верхней границе) получаем $S_1 = 0.5 \cdot 10^{-2}$ Н/м и $S_2 = 0.55 \cdot 10^{-4}$ Н/м. Можно полагать, что фактическая жесткость полимерной цепи S изменяется в интервале

$$S_2 < S < S_1$$

Удельная жесткость связей κ (жесткость на единицу площади поверхности), необходимая в выражении (2),

$$\kappa = SR, \quad R = R_1 + R_2 \sqrt{N} \quad (10)$$

где R - плотность связей на участке соединения материалов до начала выдергивания связей.

В модели концевой области трещины на границе соединения материалов [5-7] жесткость связей определяется выражением:

$$\kappa = \frac{E_b}{H} \quad (11)$$

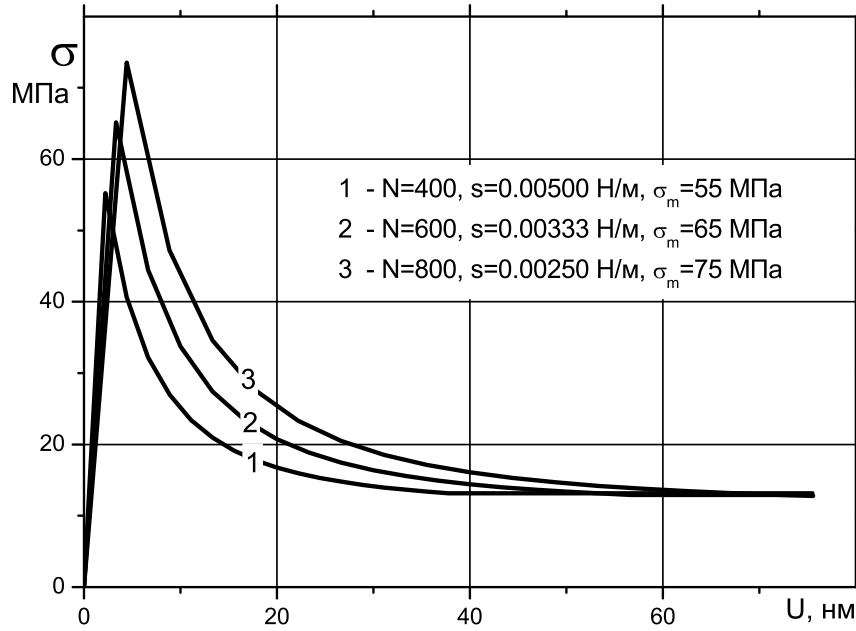


Рис. 3. Кривые деформирования многосвязных связей в концевой области трещины, изменение степени полимеризации, $T = 400\text{K}$

где H - линейный размер, пропорциональный толщине зоны неоднородности на участке соединения материалов, E_b - эффективный модуль упругости связей. Из выражений (10) и (11) получаем оценку для эффективного модуля упругости связей:

$$E_b = SH(R_1 + R_2\sqrt{N}) \quad (12)$$

Величина раскрытия трещины, соответствующая изменению закона деформирования связей, определяется так:

$$u_m = \frac{f^*}{S} \quad (13)$$

Рассмотрим оценки параметра H , связанного с толщиной зоны неоднородности на границе соединения полимерных материалов. Толщина слоя неоднородности на границе соединения плохо смешиваемых полимеров со степенями полимеризации $N_1 \approx N_2 \approx N$ определяется как [4,8]:

$$\omega_1 = 2a_0\sqrt{\frac{N}{6}}$$

При наличии промежуточного слоя полимера-усилителя адгезии толщина слоя неоднородности может возрасти до величины $\omega_2 \cong a_0N$. Ввиду этого, принимаем эту верхнюю границу в качестве оценки величины параметра H

$$\omega_1 < H \cong a_0N$$

При заданных параметрах полимерной цепи, значениях плотностей связей $R_1 = 1 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-2}$, $R_2 = 0.1R_1$ (см. [9]) и жесткости связей, определяемой выражениями (8)

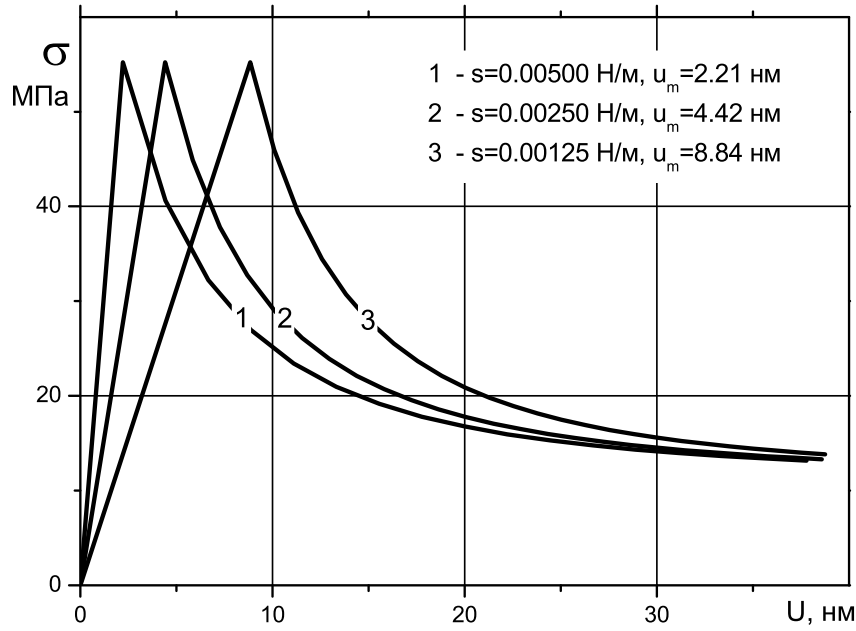


Рис. 4. Кривые деформирования многозвенных связей в концевой области трещины, изменение жесткости связи, $T = 400K$

и (9), получаем оценки модуля упругости связей:

$$E_{2b} < E_b < E_{1b},$$

где $E_{1b} = 1.1 \cdot 10^9$ Па, $E_{2b} = 1.2 \cdot 10^7$ Па. Отметим, что величина E_{1b} близка к модулю упругости однородного полимера.

В итоге, кривые деформирования связей определяются выражением:

$$\sigma(U) = \begin{cases} \frac{f_{cr}}{\vartheta N a_0} (R_1 + R_2 \sqrt{N}) U, & U < u_m \\ f^* \left(R_1 + \frac{R_2 \sqrt{N}}{\left(1 + \frac{U - u_m}{h^*}\right)^2} \right), & U \geq u_m \end{cases} \quad (14)$$

Кривые деформирования связей в концевой области трещины, на границе соединения материалов, получены при следующих значениях исходных данных: 1) $T = 400^\circ K$ - температура материалов; 2) $R_1 = 1 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-2}$ - плотность однозвенных связей на единицу площади поверхности; 3) $\alpha = R_2/R_1 = 0.1; 0.2; 0.3$ - относительная плотность многозвенных связей на границе соединения материалов; 4) $a_0 = 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ - размер мономерного звена молекулы полимера; 5) $f_{cr} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ Н}$. Жесткость полимерной цепи оценивалась по верхней границе из выражения (8). В этом случае раскрытие трещины u_m , соответствующее изменению закона деформирования связей (см. (6)), можно представить как

$$u_m = \frac{f^*}{f_{cr}} N a_0 \quad (15)$$

Кривые деформирования связей для $N = 400$ (жесткость связей $S = 0.005 \text{ Н/м}$)

приведены на рис.2. Параметр u_m при фиксированном значении степени полимеризации постоянен, а жесткость связей и предельная величина упругих напряжений возрастают при увеличении числа многозвенных связей (см. (4)). Кривые деформирования связей при фиксированном количестве многозвенных связей ($\alpha = 0.2$) и различных степенях полимеризации (следовательно, различной жесткости связей) приведены на рис.3. Увеличение степени полимеризации N приводит к уменьшению жесткости связей на линейно-упругом участке деформирования, возрастанию предельных напряжений в связях и увеличению предельного раскрытия трещины u_m . Уменьшение жесткости полимерной цепи S , при соответствующем уменьшении величины f_{cr} (при $N = 400, \alpha = 0.2$), приводит к возрастанию участка линейно-упругого деформирования связей при постоянной величине максимальных упругих напряжений σ_m , (см. рис.4). При $U \rightarrow \infty$ все связи становятся однозвенными и напряжение в связях стремиться в величине $\sigma_1^* = f^* R_1$.

Кривые деформирования связей в концевой области трещины, полученные исходя из структуры пучков молекул полимера, являются многопараметрическими и могут быть использованы при разработке микромеханических моделей формирования, роста и самозалечивания трещин [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Creton C., Kramer E. J., Hui C. Y., Brown H. R. Failure mechanisms of polymer interfaces reinforced with block copolymers // *Macromolecules*. 1992. Vol. 25. no. 12. P. 3075–3088.
- [2] Ji H., De Gennes P. G. Adhesion via connector molecules: the many-stitch problem // *Macromolecules*. 1993. Vol. 26. no. 3. P. 520–525.
- [3] Перельмутер М. Н. Моделирование кинетики самозалечивания трещин // *Физическая мезомеханика*. 2019. Т. 22. № 4. С. 47–55.
- [4] Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. Статистическая физика макромолекул. Наука, 1989. С. 341.
- [5] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2001. № 1. С. 94–112.
- [6] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2, № 2. С. 22–39.
- [7] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. О кинетике формирования и роста трещин на границе соединения материалов // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2012. № 4. С. 32–49.
- [8] Hui C. Y., Ruina A., Creton C., Kramer E. J. Micromechanics of crack growth into a craze in a polymer glass // *Macromolecules*. 1992. Vol. 25, no. 15. P. 3948–3955.
- [9] Washiyama J., Kramer E. J., Creton C. F., Hui C.-Y. Chain pullout fracture of polymer interfaces // *Macromolecules*. 1994. Vol. 27, no. 8. P. 2019–2024.

M. N. Perelmuter

MODEL OF ADHESIVE POLYMER BONDING

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Mechanical model of adhesion polymer bonding is considered. It is assumed that bonds between different polymers are formed by bundles of molecules polymer-activator of adhesion. It is taken into account that molecules of the polymer-activator can form single-link and multi-link bonds between polymers. Deformation curves of bonds in the crack bridged zone are obtained.

Keywords: polymers, adhesion, bonds deformation curves, crack bridged zone.

REFERENCES

- [1] Creton C., Kramer E. J., Hui C. Y., Brown H. R. Failure mechanisms of polymer interfaces reinforced with block copolymers // *Macromolecules*. 1992. Vol. 25. no. 12. P. 3075-3088.
- [2] Ji H., De Gennes P. G. Adhesion via connector molecules: the many-stitch problem // *Macromolecules*. 1993. Vol. 26. no. 3. P. 520-525.
- [3] Perelmuter M. N. Modeling the kinetics of fracture self-healing // *Physical mesomechanics*. 2019. Vol. 22. No. 4. P. 47-55.
- [4] Grosberg A. Yu., Khokhlov AR Statistical physics of macromolecules. Nauka, 1989, p. 341.
- [5] Goldstein R. V., Perelmuter M. N. Crack at the junction materials with connections between banks // *Izv. RAS. Solid mechanics body*. 2001. No. 1. P. 94-112.
- [6] Goldstein RV, Perelmuter MN Modeling of crack resistance of composite materials // *Computational Continuum Mechanics*. 2009. Vol. 2, No. 2. P. 22-39.
- [7] Goldstein R.V., Perelmuter M.N. On the kinetics of formation and growth of cracks at the interface between materials. *Izv. RAS. Mechanics solid*. 2012. No. 4. P. 32-49.
- [8] Hui C. Y., Ruina A., Creton C., Kramer E. J. Micromechanics of crack growth into a craze in a polymer glass // *Macromolecules*. 1992. Vol. 25, no. 15. P. 3948-3955.
- [9] Washiyama J., Kramer E. J., Creton C. F., Hui C.-Y. Chain pullout fracture of polymer interfaces // *Macromolecules*. 1994. Vol. 27, no. 8. P. 2019-2024.

В. А. Трофимов, И. Е. Шиповский

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД, СОДЕРЖАЩЕГО ПОЛОСТЬ

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем комплексного освоения недр Российской академии наук им. Н. В. Мельникова, г. Москва, Россия

Аннотация. Карстовые проявления широко распространены во многих регионах и представляют значительную опасность для проживания и хозяйственной деятельности. Воронки возникают при обрушении горных пород над подземными пустотами (пещерами, выработками и т.д.), образовавшимися при карстовом процессе или в результате антропогенного воздействия в массиве горных пород. Однако не каждая карстовая или техногенная полость приводит к разрушению земной поверхности, и, как правило, ее возникновение является неожиданным. В данной работе рассматривается динамика формирования провалов земной поверхности в виде карстовой воронки. Для этого с помощью бессеточного метода сглаженных частиц (SPH) решается геомеханическая задача. Выбранный численный метод позволяет получить решение задачи с учетом больших деформаций и возможных разрушений в процессе изменения напряженно-деформированного состояния. Используется критерий разрушения Друккера-Прагера, параметры которого со временем меняются в соответствии с накоплением повреждений, которые определяют временное развитие процесса разрушения, его начало и скорость.

Ключевые слова: карстовое разрушение, компьютерное моделирование, критерий разрушения Друккера-Прагера, бессеточный метод SPH.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.011

УДК: 551.44:539.3

1. Введение Значительные площади поверхности Земли сложены карстовыми породами, которые могут представлять большую опасность возникновения разрушения земной коры и ее опускания в виде небольших, но часто встречающихся кратеров

© Шиповский И. Е., Трофимов В. А., 2020

Трофимов Виталий Александрович

e-mail: asas_2001@mail.ru, д-р техн. наук, зав. лаб., ФГБУН Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н. В. Мельникова, Москва, Россия.

Шиповский, Иван Евгеньевич

e-mail: iv_ev@mail.ru, канд. техн. наук, ст. н. сотр., ФГБУН Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н. В. Мельникова, Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-05-00912-А).

Поступила 20.06.2020

(рис. 1) [1]. Карст представляет собой сложный геологический процесс, вызванный

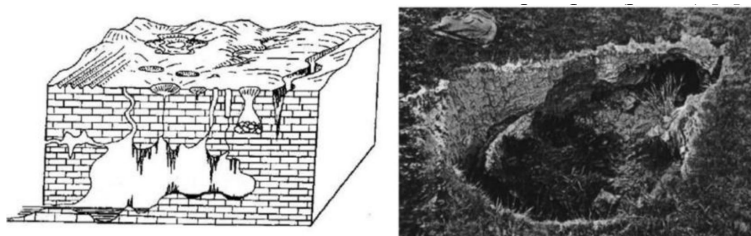


Рис. 1. Формы карстобразований

растворением подземными и (или) поверхностными водами горных пород, проявляющийся в их ослаблении, разрушении [2, 3]. По современной классификации различают 4 типа карста: открытый, закрытый, перекрытый и перекрытый в зависимости от наличия перекрывающих пород и их свойств [4]. Карстовые проявления, за исключением открытых, на первых этапах не имеют видимых признаков проявления и связаны с образованием и развитием зон размягчения в перекрывающих породах. Со временем они превращаются в полости и пещеры, возможно, заполненные водой. После этого перекрывающие породы могут разрушиться с образованием воронок. Характерной особенностью таких воронок во многих случаях является наличие на ранней стадии вертикальных стенок, которые со временем сглаживаются вследствие осыпания породы. Иногда такие стены не образуются, а оседание образуется в виде гладкой впадины. Изучение самого процесса разрушения, закономерностей деформации и разрушения грунта перекрывающего слоя, механизмов образования воронок представляет собой проблему, рассмотрению которой посвящена данная статья.

2. Теория Если напряжения вокруг карстовой полости не достигают критических значений, то, исходя из расчета напряженно-деформированного состояния массива вблизи полости в рамках стационарной модели, невозможно предсказать ее развитие и оценить риск динамического разрушения окружающей горной породы. В рамках такой модели горный массив с карстовой полостью не разрушается, а трещины и повреждения поверхности могут развиваться только при дополнительной нагрузке, например, при строительстве массивного объекта вблизи полости [4]. На практике разрушение поверхности может происходить и при отсутствии значительного антропогенного воздействия и часто не сразу, а через определенный, иногда очень большой, временной интервал. Моделирование карста с использованием классических критериев прочности может быть неадекватным, поскольку фактическое развитие трещин в массиве часто начинается и происходит при напряжениях ниже критического значения. Это связано главным образом с тем, что с течением времени геометрические параметры полости изменяются благодаря ее росту, и вследствие этого увеличения происходит перераспределение напряженно-деформированного состояния массива горных пород. Параллельно с этим происходит процесс разрушения горных пород и накопления в них повреждений, т.е. ухудшение деформационно-прочностных свойств горных пород. В представляемой численной модели считается, что физико-механический процесс происходит во времени и может быть описан на основе решения полной системы уравнений механики деформируемого твердого тела совместно с уравнением

накопления повреждений. Параметры прочности среды ослабляются в соответствии со значением параметра разрушения D . Используемое в данной статье уравнение накопления повреждений, а также упруго-пластическая модель представлены в [5, 6]. Ранее в работах [5–7] было продемонстрировано решение ряда практических задач с использованием этого подхода. Кроме того, в модели используется модель пластичности Друккера-Прагера. В этом случае упругое состояние среды в пространстве напряжений ограничено поверхностью предельного состояния. Превышение значений параметров среды этих границ запускает процесс неупругой деформации в соответствии с уравнениями предельной поверхности и потенциала пластичности.

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p = 0), \quad (1)$$

где f - уравнение поверхности нагружения. Пластическая деформация определяется из выражения

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2)$$

где $g(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = 0$ - пластический потенциал; параметр $d\lambda$ вычисляется в процессе деформации из условия пластичности; ϵ_{ij}^p - компоненты тензора пластической деформации.

Предельная поверхность в области деформации сдвига в диапазоне давлений $P^* \leq P \leq P_0$ описывается уравнением

$$f_1(P, \tau) = \tau - \alpha P - Y \quad (3)$$

а при давлениях $P > P_0$ - уравнением

$$f_2(P, \tau) = \frac{(p - p_0)^2}{a^2} + \frac{\tau^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (4)$$

Здесь $\tau = (\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij})^{0.5}$ - интенсивность сдвиговых напряжений; P^* это давление, при котором происходит хрупкое разрушение на разрыв; P_0 - пороговое давление, при котором начинается уплотнение материала; $a = (P_1 - P_0)$, $b = c + \alpha P_0$. Параметры $\alpha = \alpha(\epsilon_p, P)$, $Y = Y(\epsilon_p, P)$, которые описывают поверхность Друккера-Прагера, могут быть выражены через угол внутреннего трения φ и сцепление C модели Кулона-Мора.

Ослабление нагружаемой геосреды с течением времени учитывается через функцию накопления повреждений

$$D(\sigma_{ij}, t) = \int \frac{(S - S^0)^n}{(S^*)^n t^*} dt, \quad (5)$$

для $S > S_0$.

S - эффективное напряжение; S_0, S^*, t^*, n - параметры, определяющие пороговое напряжение, начиная с которого накапливается повреждение, предельное напряжение и параметры, характеризующие скорость накопления повреждения. В этом случае уравнение, описывающее упрочнение и размягчение, дополняется коэффициентом $(1 - D(\sigma_{ij}, t))$, содержащим кинетическую функцию D (5). При таком подходе механики разрушения среды обычно используются соотношения теории пластичности, и разделение на пластическую и хрупкую деформацию становится условным. В этом случае объемные изменения, связанные с образованием микротрещин, учитываются без перехода на макроуровень и, соответственно, без использования специальных процедур для описания трещин. Такой подход оправдан в случае множественного

разрушения без образования магистральных трещин. Его применение особенно эффективно в задачах, связанных с деформацией горных пород при сжатии и сдвиге. Таким образом, повреждение рассматривается как увеличение неубывающей переменной D , которая соответствует текущему напряженному состоянию и состоянию повреждения. Это интерпретируется как начало образования трещин. Повреждение меняет некоторые свойства материала. В динамических условиях это позволяет пространственно локализовать участки с быстро растущим повреждением, сопровождающимся разрыхлением, что меняет картину напряженно-деформированного состояния окружающей породы. Важным свойством параметров повреждений является их взаимодействие и обратная связь с другими параметрами напряженно-деформированного состояния. Считается, что ослабление, смягчение и разъединение в результате повреждения функционально устанавливаются через модули:

$$K = (1 - D^2)K_0, \mu = (1 - D^2)\mu_0, \tau = (1 - D^2)\tau_0 \quad (6)$$

При этом размягчение материала от повреждений, вызванных растяжением, уменьшает модуль объемного сжатия K , модуль сдвига μ , и предел текучести τ от их исходных значений для неповрежденного материала K_0 , μ_0 и τ_0 . Компоненты тензора сжимающих напряжений не уменьшаются по мере разрушения, так как материал в области разрушения остается способным передавать сжимающие нагрузки. В данной статье для решения поставленной краевой задачи используется метод сглаженных частиц (SPH). Этот метод включает в себя все необходимые алгоритмы учета разрушения материала под нагрузкой и зарекомендовал себя при исследовании задач геомеханики [5–9].

3. Постановка задачи На рисунке 2 показана начальная конфигурация задачи. Область расчета представляет собой прямоугольник размером 200x150 м с квадратной выемкой 20x20 м, имитирующей карстовую полость на глубине 50 м. В этом случае верхняя граница области 1 является свободной дневной поверхностью. На поверхно-

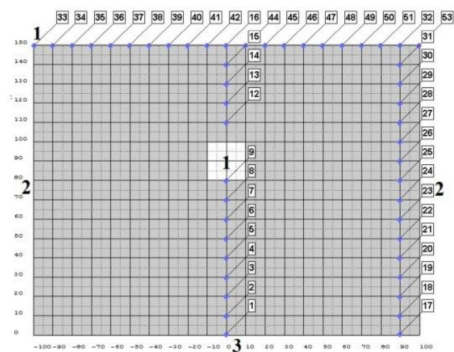


Рис. 2. Начальная конфигурация задачи

стях 1, 2, 3 расчетной области задаются граничные условия. Числами 1 обозначены свободные поверхности (дневная и полость), на поверхностях 2 - реализуются условия полного поглощения возникающих в процессе деформации и разрушения волн нагружения и на поверхности 3 задается условие жесткой стенки. Метки на рисунке и

соответствующие номера внутри указывают места и количество компьютерных датчиков, в которых регистрируются изменения значений параметров массива горной породы (смещения, скорости, повреждения D и т.д.). На начальном этапе моделирования расчетная область некоторый протяженный период времени находится под действием мгновенно приложенной силы тяжести. В результате этого в области формируется поле динамических напряжений, которое через определенный промежуток времени переходит в стационарное, которое будем считать исходным. Следует иметь в виду, что прочность постепенно уменьшается со временем даже при сохранении постоянных напряжений. Более того, в какой-то момент критерий срывает, и начнется постепенное динамическое разрушение. Далее этот момент времени будет считаться начальным, т.е. $t = 0$, для задачи динамического разрушения.

4. Результаты расчетов Как отмечалось ранее, формирование воронки является, в определенном смысле, конечной стадией карстового процесса, который постепенно развивается в окружающем массиве породы.

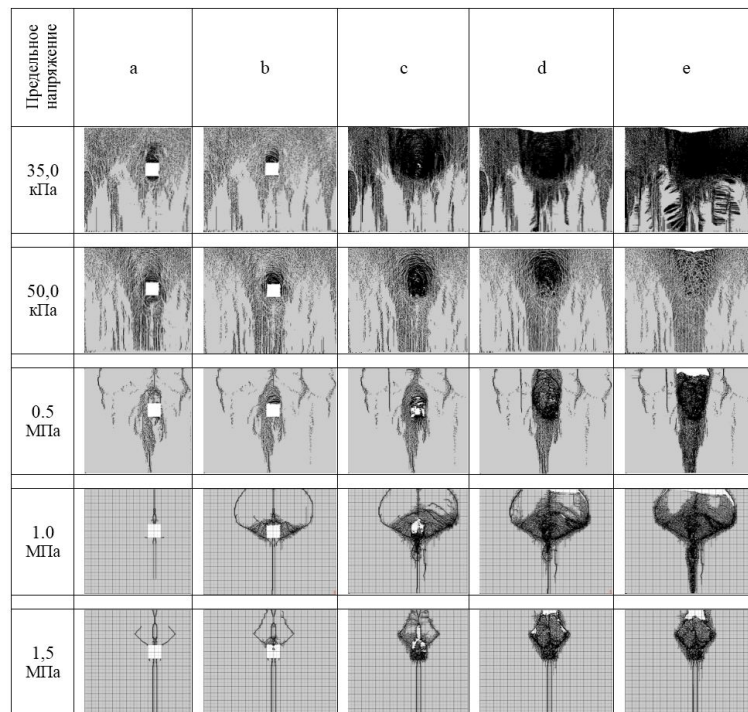


Рис. 3. Рассчитанные последовательности состояния массива при формировании карстовой воронки

На рисунке 3 показаны изменения состояния массива в некоторые последовательные моменты времени: а - зарождение главной вертикальной трещины в начале схождения вертикальных стенок полости и некоторого расхождения боковых под воздействием горного давления; б - развитие оседания кровли карстовой полости; в - активная стадия схождения, приводящая к полному обрушению кровли; г - полное схлопывание всего пространства карстовой полости, что приводит к оседанию дневной

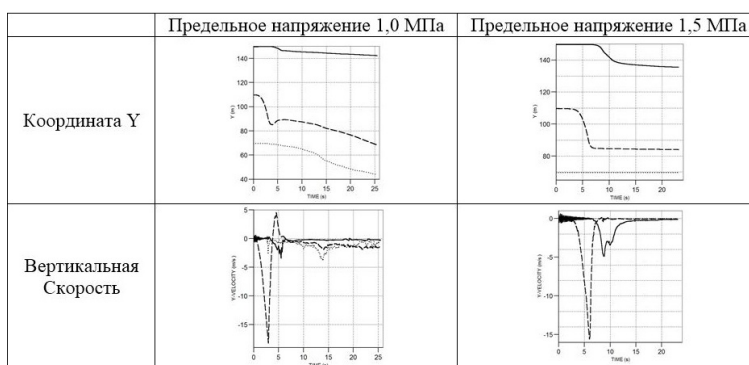


Рис. 4. Изменения во времени вертикального смещения и скорости в зависимости от прочностных свойств горной породы в выбранных точках

поверхности; е - финальная стадия образования карстовой воронки или разрушения. Следует отметить, что в массиве, состоящем из менее прочных горных пород, происходит более сильное рыхление перекрывающих пород и образуется более плоская впадина в виде традиционной мульды. В более прочных скальных материалах наблюдается формирование карстовых воронок в виде провалов с ярко выраженными крутыми стенками. Следует отметить, что образование воронки на поверхности земли существенно зависит от глубины расположения карстовой полости, ее горизонтальных размеров, деформационно-прочностных свойств и степени разрыхления разрушающегося материала. При сильном разрыхлении этот материал может заполнить развивающуюся полость и поддерживать кровлю еще до того, как полость выходит на поверхность, предотвращая ее развитие. В этом случае карст реализуется в виде только определенного проседания. В той или иной степени это отражено на рисунках в верхних двух рядах рис. 3. Такие явления наблюдаются при разработке месторождений полезных ископаемых, особенно солевых образований, угольных пластов, когда деформации выходит на поверхность земли, фактически нарушая земную поверхность [10].

На рисунке 4 для пород различной прочности представлены графики изменений параметров массива в характерных точках, отражающих влияние образования карста.

Сплошные линии на рисунке 4 соответствуют параметрам дневной поверхности в осевой точке, пунктирная линия - это крыша полости, точки - подошва. Из графиках можно заметить не совсем очевидный факт, что в более прочных породах оседание массива более интенсивное.

5. Заключение Результаты компьютерного моделирования показывают, что прочностные свойства горных пород существенно влияют на характер получаемых структур разрушения (размер фрагментов и блоков, направление трещин, ширина и глубина провала), а также на динамику поведения геологического слоя над образовавшейся карстовой полостью. Поврежденная среда с дефектами подвержена быстрому разрушению в течение нескольких секунд с образованием оседания породы в виде воронки или провала с вертикальными стенками. Последнее характерно для более прочных вскрышных и окружающих пород. Численный анализ показывает четкую связь между интенсивностью сейсмического разрушения и интенсивностью сейсмического

излучения. Таким образом, моделирование может быть использовано для разработки методов прогнозирования разрушения карстового покрова на основе компьютерного сейсмического мониторинга.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Короновский Н. В. Общая геология: учебник. М.: КДУ. 528 с.
- [2] СП 116.13330.2012. СНиП 22-02-2003 Инженерная защита территорий, зданий и сооружений от опасных геологических процессов. Основные положения. 2012.
- [3] Дублянская Г. Н., Дублянский В. Н. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Новосибирск: СО РАН, 1992. 144 с.
- [4] Modeling of karst deformation and analysis of acoustic emission during sinkhole formation / R. A. Bakeev, Y. P. Stefanov, A. A. Duchkov et al. // AIP Conference Proceedings. Vol. 2051. 2017. p. 020170.
- [5] Odintsev V. N., Shipovskii I. E. Numerical simulation of the stress-strain state of a coal seam caused by an explosion of a blast-hole charge with an annular gap // EPJ Web of Conferences. XXVI Conference on Numerical Methods for Solving Problems in the Theory of Elasticity and Plasticity (EPPS-2019). Tomsk, 2019. Vol. 221. p. 01053.
- [6] Odintsev V. N., Shipovskii I. E. Simulating Explosive Effect on Gas-Dynamic State of Outburst-Hazardous Coal Band // Journal of Mining Science. Vol. 55(4).
- [7] Trofimov V. A., Shipovskii I. E., Malinnikova O. N. Wen-Jie Xu Numerical Approach to Computer Simulation of Landslid Events // AIP Conference Proceedings. 2019. p. 020329.
- [8] Моделирование влияния пульпообразных масс в толще отвала на динамику развития оползневых зон / В. Н. Захаров, О. Н. Малинникова, В. А. Трофимов [и др.] // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2020. Т. 1. с. 359–378.
- [9] Шиповский И. Е. Расчет хрупкого разрушения горной породы с использованием бессеточного метода // Науковий вісник НГУ. 2013. Т. 1, № 145. с. 76–82.
- [10] К вопросу о напряженно-деформированном состоянии областей, подверженных карстогенезу / А. А. Барях, Е. П. Русин, С.Б. Стажевский [и др.] // ФТПРПИ. 2009. Т. 6. с. 3–10.

V. A. Trofimov, I. E. Shipovskii

SIMULATION THE DEFORMATION AND DAMAGE OF A ROCK MASSIVE CONTAINING A CAVITY

*Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

Abstract. Karst manifestations are widespread in many regions and pose a significant danger to residence and economic activity. Failing funnels arise during the collapse of rocks over underground voids (caves, workings, etc.), formed during karst formation or in the process of anthropogenic doing in the rock massive. However, not every karst or technogenic cavity gives rise to a failure of the earth's surface, and as a rule, its occurrence is unexpected. In this work, we consider the dynamics of the formation of dips of the earth's surface in the form of a collapse pipe. To do this, the geomechanical problem is solved by the meshless code Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). The method allows to obtain a solution to the problem taking into account large deformations and possible discontinuities in the process of changing the stress-strain state. The Drucker-Prager fracture criterion is used, the parameters of which change over time in accordance with the accumulation of damage, which determines the temporary development of the fracture process, its beginning and speed.

Keywords: karst failure, computer simulation, Drucker-Prager fracture criterion, meshless SPH code.

REFERENCES

- [1] Koronovsky N. General Geology: Textbook. M.: CDU. p. 528.
- [2] 2012. SP 116.13330.2012. SNiP 22-02-2003 Engineering protection of territories, buildings and structures from hazardous geological processes. Key points.
- [3] Dublyanskaya G. N., Dublyansky V. N. Perturbation method in the theory of an elastoplastic body. Novosibirsk: SB RAS, 1992. 144 p.
- [4] Modeling of karst deformation and analysis of acoustic emission during sinkhole formation / R. A. Bakeev, Y. P. Stefanov, A. A. Duchkov et al. // AIP Conference Proceedings. Vol. 2051. 2017. p. 020170.
- [5] Odintsev V. N., Shipovskii I. E. Numerical simulation of the stress-strain state of a coal seam caused by an explosion of a blast-hole charge with an annular gap // EPJ Web of Conferences. XXVI Conference on Numerical Methods for Solving Problems in the Theory of Elasticity and Plasticity (EPPS-2019. Tomsk, 2019. Vol. 221. p. 01053.
- [6] Odintsev V. N., Shipovskii I. E. Simulating Explosive Effect on Gas-Dynamic State of Outburst-Hazardous Coal Band // Journal of Mining Science. Vol. 55 (4).
- [7] Trofimov V. A., Shipovskii I. E., Malinnikova O. N. Wen-Jie Xu Numerical Approach to Computer Simulation of Landslid Events // AIP Conference Proceedings. 2019. p. 020329.
- [8] Modeling the influence of pulp-like masses in the dump on the dynamics of landslide zones development / V. N. Zakharov, O. N. Malinnikova, V. A. Trofimov [и др.] // Bulletin of the Tula State University. Earth Sciences. 2020. T. 1. c. 359–378.
- [9] Shipovskiy I. E. Calculation of brittle failure of rocks using the meshless method // Scientific journal of NSU. 2013. Vol. 1, no. 145. p. 76–82.
- [10] On the question of the stress-strain state of areas subject to karstogenesis / A. A. Baryakh, E. P. Rusin, S. B. Stazhevsky et al. // FTPrPI. 2009. Vol. 6. p. 3–10.

Trofimov Vitaly Aleksanrovich, Dr. Tech. Sciences, Head Lab., Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Shipovskiy, Ivan Evgenievich Cand. Tech. Sciences, Senior Researcher, Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Г. Н. Белосточный, М. В. Вильде, М. Ю. Сурова

ПРИМЕНЕНИЕ УТОЧНЕННОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАНАРНОЙ КРАЕВОЙ ВОЛНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА ТОРЦЕ

ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов, Россия

Аннотация. Изучается возможность применения уточненной асимптотической модели планарной краевой волны в задаче о действии нестационарной касательной нагрузки, приложенной на торце. При построении уточненной модели используется асимптотическая двумерная теория растяжения пластин высшего порядка точности. Приводятся результаты сравнения с решением по трехмерной теории упругости для различных законов распределения нагрузки. Показано, что уточненная модель позволяет достаточно точно описать влияние дисперсии краевой волны, не учитываемое в первом приближении.

Ключевые слова: краевые волны, нестационарные волны, пластина, асимптотические методы.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.012

УДК: 539.3

Введение

Волны, распространяющиеся вдоль края пластины (краевые волны), представляют интерес для практических приложений в области неразрушающего контроля, поскольку они могут быть использованы для поиска трещин и других дефектов вблизи

© Белосточный Г. Н., Вильде М. В., Сурова М. Ю., 2020

Белосточный Григорий Николаевич

e-mail: belostochny@mail.ru, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов, Россия.

Вильде Мария Владимировна

e-mail: mv_wilde@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов, Россия.

Сурова Мария Юрьевна

e-mail: mzhilko@yandex.ru, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики, ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00673.

Поступила 20.09.2020

края. Простейшим примером краевой волны является планарная волна, представляющая собой аналог волны Рэлея в теории обобщенного плоского напряженного состояния пластин. Экспериментальные исследования [1] показывают, что данная волна весьма чувствительна к наличию трещины, выходящей на край, однако для обнаружения достаточно малых трещин требуется использовать частоты, выходящие за пределы применимости двумерной теории растяжения пластин. Несмотря на то, что современная вычислительная техника позволяет получить решение трехмерной задачи о распространении краевой волны (см. [2]), проблема построения уточненных двумерных теорий не потеряла своей актуальности. С практической точки зрения, применение такой теории позволяет значительно сократить время вычисления. Асимптотически корректные уточненные теории имеют также теоретическое значение, поскольку они позволяют исследовать поведение решения в окрестности фронтов волн и другие эффекты, для описания которых требуется знание асимптотического поведения решения.

Экспериментальное исследование [2] показывает, что при приложении касательной нагрузки на торце наиболее интенсивно возбуждается планарная краевая волна. В классической теории растяжения пластин для выделения поля данной волны можно применить асимптотическую модель из работы [3]. Целью данной работы является построение и апробация уточненной асимптотической модели, основанной на теории высшего порядка точности с приведенной инерцией [4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о распространении нестационарных упругих волн в полубесконечной идеально упругой изотропной пластине, отнесенной к декартовой системе координат и занимающей область $(x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h)$ (см. рис. 1). Для описания волнового процесса будем использовать уточненную теорию растяжения пластин с приведенной инерцией [4] второго порядка приближения. Уравнения движения в этой теории имеют вид

$$Eh \left(\frac{1}{1+\nu} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-\nu} \text{grad div } \mathbf{u} \right) - 2\rho h \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{2\nu^2}{3(1-\nu)^2} \rho h^3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{grad div } \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещения частиц на срединной поверхности, ρ — плотность, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, t — время, h — полутолщина пластины. Все численные расчеты, представленные в данной работе, выполнены при $\nu = 0.33$. Запишем выражения напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) через перемещения, соответствующие уравнению (1) по асимптотическому порядку точности [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} \left[\frac{\nu}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{div } \mathbf{u} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \text{div } \mathbf{u} \right] \right\}, \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\nu h^2}{3(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \text{div } \mathbf{u} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Как и в классической теории, представление перемещения через потенциалы Ламе φ, ψ

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (3)$$

приводит к разделению уравнений движения (1) на два независимых уравнения

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2} \frac{h^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

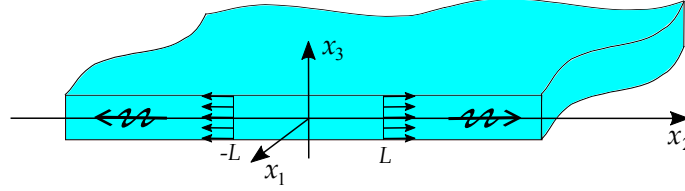


Рис. 1. Полубесконечная пластина с касательной нагрузкой на торце, возбуждающей планарную краевую волну

где $c_1 = E/(1 - \nu^2)$ и $c_2 = E/2(1 + \nu)$ – скорости продольной и поперечной волн в теории пластин. Введем также обозначение $\kappa_0^2 = c_2^2/c_1^2 = (1 - \nu)/2$.

Рассмотрим задачу, в которой к торцу пластины приложена касательная нагрузка, распределенная на конечном интервале $-L \leq x_2 \leq L$ (см. рис. 1). Граничные условия в таком случае имеют вид

$$\sigma_{11}|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_1=0} = S_0(x_2, t). \quad (5)$$

Примем, что до приложения нагрузки пластина находилась в покое, что соответствует нулевым начальным условиям (это относится и к старшим производным по времени, возникающим в результате итерационного построения асимптотического приближения). Будем искать решение, описывающее волну, распространяющуюся вдоль края $x_1 = 0$ и затухающую при $x_1 \rightarrow -\infty$.

2. Уточненная асимптотическая модель

Построение уточненной асимптотической модели для случая нормальной нагрузки на торце подробно описано в работе [6]. Поскольку в случае граничных условий (5) модель строится аналогично, приведем только окончательный результат. Распространение волны вдоль края описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{12} \frac{k_R^2}{k_1^2 B} \frac{h^2}{c_R^4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \left(\frac{1}{k_R^2 B} \frac{\partial S_0}{\partial x_2} - \frac{\nu^2}{12} \frac{B_1}{B} \frac{h^2}{c_R^2} \frac{\partial^3 S_0}{\partial x_2 \partial t^2} \right), \quad (6)$$

где

$$k_R = \frac{c_R}{c_2}, \quad k_1 = \sqrt{1 - \kappa_0^2 k_R^2}, \quad k_2 = \sqrt{1 - k_R^2}, \quad k_3^2 = 1 - \frac{k_R^2}{2}, \quad (7)$$

$$B = \frac{\kappa_0^2}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2}, \quad B_1 = \frac{1}{k_1^2 B} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\kappa_0^2}{k_1^4} + \frac{1}{k_2^4} - \frac{2}{k_3^4} \right) - \frac{\kappa_0^2 k_R^2}{k_1^2} - 1 \right].$$

Здесь c_R – скорость планарной краевой волны в классической теории растяжения пластин, которая определяется как корень уравнения, по своему виду совпадающего с уравнением для скорости волны Рэлея. В терминах безразмерных констант (7) это уравнение имеет вид $k_3^4 - k_1 k_2 = 0$. После определения функции Φ можно восстановить волновое поле во всей области, занятой пластиной, решив уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + k_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\nu^2}{12} \left(1 - \frac{\kappa_0^2}{k_1^2 B} \right) k_R^4 h^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + k_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \Phi - \frac{\nu}{12} k_R^2 h^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0} = -\frac{1}{k_3^2} \left(\Phi + \frac{\nu^2}{24} \frac{k_R^4}{k_1^2 k_3^2 B} h^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right). \quad (9)$$

После нахождения потенциалов можно определить перемещения по формулам (3). Заметим, что если для практических целей необходимо определить какую-либо характеристику НДС только на краю пластины, то в решении уравнений (8) нет необходимости. Рассмотрим, например, решение для скорости продольного перемещения на торце $W = \dot{u}_1|_{x_1=0}$, которая может быть измерена экспериментально с помощью лазерного виброметра [2]. Подставляя выражения производных потенциалов из граничных условий (9) в формулу перемещения u_1 из (3), получим выражение для функции Φ . Подставляя его в уравнение (6), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{12} \frac{k_R^2}{k_1^2 B} \frac{h^2}{c_R^4} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{k_3^2 B} \left[\frac{\partial^2 S_0}{\partial x_2 \partial t} - B_2 k_R^2 h^2 \frac{\partial^4 S_0}{\partial x_2^3 \partial t} \right], \quad (10)$$

где

$$B_2 = -\frac{\nu}{6} \frac{k_3^2}{k_R^2} + \frac{\nu^2}{12} \left(B_1 - \frac{1}{k_1^2 k_3^2 B} \right).$$

Решение уравнения (10), удовлетворяющее нулевыми начальным условиям, представляет поле планарной краевой волны.

3. Решение задачи и его анализ

Введем для удобства безразмерные переменные $x_2 = h\xi$, $t = h\tau/c_2$, $W = c_2 V$. Применяя преобразования Лапласа и Фурье

$$f^L(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad f^F(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\chi\xi} d\xi, \quad (11)$$

нетрудно записать решение уравнения (10) в изображениях

$$V^{\text{FL}}(\chi, \omega) = \frac{1}{2\mu k_3^2 B} \frac{\chi \omega S_0^{\text{FL}} (1 + B_2 k_R^2 \chi^2)}{\chi^2 - \frac{\omega^2}{k_R^2} \left(1 + \frac{\nu^2}{12 k_1^2 B} \omega^2 \right)}. \quad (12)$$

Полюса $\omega_0 = \pm\omega_0(\chi)$ ($\chi_0 = \pm\chi_0(\omega)$) функции V^{FL} определяют вклад планарной краевой волны. На рис. 2 приведено сравнение величин $c_g = d\omega_0/d\chi$ и вычета $R_{\text{EW}} = \text{Res } V^{\text{FL}}$ при $S_0^{\text{FL}} = 1$ в полюсе $\omega_0 = \omega_0(\chi)$ с соответствующими величинами, определенными на основании численного решения трехмерной задачи [2].

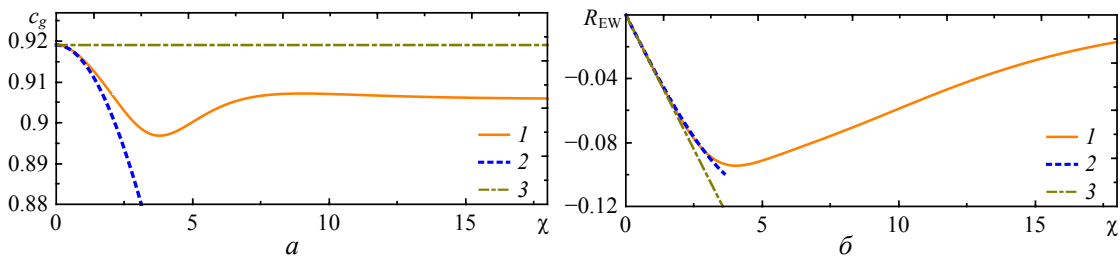


Рис. 2. Сравнение групповой скорости (а) и вычета (б) с трехмерной теорией

Здесь и далее на графиках приняты обозначения: 1 – трехмерная теория, 2 – уточненная асимптотическая модель, 3 – теория обобщенного плоского напряженного состояния пластины. Из рис. 2 видно, что уточненная модель позволяет определить следующий член асимптотического приближения при $\chi \rightarrow 0$.

4. Численные результаты

Рассмотрим частный случай нагрузки вида

$$S_0(\xi, \tau) = \begin{cases} \mu I_0 f(\xi) H(\tau), & \text{если } -l \leq \xi \leq l, \\ 0, & \text{если } |\xi| > l, \end{cases}$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда, $f(\xi)$ – функция, характеризующая распределение нагрузки, $l = L/h$. В первом приближении задача определения скорости V сводится к решению задачи Коши с нулевыми начальными условиями для неоднородного одномерного волнового уравнения, которое получается из (10), если опустить подчеркнутые слагаемые. На основании известной формулы Даламбера решение этого уравнения может быть записано в явном виде

$$V(\xi, \tau) = -\frac{I_0}{4k_3^2 B} [f(\xi - k_R \tau) - f(\xi + k_R \tau)]. \quad (13)$$

Формула (13) показывает, что в первом приближении профиль волны в точности повторяет закон распределения касательной нагрузки. Уточненная асимптотическая модель позволяет учесть искажение профиля вследствие дисперсии. Обращая преобразование Фурье в (12) путем использования контурного интегрирования и теоремы о вычетах и затем преобразование Лапласа, приходим к решению

$$V(\xi, \tau) = -\frac{1}{4\pi k_3^2 B} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[f^F(\chi_0(\omega)) e^{i(\omega\tau - \chi_0(\omega)\xi)} (1 + B_2 \omega^2) \right] w(\omega) d\omega.$$

Здесь $w(\omega)$ – фильтр типа “природнятого косинуса”, выделяющий область низких частот. На рис. 3 приведены результаты расчетов для случая сглаженной нагрузки

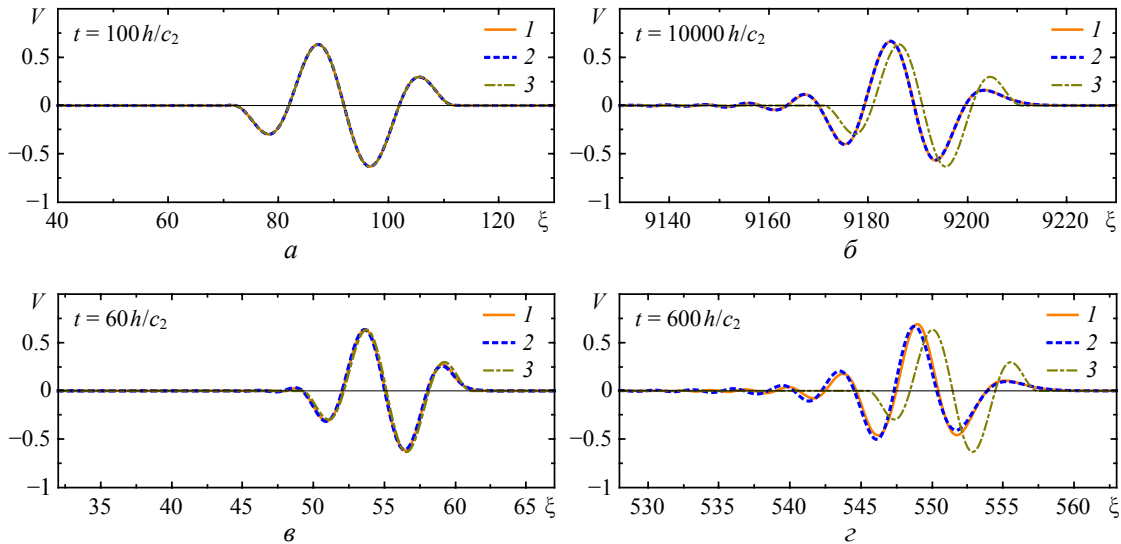


Рис. 3. Профиль волны в различные моменты времени для случая нагрузки, распределенной по закону (14) при $l = 20$ (а, б) и $l = 6$ (в, г)

вида

$$f_1(\xi) = \frac{15\pi}{8} \sin \frac{2\pi\xi}{l} \cos \frac{\pi\xi}{2l}, \quad f_1^F(\chi) = i\chi \frac{15\pi}{8} \left[\frac{\cos \chi l}{\left(\frac{5\pi}{2l}\right)^2 - \chi^2} - \frac{\cos \chi l}{\left(\frac{3\pi}{2l}\right)^2 - \chi^2} \right]. \quad (14)$$

На рис. 4 представлены аналогичные результаты для случая линейного распределения нагрузки

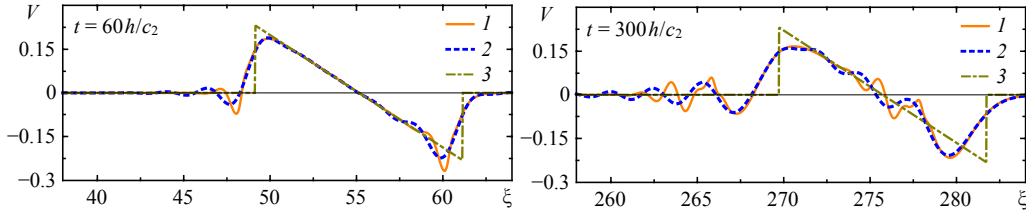


Рис. 4. То же, что рис. 3, для закона распределения нагрузки (15)

$$f_2(\xi) = \frac{2\xi}{l}, \quad f_2^F(\chi) = 4i \frac{\sin \chi l - \chi l \cos \chi l}{\chi^2 l}. \quad (15)$$

Далее рассмотрены примеры распределения нагрузки, представляющие интерес при моделировании действия пьезоэлектрического актуатора [7]. Рис. 5 получен при

$$f_3(\xi) = \frac{\alpha l \operatorname{sh} \alpha \xi}{\operatorname{ch} \alpha l - 1}, \quad f_3^F(\chi) = \frac{\alpha l}{\operatorname{ch} \alpha l - 1} \left[\frac{\sin [(\chi - i\alpha)l]}{\chi - i\alpha} - \frac{\sin [(\chi + i\alpha)l]}{\chi + i\alpha} \right]. \quad (16)$$

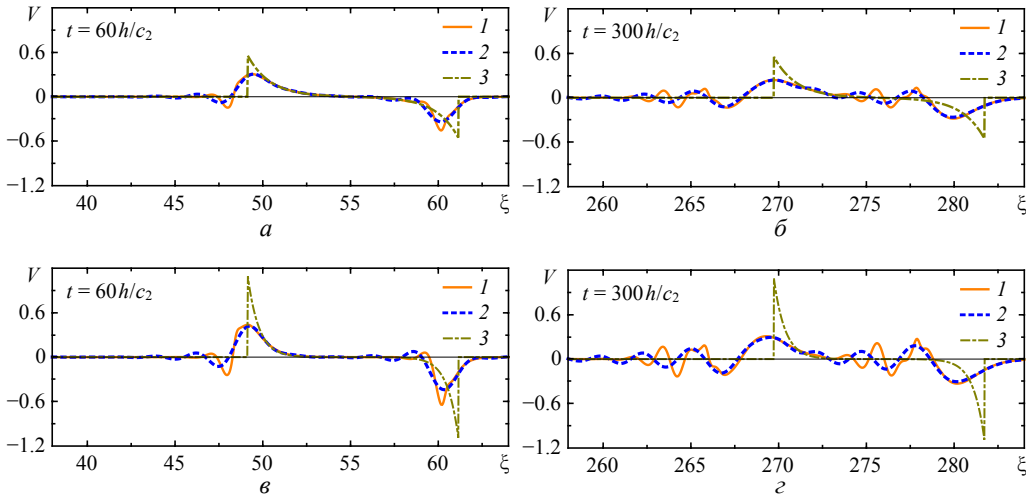


Рис. 5. То же, что рис. 3, для закона распределения нагрузки (16) при $\alpha = 0.25$ (а,б) и $\alpha = 0.5$ (в,г)

На рис. 6 показаны результаты для двух типов нагрузки с сингулярностью на границах области приложения:

$$f_4(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{l^2 - \xi^2}}, \quad f_4^F(\chi) = 2\pi i l J_1(\chi l); \quad f_5(\xi) = l(\delta_+ - \delta_-), \quad f_5^F(\chi) = 2i l \sin \chi l, \quad (17)$$

где $\delta_{\pm} = \delta(\xi \mp l)$, δ – дельта-функция Дирака, J_1 – функция Бесселя первого рода. Постоянные множители в (14)–(17) подобраны таким образом, чтобы выполнялось условие $\int_0^l f(\xi)d\xi = l$.

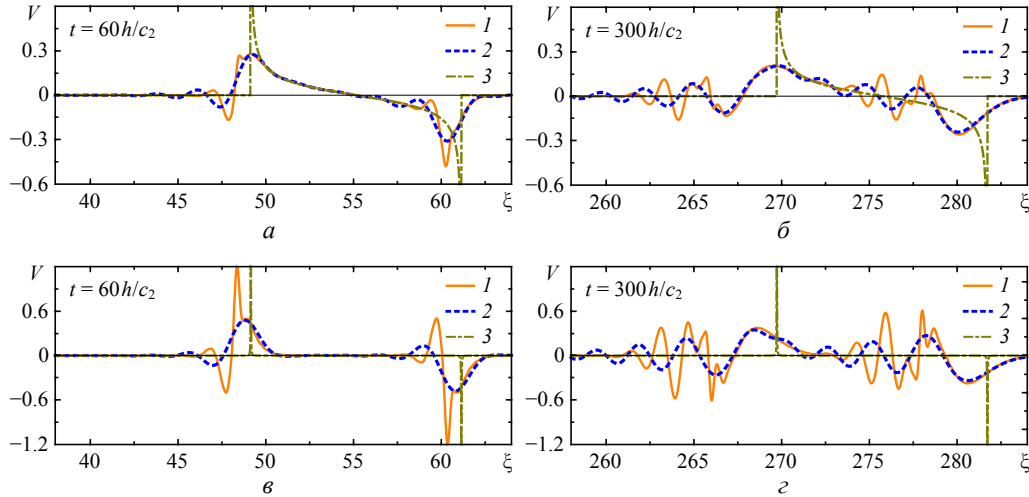


Рис. 6. То же, что рис. 3, для законов распределения нагрузки (17) $f_4(a, \bar{b})$ и $f_5(v, z)$

Спектр нагрузки (14) локализован в окрестности волнового числа $2\pi/l$. При $l \gg 2\pi$ влияние дисперсии заметно только на очень больших временах (см. рис. 3), так что можно считать применимым решение (13). С уменьшением l влияние дисперсии увеличивается, при этом уточненная модель достаточно точно описывает искажение профиля. В случаях (15)–(17) решение по теории пластин содержит разрыв на фронте волны, однако уточненная модель и решение по трехмерной теории показывают, что этот разрыв сглаживается. Увеличение степени локализации нагрузки у границ области приводит к возрастанию амплитуды высокочастотных осцилляций, и к увеличению пика, связанного с угловой волной.

Заключение

Исследование, проведенное в данной работе, показывает, что уточненная асимптотическая модель позволяет, в целом, получить качественно верное описание поля краевой волны. Исключения составляют пики, связанные с угловой волной, и высокочастотная осцилляция, однако на практике эти эффекты быстро затухают вследствие внутреннего трения. С количественной точки зрения уточненная модель дает достаточно точные результаты в случае сглаженной нагрузки, а также на больших временах в окрестности квазифронта в случае разрывной нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of edge waves propagation and scattering in a thick plate with surface-breaking crack-like defect // Proceedings of 13th European Conference on Non-destructive Testing ECNDT 2018, Gothenburg, Sweden. 2018. p. 0295. URL: <https://www.ndt.net/>.
- [2] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 441. P. 26–49.

- [3] Kaplunov J., Prikazchikov D. Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves // *Adv. Appl. Mech.* 2017. Vol. 50. P. 1–106.
- [4] Kaplunov J. D., Kossovich L. Y., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
- [5] Вильде М. В., Сулова М. Ю. Формулировка граничных условий и применение уточненной теории растяжения пластин для описания дисперсии планарной краевой волны // *Современные проблемы механики сплошной среды: труды XIX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.)*. Т. 2. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2018. С. 68–72.
- [6] Сулова М. Ю., Вильде М. В. Уточненная асимптотическая модель для описания планарной краевой волны в тонкой пластине // *XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах*. Т. 3: *Механика деформируемого твердого тела*. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 199–201.
- [7] Giurgiutiu V. *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. Elsevier Academic Press, 2014. 1024 p.

G. N. Belostochny, M. V. Wilde, M. Yu. Surova

**APPLICATION OF THE REFINED ASYMPTOTIC MODEL FOR DESCRIBING
OF THE TRANSIENT EXTENSIONAL EDGE WAVE EXCITED BY A
TANGENTIAL LOAD APPLIED TO THE EDGE**

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. The possibility of application of the refined explicit model for extensional edge wave in the problem of transient waves excitation by an edge tangential load is investigated. The refined model is based on the higher order theory of plate extension. The results of comparison with the 3D solution for various distributions of the load are presented. It is shown that the refined model allows correct describing of dispersion effects which are not taken into account in the leading approximation.

Keywords: edge waves, transient waves, plate, asymptotic methods.

REFERENCES

- [1] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of edge waves propagation and scattering in a thick plate with surface-breaking crack-like defect // Proceedings of 13th European Conference on Non-destructive Testing ECNDT 2018, Gothenburg, Sweden. 2018. p. 0295. URL: <https://www.ndt.net/>.
- [2] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 441. P. 26–49.
- [3] Kaplunov J., Prikazchikov D. Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves // Adv. Appl. Mech. 2017. Vol. 50. P. 1–106.
- [4] Kaplunov J. D., Kossovich L. Y., Nolde E. V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
- [5] Wilde M. V., Surova M. Y. Formulation of boundary conditions and application of refined theory of plate extension for describing of tangential edge wave dispersion // Modern Problems of Continuum Mechanics: Proceedings of XIX International conference (Rostov-on-Don, October 15-18, 2018). Vol. 2. Rostov-on-Don: Southern Federal University, 2018. P. 68–72. (in Russian).
- [6] Surova M. Y., Wilde M. V. Refined asymptotic model for the description of a planar edge wave in a thin plate // XII All-Russian congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics: proceedings in 4 volumes. V. 3: Mechanics of deformable solids. Ufa: Bashkir State University, 2019. P. 199–201. (in Russian).
- [7] Giurgiutiu V. Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors. Elsevier Academic Press, 2014. 1024 p.

Belostochny Grigorij Nikolaevich, Doctor of technical Sciences, Professor, Professor of Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov, Russia.
Wilde Maria Vladimirovna, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor of Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov, Russia.
Surova Maria Yurievna, Postgraduate student of Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov, Russia.

В. В. Козлов^{1,2}, А. А. Маркин¹, В. Е. Петрова³

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ
ПОЛУТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ**

¹ ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия

² МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

³ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж, Россия

Аннотация. Рассматривается нелинейно-упругая осесимметричная модель полутороидальной оболочки, закрепленной по основаниям, под действием внутреннего давления. Предложен подход к формулировке мер, определяющих напряженно-деформированное состояние оболочки. Для несжимаемого материала получена замкнутая система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций. С помощью метода конечных элементов дана оценка напряженно-деформированного состояния оболочки в случае малых деформаций.

Ключевые слова: полутороидальная оболочка, нелинейная упругость, метод конечных элементов.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.013

УДК: 539.3

Введение Исследование характеристик упругих оболочек при возникновении в них конечных деформаций является перспективным направлением развития механики, что подтверждается большим количеством современных публикаций на эту тему [1–3]. В настоящей работе рассмотрена нелинейно-упругая осесимметричная модель полутороидальной оболочки под действием внутреннего давления. Подобную схему нагружения можно считать актуальной, поскольку она изучается в современных исследованиях [4]. При этом рассматриваются и более сложные схемы – например, в [5] изучается оболочка с эллиптическим сечением. В публикациях [6, 7] рассматривается тороидальная оболочка при воздействии внешнего и внутреннего давлений, изучается эффект устойчивости, возникающий при превышении внешнего давления внутреннего. В качестве первого приближения для оценки напряженно-деформированного состояния при малых деформациях в работе используется метод конечных элементов [8].

1. Кинематика процесса Рассматривается напряженно-деформированное состояние оболочки, опорная поверхность которой имеет в начальном (недеформированном) состоянии форму полутора и нагружается внутренним давлением P . Торцы оболочки закреплены. Четверть схемы расчета представлена на рисунке 1. Оболочка отнесена

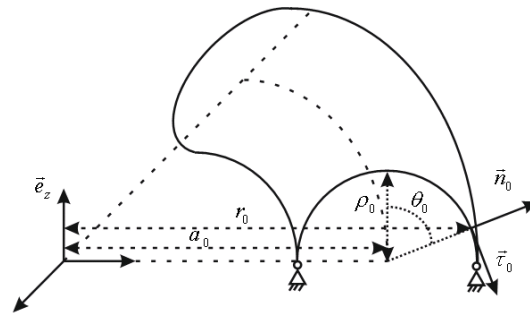


Рис. 1. Схема модели

© Козлов В. В., Маркин А. А., Петрова В. Е., 2020

Козлов Виктор Вячеславович

e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru, кандидат физико-математических наук. Доцент кафедры «Вычислительная механика и математика» ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия (основное место работы). Старший научный сотрудник кафедры «Вычислительная механика» МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия (по совместительству).

Маркин Алексей Александрович

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия.

Петрова Вера Евгеньевна

e-mail: rnmntamc@main.vsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент кафедры «Математический и прикладной анализ» ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж, Россия.

Исследование выполнено частично при финансовой поддержке гранта Президента РФ, проект № МД-1803.2019.1 (формулировка постановки задачи), частично при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 19-71-10008 (получение приближения решения в случае малых деформаций).

Поступила 21.11.2020

к цилиндрической системе координат r_0, φ, z_0 . Напряженно-деформированное состояние не зависит от угла φ . Положение точек оболочки, отстающих на расстояние ξ_0 , отсчитываемое вдоль нормали к опорной поверхности вдоль нормали \mathbf{n}_0 , в начальном состоянии определяется в виде

$$\mathbf{x} = (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0) \mathbf{e}_r + \rho_0 \cos \theta_0 \mathbf{e}_z + \xi_0 (\sin \theta_0 \mathbf{e}_r + \cos \theta_0 \mathbf{e}_z) \quad (1)$$

Будем полагать, что толщина оболочки в начальном состоянии постоянна и равна h_0 . Тогда $-\frac{h_0}{2} \leq \xi_0 \leq \frac{h_0}{2}$. Положение тех же материальных точек в деформированном состоянии определяется в виде

$$\mathbf{x} = r(\theta_0) \mathbf{e}_r + z(\theta_0) \mathbf{e}_z + \lambda_3(\theta_0) \xi_0 \mathbf{n} \quad (2)$$

Таким образом, положение материальных точек среды характеризуется функциями $r(\theta_0), z(\theta_0), \lambda_3(\theta_0)$, зависящими от начального угла θ_0 , определяющего положение материальных точек. Закон (2) предполагает выполнение обобщенной гипотезы Киргоффа – точки, лежащие на прямой вдоль начальной нормали \vec{n}_0 , остаются на прямой вдоль текущей нормали \mathbf{n} , определяемой углом $\theta(\theta_0)$: $\mathbf{n} = \cos[\theta(\theta_0)] \mathbf{e}_r + \sin[\theta(\theta_0)] \mathbf{e}_z$. При этом $\lambda_3(\theta_0)$ – относительное удлинение (укорочение) нормальных волокон.

Как известно, [9] аффино́р деформации связывает материальные элементарные векторы в начальном и деформированном состоянии. Элементарный (бесконечно малый) вектор начального состояния имеет вид

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_0} d\theta_0 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_0} d\xi_0 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} d\varphi = \mathbf{e}_1 d\theta_0 + \mathbf{e}_2 d\xi_0 + \mathbf{e}_3 d\varphi \quad (3)$$

где \mathbf{e}_i – векторы-касательные к координатным линиям. Из выражений (1), (3) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\rho_0 + \xi_0) (\cos \theta_0 \mathbf{e}_r - \sin \theta_0 \mathbf{e}_z) = (\rho_0 + \xi_0) \boldsymbol{\tau}_0 \\ \mathbf{e}_2 &= (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0 + \xi_0 \sin \theta_0) \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_3 &= \sin \theta_0 \mathbf{e}_r + \cos \theta_0 \mathbf{e}_z = \mathbf{n}_0 \end{aligned}$$

Поскольку $a_0 \gg h_0$, пренебрегаем слагаемыми, содержащими ξ_0 в выражениях для \mathbf{e}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\simeq \rho_0 \boldsymbol{\tau}_0 \\ \mathbf{e}_2 &\simeq (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0) \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Используя представление отсчетного базиса в виде (4), найдем контравариантные компоненты отсчетного базиса:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)|} = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau}_0 \\ \mathbf{e}^2 &= \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)|} = \frac{1}{a_0 + \rho_0 \sin \theta_0} \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r_0} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}^3 &= \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)|} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (5)$$

Элементарный материальный вектор деформированного состояния представим в виде

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_0} d\theta_0 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_0} d\xi_0.$$

Используя выражение (2), получим следующие представления векторов материального базиса:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_0} \simeq \frac{dr}{d\theta_0} \mathbf{e}_r + \frac{dz}{d\theta_0} \mathbf{e}_z = r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z \\ \mathfrak{D}_2 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \simeq r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = r \mathbf{e}_\varphi \\ \mathfrak{D}_3 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_0} = \lambda_3 \mathbf{n} \end{aligned} \quad (6)$$

где $r' = \frac{dr}{d\theta_0}$, $z' = \frac{dz}{d\theta_0}$. Представим тензор-аффинол Φ с помощью (5) и (6) в следующем виде [9]

$$\Phi = \overset{0}{\nabla} \mathbf{x} = \mathbf{e}^i \mathfrak{D}_i = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau}_0 (r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z) + \frac{r}{r_0} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3 \mathbf{n}_0 \mathbf{n} \quad (7)$$

Из определения меры деформаций Коши-Грина через тензор-аффинол находим ее диадное разложение:

$$\mathbf{G} = \Phi \cdot \Phi^T = \frac{(r')^2 + (z')^2}{\rho_0^2} \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\lambda_3}{\rho_0} [r' (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) + z' (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n})] (\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_0 \boldsymbol{\tau}_0) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3^2 \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0$$

В начальном приближении можно пренебречь сдвиговыми компонентами и принять

$$\mathbf{G} \simeq \frac{(r')^2 + (z')^2}{\rho_0^2} \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau}_0 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3^2 \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0 = \lambda_1^2 \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda_2^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3^2 \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0 \quad (8)$$

В упрощенном представлении (8) $\boldsymbol{\tau}_0$, \mathbf{e}_φ , \mathbf{n}_0 – главные векторы меры Коши-Грина,

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{(r')^2 + (z')^2}}{\rho_0}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{r_0} \quad (9)$$

– относительное удлинение меридионального волокна, относительное удлинение окружного волокна соответственно. Учитывая (8), запишем представления единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$, касательного к меридиану в деформированном состоянии и единичный вектор нормали \mathbf{n} к деформированной поверхности:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \frac{\mathfrak{D}_1}{|\mathfrak{D}_1|} = \frac{(r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z)}{\sqrt{(r')^2 + (z')^2}} = \frac{1}{\rho_0 \lambda_1} \mathfrak{D}_1, \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2}{|\mathfrak{D}_1| |\mathfrak{D}_2|} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 r_0 \rho_0} (r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z) \times r \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\lambda_1 \rho_0} (r' \mathbf{e}_z - z' \mathbf{e}_r) \end{aligned} \quad (10)$$

С учётом данных выражений векторы материального базиса (6) запишем в виде

$$\mathfrak{D}_1 = \lambda_1 \rho_0 \boldsymbol{\tau}; \quad \mathfrak{D}_2 = r \mathbf{e}_\varphi = r_0 \lambda_2 \mathbf{e}_\varphi; \quad \mathfrak{D}_3 = \lambda_3 \mathbf{n} \quad (11)$$

Используя условие $\mathfrak{D}^i \cdot \mathfrak{D}_j = \delta^i_j$, определим векторы контравариантного материального базиса \mathfrak{D}^i из (11):

$$\mathfrak{D}^1 = \frac{\lambda_1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau}; \quad \mathfrak{D}^2 = \frac{\lambda_2}{r_0} \mathbf{e}_\varphi; \quad \mathfrak{D}^3 = \frac{1}{\lambda_3} \mathbf{n} \quad (12)$$

Таким образом, описаны меры деформирования среды.

2. Напряженное состояние и уравнения равновесия Для описания напряженного состояния среды в нелинейной теории упругости могут быть использованы различные тензорные меры. Будем полагать, что напряженное состояние в полутороидальной оболочке описывается тензором истинных напряжений и пренебрегаем сдвиговыми напряжениями. Тогда разложение тензора можно представить в виде

$$\mathbf{S} = s^{11} \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_1 + s^{22} \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_2 + s^{33} \mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_3$$

С учётом (11) последнюю формулу преобразуем последнюю формулу:

$$\mathbf{S} = \sigma_{11} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \sigma_{22} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \sigma_{33} \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad (13)$$

где $\sigma_{11} = \lambda_1^2 \rho_0^2 s^{11}$, $\sigma_{22} = (\lambda_2 r_0)^2 s^{22}$, $\sigma_{33} = \lambda_3^2 s^{33}$. Распределение компонент тензора напряжений по начальным координатам $x^1 = \theta_0$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \xi_0$ должно удовлетворять уравнениям равновесия. Используем смешанную (Лангранжево-Эйлерову) форму условий равновесия [10] при отсутствии массовых сил

$$\exists^i \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x^i} = \mathbf{0}. \quad (14)$$

Полагаем оболочку тонкой: $\frac{h_0}{\rho_0} \ll 1$, а напряженное состояние однородным по толщине. При этом напряжением σ_{33} по сравнению с σ_{11} и σ_{22} пренебрегаем. В условиях равновесия производную от σ_{33} по ξ_0 учитываем. В результате условие равновесия (14) для тензора напряжений (13) примет следующий вид:

$$\exists^1 \cdot \frac{\partial (\sigma_{11} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \sigma_{22} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi)}{\partial \theta_0} + \exists^2 \cdot \frac{\partial (\sigma_{11} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \sigma_{22} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi)}{\partial \varphi} + \exists^3 \cdot \frac{\partial \sigma_{33} \mathbf{n} \mathbf{n}}{\partial \xi_0} = \mathbf{0} \quad (15)$$

Касательный и нормальный векторы к меридианной деформированной поверхности могут быть записаны не только с помощью соотношений (10), но и с помощью угла $\theta(\theta_0)$ в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ \boldsymbol{\tau} &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (16)$$

В (16) угол θ определяется из соотношений (8), (10):

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{r'}{\lambda_1 \rho_0} = \frac{r_0 \lambda_2'}{\rho_0 \lambda_1}, \\ \sin \theta &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{z'}{\lambda_1 \rho_0} \end{aligned} \quad (17)$$

С помощью (17) запишем производные векторов $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{e}_φ , а также угла θ по начальному углу θ_0 , входящие в первое слагаемое (15):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \theta_0} = -(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_z) \theta' \equiv -\theta' \mathbf{n}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta_0} = \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\theta_0} = -\frac{\lambda_1}{z'} \left(\frac{r'}{\lambda_1} \right)' = -\frac{\lambda_1 r_0}{z'} \left(\frac{\lambda_2'}{\lambda_1} \right)' \quad (20)$$

Для второго слагаемого (15) с помощью (10) полезно получить дифференциальные соотношения

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \varphi} = \frac{r'}{\lambda_1 \rho_0} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r = -\cos \theta \boldsymbol{\tau} - \sin \theta \mathbf{n} \quad (22)$$

Раскрывая производные (15) с помощью (18)–(22) и используя выражения вектором взаимного материального базиса (12), получим уравнения равновесия в виде

$$\left(\frac{1}{\lambda_1 \rho_0} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta_0} + \frac{\cos \theta}{\lambda_2 r_0} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \right) \boldsymbol{\tau} + \left(-\frac{\theta'}{\lambda_1 \rho_0} \sigma_{11} - \frac{\sin \theta}{\lambda_2 r_0} \sigma_{22} + \frac{1}{\lambda_3} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_0} \right) \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Приравнивая к нулю компоненты вектора в левой части последнего выражения, получим с учётом (17) уравнения равновесия в координатной форме:

$$r \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta_0} + \frac{\partial r}{\partial \theta_0} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 0 \quad (23)$$

$$\lambda_3 (\theta' r \sigma_{11} + \lambda_1 \rho_0 \sin \theta \sigma_{22}) - \lambda_1 \rho_0 r \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_0} = 0 \quad (24)$$

Если принять материал несжимаемым, относительное удлинение нормальных волокон λ_3 также может быть выражено через функции

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\rho_0 r_0 \cos \theta}{r' r} \quad (25)$$

3. Определяющие соотношения, замкнутая система уравнений Для замыкания системы уравнений (23)–(25) необходимо определить связь между тензором истинных напряжений и соответствующей мерой деформации. Пренебрежем изменением углов между материальными волокнами в процессе деформирования. Тогда из работы [11] следует, что для изотропных несжимаемых материалов в рамках данной постановки можно использовать выражение

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \ln \mathbf{V} + \sigma_0 \mathbf{E}, \quad (26)$$

где \mathbf{V} – правая мера искажения, $\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$. По определению [10],

$$\mathbf{V}^2 = \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}$$

Используем приближенное выражение аффинора, следующее из его представления (7) с учетом формул для λ_i :

$$\boldsymbol{\Phi} \simeq \lambda_1 \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau} + \lambda_2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3 \mathbf{n}_0 \mathbf{n}$$

Тогда

$$\mathbf{V}^2 \simeq \lambda_1^2 \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \lambda_2^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3^2 \mathbf{n} \mathbf{n},$$

откуда

$$\mathbf{V} \simeq \lambda_1 \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \lambda_2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3 \mathbf{n} \mathbf{n}.$$

Тогда из последнего соотношения и (26) получим при условии плоского напряженного состояния, когда $\sigma_{33} = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2G \ln \lambda_1 + \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \sigma_{22} &= 2G \ln \lambda_2 + \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}). \end{aligned}$$

Разрешая данную систему относительно σ_{11} и σ_{22} , получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 4G \ln \lambda_1 - 2G \ln \lambda_2 = 2G (2 \ln \lambda_1 - \ln \lambda_2) \\ \sigma_{22} &= 2G (2 \ln \lambda_2 - \ln \lambda_1) \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, уравнение равновесия (23) вместе с формулировкой компонент напряжений (27) и выражениями (9) для λ_i является уравнение относительно неизвестных функций $r(\theta_0)$, $z(\theta_0)$. Для упрощения уравнения равновесия (24) запишем граничные условия для вектора напряжений на внешней (нормаль \mathbf{n}_0^+) и внутренней (нормаль \mathbf{n}_0^-) поверхностей полутороидальной оболочки:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{n}_0^-) &= P \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\sigma}|_{\xi=-\frac{h_0}{2}} \cdot \mathbf{n}_0^- = -\sigma_{33}|_{\xi=-\frac{h_0}{2}} \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{P}(\mathbf{n}_0^+) &= \mathbf{0} = \sigma_{33}|_{\xi=\frac{h_0}{2}} \mathbf{n}_0 \end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнение (24) по координате ξ_0 от $-\frac{h_0}{2}$ до $\frac{h_0}{2}$. В результате данное уравнение примет следующий вид:

$$\lambda_3 h_0 (\theta_0) (\theta' r \sigma_{11} + \lambda_1 \rho_0 \sin \theta \sigma_{22}) = \lambda_1 \rho_0 r P \quad (28)$$

Уравнения (23), (28), выражения (8), (25) для λ_i с компонентами σ_{ii} (27) образуют замкнутую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $r(\theta_0)$, $z(\theta_0)$. Для решения данной системы используем граничные условия в перемещениях:

$$\begin{aligned} r|_{\theta_0=-\frac{\pi}{2}} &= a_0 - \rho_0, & r|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} &= a_0 + \rho_0, \\ z|_{\theta_0=-\frac{\pi}{2}} &= 0, & z|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

4. Оценка напряженно деформированного состояния оболочки в случае малых деформаций В качестве первого приближения для оценки напряженно-деформированного состояния оболочки используем решение соответствующей задачи в случае малых деформаций. Методом конечных элементов для безразмерной модели с параметрами $P = 0.05$, $a_0 = 1$, $\rho_0 = 0.1$, $h_0 = 0.02$, $G = 0.5$ получен вид деформированного состояния срединной поверхности оболочки. На рисунке 2 представлен

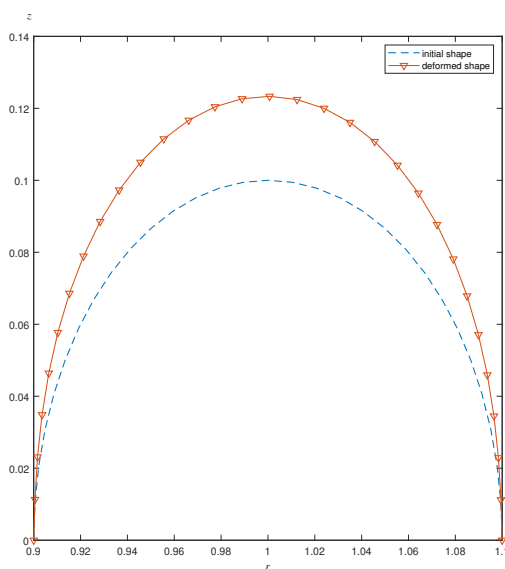


Рис. 2. Деформированный и недеформированный вид сечения оболочки.

деформированный (deformed shape) и недеформированный (initial shape). Данное решение можно использовать в качестве приближения при решении задачи в конечных деформациях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cowley J., Mulholland A., Gachagan A. A. Nonlinear elasticity approach to modelling the collapse of a shelled microbubble // IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications). 2017. no. V(82). p. 781–801.
- [2] Киселев В. В., Долгих Д. В. Влияние жестких связей на изменение формы гидростатически сжатой оболочки // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 3. с. 178–189.
- [3] Жгуты В. М. Нелинейные уравнения равновесия ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 2(12). с. 36–44.

- [4] Jiammeepreecha W., Chucheeprasakul S. Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell // *Thin-Walled Structures*. 2017. no. V(116). p. 12–18.
- [5] Chernyshenko I. S., Maksimiyuk V. A. On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic or-thotropic materials // *International Applied Mechanics*. 2000. no. V(36). P. 90–97.
- [6] Бужков И. А., Лысенко А. В. Особенность осесимметричного деформирования надувной торообразной оболочки при воздействии внешнего давления // *Космонавтика и ракетостроение*. 2014. № 6(79). с. 56–58.
- [7] Buckling characteristics of externally pressurised toroidal shell / Y. Zhu, B. Chen, B. Zhao et al. // *Ships and Offshore Structures*. 2019. no. 15(8). P. 804–814.
- [8] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва: Мир, 1975. 541 с.
- [9] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [10] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: Физматлит, 2013. 320 с.
- [11] Маркин А. А., Христинич Д. В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд., доп. Тула: Издательство ТулГУ, 2007. 92 с.

V. V. Kozlov^{1,2}, A.A. Markin¹, V. E. Petrova³

FORMULATION OF THE PROBLEM OF FINITE DEFORMATIONS OF A SEMI-TOROIDAL SHELL UNDER THE INTERNAL PRESSURE

¹*Tula State University, Tula, Russia*

²*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

³*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

Abstract. A nonlinear elastic axisymmetric model of a semi-toroidal shell fixed at the bases under the internal pressure is considered. An approach to the formulation of measures that determine the stress-strain state of the shell is proposed. For an incompressible material, a closed system of nonlinear ordinary differential equations for unknown functions is obtained. The finite element method is used to estimate the stress-strain state of the shell in the case of small deformations.

Keywords: semi-toroidal shell, nonlinear elasticity, finite element method.

Kozlov Viktor Vyacheslavovich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department «Computational mechanics and mathematics» of Tula State University, Tula, Russia (main place of work). Senior researcher of the department «Computational mechanics» of Lomonosov Moscow State University (part time).

Markin Alexey Alexandrovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department «Computational mechanics and mathematics» of Tula State University, Tula, Russia.

Petrova Vera Evgenievna, doctor of physical and mathematical sciences, associate professor of the department «Mathematical and applied analysis» of Voronezh State University, Voronezh, Russia.

The study was partially supported by a grant from the President of the Russian Federation, project No. MD-1803.2019.1 (formulation of the problem statement), partially with the financial support of a grant from the Russian Science Foundation, project 19-71-10008 (obtaining an approximation of the solution in the case of small deformations).

REFERENCES

- [1] Cowley J., Mulholland A., Gachagan A. A. Nonlinear elasticity approach to modelling the collapse of a shelled microbubble // *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)*. 2017. no. V(82). p. 781–801.
- [2] Kiselev V. V., Dolgikh D. V. Influence of rigid constraints on the deformation of a hydrostatically compressed shell // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. no. 3. P. 178–189. (in Russian).
- [3] Zhgutov V. M. Nonlinear equilibrium equations for ribbed shells with consider various material properties // *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal*. 2010. no. 2(12). P. 36–44. (in Russian).
- [4] Jiammeeprecha W., Chucheepsakul S. Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell // *Thin-Walled Structures*. 2017. no. V(116). p. 12–18.
- [5] Chernyshenko I. S., Maksimyuk V. A. On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic or-thotropic materials // *International Applied Mechanics*. 2000. no. V(36). P. 90–97.
- [6] Buyakov I. A., Lysenko A. V. Feature of an axisymmetric straining inflatable toroidal shell when exposed to an external pressure // *Kosmonavtika i raketostroenie*. 2014. no. 6(79). P. 56–58. (in Russian).
- [7] Buckling characteristics of externally pressurised toroidal shell / Y. Zhu, B. Chen, B. Zhao et al. // *Ships and Offshore Structures*. 2019. no. 15(8). P. 804–814.
- [8] Zienkiewicz O. C. *The finite element method in engineering science*. Moscow: Mir, 1975. 541 p. (in Russian).
- [9] Lurie A. I. *Nonlinear theory of elasticity*. Moscow: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).
- [10] Markin A. A., Sokolova M. Y. *Thermomechanics of elastoplastic deformation*. Moscow: Fizmatlit, 2013. 320 p. (in Russian).
- [11] Markin A. A., Khristich D. V. *Nonlinear theory of elasticity: tutorial, second edition*. Tula: TulGU, 2007. 92 p. (in Russian).

М. И. Быкова¹, Н. Д. Вервейко¹, С. Е. Крупенко¹, А. И. Шашкин¹, С. А. Шашкина²

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛУЧЕВЫМ МЕТОДОМ
ПЕРЕНОСА ИНТЕНСИВНОСТИ ПЕРЕДНИХ КРОМОК
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРЕЩИН
ФРОНТАМИ ПРОДОЛЬНЫХ И СДВИГОВЫХ ВОЛН**

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Воронежский учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия

Аннотация. В ближайшей окрестности вершины плоской трещины, а в общем случае, вблизи передней кромки пространственной трещины, деформирование материала носит неупругий характер. В работе предложено лучевое моделирование высокоскоростного деформирования материала в δ -окрестности подвижной передней кромки трещины, используя динамическую упруговязкопластическую модель тела Бингама с условием пластичности Мизеса. Показано, что распространяющаяся передняя кромка трещины продольного сдвига лежит на поверхности сильного разрыва продольной скорости, бегущей со скоростью упругих продольных волн, а передняя кромка трещины отрыва и трещины поперечного сдвига лежит на поверхности сдвиговой волны, бегущей со скоростью волн сдвига. Введены интенсивности передних кромок трещин: скачок скорости сдвига поперек передней кромки трещины продольного сдвига, скачок поперечной скорости на передней кромке трещины отрыва, скачок касательной скорости к передней кромке трещины поперечного сдвига. Построены обыкновенные дифференциальные уравнения переноса интенсивностей передних кромок трещин вдоль лучей как ортогональных траекторий точек переднего фронта. Получены приближенные решения уравнений переноса интенсивностей передних кромок пространственных трещин в напряженный материал и приведены выражения для глубины проникания пространственных трещин. Показано изменение направления сдвига и отрыва в передних кромках соответствующих трещин в зависимости от напряженного состояния перед трещинами. Приведены графики численных расчетов переноса интенсивностей передних кромок трещин и глубины их проникания.

Ключевые слова: лучевой метод, передняя кромка, пространственная трещина, интенсивность кромки трещины, перенос интенсивности.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.014

УДК: 539.3+539.374

Введение. Сложность математического моделирования явления зарождения и дальнейшего движения пространственных трещин в хрупких материалах обусловлена недостаточностью экспериментальных данных и развитых математических моделей поведения материала в ближайшей окрестности передней кромки трещины [1]. Электронная микроскопия образцов при пластическом деформировании [2] показала сложнейшие процессы скольжения по пленкам боковых поверхностей кристаллов и их агломератов, при котором происходит изменение химических и физических свойств материала. Проведение динамических экспериментов затруднено высокими значениями скоростей распространения трещин и ограниченными величинами геометрических размеров образцов, что ведет к влиянию границ за счет отраженных волн. В [3, 4] приведены оценки величин скоростей распространения вершин трещин, которые оцениваются как близкие к скоростям c_1 и c_2 распространения продольных и сдвиговых упругих волн.

Теоретические постановки задач в перемещениях о движении вершины трещины, как вершины полубесконечного разреза, бегущего с произвольной постоянной скоростью v показали [1], что характерными числами в этих задачах являются скорости упругих продольных c_1 и сдвиговых c_2 волн и волн Релея c_R , так что без внешних границ задачи и внешнего воздействия в области вершины трещины скорость вершины определяется скоростями c_1 , c_2 , c_R .

Анализ кинематики деформирования материала в перемещениях вблизи вершины трещины выявил три основных вида возможного развития трещины — продольный сдвиг, отрыв и поперечный сдвиг по отношению к направлению развития трещины. В рамках упругой модели напряженное состояние в окрестности вершины трещины оценивается как величина $\sigma_r \sim K/\sqrt{r}$, где K — коэффициент интенсивности напряжений; r — расстояние от вершины трещины [3, 4]. Предельное равновесие трещины в окрестности ее вершины исследовалось для определения коэффициента интенсивности напряжений K , исходя из двух критериев: 1) достижения предела прочности на отрыв или сдвиг; 2) равенства потери механической энергии за счет перемещения

© М. И. Быкова, Н. Д. Вервейко, С. Е. Крупенко, А. И. Шашкин, С. А. Шашкина, 2020

Быкова Мария Игоревна

e-mail: bykova_mi@amm.vsu.ru, доцент, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Вервейко Николай Дмитриевич

e-mail: dean@amm.vsu.ru, профессор, доктор технических наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Крупенко Светлана Евгеньевна

e-mail: dean@amm.vsu.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Шашкин Александр Иванович

e-mail: dean@amm.vsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Шашкина Софья Александровна

e-mail: soffia-alex@inbox.ru, доцент, кандидат физико-математических наук, Воронежский учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”, Воронеж, Россия.

Поступила 30.09.2020

вершины трещины на δl расстояние и перетока этой энергии в поверхностную энергию приращенной на δl границы трещины.

В [5, 6] показана эквивалентность этих критериев и это позволяет использовать любой из критериев в качестве определяющего начало движения вершины трещины или передней кромки пространственной трещины.

Для исключения особенности типа $1/\sqrt{r}$ в распределении напряжений в ближайшей окрестности вершины трещины многие авторы [3, 4] использовали классическую модель пластического материала с постоянным пределом пластичности K [5].

Предельное напряженное состояние материала для модели с учетом повреждаемости в малой окрестности вершины трещины исследовано в [8–10] для случая сложного нагружения. Локальные приближения свойств разрушенных материалов приведены в [11]. Исследование статического напряженного состояния в окрестности вершины трещины на модели атомарного взаимодействия приведено в [12]. Авторы работы [13] для анализа напряжений в вершине трехмерной трещины использовали 2-ух масштабные конечные элементы.

Высокая скорость распространения вершины трещины допускает выделение малой окрестности на фронте волн сильного разрыва скоростей и напряжений для описания динамического поведения скоростей и напряжений с использованием аппарата волновой динамики [14–20].

В случае подвижных трещин деформирование в особой точке — вершине трещины — достигает конечных значений за очень малое время, так что скорость деформаций достигает больших значений. Эксперименты по высокоскоростному деформированию материалов показали возрастание предела пластичности с ростом скорости деформирования [6, 15], что позволяет в линейной аппроксимации принять линейный закон роста напряжений от скорости деформирования на пластических деформациях.

Экспериментальные данные и теоретические модели деформирования позволяют сформулировать математическую модель динамического поведения материала в окрестности передней подвижной кромки трещины в виде совокупности динамических уравнений упруговязкопластического деформирования Бингама при условии пластичности Мизеса.

1. Математическая модель пространственного деформирования упруговязкопластического материала в окрестности вершины трещины. Модель (рис. 1) упруговязкопластического материала [7, 8] до достижения условия пластичности Мизеса с пределом пластичности K допускает только упругие деформации, а потом включает в полные деформации еще и пластические деформации с вязким сопротивлением на скоростях пластических деформаций

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 2\mu e_{ij}^p, \quad e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \\ e_{ij}^p = e_{ij}^v, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = \frac{(I_2 - K\sqrt{2})\sigma'_{ij}}{I_2\eta}. \quad (1)$$

Здесь $e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ — полные деформации по Коши; $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$; $I_2 = (\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{1/2}$, где $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ — девиаторные компоненты тензора напряжений σ_{ij} ; λ, μ — упругие параметры Ламе; η — коэффициент вязкости.

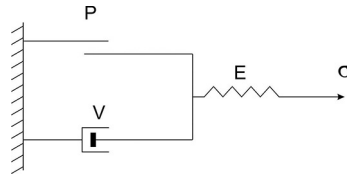


Рис. 1. Схематическое изображение элемента материала Бингама, обладающего упругими, пластическими и вязкими свойствами

Единой кривой “напряжение-деформация” для модели этого материала не существует, а скорость деформирования играет роль параметра динамического упрочнения, что наблюдается при динамических экспериментах, когда с увеличением скорости деформирования динамический предел пластичности возрастает [6].

На рис. 2 представлен трехмерный график в пространстве σ, e, \dot{e} (напряжение, деформация, скорость деформации) возможных кривых σ, e в плоскости σ, e (напряжение, деформация).

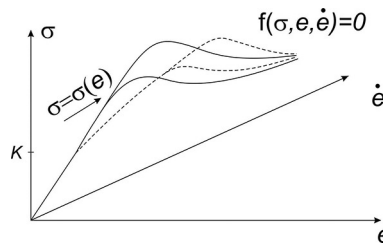


Рис. 2. Схематическое изображение экспериментов динамического нагружения, где в плоскости σ, e наблюдаемая диаграмма динамического нагружения есть проекция конкретной пространственной кривой $f(\sigma, e, \dot{e})$

Реологические уравнения (1) представляют собой систему уравнений, включающую в себя линейные уравнения в частных производных и нелинейные (точнее, полулинейные) уравнения для скоростей $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \partial e_{ij}^p / \partial t$ пластических деформаций. Условие пластичности Мизеса играет роль критерия возникновения скорости пластических деформаций, так что это условие формулируется в виде следующих неравенств:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0, \text{ если } \sigma_{ij}^p \sigma_{ij}^p - 2K^2 < 0; \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p \neq 0, \text{ если } \sigma_{ij}^p \sigma_{ij}^p - 2K^2 \geq 0. \quad (2)$$

Математическая модель динамического деформирования упруговязкопластического материала в окрестности передней кромки трещины отрыва, представленная как полная система уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом функций, определяющих напряженно-деформированное состояние, задается реологическими уравнениями, уравнениями движения в напряжениях

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \quad (3)$$

и уравнением неразрывности $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

Систему уравнений (1–3) рассмотрим в окрестности переднего фронта пластического предвестника трещины.

Запишем систему уравнений (1–3), содержащую частные производные по x и времени t в подвижной системе координат:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial n} n_i + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\delta f}{\delta t} - c \frac{\partial f}{\partial n}, \quad (i = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь $\delta f / \delta t$ — локальная производная по времени t от функции, заданной на подвижной поверхности Σ ; $(\partial x_i / \partial y_\alpha)(\partial x_i / \partial y_\beta) = g^{\alpha\beta}$ — метрический тензор.

Реологические уравнения (1) и уравнения движения в напряжениях (3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - e_{ij}^p), \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = \frac{\delta e_{ij}^p}{\delta t} - c \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} = \frac{I_2 - K\sqrt{2}}{I_2\eta} \sigma'_{ij}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} n_j + \frac{\partial u_j}{\partial n} n_i + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial u_j}{\partial y_\alpha} \right), \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\delta u_i}{\delta t} - c \frac{\partial u_i}{\partial n}, \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \rho \frac{\delta v_i}{\delta t} - c \frac{\partial v_i}{\partial n} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial n} n_j + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_\alpha} + b_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Представление решений для скоростей и напряжений в виде степенного ряда по направлению нормали и в окрестности переднего фронта волнового предвестника трещины

$$f(n, y_1, y_2, t) = \sum \frac{1}{l!} \frac{\partial^l f(0, y_1, y_2, t)}{\partial n^l} n^l \quad (6)$$

относится к классу обобщенных функций, которые не обладают производной по нормали в точке $n = 0$ (рис. 3) и поэтому должны удовлетворять дифференциальным законам (5) в интегральном виде.

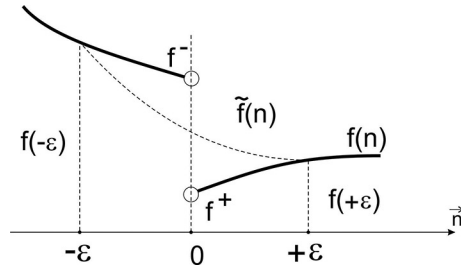


Рис. 3. Схематическое представление обобщенной функции $f(n)$, имеющей разрыв при $n = 0$ ($f(0^+) \neq f(0^-)$), непрерывной функцией $\tilde{f}(n)$ на интервале $n \in [-\varepsilon; +\varepsilon]$

Интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных (5) по n в пределах от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ и переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает следующие уравнения:

$$-\rho c [v_i] = [\sigma_{ij}] n_j, \quad [e_{ij}^p] = 0, \quad \left[\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} \right] \neq 0. \quad (7)$$

Второе уравнение отражает тот физический факт, что на поверхности Σ_δ , предвестника трещины пластические деформации e_{ij}^p непрерывны и зарождается только градиент пластических деформаций:

$$[e_{ij}^p] = 0, \quad \left[\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} \right] \neq 0. \quad (8)$$

Реологические уравнения в (5) и выражения для деформаций e_{ij} и скоростей v_i , взятые в виде разности по значениям входящих величин справа и слева от поверхности предвестника Σ_δ , приводят к следующим выражениям:

$$[\sigma_{ij}] = \lambda[e_{kk}]\delta_{ij} + 2\mu([e_{ij}] - [e_{ij}^p]), \quad [v_i] = \frac{\delta[u_i]}{\delta t} - c \left[\frac{\partial u_i}{\partial n} \right],$$

$$[e_{ij}] = \frac{1}{2} \left([u_{i,j}] + [u_{j,i}] + g^{\alpha\beta} x_{j,\beta} \left[\frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right] + g^{\alpha\beta} x_{i,\beta} \left[\frac{\partial u_j}{\partial y_\alpha} \right] \right). \quad (9)$$

Система уравнений (7–9) является линейной однородной системой алгебраических уравнений для скачков скоростей $[v_i]$, градиентов перемещений $[\partial u_i / \partial n]$, напряжений $[\sigma_{ij}]$, перемещений $[u_i]$ и касательных вдоль y_α градиентов перемещений $[\partial u_i / \partial y_\alpha]$.

Условие непрерывности перемещений вдоль Σ_δ по y_α и условие сплошности материала, отсутствие разрывов перемещений в предвестнике приводят к равенствам

$$\frac{\delta[u_i]}{\delta t} = 0, \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right] = \frac{\partial[u_i]}{\partial y_\alpha} = 0. \quad (10)$$

Исключая $[\sigma_{ij}]$, $[e_{ij}]$, $[u_{i,j}]$, уравнения (9) приводятся к виду

$$\rho c^2 [v_i] = (\lambda + \mu) [v_j] n_i n_j + \mu [v_i]. \quad (11)$$

Существует только два отличных от нуля решения для $[v_i]$:

$$[v_i] n_i = \omega_n \text{ при условии } \rho c_1^2 = \lambda + 2\mu; \quad (12)$$

$$[v_i] \tau_i = \omega_\tau \text{ при условии } \rho c_2^2 = \mu. \quad (13)$$

Допустимые разрывные решения со скачками нормальной компоненты скорости $[v_n] = \omega_n$ на фронте Σ_1 , перемещающемся со скоростью c_1 (рис. 4) и касательной компоненты скорости $[v_\tau] = \omega_\tau$ на фронте Σ_2 , перемещающейся со скоростью c_2 (рис. 5, 6), имеют место в окрестности передней кромки трещины.

Соответствие кинематики перемещений материала в окрестности трещин продольного сдвига, отрыва и антиплоской деформации позволяет построить математическую модель движения материала вблизи кромки пространственной трещины в терминах скоростей перемещений материальных точек среды.

2. Математическая модель передней кромки трещины. Выделим δ -окрестность передней кромки трещины L в форме цилиндра S_δ с криволинейной осью L . Поверхность Σ_δ является поверхностью слабого разрыва, порожденного начальным возмущением при зарождении кромки трещины. Кривую L_δ на Σ_δ будем считать предвестником кромки трещины L .

Рассмотрим след передней кромки трещины на фронте Σ_δ волнового предвестника, который представлен пространственной кривой L_δ , принадлежащей поверхности Σ_δ (рис. 7).

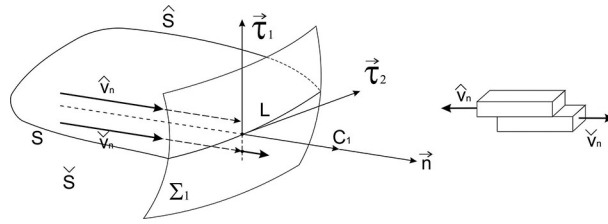


Рис. 4. Изображение поверхности Σ_1 волны продольного к Σ_1 разрыва скорости и напряжения, поверхности S трещины продольного сдвига с передней кромкой L , лежащей на фронте Σ_1 , и поведения материала вблизи вершины трещины продольного сдвига. Знаки \wedge и \vee используются для обозначения значения функций за Σ_δ в точках выше (знак \wedge) или ниже (знак \vee) следа L_δ трещины на Σ_δ для случая трещины L отрыва, поперечного или продольного сдвига.

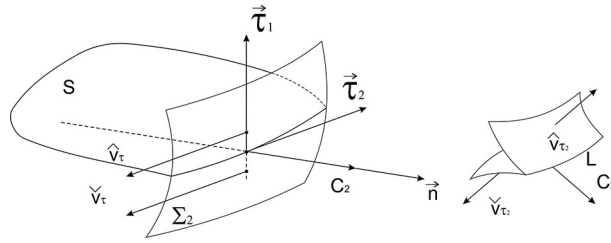


Рис. 5. Изображение поверхности Σ_2 волны разрыва скорости и напряжений, касательных к Σ_2 и L , и поверхности S с передней кромкой L , лежащей на фронте Σ_2 , и поведения материала вблизи вершины трещины антиплоского сдвига

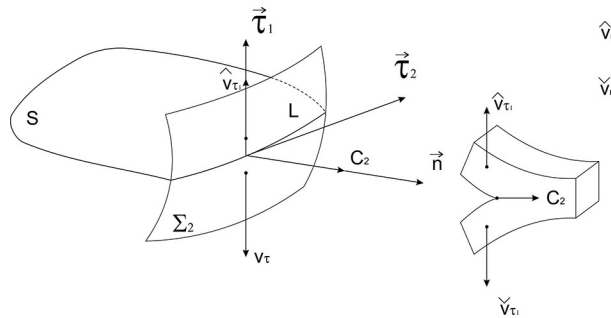


Рис. 6. Изображение поверхности Σ_2 волны разрыва скоростей и напряжений, касательных к Σ_2 , но перпендикулярных к передней кромке трещины L , лежащей на фронте Σ_2 и поведения материала вблизи вершины трещины отрыва

Соответствие кинематики поведения материала вблизи вершины трещины в перемещениях и кинематики поведения материала в окрестности фронтов продольной и сдвиговой волн в скоростях перемещений приводит к заключению:

1) передняя кромка предвестника l_δ пространственной трещины L распространяется как ортогональная траектория лучей волнового фронта Σ_δ с принадлежащей ему

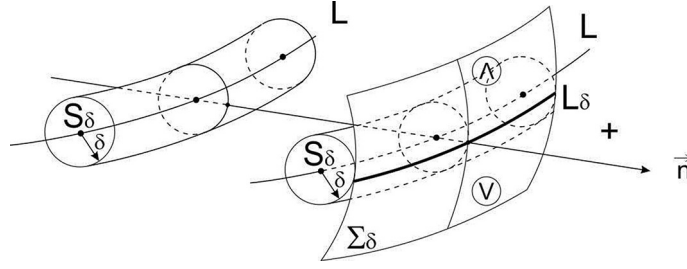


Рис. 7. Схематическое изображение предвестника Σ_δ трещины и следа L_δ трещины на предвестнике.

линией L_δ с разрывами скоростей и напряжений при переходе поперек самой линии на Σ_δ :

— передняя кромка трещины продольного сдвига распространяется со скоростью c_1 волн продольной деформации в упругом теле (рис. 4);

— передняя кромка трещины антипродольного сдвига и трещины отрыва распространяется со скоростью c_2 сдвиговых волн (рис. 5, 6);

2) в качестве интенсивности передних кромок трещин удобно выбрать скачок скорости на поверхности Σ_δ при переходе через переднюю кромку L_δ трещины S :

— для трещины продольного сдвига на Σ_1 (рис. 4)

$$\omega_{nL} = (\hat{v}_n - \check{v}_n)|_L = [v_n]_L; \quad (14)$$

— для трещины антиплоского сдвига на Σ_2 (рис. 5)

$$\omega_{2L} = (\hat{v}_{\tau_2} - \check{v}_{\tau_2})|_L = [v_{\tau_2}]_L; \quad (15)$$

— для трещины отрыва на Σ_2 (рис. 6)

$$\omega_{1L} = (\hat{v}_{\tau_1} - \check{v}_{\tau_1})|_L = [v_{\tau_1}]_L. \quad (16)$$

Таким образом, тип трещины определяется видом предвестника Σ_1 или Σ_2 , а само существование передней кромки определяется интенсивностью переднего фронта — превышением динамического второго инварианта девиатора тензора напряжений над статическим пределом пластичности K : $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \geq K^2$ в области за предвестниками Σ_1 и Σ_2 .

3. Упруговязкопластическое деформирование материала в окрестности передней кромки трещины. Введем сильные разрывы скоростей и напряжений на кривой L , принадлежащей волновой поверхности Σ .

Линейные уравнения для скоростей и напряжений при переходе через поверхности

$$c[\sigma_{ij}] = -\lambda[v_k]n_k\delta_{ij} - \mu([v_i]n_j + [v_j]n_i), \quad (17)$$

$$\rho c[v_i] = -[\sigma_{ij}]n_j \quad (18)$$

получены в предположении наличия тонкого переходного слоя поперек поверхности Σ толщиной h для быстроменяющихся функций вдоль нормали \bar{n} при $h \rightarrow 0$ [10, 11]. Допустимо не только гладкое изменение функций вдоль поверхности Σ , но и разрывное поведение с наличием разрывов первого рода конечной величины.

Введем разрывы функций на кривой $L \in \Sigma$ (рис. 3), используя выражения

$$\begin{aligned} \hat{f}^- &= \hat{v}^+ - [\hat{f}], & \check{f}^- &= \check{f}^+ - [\check{f}], & \hat{f}^+ &= \check{f}^+, \\ [f]_l &= \hat{f}^- - \check{f}^- = \hat{f}^+ - [\hat{f}] - \check{f}^+ + [\check{f}] = -[\hat{f}] + [\check{f}]. \end{aligned} \quad (19)$$

Производя вычитание уравнений (17), (18), взятых выше L и ниже L , получим

$$c[\sigma_{ij}]_L = -\lambda[v_k]_L n_k \delta_{ij} - \mu([v_i]_L n_j + [v_j]_L n_i), \quad \rho c[v_i]_L = -[\sigma_{ij}]_L n_j. \quad (20)$$

Из последних уравнений для скачков скоростей и напряжений на линии L следует, что таких подвижных поверхностей Σ с линией L существует две (Σ_1 и Σ_2), распространяющихся со скоростями: c_1 — для продольных волн ($\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu$); c_2 — для сдвиговых волн ($\rho c_2^2 = \mu$). На этих поверхностях (рис. 4, 5, 6) возможны разрывы продольных вдоль \bar{n} скачков скоростей на L $\rho c_1[v_n]_L = -[\sigma_{nn}]_L$ и разрывы поперечных относительно нормали \bar{n} скачков скоростей на L $\rho c_2[v_\tau]_L = -[\sigma_{n\tau}]_L$.

Разрывы продольных скоростей $[v_n]$ на передней кромке L трещины продольного сдвига, принадлежащей поверхности Σ_1 (рис. 4), при переходе через предвестник трещины L_δ , распространяются со скоростью продольных волн.

Разрывы касательной к поверхности Σ_2 скорости $[v_\tau]_L$ имеют две проекции на векторы $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ (рис. 4) и могут реализоваться три случая:

- 1) наличие только одной компоненты разрыва касательной к L скорости $[v_{\tau_1}]_L \neq 0$ на передней кромке L_δ трещины поперечного сдвига;
- 2) наличие только одной компоненты разрыва касательной к Σ_2 скорости $[v_{\tau_2}]_L$, ортогональной к L , на передней кромке трещины отрыва;
- 3) наличие произвольного разрыва $[v_\tau]_L$ по отношению к передней кромке L_δ предвестника трещины говорит о том, что передняя кромка L_δ такой трещины несет за собой деформации сдвига и отрыва при условии одновременного превышения предела прочности на сдвиг и на отрыв.

4. Дифференциальные уравнения переноса интенсивностей ω_n и ω_τ продольных и сдвиговых волн сильного разрыва. Систему уравнений (5), в которой дифференцирование по декартовым координатам x_i заменено производными по нормали \bar{n} к Σ_δ и криволинейным координатам (y_1, y_2) , а также выделена локальная производная по времени $\delta/\delta t$, запишем в виде разности уравнений справа “+” и слева “-” на поверхности Σ :

$$[\sigma_{ij,n}]n_j + g^{\alpha\beta}[\sigma_{ij},\alpha x_{j,\beta}] = -\rho c[v_{i,n}] + \rho \frac{\delta[v_i]}{\delta t}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} c[\sigma_{ij,n}] + \frac{\delta[\sigma_{ij}]}{\delta t} &= \lambda \left([v_{k,n}]n_k + g^{\alpha\beta}[v_n,\alpha x_{k,\beta}] \right) \delta_{ij} + \\ &+ \mu \left([v_{i,n}]n_j + [v_{j,n}]n_i + g^{\alpha\beta}([v_i,\alpha x_{j,\beta}] + [v_j,\alpha x_{i,\beta}]) \right) - 2\mu[\varepsilon_{ij}^p]. \end{aligned} \quad (22)$$

Система линейных алгебраических уравнений для $[\sigma_{ij,n}]$ и $[v_{i,n}]$ упрощается до трех уравнений для $[v_{i,n}]$ путем исключения $[\sigma_{ij,n}]$:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)[v_{k,n}]n_k n_i + (\mu - \rho c^2)[v_{i,n}] + \rho c \frac{\delta[v_i]}{\delta t} - \frac{\delta[\sigma_{ij}]}{\delta t} n_j &= \\ = 2\mu[\varepsilon_{ij}^p]n_j - c g^{\alpha\beta}[\sigma_{ij},\alpha x_{j,\beta}] - \lambda g^{\alpha\beta}[v_j,\alpha x_{j,\beta}]n_j, & \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (23)$$

где $[\sigma_{ij}]$ известно через v_k из (17).

Система трех уравнений (23) для $[v_{i,n}]$ вырождается в двух случаях:

- 1) $\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu$ при $[v_{k,n}]n_k = [v_{n,n}] \neq 0$;
- 2) $\rho c_2^2 = \mu$ при $[v_{\tau,n}] \neq 0$.

Условия совместности уравнений (23) дают уравнения переноса скачков скорости $[v_k]n_k = \omega_n$ и $[v_k]\tau_k = \omega_\tau$ на фронтах продольных и сдвиговых волн соответственно. Получим проекцию уравнений (23) на нормаль \bar{n} к Σ_δ и на касательное направление $\bar{\tau}$ к Σ_δ , умножая уравнение (23) на вектор нормали и на касательный вектор соответственно:

$$\rho c_1 \frac{\delta \omega_n}{\delta t} = (\lambda + 2\mu)\Omega \omega_n + \mu[\varepsilon_{ij}^p]n_i n_j, \quad (24)$$

$$\rho c_2 \frac{\delta \omega_\tau}{\delta t} = \mu\Omega \omega_\tau + \mu[\varepsilon_{ij}^p]n_i \tau_j. \quad (25)$$

Здесь $\Omega = (1/\rho_1 + 1/\rho_2)/2$ — средняя кривизна поверхности Σ_δ ; ρ_1 и ρ_2 — главные кривизны Σ_δ в текущий момент времени.

Уравнения (24), (25) могут быть представлены дифференциальными уравнениями по времени в следующем виде для проекций $[v_i]$:

$$\text{на } \Sigma_1: \quad [v_i] = \omega_n n_i \quad \text{и} \quad \frac{\delta [v_i]}{\delta t} = c_1 \Omega [v_i] + \frac{c_2^2}{c_1} [\varepsilon_{nn}^p] n_i; \quad (26)$$

$$\text{на } \Sigma_2: \quad [v_i] = \omega_\tau \tau_i \quad \text{и} \quad \frac{\delta [v_i]}{\delta t} = c_2 \Omega [v_i] + c_2 \left([\varepsilon_{ij}^p] n_j - [\varepsilon_{pq}] n_p n_q n_i \right), \quad (27)$$

а также в форме обыкновенного дифференциального уравнения по пройденному расстоянию s ($s = ct$):

$$\frac{\delta [v_i]}{\delta s} = \Omega [v_i] + \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 [\varepsilon_{ij}^p] n_j \quad \text{на } \Sigma_1, \quad (28)$$

$$\frac{\delta [v_i]}{\delta s} = \Omega [v_i] + [\varepsilon_{ij}^p] n_j - [\varepsilon_{kq}^p] n_k n_q n_i \quad \text{на } \Sigma_2. \quad (29)$$

5. Дифференциальные уравнения переноса интенсивностей предвестников передних кромок трещин. Дифференциальные уравнения переноса интенсивностей $[v_i]_L$ и $[\sigma_{ij}]_L n_j$ предвестников передних кромок трещин получаются из уравнений (28), (29) переноса интенсивностей поверхностей Σ_1 и Σ_2 сильного разрыва скоростей $[v_i]$ и напряжений $[\sigma_{ij}] n_j$, взятых в виде их разности при переходе через кромку L :

$$\frac{\delta [v_i]_L}{\delta s} - \Omega [v_i] = \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 [\varepsilon_{ij}^p]_L n_j \quad \text{на } \Sigma_1, \quad (30)$$

$$\frac{\delta [v_i]_L}{\delta s} - \Omega [v_i]_L = [\varepsilon_{ij}^p]_L n_j - [\varepsilon_{kq}^p]_L n_k n_q n_i \quad \text{на } \Sigma_2. \quad (31)$$

Здесь

$$[v_i]_L = [\check{v}_i] - [\hat{v}_i], \quad [\varepsilon_{ij}^p]_L = \frac{[\check{I}_2] - K\sqrt{2}}{[\check{I}_2]\eta} [\check{\sigma}_{ij}] - \frac{[\hat{I}_2] - K\sqrt{2}}{[\hat{I}_2]\eta} [\hat{\sigma}_{ij}],$$

$$I_2 = (\sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{1/2}, \quad [\hat{I}_2] = (\sigma'_{ij}{}^+ \sigma'_{ij}{}^+)^{1/2} - (\hat{\sigma}'_{ij} \hat{\sigma}'_{ij})^{1/2}, \quad [\check{I}_2] = (\sigma'_{ij}{}^- \sigma'_{ij}{}^-)^{1/2} - (\check{\sigma}'_{ij} \check{\sigma}'_{ij})^{1/2}.$$

Вектор $[v_i]_L$ интенсивности кромки трещины продольного сдвига направлен по направлению нормали \bar{n} и имеет модуль $[v_i]_L n_i = [v_n]_L$, который изменяется с пройденным расстоянием $s = c_1 t$. Скалярное уравнение (30) для $[v_i]_L$ примет вид

$$\frac{\delta[v_n]_L}{\delta s} - \Omega[v_n]_L = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 [\varepsilon_{nn}^p]_L. \quad (32)$$

Вектор $[v_i]_L$ интенсивности кромки трещины отрыва и трещины поперечного сдвига в процессе движения может изменять свой модуль $[v_i]_L \tau_i = [v_\tau]_L$, удовлетворяя уравнению (33) вдоль $s = c_2 t$:

$$\frac{\delta[v_\tau]_L}{\delta s} - \Omega[v_\tau]_L = [\varepsilon_{n\tau}^p]_L. \quad (33)$$

Направление θ вектора скорости $[v_\tau]_L \tau_i$ (рис. 7) относительно касательного напряжения $\sigma_{n\tau}^+$ перед фронтом Σ_2 определяется уравнением

$$\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta s} - \Omega\bar{\theta} = \frac{[\varepsilon_{n\tau}^p]_L \sigma_{n\tau}^+}{|\sigma_{n\tau}^+| [v_\tau]_L}, \quad (34)$$

здесь

$$\bar{\theta} = \cos \theta = \frac{\sigma_{n\tau}^+ [v_\tau]_L}{|\sigma_{n\tau}^+| [v_\tau]_L}.$$

Изменение направления вектора $[v_i]_L$ скачка скорости на кромке трещины отрыва или трещины антипродольного сдвига может иметь место в двух случаях:

1) изменение направления $[v_i]_L$ на кромке ведет к повороту кромки трещины вокруг нормали \bar{n} к Σ_2 , то есть к повороту плоскости трещины вблизи ее нормали \bar{n} так, что кромка трещины ограничивает пространственную поверхность отрыва или поперечного сдвига;

2) изменение направления $[v_i]_L$ на кромке трещины при неизменном направлении самой кромки возможно при достижении в окрестности кромки предела пластичности на сдвиг и предела прочности на отрыв одновременно.

6. Затухание интенсивности передних развертывающихся кромок трещин. Для решения уравнений (32), (33) переноса интенсивности $[v_i]$ передних кромок трещин конкретизируем выражения $[\varepsilon_{nn}^p]$ на $L \in \Sigma_1$ и $[\varepsilon_{n\tau}^p]$ на $L \in \Sigma_2$, используя выражение (1) для ε_{ij}^p .

Вычислим $[\varepsilon_{nn}^p]$ на $L \in \Sigma_1$:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{nn}^p] &= [\check{\varepsilon}_{nn}^p] - [\hat{\varepsilon}_{nn}^p] = \\ &= \frac{1}{\eta[\hat{I}_2][\check{I}_2]} \left(([\hat{I}_2][\check{I}_2] - K\sqrt{2}[\check{I}_2])[\check{\varepsilon}_{nn}] - ([\check{I}_2][\hat{I}_2] - K\sqrt{2}[\hat{I}_2])[\hat{\varepsilon}_{nn}] \right) = \\ &= \frac{1}{\eta} [\sigma_{nn}]_L + \frac{K\sqrt{2}}{\eta} \rho c_1 \left(\frac{[\hat{v}_n]}{[\hat{I}_2]} - \frac{[\check{v}_n]}{[\check{I}_2]} \right), \quad (35) \end{aligned}$$

где

$$[I_2] = \left(\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} + 4\mu \frac{[v_n]}{c_1} \sigma'_{nn} + \frac{8}{3} \mu^2 \left(\frac{[v_n]}{c_1} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad [\sigma_{nn}]_L = \rho c_1 [v_n]_L.$$

Для случая сильно напряженного материала перед кромкой трещины продольного сдвига в линейном приближении по $[v_n]$ имеем

$$[\varepsilon_{nn}^p] \approx \frac{\rho c_1 [v_n]_L}{\eta} \left(1 - \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma_{ij}'^+ \sigma_{ij}'^+}} \right). \quad (36)$$

Для случая слабо напряженного материала перед кромкой трещины продольного сдвига имеем

$$\sigma_{ij}'^+ \approx 0, \quad [\varepsilon_{nn}^p]_L \approx \frac{\rho c_1 [v_n]_L}{\eta}. \quad (37)$$

Вычислим $[\varepsilon_{n\tau}^p]_L$ на $L \in \Sigma_2$:

$$[\varepsilon_{n\tau}^p] = [\tilde{\varepsilon}_{n\tau}^p] - [\hat{\varepsilon}_{n\tau}^p] = \frac{\rho c_2}{\eta} \left([v_\tau] + K\sqrt{2} \left(\frac{[\hat{v}_\tau]}{[\hat{I}_2]} - \frac{[\check{v}_\tau]}{[\check{I}_2]} \right)^2 \right). \quad (38)$$

Линейную аппроксимацию скачка $[\varepsilon_{n\tau}]_L$ пластических деформаций на кромке трещины отрыва или трещины поперечного сдвига построим для двух случаев:

1) в случае сильно напряженного материала перед кромкой трещины:

$$[\varepsilon_{n\tau}^p]_L \approx \frac{\rho c_2 [v_\tau]_L}{\eta} \left(1 - \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma_{ij}'^+ \sigma_{ij}'^+}} \right); \quad (39)$$

2) в случае слабо напряженного материала перед $L \in \Sigma_2$:

$$[\varepsilon_{n\tau}^p]_L \approx \frac{\rho c_2}{\eta} [v_\tau]_L. \quad (40)$$

В предельных случаях распространения передних кромок трещин сдвига и отрыва уравнения (32), (33) принимают линейный вид:

$$\frac{\delta y}{\delta s} - Ay = 0. \quad (41)$$

6.1. Случай пластически деформируемого материала ($\sigma_{ij}'^+ \sigma_{ij}'^+ \geq 2k^2$) перед кромкой трещины продольного сдвига. Выражение для A перед кромкой трещины продольного сдвига имеет вид

$$A = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta_0} + \frac{1}{\rho_0 + s} \right) + \tilde{c}^2 \frac{\rho c_1}{\eta} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma_{ij}'^+ \sigma_{ij}'^+}} \right). \quad (42)$$

Перед кромкой трещины отрыва или поперечного сдвига выражения для A имеет вид

$$A = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta_0} + \frac{1}{\rho_0 + s} \right) + \frac{\rho c_2}{\eta} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{I_2'^+}} \right). \quad (43)$$

Решение дифференциального уравнения (41) при начальных условиях $y = y_0$ при $s = 0$ для случая кромок продольного сдвига и отрыва дает

$$\omega_{nL} = \omega_{nL}^0 \left(1 + \frac{s}{\rho_0} \right)^{-1/2} \exp \left(- \left(\frac{1}{2\delta_0} + \tilde{c}^2 \frac{\rho c_1}{\eta} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{I_2'^+}} \right) \right) s \right), \quad (s \geq 2\delta_0), \quad (44)$$

$$\omega_{\tau L} = \omega_{\tau L}^0 \left(1 + \frac{s}{\rho_0}\right)^{-1/2} \exp\left(-\left(\frac{1}{2\delta_0} + \frac{\rho c_2}{\eta} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{I_2^{'+}}}\right) s\right)\right). \quad (45)$$

Графики, приведенные на рис. 8, 9, отражают факт уменьшения относительной интенсивности $\omega_{\tau L}/\omega_{\tau L}^0$ от пройденного кромкой трещины расстояния S и усиление затухания при увеличении интенсивности $I_2^{'+}$ напряжений перед фронтом трещины.

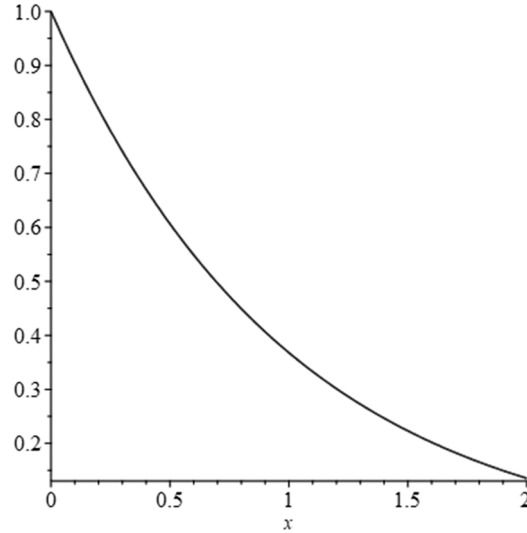


Рис. 8. Графическое изображение изменения относительной интенсивности $y = \omega/\omega_0$ плоских ($\rho_0 \rightarrow \infty$) передних кромок трещин отрыва и сдвига при их распространении в пластически деформируемый материал ($s_{ij}^{'+} s_{ij}^{'+} - 2k^2 = \Delta > 0$)

6.2. Случай упругого деформирования материала ($s_{ij}^{'+} s_{ij}^{'+} < 2k^2$) перед передней кромкой трещин. Имеем следующие закономерности: для трещины продольного сдвига

$$\omega_{nL} = \omega_{nL}^0 \left(1 + \frac{s}{\rho_0}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{s}{2\delta_0}\right), \quad (46)$$

для трещин отрыва и поперечного сдвига

$$\omega_{\tau L} = \omega_{\tau L}^0 \left(1 + \frac{s}{\rho_0}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{s}{2\delta_0}\right). \quad (47)$$

Построенные выражения затухания интенсивностей передних кромок трещин (44)–(47) отражают факты убывания интенсивности по законам геометрической акустики $(1 + s/\rho_0)^{-1/2}$ и экспоненциальному за счет работы сил вязкости, превышающих статический предел пластичности $(1 - k\sqrt{2}/\sqrt{I_2^{'+}})$, на пластических деформациях.

Глубина S^* проникания передних кромок трещин в материал может быть оценена как расстояние S^* , на котором относительная интенсивность передних кромок трещин $\omega_L/\omega_0|_{S^*}$ принимает значение равное нулю ($\omega_L/\omega_0|_{S^*} = 0$) (рис. 9, 10). Это означает отсутствие скачка скорости при переходе через переднюю кромку L трещины.

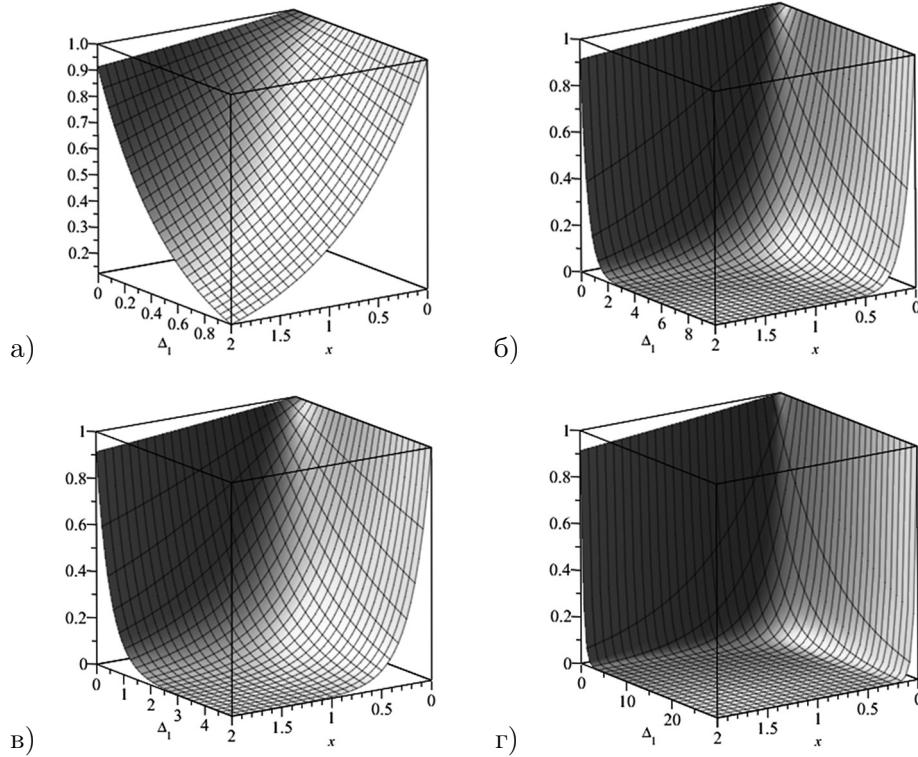


Рис. 9. Графическое изображение изменения относительной интенсивности $y = \omega/\omega_0$ передних кромок трещин отрыва и сдвига при их распространении в пластически деформируемом материале в зависимости от интенсивности пластического деформирования $\Delta = 1 - K\sqrt{2}/\sqrt{I_2^+}$ для различных значений $\Delta_1 = (\rho c/\eta)\Delta$

Заключение. Использование модели Бингама с условием пластичности Мизеса упруговязкопластического поведения деформируемого материала для описания деформированного состояния среды в окрестности подвижной передней кромки пространственной трещины позволяет сделать следующие выводы:

1) задача исследования неупругого деформирования среды в окрестности подвижной передней кромки трещины рассматривается в терминах напряжений и скоростей перемещения материальных точек среды;

2) передняя кромка распространяющейся трещины рассматривается как пространственная кривая, при переходе через которую поперек локальной плоскости трещины имеет место разрыв скорости;

3) передняя кромка распространяющейся трещины принадлежит поверхностям разрыва скоростей и напряжений, распространяющихся со скоростями упругих продольных и сдвиговых волн и допускает разрывы скоростей и напряжений, продольных вдоль кромки и нормальных к ней;

4) передняя кромка трещины продольного сдвига принадлежит фронту продольной волны и распространяется вместе с фронтом со скоростью продольных упругих волн;

5) передняя кромка трещин отрыва и поперечного сдвига лежит на фронте сдвиговых волн и распространяется вместе с фронтом;

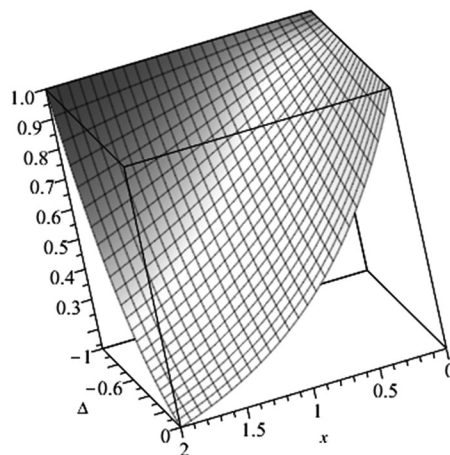


Рис. 10. Графическое изображение изменения относительной интенсивности $y = \omega/\omega_0$ переднего фронта прямолинейных трещин отражает факт сохранения величины $y = 1$ ($\omega = \omega_0$) при распространении в упруго деформируемый материал

6) наряду с распространением передних кромок трещин отрыва и поперечного сдвига допустимо также распространение передней кромки трещины, за которой осуществляется одновременно отрыв и поперечный сдвиг;

7) интенсивность передней кромки трещины как скалярная величина разности скоростей поперек передней кромки трещины, в процессе ее распространения, изменяется по законам геометрической оптики и затухает одновременно за счет работы на пластических деформациях;

8) глубина проникания пространственной трещины определяется как расстояние, на котором интенсивность трещины падает до нуля.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
- [2] Иевлев В.М. Структура поверхностей раздела в пленках металлов. М.: Металлургия, 1992. 172 с.
- [3] Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
- [4] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, физ.-мат. лит., 1985.
- [5] Ивлев Д.Д. Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2005. 357 с.
- [6] Rice J., Druccer D. Energy changes in stressed bodies due to void and crack growth // IJFM. 1967. Т. 3, N 1.
- [7] Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение. 1975. Т. 2. С. 204–235.
- [8] Stepanova L.V., Igonin S.A. Asymptotics of the near-crack-tip stress field of a growing fatigue crack in damaged materials: Numerical experiment and analytical solution // Numerical Analysis and Applications. 2015. N. 8(2). Pp. 168–181.
- [9] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stresses-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014. N. 55(5). Pp. 885–895.
- [10] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress condition // PNRPU Mechanics Bulletin. 2014. N. 3. Pp. 129–162.
- [11] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // Material Science and Engineering R. 2014. N. 75. Pp. 1–48.

-
- [12] Gao Y.J., Deng Q.Q., Hnang L.Y., Wen Z.C., Luo Zhi.R. Atomistic modeling for mechanism of crack cleavage extension on nano-scale // *Computational Materials Science*. 2017. N. 130. Pp. 64–75.
- [13] Pierres E., Baicetto V.C., Gravonil A. A two-scale extended finite element method for modeling 3D crack growth with interfacial contact // *Compute. Math. Appl. Mech. and Eng.* 2010. N 17. 20 pp.
- [14] Кукуджанов В.Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформирования. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
- [15] Ивлев Д.Д. Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2005. 357 с.
- [16] Вервейко Н.Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1997. 204 с.
- [17] Вервейко Н.Д., Шашкин А.И., Крупенко С.Е. Зарождение и движение вершин трещин за фронтами упруговязкопластических волн. Воронеж: Кварта, 2017. 124 с.
- [18] Verveiko N.D., Shashkin A.I., Krupenko S.E. Mathematical modeling of the propagations of precursors of the front edges of crack as spatial curves on the fronts of waves of a strong discontinuity of rates and stresses // *Journals of Physics: Conference Series*. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012033>.
- [19] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.

M. I. Bykova, N. D. Verveiko, S. E. Krupenko, A. I. Shashkin, S. A. Shashkina

**MATHEMATICAL MODELING OF TRANSFER INTENSIVE OF EDGES
OF SPATIAL CRACKS ON THE FRONTS OF LONGITUDINAL
AND SHEAR WAVES BY A RAY METHOD**

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Federal State Public Military Educational Institution of Higher Professional Education

*“Military Training and Research Center of the Air Force “The Air Force Academy
named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia*

Abstract. In the near neighborhood of the top of the plane crack, and in General, in the space case, near the edge of the spatial crack, the deformations of the material have the inelastic character. In this article proposes the elasticviscoplastic model of the Bingham body with the condition of plasticity of Mises for modeling high velocity deformation material near of the top of crack. Shown that an edge of crack belong a surface of elastic wave: cracks of longitudinal shear belong of longitudinal wave and a crack of untiplane shear and avulsion belong a surface of shear wave. For intensity of the crack suggest a shock velocity on the curve of the edge of crack and made ordinary differential equation for transfer intensity of crack on the front of the wave. Shown that a distant of propagation edge of the crack depend from plastic deformation material on the front of the wave. In the process of propagation crack this direction of shear can change from a stresses in front of the wave. Three-D graphics show change intensity of the crack in a process of propagation from parameters.

Keywords: ray method, leading edge, spatial crack, crack edge intensity, intensity transfer.

REFERENCES

- [1] Kachanov L.M. Fundamentals of the mechanics of destruction. M.: Science, 1974. 312 p.
- [2] Ievlev V.M. The structure of the interface in metal films. M.: Metallurgy, 1992. 172 p.
- [3] Parton V.Z., Boriskovsky V.G. Dynamics of brittle fracture. M.: Mechanical engineering, 1988. 240 p.
- [4] Parton V.Z., Morozov E.M. Mechanics of Elasto-Plastic Destruction. M.: Science, Phys. lit., 1985.
- [5] Ivlev D.D. Theory of limit state and ideal plasticity: selected works. Voronezh: Voronezh State University, 2005. 357 p.

Bykova Marya Igorevna

e-mail: bykova_mi@amm.vsu.ru, Assistant Professor, Ph. D. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Verveiko Nikolay Dmitrievitch

e-mail: dean@amm.vsu.ru, Professor, D. Sc. Tech., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Krupenko Svetlana Evgenjevna

e-mail: dean@amm.vsu.ru, Graduate Student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Shashkin Alexandr Ivanovitch

e-mail: dean@amm.vsu.ru, Professor, D. Sc. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Shashkina Sofya Alexandrovna

e-mail: soffia-alex@inbox.ru, Assistant Professor, Ph. D. Phys. & Math., Federal State Public Military Educational Institution of Higher Professional Education “Military Training and Research Center of the Air Force “The Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia.

- [6] Rice J., Druccer D. Energy chances in stressed bodies due to void and crack growth // *IJFM*. 1967. V. 3, No. 1.
- [7] Rice J. Mathematical methods in the mechanics of destruction // *Destruction*. 1975. V. 2. Pp. 204–235.
- [8] Stepanova L.V., Igonin S.A. Asymptotics of the near-crack-tip stress field of a growing fatigue crack in damaged matireals: Numerical experiment and analytical solution // *Numerical Analysis and Applications*. 2015. N. 8(2). Pp. 168–181.
- [9] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stresses-strain state in the vicinity of a crack tip under nixed loading // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. N. 55(5). Pp. 885–895.
- [10] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress condition // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. N. 3. Pp. 129–162.
- [11] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasibrittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // *Material Science and Engineering R*. 2014. N. 75. Pp. 1–48.
- [12] Gao Y.J., Deng Q.Q., Hnang L.Y., Wen Z.C., Luo Zhi.R. Atomistic modeling for mechanism of crack cleavage extension on nano-scale // *Computational Materials Science*. 2017. N. 130. Pp. 64–75.
- [13] Pierres E., Baiccto V.C., Gravonil A. A two-scale extended finite element method for modeling 3D crack growth with interfacial contact // *Compute Math. Appl. Mech and Eing*. 2010. No. 17. 20 pp.
- [14] Kukudzhyanov V.N. Propagation of elastoplastic waves in a rod taking into account the influence of the strain rate. M.: VTs AN SSSR, 1967. 48 p.
- [15] Ivlev D.D. Theory of limit state and ideal plasticity: selected works. Voronezh: Voronezh State University, 2005. 357 p.
- [16] Verveiko N.D. Radiation theory of elastic-viscoplastic waves and waves of hydroblow. Voronezh: Voronezh State University, 1997. 204 p.
- [17] Verveiko N.D., Shashkin A.I., Krupenko S.E. Origin and motion of crack tops behind the fronts of elastic-viscoplastic waves. Voronezh: Kvarta, 2017. 124 p.
- [18] Verveiko N.D., Shashkin A.I., Krupenko S.E. Mathematical modeling of the propagations of precursors of the front edges of crack as spatial curves on the fronts of waves of a strong discontinuity of rates and stresses // *Journals of Physics: Conference Series*. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012033>.
- [19] Thomas T. Plastic flow and destruction in solids. M.: Mir, 1964. 308 p.

С. В. Матвеев¹, А. Н. Матвеева²

ДВУОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ УСЛОВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ

¹ Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

² Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматривается задача определения компонент напряжения при двуосном растяжении тонкой пластины из упругопластического материала. Пластина ослаблена круговым отверстием. В задаче рассматривается случай сопротивления отрыву, $\sigma_1 = \sigma_2 = p$, $\sigma_3 < p$, $p = const$. Решение ищется методом разложения по малому параметру, аналогично работам [1–4]. В работе были получены выражения для определения компонент напряжения в упругой и пластической областях в первом приближении.

Ключевые слова: сопротивление отрыву, упругость, пластичность, линеаризация, напряжение.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.015

УДК: 539.374

Предельное состояние тел при отрыве имеет место при достижении одним или двумя главными напряжениями некоторого предельного значения. Полное предельное (статически определяемое) состояние материала при отрыве достигается в случаях

$$\sigma_1 = \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 < p, \quad (1)$$

$$\sigma_3 = p, \quad \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3, \quad p = const. \quad (2)$$

Д.Д. Ивлевым в работе (5) был рассмотрен случай (1). Отрыв, происходящий при выполнении условий (2) был рассмотрен в работе [5].

© Матвеев С. В., Матвеева А. Н., 2020

Матвеев Сергей Владимирович

e-mail: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матвеева Алёна Николаевна

e-mail: goshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Поступила 01.10.2020

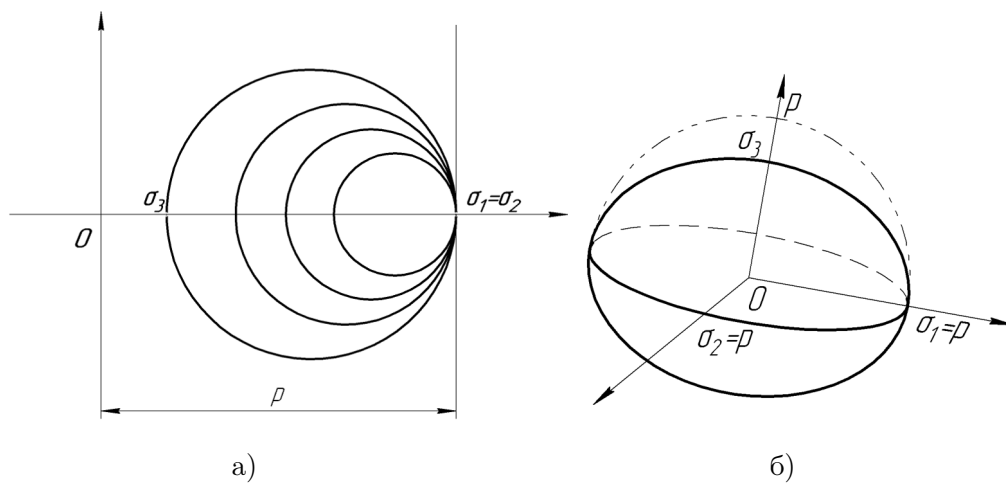


Рис. 1.

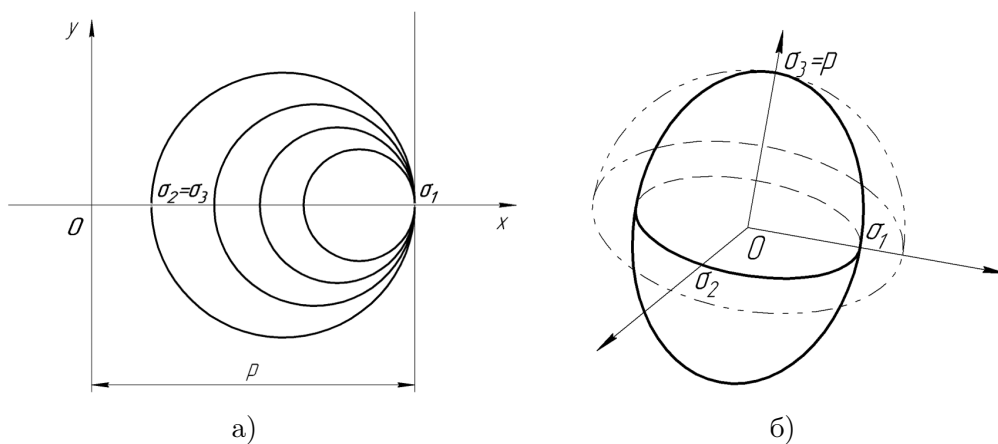


Рис. 2.

Условиям (1) соответствуют диаграмма Мора и эллипсоид напряжений, представленные на рис. 1.

На рис. 2.а) и рис. 2.б) показаны диаграмма Мора и эллипсоид напряжений соответствующие условию отрыва (2).

В работах [6–8] были получены общие соотношения теории отрыва. В работах [9–12] рассмотрены задачи равномерного растяжения пластин при условии сопротивления отрыву. Задачи двусосного растяжения тонких пластин из анизотропного и неоднородного материала, без учета сопротивления отрыву, были рассмотрены в работах [13,14]. В данной работе рассматривается упругопластическое состояние бесконечной пластины, ослабленной круговым отверстием, при двусосном растяжении. Контур отверстия считается свободен от усилий.

Рассмотрим бесконечную пластину, из несжимаемого упругопластического материала ослабленную отверстием радиуса a . К пластине приложены растягивающие усилия p_1 и p_2 , действующие по взаимно ортогональным осям. Решение будем искать в цилиндрической системе координат, ось z направим ортогонально плоскости пластины. Материал пластины предполагается несжимаемым. Условие отрыва примем в виде (1)

$$\sigma_\alpha = \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 < p, \quad p = \text{const.}$$

В цилиндрической системе координат компоненты напряжений примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= p + 3(\sigma - p)n_1^2, & \tau_{\rho\theta} &= 3(\sigma - p)n_1n_2, \\ \sigma_\theta &= p + 3(\sigma - p)n_2^2, & \tau_{\theta z} &= 3(\sigma - p)n_2n_3, \\ \sigma_z &= p + 3(\sigma - p)n_3^2, & \tau_{\rho z} &= 3(\sigma - p)n_1n_3, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z), \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \end{aligned}$$

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\rho\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{\rho z}$ – компоненты напряжения цилиндрической системе координат, n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы, определяющие направление третьего главного напряжения. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для определения компонент напряжений в упругой области и в зоне отрыва воспользуемся разложением по малому параметру δ . Компонентам напряжения в пластической зоне будем приписывать индекс « p », в упругой – « e ».

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(II)} + \delta^3 \sigma_{ij}^{(III)} + \dots, \\ \delta &= \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad p_1, p_2 - \text{const.} \end{aligned} \quad (5)$$

На бесконечном удалении от центра отверстия будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e &= q - \delta \cos 2\phi, & \sigma_\theta^e &= q + \delta \cos 2\phi, & \text{при } \rho &= \infty \\ \tau_{\rho\theta}^e &= \delta \sin 2\phi, & q &= \frac{p_1 + p_2}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

На контуре отверстия примем

$$\sigma_\rho^p = 0 \quad \text{при } \rho = \alpha. \quad (7)$$

Линеаризованные условия сопряжения при $\rho = 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \left[\sigma_{ij}^{(0)} \right] &= 0, \\ \left[\sigma_{ij}^{(I)} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial \rho} \rho_s^{(I)} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

На контуре отверстия примем, что $\tau_{\rho z}, \tau_{\theta z}$ равны нулю и действует только касательное усилие $\tau_{\rho\theta}$. В выражениях (3) положим $n_3 = 0$.

С учетом вышеописанных предположений выражения (3) примут вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho &= p + 3(\sigma - p)n_1^2, \\
 \sigma_\theta &= p + 3(\sigma - p)n_2^2, \\
 \sigma_z &= p, \\
 \tau_{\rho\theta} &= 3(\sigma - p)n_1n_2, \\
 \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) следует

$$(\sigma_\rho - p)(\sigma_\theta - p) = \tau_{\rho\theta}^2. \tag{10}$$

В нулевом приближении будем иметь

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} \neq 0, \quad \tau_{\rho z}^{(0)} = \tau_{\theta z}^{(0)} = 0. \tag{11}$$

В нулевом приближении примем, при $\rho = \alpha$

$$\tau_{\rho\theta}^0 = \tau_\alpha \quad \rho = \alpha, \quad \tau_\alpha = const. \tag{12}$$

Запишем выражения (4), (10), согласно (5), (11)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} &= 0, \\
 \frac{d\tau_{\rho\theta}^{(0)}}{d\rho} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(0)}}{\rho} &= 0,
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$(\sigma_\rho^{(0)} - p)(\sigma_\theta^{(0)} - p) = \tau_{\rho\theta}^{(0)2}. \tag{14}$$

Из (12) и (13) получим

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = \frac{\alpha^2 \tau_\alpha}{\rho^2}. \tag{15}$$

Из (13) с учетом выражений (14), (7) получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho^{(0)p} &= p - \frac{\alpha \sqrt{\rho^2(p^2 - \tau_\alpha^2) + \alpha^2 \tau_\alpha^2}}{\rho^2}, \\
 \sigma_\theta^{(0)p} &= p - \frac{\alpha^3 \tau_\alpha^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2(p^2 - \tau_\alpha^2) + \alpha^2 \tau_\alpha^2}}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Из (9), (15), (16) следует

$$n_1^2 = 1 - \frac{1}{\rho^2} \frac{\alpha^2 \tau_\alpha^2}{p^2 - \tau_\alpha^2}, \quad n_2^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\alpha^2 \tau_\alpha^2}{p^2 - \tau_\alpha^2}. \tag{17}$$

В упругой зоне, решая первое уравнение системы (13), получим

$$\sigma_\rho^{(0)e} = A - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = A + \frac{B}{\rho^2}, \tag{18}$$

где $A, B = const.$

В нулевом приближении из (6) следует $\sigma_\rho^{(0)} = q$ при $\rho = \infty$, соответственно из (18) определим константу $A = q$.

Удовлетворив (16), (18) условиям (8) определим константу B выражений (18). С учетом полученных значений коэффициентов A, B соотношения (18) примут вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho^{(0)e} &= q + \frac{1}{\rho^2} \frac{\alpha(\tau_\alpha^2 - p^2)}{2\sqrt{p^2 - \tau_\alpha^2 + \alpha^2 \tau_\alpha^2}}, \\
 \sigma_\theta^{(0)e} &= q - \frac{1}{\rho^2} \frac{\alpha(\tau_\alpha^2 - p^2)}{2\sqrt{p^2 - \tau_\alpha^2 + \alpha^2 \tau_\alpha^2}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Радиус упругопластической границы определим из уравнения

$$\frac{\alpha \sqrt{p^2 - \tau_\alpha^2 + 2\alpha^2 \tau_\alpha^2}}{\sqrt{p^2 - \tau_\alpha^2 + \alpha^2 \tau_\alpha^2}} = 2(p - q). \quad (20)$$

Внутренний контур отверстия пластины будем считать фиксированным и свободным от внешних нагрузок

$$\sigma_{ij}^{(I)p} = 0. \quad (21)$$

В упругой области, согласно (7), (15), (16), (19), (21), получим

$$\sigma_\rho^{(I)e} = \tau_\rho \theta^{(I)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (22)$$

$$\sigma_\theta^{(I)e} = 2\alpha \sqrt{p^2 - \tau_\alpha^2 + \alpha^2 \tau_\alpha^2} \rho_s^{(I)} \quad \rho = 1. \quad (23)$$

Граничные условия (6) в первом приближении будут иметь вид

$$\sigma_\rho^{(I)e} = -\cos 2\phi, \quad \tau_\rho \theta^{(I)e} = \sin 2\phi \quad \text{при} \quad \rho = \infty. \quad (24)$$

Решение в упругой области будем искать согласно [1]. С учетом граничных условий (22), (24) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= \left(-1 + \frac{4}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя соотношения (23), (25) найдем границу упругопластической зоны в первом приближении

$$\rho_s^{(I)} = \frac{2 \cos 2\theta}{\alpha \sqrt{p^2 - \tau_\alpha^2 + \alpha^2 \tau_\alpha^2}}. \quad (26)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д.Д. Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Наука: Москва, 1978. 208 с.
- [2] Матвеев С.В. Митрофанова Т.В. Тихонов С.В. Введение в механику предельного и упругопластического состояния деформируемых тел. Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2012. 165 с.
- [3] С.В. Матвеев. Упругопластическое состояние анизотропной среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. № № 3-1(55). С. 12–18.
- [4] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № № 1(27). С. 105–114.
- [5] Ивлев Д.Д. Матченко Н.М. О предельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина. 2006. С. 288–290.
- [6] Matveeva A.N. Matveev S.V. Tikhonov S.V. Mishin P.V. Alatirev S.S. Akimov A.P. On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material // Journal of Physics: Conference Series. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018". 2018. с. 012037.

- [7] А.Н. Роштова. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № № 2. С. 131–134.
- [8] А.Н. Роштова. О плоском напряженном состоянии анизотропного идеальнопластического материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. № Т.1. № 3. С. 19–22.
- [9] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Рыбакова Т.И. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № № 4(34). С. 59–65.
- [10] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № № 4(34). С. 95–103.
- [11] Ефремов В.Г. Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Равномерное растяжение тонкой неоднородной пластины с круговым отверстием, при условии предельного сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № № 3(41). С. 95–103.
- [12] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Равномерное растяжение многослойной тонкой анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № № 1(39). С. 94–101.
- [13] П.Н. Кузнецов. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным включением, ограниченными эллипсами, при двuosном растяжении // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. № № 2. С. 118–126.
- [14] П.Н. Кузнецов. Упругопластическое состояние плоскости, подкрепленной эксцентрическими включениями, при двuosном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2009. № № 2(62). С. 13–18.

S. V. Matveev, A. N. Matveeva

BIAXIAL TENSION OF A THIN PLATE MADE OF ELASTOPLASTIC MATERIAL UNDER THE CONDITION OF RESISTANCE TO SEPARATION

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. The paper considers the problem of determining the stress components during biaxial tension of a thin plate made of elastoplastic material. The plate is weakened by the circular hole. The problem considers the case of separation resistance, $\sigma_1 = \sigma_2 = p$, $\sigma_3 < p$, $p = \text{const}$. The solution is sought by the method of decomposition in a small parameter, similar to the works of cite matv1, matv2, matv3, matv4. In this work, expressions were obtained for determining the stress components in the elastic and plastic regions in the first approximation.

Keywords: pull-off resistance, elasticity, plasticity, linearization, stress.

REFERENCES

- [1] Ivlev D.D. Ershov L.V. Perturbation method in the theory of an elastoplastic body. Science: Moscow, 1978. 208 c.
- [2] Matveev S.V. Mitrofanova T.V. Tikhonov S.V. Introduction to the mechanics of the limiting and elastoplastic state of deformable bodies. Cheboksary: Chuvash State Pedagogical University named after AND I. Yakovleva, 2012. 165 c.
- [3] S.V. Matveev. Elastoplastic state of an anisotropic medium, weakened by a horizontal cylindrical cavity, taking into account gravity // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. 2007. № No. 3-1 (55). C. 12–18.
- [4] Matveev S.V. Matveeva A.N. Tikhonov S.V. Deformed state of anisotropic plane, weakened by a hole, reinforced by an inclusion bounded by an eccentric circle, under biaxial tension // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2016. № No. 1 (27). C. 105–114.
- [5] D.D. Ivlev. The theory of ideal plasticity. Science: Moscow, 1966. 232 c.
- [6] Ivlev D.D. Matchenko N.M. About breakaway limit state // Problems in the mechanics of deformable solids and rocks. Collection of articles dedicated to the 75th anniversary of E.I. Shemyakin. 2006. C. 288–290.
- [7] Matveeva A.N. Matveev S.V. Tikhonov S.V. Mishin P.V. Alatirev S.S. Akimov A.P. On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material // Journal of Physics: Conference Series. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018". 2018. c. 012037.
- [8] A.N. Roshtova. On general separation limiting conditions for compressible anisotropic media // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2007. № No. 2. C. 131–134.
- [9] A.N. Roshtova. On the plane stress state of an anisotropic ideal-plastic material // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. 2007. № T.1. No. 3. C. 19–22.

Matveev Sergey Vladimirovich

e-mail: sergio2100@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary.

Matveeva Alena Nikolaevna

e-mail: roshtova@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary.

-
- [10] Matveev S.V. Matveeva A.N. Rybakova T.I. Uniform stretching of a thin anisotropic plate weakened by an elliptical hole, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2017. № No. 4 (34). С. 59–65.
- [11] Matveev S.V. Matveeva A.N. Tikhonov S.V. Uniform stretching of a thin anisotropic plate with a circular hole, reinforced by inclusion, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2017. № No. 4 (34). С. 95–103.
- [12] Efremov V.G. Matveev S.V. Matveeva A.N. Tikhonov S.V. Uniform stretching of a thin non-uniform plate with a circular hole, subject to ultimate pull-off strength // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2019. № No. 3 (41). С. 95–103.
- [13] Matveev S.V. Matveeva A.N. Tikhonov S.V. Uniform stretching of a multilayer thin anisotropic plate with an elliptical hole, subject to tear resistance // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2019. № No. 1 (39). С. 94–101.
- [14] P.N. Kuznetsov. Elastoplastic state of an inhomogeneous plane with a circular hole reinforced by an inclusion bounded by ellipses under biaxial tension // Bulletin of the Tula State University. Natural Sciences. 2009. № No. 2. С. 118–126.
- [15] P.N. Kuznetsov. Elastoplastic state of a plane, supported by eccentric inclusions, under biaxial tension. 2009.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы LaTeX 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Баженов В. Г., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А.</i> О применимости модели Винклера при контактном взаимодействии упругопластических цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при внешнем давлении	3
<i>Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> О трехконстантных потенциалах в полярных континуумах	9
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> К теории линейных гемитропных микрополярных сред	16
<i>Абашкин Е. Е., Богданова Н. А., Жилин С. Г., Комаров О. Н., Предеин В. В.</i> Экспериментальное моделирование технологических этапов процесса формирования биметаллической отливки высокой размерно-геометрической точности	25
<i>Лаптева А. А., Рагозина В. Е., Дудко О. В.</i> Кусочно-линейная аппроксимация краевых условий и решений в задачах одномерной нестационарной динамики разномодульных упругих сред	36
<i>Петров М. В., Гоник Е. Г., Михайлов Б. В.</i> Влияние начальных несовершенств тонкостенных цилиндрических оболочек с сыпучим заполнителем на их устойчивость при изгибе	47
<i>Астапов Ю. В., Соколова М. Ю., Христин Д. В.</i> Задача о взаимодействии конического индентора с упругим цилиндром	54
<i>Радаев Ю. Н.</i> Гармоническое волновое поле постоянного азимута в микрополярном цилиндрическом волноводе	64
<i>Казанцев А. В., Келлер И. Э.</i> Расчет многоэтапного процесса листовой штамповки тонкостенного сосуда и его оценка с точки зрения предельных деформаций	84
<i>Гоцев Д. В., Ковалев А. В., Шашкин А. И., Яковлев А. Ю.</i> Об определении поля напряжений в эксцентрической трубе, из стареющего упругопластического материала	93
<i>Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д.</i> Нестационарная динамика анизотропной оболочки Кирхгофа-Лява	101
<i>Земсков А. В., Файкин Г. М.</i> Изгиб упругодиффузионной консольно-закрепленной балки Бернулли-Эйлера с учетом конечной скорости распространения диффузионных потоков	107
<i>Немировский Ю. В.</i> Динамика гибридных упрочняющихся и вязкопластических балок при взрывных воздействиях	115

<i>Зарецкая М. В.</i> К исследованию фоновой сейсмической напряженности геологического массива	124
<i>Перельмутер М. Н.</i> Модель адгезионного соединения полимеров	131
<i>Шиповский И. Е., Трофимов В. А.</i> Моделирование деформирования и разрушения массива горных пород, содержащего полость	138
<i>Белосточный Г. Н., Вильде М. В., Сурова М. Ю.</i> Применение уточненной асимптотической модели для описания нестационарной планарной краевой волны при действии касательной нагрузки на торце	146
<i>Козлов В. В., Маркин А. А., Петрова В. Е.</i> Постановка задачи о конечных деформациях полутороидальной оболочки под действием внутреннего давления	155
<i>Быкова М. И., Вервейко Н. Д., Крупенко С. Е., Шашкин А. И., Шашкина С. А.</i> Математическое моделирование лучевым методом переноса интенсивности передних кромок пространственных трещин фронтами продольных и сдвиговых волн	164
<i>Матвеев С. В., Матвеева А. Н.</i> Двуосное растяжение тонкой пластины из упругопластического материала при условии сопротивления отрыву	182
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	190
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	193
СОДЕРЖАНИЕ	195

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2020. № 4 (46)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 30.12.2020. Выход в свет 30.12.2020.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 24,6.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38