

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 1(47)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1582

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2021

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 1(47)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1582

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ УДАРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НЕНАПРЯЖЕННОЙ НЕСЖИМАЕМОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Решается задача одномерной плоской деформации нелинейноупругого несжимаемого полупространства под действием ударной нагрузки на его границе. До момента ударного воздействия полупространство находится в свободном состоянии. Именно это условие позволяет осуществить движение разрыва в краевых условиях на границе полупространства в виде единственной плоскополяризованной ударной волны, на которой сохраняется неизменным направление предварительного сдвига. Перечисленные свойства переднего фронта ударного воздействия следуют из совместного анализа характеристических направлений задачи и видов ударных волн для одномерной плоской задачи в несжимаемой среде с произвольными предварительными деформациями. Приводятся два варианта приближенного решения задачи на основе метода сращиваемых асимптотических разложений и на основе метода лучевых рядов.

Ключевые слова: нелинейноупругая среда, несжимаемость, ударная волна, плоская деформация, характеристики гиперболических систем, метод возмущений, лучевые ряды.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.001

УДК: 539.3

Введение

Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростных процессов [1–4] имеют стабильно большое значение для области современного машиностроения, техники, физики. В частности, эти исследования включают разработку теоретических методов решения разнообразных задач динамики [5, 6] и изучение процессов образования и движения ударных волн в твердых телах [1, 3, 7]. Известно [1, 3], что ударные волны (поверхности сильных разрывов) возможно описать на основе только нелинейных физикомеханических моделей. При этом для твердых деформируемых сред выявляется большое число нелинейных особенностей движения ударных волн,

© Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е., 2020

Рагозина Виктория Евгеньевна

e-mail: ragoza@vls.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Иванова Юлия Евгеньевна

e-mail: ivanova@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Поступила 20.08.2020

таких как зависимость геометрии ударной волны и ее скорости от состояния среды в ближайшей к ней окрестности, взаимосвязь процессов объемного и сдвигового деформирования и т.д. [1, 3]. Нелинейная взаимосвязь уравнений движения нестационарных краевых задач с системой краевых условий на заранее неизвестных по пространственной локализации поверхностях (включая ударные волны) в общем случае на сегодняшний день исключает возможность получения точного теоретического решения. При этом, одновременно с исключительно большим значением современных вычислительных методов [6], приобретает важное значение разработка разнообразных приближенных теоретических методов решения [2, 5, 8, 9]. Из этих методов отметим метод сращиваемых асимптотических разложений [8] и метод прифронтных разложений в виде лучевых рядов [9]. Ранее было показано [10–13], что метод сращиваемых разложений по малому параметру для задач ударной деформации в окрестности ударных волн для областей, где нелинейность проявляется в полном объеме, приводит к одиночному эволюционному уравнению [10], либо системе эволюционных уравнений [11]. Данные квазилинейные уравнения допускают получение своего точного решения в отличие от исходных уравнений движения и одновременно позволяют отразить основные особенности нелинейного процесса. На основе этого метода были получены решения одномерных [10, 11] и многомерных [12] краевых задач о распространении плоских [10, 11, 13] ударных волн и волн с ненулевой кривизной волнового фронта [12] в несжимаемых и сжимаемых однородных и неоднородных средах. Еще более простым по виду используемых функций является вариант лучевого метода [14, 15] для ударноволновых задач, основанный на применении системы двойных рядов [16]. Данный вариант лучевого метода также неоднократно применялся ранее [16, 17] в разнообразных задачах ударной деформации.

В настоящей статье решается задача об одномерной ударной деформации полупространства, занятого нелинейноупругой несжимаемой изотропной средой [18], которая до начала ударного воздействия на граничной плоскости находится в свободном состоянии. Предположение о несжимаемости не только отражает реальное свойство многих материалов [5, 18], но позволяет рассматривать сдвиговое деформирование в “чистом” виде без связи с объемной деформацией. Предварительно ненапряженное состояние среды является ключевым условием, позволяющим на основе известных общих данных [3] о скоростях и типах плоских сдвиговых ударных волн, а также на основе анализа характеристических направлений задачи сделать заключение о движении в среде единственной ударной волны плоскополяризованного типа [1, 3]. Дополнительным свойством на такой волне становится неизменность направления сдвига, имеющего место в момент возникновения ударной волны. Данное условие позволяет существенно упростить анализ системы эволюционных уравнений, а также уравнений лучевого метода, с помощью которых строятся два приближенных решения описанной краевой задачи.

1. Основные модельные соотношения и постановка краевой задачи

Динамику несжимаемой нелинейноупругой среды зададим в прямоугольной декартовой системе координат Эйлера x_1, x_2, x_3 уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \text{const}, \quad \dot{u}_i = (\delta_{ij} - u_{i,j})v_j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \\ \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad \sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ W(I_1, I_2) &= (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + \\ &\quad + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \chi I_1^2 I_2 + \dots, \\ I_1 &= \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скорости, α_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера-Коши, p_0 — функция добавочного гидростатического давления, W — функция упругого потенциала, $\mu, a, b, \kappa, \theta, c, d, k, \chi$ — упругие модули среды в адиабатическом приближении, ρ — плотность среды. В системе (1.1) принято суммирование по повторяющемуся латинскому индексу, многоточием здесь и далее обозначены невыписанные слагаемые с более высокой степенью по компонентам градиента перемещений.

Далее рассмотрим одномерную плоскую деформацию нелинейноупругого полупространства $x_1 \geq 0$, вызванную ударным нагружением по его границе $x_1 = 0$. Следствием этого воздействия будет поле перемещений $u_1 = 0, u_2 = u_2(x_1, t), u_3 = u_3(x_1, t)$. Полагаем, что до момента времени $t = 0$ деформации в среде отсутствуют, а перемещения на границе $x_1 = 0$ являются известными функциями времени:

$$\begin{aligned} u_2|_{x_1=0, t \geq 0} &= U_2(t), \quad u_3|_{x_1=0, t \geq 0} = U_3(t), \\ U_2(0) &= U_3(0) = 0, \quad \dot{U}_2(0)\dot{U}_3(0) \neq 0, \\ u_2|_{x_1 \geq 0, t \leq 0} &= u_3|_{x_1 \geq 0, t \leq 0} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $U_2(t), U_3(t)$ — известные функции. Скачок их производных в нуле позволяет утверждать, что с момента $t = 0$ по среде движутся поверхности сильных разрывов [3], на которых необходимо поставить дополнительные краевые условия, связывающие разрывы. Сформулируем такие дополнительные соотношения на ударной волне, проведя анализ уравнений вдоль характеристических направлений и геометрических, кинематических и динамических условий совместности. Для определения уравнений характеристик выпишем уравнения движения (1.1):

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} &= 0, \quad \sigma_{12,1} = \rho\ddot{u}_2, \quad \sigma_{13,1} = \rho\ddot{u}_3, \\ \sigma_{11} &= -p + \mu \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i f^i, \quad \sigma_{12} = \mu u_{2,1} H, \quad \sigma_{13} = \mu u_{3,1} H, \\ H(f) &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i f^i, \quad f = u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2, \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{a + b + \kappa + d}{\mu}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Все безразмерные константы β_i и γ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) в (1.3) вычисляются по упругим модулям материала. Первое из уравнений в (1.3) не влияет на поиск характеристических направлений и необходимо при определении функции добавочного гидростатического давления $p(x_1, t)$. Для нахождения уравнений характеристик применим известную

схему [2] ко второму и третьему уравнениям (1.3). Получим два семейства характеристик. Вдоль характеристических направлений первого семейства

$$\frac{dx_1}{dt} = \pm C\sqrt{H}, \quad C^2 = \mu\rho^{-1} \quad (1.4)$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \pm C\sqrt{H} f_2^2 \frac{d}{dt_{(1)}} \left(\frac{f_1}{f_2} \right) - f_2 \frac{df_3}{dt_{(1)}} + f_1 \frac{df_4}{dt_{(1)}} &= 0, \\ f_1 = u_{2,1}, \quad f_2 = u_{3,1}, \quad f_3 = \dot{u}_2, \quad f_4 = \dot{u}_3, \quad \frac{d}{dt_{(1)}} &= \frac{\partial}{\partial t} \pm C\sqrt{H} \frac{\partial}{\partial x_1}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

вдоль направлений второго семейства

$$\frac{dx_1}{dt} = \pm C\sqrt{H + 2H'f}, \quad H' = \frac{dH}{df} \quad (1.6)$$

имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \pm C\sqrt{H + 2H'f} \frac{df}{dt_{(2)}} - 2f_1 \frac{df_3}{dt_{(2)}} - 2f_2 \frac{df_4}{dt_{(2)}} &= 0, \\ \frac{d}{dt_{(2)}} &= \frac{\partial}{\partial t} \pm C\sqrt{H + 2H'f} \frac{\partial}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если по предварительно недеформированной среде распространяется ударная волна, которая сама входит в число характеристик первого семейства, тогда для соотношений (1.5) справедливо утверждение: если $f_3 = \mp C\sqrt{H} f_1$, $f_4 = \mp C\sqrt{H} f_2$, то

$$\frac{d}{dt_{(1)}} \left(\frac{f_1}{f_2} \right) = 0, \quad \frac{f_1}{f_2} = \text{const}. \quad (1.8)$$

Связи между f_3 и f_1 , f_4 и f_2 являются следствием геометрических и кинематических условий совместности разрывов [19].

Известно [3], что в случае произвольных ненулевых предварительных деформаций в полупространстве движутся две ударные волны: волна круговой поляризации и плоскополяризованная волна. Кратко перечислим свойства и запишем скорости этих волн. На волне круговой поляризации $[H] = [f] = 0$, то есть сохраняется неизменной сумма квадратов интенсивностей воздействия и меняется направление предварительного сдвига. Ее скорость G_1 вычисляется как

$$G_1 = \frac{dx_1}{dt} = C\sqrt{H^+} = C\sqrt{H^-}. \quad (1.9)$$

Данная волна согласно (1.4) содержится среди характеристик первого семейства.

Для плоскополяризованной ударной волны и ее скорости G_2 выполняется

$$\frac{u_{2,1}^+}{[u_{2,1}]} = \frac{u_{3,1}^+}{[u_{3,1}]}, \quad G_2 = \frac{dx_1}{dt} = C\sqrt{H^+ + [H] \left(\frac{u_{2,1}^+}{[u_{2,1}]} - 1 \right)}. \quad (1.10)$$

На ней изменяется величина предварительного сдвига и не меняется его направление.

Если в среде отсутствуют предварительные деформации $u_{2,1}^+ = u_{3,1}^+ = 0$, то распространяется единственная ударная волна плоскополяризованного типа со скоростью

$$G = C\sqrt{H^-}. \quad (1.11)$$

На этой волне согласно (1.4), (1.8), (1.11) выполняется условие

$$\frac{u_{2,1}^-}{u_{3,1}^-} = \frac{u_{2,1}^-}{u_{3,1}^-} \Big|_{t=0} = const. \quad (1.12)$$

Такая волна совпадает с углом наклона характеристик первого семейства (1.4) исходной системы уравнений движения. На ней изменяется величина квадрата интенсивности воздействия на ненулевую. Одновременно на ней появляется дополнительное важное условие: постоянство направления сдвига, созданного в момент $t = 0$. Это условие не противоречит определению плоскополяризованной волны, поскольку нулевому состоянию перед ней можно приписать любое направление. Исходя из сказанного выше поставленную краевую задачу (1.1), (1.2) в случае отсутствия предварительных деформаций необходимо дополнить условиями на фронте ударной волны:

$$\begin{aligned} u_2(x_1, t)|_{x_1=X(t)} &= 0, \quad u_3(x_1, t)|_{x_1=X(t)} = 0, \\ [u_{2,1}]|_{x_1=X(t)} &= -u_{2,1}^-|_{x_1=X(t)}, \quad [u_{3,1}]|_{x_1=X(t)} = -u_{3,1}^-|_{x_1=X(t)}, \\ \frac{u_{2,1}^-}{u_{3,1}^-} \Big|_{x_1=X(t)} &= const, \quad X(t) = \int_0^t G(\xi) d\xi, \quad G = C\sqrt{H^-}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Получить точное решение краевой задачи (1.1), (1.2), (1.13) невозможно из-за ее существенной нелинейности. Поэтому в разделах 2, 3 построим ее приближенное аналитическое решение на основе двух эффективных методов для динамических задач нелинейной теории упругости: метода сращиваемых асимптотических разложений [8] и лучевого метода, модифицированного для задач с ударными волнами [16].

2. Решение одномерной плоской динамической задачи на основе метода малого параметра

В работах [10–13] метод сращиваемых асимптотических разложений успешно применялся для решения одномерных и многомерных нестационарных задач ударного деформирования нелинейноупругих сред. Поэтому воспользуемся им для решения поставленной краевой задачи. Запишем второе и третье уравнения системы (1.3) в перемещениях, ограничиваясь третьим порядком малости, и конкретизируем функции нагружения $U_2(t)$, $U_3(t)$ на границе $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} u_{2,11} (1 + 3\gamma_1 u_{2,1}^2 + \gamma_1 u_{3,1}^2) + 2\gamma_1 u_{3,11} u_{2,1} u_{3,1} + \dots &= \ddot{u}_2 C^{-2}, \\ u_{3,11} (1 + 3\gamma_1 u_{3,1}^2 + \gamma_1 u_{2,1}^2) + 2\gamma_1 u_{2,11} u_{2,1} u_{3,1} + \dots &= \ddot{u}_3 C^{-2}, \\ u_2|_{x_1=0} &= \frac{2}{3} \left\{ (\alpha t + \alpha_0)^{3/2} - \alpha_0^{3/2} \right\}, \quad u_3|_{x_1=0} = \frac{2}{3} \left\{ (\tau t + \tau_0)^{3/2} - \tau_0^{3/2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где α , α_0 , τ , τ_0 — известные константы. Схема метода малого параметра требует перехода к безразмерным переменным. В нашем случае их удобно выбрать в виде:

$$\begin{aligned} s = \frac{x_1}{CT}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad v(s, m) &= \varepsilon^{-1} \frac{u_2(x_1, t)}{CT}, \\ w(s, m) &= \varepsilon^{-1} \frac{u_3(x_1, t)}{CT}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha \alpha_0^{1/2}}{C}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ε — малый параметр задачи, T — характерное время задачи, за которое возникающие на границе перемещения будут много меньше, чем расстояние CT . Переходя в

соотношениях (2.1) к новым переменным (2.2), получим внешнюю краевую задачу [8]:

$$\begin{aligned}
v_{,ss} (1 + 3\gamma_1 \varepsilon^2 v_{,s}^2 + \gamma_1 \varepsilon^2 w_{,s}^2) + 2\gamma_1 \varepsilon^2 w_{,ss} v_{,s} w_{,s} + \dots &= v_{,mm}, \\
w_{,ss} (1 + 3\gamma_1 \varepsilon^2 w_{,s}^2 + \gamma_1 \varepsilon^2 v_{,s}^2) + 2\gamma_1 \varepsilon^2 v_{,ss} v_{,s} w_{,s} + \dots &= w_{,mm}, \\
v|_{s=0} = \frac{2}{3} \left\{ (a_1 m + a_2)^{3/2} - a_2^{3/2} \right\}, \quad w|_{s=0} = \frac{2}{3} \left\{ (a_3 m + a_4)^{3/2} - a_4^{3/2} \right\}, \\
a_1 = \frac{\alpha^{1/3} T^{1/3}}{\alpha_0^{1/3}}, \quad a_2 = \frac{\alpha_0^{2/3}}{\alpha^{2/3} T^{2/3}}, \\
a_3 = \frac{\tau T^{1/3}}{\alpha^{2/3} \alpha_0^{1/3}}, \quad a_4 = \frac{\tau_0}{\alpha^{2/3} T^{2/3} \alpha_0^{1/3}}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Искомые функции $v(s, m)$ и $w(s, m)$ представим асимптотическими рядами по квадратам степеней малого параметра

$$\begin{aligned}
v(s, m) &= v_0(s, m) + \varepsilon^2 v_1(s, m) + \varepsilon^4 v_2(s, m) + \dots, \\
w(s, m) &= w_0(s, m) + \varepsilon^2 w_1(s, m) + \varepsilon^4 w_2(s, m) + \dots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

и подставим в уравнения движения и краевые условия (2.3). Решение строится методом последовательных линейных приближений. В результате получим внешнее разложение [8]:

$$\begin{aligned}
v(s, m) &= \frac{2}{3} \left\{ (a_1(m-s) + a_2)^{3/2} - a_2^{3/2} \right\} + \\
&+ \frac{\gamma_1 a_1}{2} \varepsilon^2 (a_1(m-s) + a_2)^{1/2} s \left\{ (a_1^3 + a_3^3)(m-s) + a_1^2 a_2 + a_3^2 a_4 \right\} + \dots, \\
w(s, m) &= \frac{2}{3} \left\{ (a_3(m-s) + a_4)^{3/2} - a_4^{3/2} \right\} + \\
&+ \frac{\gamma_1 a_3}{2} \varepsilon^2 (a_3(m-s) + a_4)^{1/2} s \left\{ (a_1^3 + a_3^3)(m-s) + a_1^2 a_2 + a_3^2 a_4 \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Решение (2.5) справедливо в малой окрестности нагружаемой границы $s = 0$ в области, где $m - s > 0$, его равномерность нарушается на расстояниях $s \sim \varepsilon^{-2}$. Для перехода в прифронтовую область ударной волны и учета краевых условий (1.13) необходимо изменить масштаб пространственной переменной. Переход к внутренним переменным $n = \varepsilon^2 s$, $p = s - m$, $v = v(n, p)$, $w = w(n, p)$ позволяет записать внутреннюю краевую задачу [8]:

$$\begin{aligned}
&2(v_{,pn} + \varepsilon^2 v_{,nn}) \left\{ 1 + \gamma_1 \varepsilon^2 \left((v_{,p} + \varepsilon^2 v_{,n})^2 + (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^2 \right) \right\} + \\
&+ \gamma_1 v_{,pp} \left\{ (v_{,p} + \varepsilon^2 v_{,n})^2 + (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^2 \right\} + 2\gamma_1 (v_{,p} + \varepsilon^2 v_{,n}) \left\{ (v_{,p} + \varepsilon^2 v_{,n}) \times \right. \\
&\times (v_{,pp} + 2\varepsilon^2 v_{,pn} + \varepsilon^4 v_{,nn}) + (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n}) (w_{,pp} + 2\varepsilon^2 w_{,pn} + \varepsilon^4 w_{,nn}) \left. \right\} = 0, \\
&2(w_{,pn} + \varepsilon^2 w_{,nn}) \left\{ 1 + \gamma_1 \varepsilon^2 \left((v_{,p} + \varepsilon^2 v_{,n})^2 + (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^2 \right) \right\} + \\
&+ \gamma_1 w_{,pp} \left\{ (v_{,p} + \varepsilon^2 v_{,n})^2 + (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^2 \right\} + 2\gamma_1 (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n}) \left\{ (v_{,p} + \varepsilon^2 v_{,n}) \times \right. \\
&\times (v_{,pp} + 2\varepsilon^2 v_{,pn} + \varepsilon^4 v_{,nn}) + (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n}) (w_{,pp} + 2\varepsilon^2 w_{,pn} + \varepsilon^4 w_{,nn}) \left. \right\} = 0, \\
&v|_{p=p(n)} = 0, \quad w|_{p=p(n)} = 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $p(n)$ — неизвестная функция, задающая положение переднего фронта ударной волны. Новые неизвестные функции $v(n, p)$, $w(n, p)$ и функцию $p(n)$ представим в виде асимптотических рядов:

$$\begin{aligned} v(n, p) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} v_{2i}(n, p) \approx v_0(n, p), & w(n, p) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} w_{2i}(n, p) \approx w_0(n, p), \\ p(n) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} p_{2i}(n) \approx p_0(n) \end{aligned} \quad (2.7)$$

и подставим в первые два соотношения (2.6). На нулевом шаге метода получим систему эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} 2g_{0,n} + \gamma_1 g_{0,p} (g_0^2 + h_0^2) + 2\gamma_1 g_0 (g_0 g_{0,p} + h_0 h_{0,p}) &= 0, \\ 2h_{0,n} + \gamma_1 h_{0,p} (g_0^2 + h_0^2) + 2\gamma_1 h_0 (g_0 g_{0,p} + h_0 h_{0,p}) &= 0, \quad g_0 = v_{0,p}, \quad h_0 = w_{0,p}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для построения решения системы гиперболических нелинейных уравнений (2.8), описывающей поведение решения в прифронтной области ударной волны, удобно ввести замену неизвестных функций g_0 , h_0 , учитывая полученные в разделе 1 результаты. Полагая $\eta = g_0^2 + h_0^2$, $\vartheta = h_0/g_0$, от системы уравнений (2.8) перейдем к соотношениям:

$$\eta_{,n} + \frac{3\gamma_1}{2} \eta \eta_{,p} = 0, \quad \vartheta_{,n} + \frac{\gamma_1}{2} \eta \vartheta_{,p} = 0, \quad (2.9)$$

где второе уравнение интегрируется после решения первого. Система эволюционных уравнений (2.9) описывает два процесса: изменение квадрата интенсивности воздействия и изменение направления воздействия. Изменение квадрата интенсивности сдвига полностью описывается первым уравнением, а на изменение направления сдвига влияет нелинейность задачи и вид функции η . Общее решение (2.9) вдоль характеристик можно представить в виде

$$\begin{aligned} \eta &= F \left(p - \frac{3\gamma_1}{2} \eta m \right), \\ \vartheta &= const \quad \text{вдоль} \quad \frac{dp}{dn} = \frac{\gamma_1}{2} \eta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где F — произвольная функция, определяемая условиями нагружения на границе. Сравнение (2.10) с краевыми условиями (2.3) и внешним решением (2.5) позволяет предположить частный вид представления для функций η и ϑ :

$$\begin{aligned} \eta &= (B - Ap)z^3, \quad \vartheta = \sqrt{\frac{D(B - Ap)z + E}{(1 - D)(B - Ap)z - E}}, \\ z &= \left(1 - \frac{3\gamma_1}{2} An \right)^{-1/3}, \quad A, B, D, E = const. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для определения поля перемещений необходимо учесть, что $v_{0,p} = -\sqrt{\eta/(1 + \vartheta^2)}$, $w_{0,p} = -\vartheta \sqrt{\eta/(1 + \vartheta^2)}$. В результате получим для искоемых функций:

$$\begin{aligned} v_0(n, p) &= \frac{2}{3A(1 - D)} \{ (1 - D)(B - Ap)z - E \}^{3/2} + \varphi_1(n), \\ w_0(n, p) &= \frac{2}{3AD} \{ D(B - Ap)z + E \}^{3/2} + \varphi_2(n), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$ — неизвестные функции, которые находятся из краевых условий на фронте ударной волны (2.6). Положение переднего фронта возмущений определим из решения обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\gamma_1}{2}(B - Ap_0)z^3, \quad p_0(0) = 0, \quad p_0(n) = \frac{B}{A}(1 - z^{-1}). \quad (2.13)$$

Подстановка (2.13) в условия на волне $v_0(n, p_0(n)) = 0$, $w_0(n, p_0(n)) = 0$ позволяет найти

$$\varphi_1(n) = -\frac{2}{3A(1-D)}\{B(1-D) - E\}^{3/2}, \quad \varphi_2(n) = -\frac{2}{3AD}\{DB + E\}^{3/2}. \quad (2.14)$$

Сопоставление внешнего (2.5) и внутреннего (2.12) решений с учетом (2.14) в нулевом приближении дает: $A = a_1^3 + a_2^3$, $B = a_2 a_1^2 + a_4 a_3^2$, $D = a_3^3/A$, $E = a_1^2 a_3^2 (a_4 a_1 - a_2 a_3)/A$. В данном разделе получено решение для первого шага метода возмущений. Если необходимо уточнить представленные формулы, то следующие приближения строятся по аналогии с нулевым приближением.

3. Решение одномерной плоской динамической задачи на основе метода лучевых рядов

В третьем разделе сохраним для функции $H(f)$ полное представление, так как в лучевом методе нет ограничения на малость перемещений и деформаций. Модификация метода лучевых рядов для нестационарных задач ударной деформации в твердом теле [16] связана с заменой точного решения на представление всех неизвестных функций в окрестности переднего фронта волнового процесса Σ в виде рядов по типу ряда Тейлора :

$$Y^{(I)}(x_1, t) = Y^{(0)}(x_1, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k Y}{\partial t^k} \right] \Big|_{t=t_{\Sigma}} (t - t_{\Sigma})^k, \quad t \geq t_{\Sigma}, \quad (3.1)$$

$$t_{\Sigma}(x_1) = \int_0^{x_1} G^{-1}(\zeta) d\zeta,$$

где $Y(x_1, t)$ — обобщенное обозначение для всех величин, которые на поверхности ударной волны Σ имеют разрыв в первой производной; $Y^{(0)}(x_1, t)$ и $Y^{(I)}(x_1, t)$ — значения функции $Y(x_1, t)$, вычисляемые перед ударной и сразу за ней. В качестве неизвестных выступают величины скачков $\left[\frac{\partial^k Y}{\partial t^k} \right]$. Для нашей задачи $u_2^{(0)}(x_1, t) = u_3^{(0)}(x_1, t) = 0$, а за основные неизвестные функции примем:

$$[\dot{u}_2] = \kappa_1, \quad [\ddot{u}_2] = \kappa_2, \dots \quad [\dot{u}_3] = \theta_1, \quad [\ddot{u}_3] = \theta_2, \dots \quad (3.2)$$

На основе геометрических и кинематических условий совместности [19] определим скачки в производных по координате и скачки вторых производных:

$$[u_{2,1}] = -\frac{\kappa_1}{G}, \quad [u_{3,1}] = -\frac{\theta_1}{G}, \quad [\dot{u}_{2,1}] = \frac{1}{G} \left(\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} - \kappa_2 \right), \quad [\dot{u}_{3,1}] = \frac{1}{G} \left(\frac{\delta \theta_1}{\delta t} - \theta_2 \right), \quad (3.3)$$

$$[u_{2,11}] = \frac{1}{G} \left(-\frac{2}{G} \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} + \frac{\kappa_2}{G} + \frac{\kappa_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right), \quad [u_{3,11}] = \frac{1}{G} \left(-\frac{2}{G} \frac{\delta \theta_1}{\delta t} + \frac{\theta_2}{G} + \frac{\theta_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right),$$

где $\delta/\delta t$ — производная по Томасу [19].

Запишем второе и третье уравнения движения системы (1.3) в перемещениях:

$$\begin{aligned} u_{2,11}(1+Q) + 2Q'(u_{2,1}^2 u_{2,11} + u_{2,1} u_{3,1} u_{3,11}) &= \frac{\ddot{u}_2}{C^2}, \\ u_{3,11}(1+Q) + 2Q'(u_{3,1}^2 u_{3,11} + u_{2,1} u_{3,1} u_{2,11}) &= \frac{\ddot{u}_3}{C^2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$Q = H(f) - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i f^i, \quad Q' = \frac{dQ}{df}.$$

Пусть для решаемой системы уравнений (3.4) краевое условие (1.2) имеет вид:

$$u_2|_{x_1=0, t \geq 0} = A_1 t + \frac{A_2}{2} t^2, \quad u_3|_{x_1=0, t \geq 0} = B_1 t + \frac{B_2}{2} t^2, \quad (3.5)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — известные константы.

Технология применения метода лучевых рядов включает в себя k – кратное частное дифференцирование ($k = 0, 1, 2, \dots$) по времени уравнений движения (3.4) и запись полученных соотношений в разрывах. Для нашей задачи ограничимся значением $k = 0$. Тогда основные уравнения затухания [14] будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \left(\frac{\kappa_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} + \frac{\kappa_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right) \left\{ 1 - [Q] + 2(\gamma_1 - [Q']) \frac{\kappa_1^2}{G^2} \right\} + \\ + \frac{2\kappa_1 \theta_1}{G^3} \left(\frac{\theta_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \theta_1}{\delta t} + \frac{\theta_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right) (\gamma_1 - [Q']) &= \frac{\kappa_2}{C^2}, \\ \frac{1}{G} \left(\frac{\theta_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \theta_1}{\delta t} + \frac{\theta_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right) \left\{ 1 - [Q] + 2(\gamma_1 - [Q']) \frac{\theta_1^2}{G^2} \right\} + \\ + \frac{2\kappa_1 \theta_1}{G^3} \left(\frac{\kappa_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} + \frac{\kappa_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right) (\gamma_1 - [Q']) &= \frac{\theta_2}{C^2}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\Phi(p) = [Q] = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \gamma_i p^i, \quad p = [f] = -\frac{\theta_1^2 + \kappa_1^2}{G^2},$$

$$[Q'] = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} (i+1) \gamma_{i+1} p^i, \quad G = C \sqrt{1 - \Phi(p)},$$

$$\frac{\delta G}{\delta t} = \frac{\Phi'(p)}{1 - \Phi(p) - \Phi'(p)p} \left\{ \frac{\theta_1}{G} \frac{\delta \theta_1}{\delta t} + \frac{\kappa_1}{G} \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} \right\}, \quad \Phi'(p) = \frac{d\Phi}{dp} = \gamma_1 - [Q'].$$

Подставив в первые два соотношения (3.6) $[Q]$, $[Q']$, $\delta G/\delta t$, выразим величины:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} &= \frac{\Phi'(\kappa_2 \kappa_1^2 + \kappa_1 \theta_1 \theta_2)}{P}, \quad \frac{\delta \theta_1}{\delta t} = \frac{\Phi'(\theta_2 \theta_1^2 + \theta_1 \kappa_1 \kappa_2)}{P}, \\ P(p) &= G^2 \left\{ 1 - \Phi + \frac{p \Phi'(-3 + 3\Phi + 2\Phi'p)}{2(1 - \Phi - \Phi'p)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Преобразуем систему уравнений затухания (3.7). Для этого домножим первое уравнение на $-\theta_1$, а второе — на κ_1 и сложим. В итоге получим уравнение

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\theta_1}{\kappa_1} \right) = 0 \quad \text{т.е.} \quad \frac{\theta_1}{\kappa_1} \Big|_{\Sigma} = const. \quad (3.8)$$

Это означает, что для величин θ_1 , κ_1 выполняется

$$\frac{\theta_1}{\kappa_1} = \frac{\delta\theta_1}{\delta t} \bigg/ \frac{\delta\kappa_1}{\delta t} = \frac{\delta^2\theta_1}{\delta t^2} \bigg/ \frac{\delta^2\kappa_1}{\delta t^2} = \dots = \text{const.} \quad (3.9)$$

Примем, что $\theta_1 = \xi\kappa_1$, $\xi = \text{const}$, поэтому вместо системы уравнений затухания (3.7) далее будет решаться единственное уравнение с основной неизвестной $\delta\kappa_1/\delta t$. Отметим, что соотношения (3.8), (3.9) согласуются с результатом (1.12), полученным в разделе 1 для плоскополяризованной ударной волны, распространяющейся по предварительно недеформированной среде. Следствием того, что решается задача с наличием ударной волны, является нарушение рекуррентности уравнений затухания, то есть в формулах (3.7) присутствуют слагаемые, содержащие θ_2 , κ_2 . В работах [16, 20] был предложен вариант лучевого метода, позволяющий учесть данные слагаемые. Он заключается во введении в соотношение (3.1) дополнительных рядов по дельта—производным для функций $[\partial^k Y/\partial t^k]_{\Sigma}$ в окрестности $t = 0$. Представим неизвестные функции нашей задачи, как

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\delta^k \kappa_1}{\delta t^k} \bigg|_{t=0} t^k = \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} t + \dots, & \kappa_2 &= \kappa_{20} + \dots, \\ \theta_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\delta^k \theta_1}{\delta t^k} \bigg|_{t=0} t^k = \theta_{10} + \frac{\delta\theta_{10}}{\delta t} t + \dots, & \theta_2 &= \theta_{20} + \dots, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где κ_{10} , κ_{20} , θ_{10} , θ_{20} , $\delta\kappa_{10}/\delta t$, $\delta\theta_{10}/\delta t$ — константы, подлежащие определению, и подставим в (3.1):

$$\begin{aligned} u_2 &= - \left(\kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} t_{\Sigma} \right) (t - t_{\Sigma}) - \frac{\kappa_{20}}{2} (t - t_{\Sigma})^2 + \dots, \\ u_3 &= - \left(\theta_{10} + \frac{\delta\theta_{10}}{\delta t} t_{\Sigma} \right) (t - t_{\Sigma}) - \frac{\theta_{20}}{2} (t - t_{\Sigma})^2 + \dots, \\ t_{\Sigma} &= \int_0^{x_1} G^{-1}(\zeta) d\zeta = R_1 x_1 + R_2 x_1^2 + \dots, & R_1 &= \frac{1}{C} \left\{ 1 + \frac{\gamma_1(1 + \xi^2)}{2} \frac{\kappa_{10}^2}{C^2} \right\}^{-1}, \\ R_2 &= - \frac{\gamma_1(1 + \xi^2)\kappa_{10}}{2C^4} \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} \left\{ 1 + \frac{\gamma_1(1 + \xi^2)}{2} \frac{\kappa_{10}^2}{C^2} \right\}^{-3}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (3.5) с учетом, что $t_{\Sigma}(0) = 0$, найдем $\kappa_{10} = -A_1$, $\kappa_{20} = -A_2$, $\theta_{10} = -B_1$, $\theta_{20} = -B_2$, $\xi = B_1/A_1$. Записывая первое уравнение системы (3.7) в момент времени $t = 0$, определим оставшиеся константы: $\delta\kappa_{10}/\delta t = -\gamma_1 C^{-2} (A_1^2 A_2 + B_1 B_2 A_1)$, $\delta\theta_{10}/\delta t = \xi \delta\kappa_{10}/\delta t$. Полученное решение можно уточнить, если в формулах (3.10) оставить слагаемые с более высокими степенями по t . Отметим, что предварительный анализ характеристических направлений для исходной системы уравнений движения позволил получить дополнительную связь между неизвестными функциями: $\theta_1 = \xi\kappa_1$. Что значительно упростило решение задачи, сведя систему из двух уравнений затухания к одному, и исключило возможность нахождения неверного решения без учета условия (3.9).

Заключение

В настоящей статье для одномерной плоской деформации нелинейноупругого несжимаемого полупространства представлены анализ краевых условий на ударных волнах и количество ударных волн, необходимое для решения, в случае отсутствия

предварительных статических деформаций. Совместный анализ углов наклона характеристик задачи и скоростей ударных волн позволяет утверждать, что по среде движется единственная ударная волна плоскополяризованного типа, которая одновременно входит в число характеристик, определяющих изменение направления сдвига. Отсюда следует постоянство направления сдвига на переднем фронте ударной волны. Данное условие использовано в двух процедурах получения приближенного теоретического решения: методе сращиваемых асимптотических разложений и лучевом методе, что позволило существенно упростить эти методики. Одновременно показано, что среда в окрестности ударной волны деформируется в соответствии с поведением решения системы двух эволюционных уравнений, для которых получено общее решение в виде инвариантов Римана. Для лучевого метода полученное условие позволяет перейти от решения системы уравнений затухания к решению единственного уравнения затухания. Проведенный анализ без существенных сложностей распространяется на решение задач ударной деформации предварительно ненапряженной несжимаемой среды для ударных волн ненулевой кривизны. Он может найти практическое применение при разработке и верификации результатов в процедурах численного счета.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bland D. R. *Nonlinear Dynamic Elasticity*. London: Blaisdell, 1969. 93 p.
- [2] Whitham G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley, 1974. 636 p.
- [3] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. *Нелинейные волны в упругих средах*. Москва: Московский лицей, 1998. 412 с.
- [4] Kobayashi A. S. *Handbook on Experimental Mechanics*. New York: Wiley, 1993. 1074 p.
- [5] Порубов А. В. *Локализация нелинейных волн деформации*. Москва: Физматлит, 2009. 207 с.
- [6] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. Москва: Физматлит, 2001. 608 с.
- [7] Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. *Нелинейные волны*. Москва: Физматлит, 2000. 272 с.
- [8] Nayfeh A. H. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York: Wiley-VCH, 1993. 536 p.
- [9] Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // *Appl. Mech. Reviews*. 1995. Vol. 48, no. 1. P. 1–39.
- [10] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2, № 3. С. 82–95.
- [11] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об ударной деформации несжимаемого полупространства под действием сдвигающей нагрузки переменного направления // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2014. Т. 17, № 2(58). С. 87–96.
- [12] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об асимптотическом представлении решений многомерных задач ударной динамики нелинейно-упругих сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2014. № 3(21). С. 131–143.
- [13] Буренин А. А., Россихин Ю. А. О влиянии вязкости на характер распространения плоской продольной волны // *ПМТФ*. 1990. № 6. С. 13–17.
- [14] Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вerveйко Н. Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах // *ПММ*. 1973. Т. 37, № 1. с. 145–155.
- [15] Achenbach J. D., Reddy D. P. Note of wave propagation in linear viscoelastic media // *ZAMP*. 1967. Vol. 18, no. 1. p. 141–144.
- [16] Буренин А. А., Россихин Ю. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов // *Прикладные задачи механики деформируемых сред*. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. с. 129–137.

- [17] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Решение одной многомерной задачи ударной деформации упругого полупространства с искривленной границей на основе модифицированного лучевого метода // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 132–143.
- [18] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [19] Thomas T. Y. Plastic flow and fracture in solids. New York: Academic Press, 1961. 267 p.
- [20] Буренин А. А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный мат. сб. 1999. Т. 8. С. 49–72.

V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova

THE PLANE PROBLEM SOLUTION OF IMPACT DEFORMATION IN A PRELIMINARY UNSTRESSED INCOMPRESSIBLE ELASTIC MEDIUM

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The problem of one-dimensional plane deformation of a nonlinear elastic incompressible half-space under the impact load action on its boundary is solved. The half-space is in a free state until the moment of impact action. This condition leads to the discontinuity in the boundary conditions at the half-space boundary moves as the only plane-polarized shock wave, on which the direction of the preliminary shear remains unchanged. The pointed out properties of the leading edge of the shock action follow from the joint analysis of the characteristic directions of the problem and the shock waves types for a one-dimensional plane problem in an incompressible medium with arbitrary preliminary deformations. Two versions of the problem approximate solution based on the method of matched asymptotic expansions and on the basis of the ray series method are presented.

Keywords: nonlinear elastic medium, incompressibility, shock wave, plane strain, characteristics of hyperbolic systems, perturbation method, ray series.

REFERENCES

- [1] Bland D. R. Nonlinear Dynamic Elasticity. London: Blaisdell, 1969. 93 p.
- [2] Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley, 1974. 636 p.
- [3] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear Waves in Elastic Media. US: CRC PR INC, 1995. 256 p.
- [4] Kobayashi A. S. Handbook on Experimental Mechanics. New York: Wiley, 1993. 1074 p.
- [5] Porubov A. V. Localization of nonlinear deformation waves. Moscow: Fizmatlit, 2009. 207 p. (in Russian).
- [6] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. Amsterdam: Elsevier, 2012. 617 p.
- [7] Kulikovskii A. G., ang A. Yu. Semenov N. V. P. Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems. Boca Raton: CRC Press, 2000. 560 p.
- [8] Ryskin N. M., Trubetskov D. I. Nonlinear Waves. Moscow: Fizmatlit, 2000. 272 p. (in Russian).
- [9] Nayfeh A. H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: Wiley-VCH, 1993. 536 p.
- [10] Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Reviews. 1995. Vol. 48, no. 1. P. 1–39.
- [11] Ragozina V. E., Ivanova J. E. On evolution equations for impact deformation problems with consideration of plane discontinuity surfaces // Computational Mechanics of Continuous Media. 2009. Vol. 2, no. 3. P. 82–95. (in Russian).

Ragozina Victoria Evgenievna, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Ivanova Yulia Evgenievna, Cand. Sci. Phys. & Math., Researcher, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.

-
- [12] Ragozina V. E., Ivanova Y. E. On the Impact Deformation of an Incompressible Half-Space under Action of a Shear Load of Variable Direction // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2014. Vol. 8, no. 3. P. 1–10.
- [13] Ragozina V. E., Ivanova Y. E. On the Asymptotic Representation of Multidimensional Problems Solutions of Shock Dynamics of Nonlinear Elastic Medium // *I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state*. 2014. no. 3(21). P. 131–143. (in Russian).
- [14] Burenin A. A., Rossikhin Y. A. The Effect of Viscosity on the Character of the Propagation of a Plane Longitudinal Shock Wave // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1990. Vol. 31, no. 6. P. 807–810.
- [15] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Verveiko N. D. Ray method for solving dynamic problems in elastic-viscoplastic media // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1973. Vol. 37, no. 1. P. 145–155. (in Russian).
- [16] Achenbach J. D., Reddy D. P. Note of wave propagation in lineary viscoelastic media // *ZAMP*. 1967. Vol. 18, no. 1. p. 141–144.
- [17] Thomas T. Y. *Plastic flow and fracture in solids*. New York: Academic Press, 1961. 267 p.
- [18] Burenin A. A., Rossikhin Y. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces of strong discontinuities // *Applied problems of the mechanics of deformable media*. Vladivostok: FEB USSR Academy of Sciences, 1991. P. 129–137. (in Russian).
- [19] Ivanova Y. E., Ragozina V. E. Solution of a Multidimensional Impact Deformation Problem for an Elastic Half-Space with Curved Boundary on the Basis of a Modified Ray Method // *Mech. Solids*. 2016. Vol. 51, no. 4. P. 484–493.
- [20] Burenin A. A. On one possibility of constructing approximate solutions of non-stationary problems of dynamics of elastic media under shock effects // *Far Eastern Mathematical Collection*. 1999. Vol. 8. P. 49–72. (in Russian).

Т. С. Алероев, М. В. Гасанов

ВОЗМУЩЕНИЕ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В данной работе представлено исследование рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. Учитывая авторскую разработку теоремы существования и единственности решения построена структура аналитического приближенного решения, для которой, в данной работе, было установлено влияние возмущения подвижной особой точки. Представленные теоретические положения подтверждены с помощью численного эксперимента. Для оптимизации априорных оценок применялась апостериорная оценка.

Ключевые слова: волновые процессы, эластичная балка, нелинейные дифференциальные уравнения, подвижная особая точка, аналитическое приближенное решение, априорная оценка.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.002

УДК: 539.374

1. Введение. Потребность развития физических наук, к изучению меняющихся процессов привело к возникновению и формированию основных понятий дифференциального и интегрального исчисления. Большинство процессов носит сложный характер, для описания которых возникает необходимость применения нелинейных дифференциальных уравнений.

В работе [1] проводится исследование волновых процессов в балке на основе уравнения третьего порядка, заданного в неявном виде. При этом предлагается классическая теория, которая не работает для случая нелинейных дифференциальных уравнений. Существенной особенностью таких уравнений являются подвижные особые точки, что

© Алероев Т. С., Гасанов М. В., 2021

Алероев Темирхан Султанович

e-mail: aleroevts@mgsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Гасанов Магомедюсуф Владимирович

e-mail: gasanovmv@mgsu.ru, преподаватель, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 10.10.2020

является препятствием для использования классической теории. Следует отметить, что нелинейные уравнения в данном случае относятся к категории, лишь в частном случае разрешимых в квадратурах. Это обстоятельство подчеркивает актуальность и новизну выполненных исследований в статье. В авторской публикации [2,3] приведено доказательство теоремы существования и единственности решения для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. Получена структура аналитического приближенного решения с априорными оценками и представлены численные эксперименты.

На данный момент существующая теория позволяет определять подвижные особые точки лишь приближенно. Это обстоятельство ставит перед исследователем задачу исследования влияния возмущения подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения. В данной публикации представлено теоретическое обоснование этой задачи.

Если в работах [2,3] дается развитие теоретического обоснования представленного ранее в работах [4–8], то в публикациях [9–14] представлен вариант, имеющий приложения нелинейных уравнений с подвижными особенностями для строительных конструкций консольного типа.

2. Результаты исследования. Ранее в работе [2] для точного решения задачи Коши

$$y''' = y^2 + r(x), \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2, \end{cases} \quad (2)$$

была получена структура аналитического приближенного решения:

$$y(x) = (x^* - x)^{-3} \sum_0^{\infty} C_n (x^* - x)^n. \quad (3)$$

Так как известные методы нахождения подвижных особых точек позволяют получить последние только приближенно, то возникает необходимость в решении задачи о влиянии погрешности подвижной особой точки на аналитическое приближенное решение (3). Поэтому получаем следующую структуру:

$$\tilde{y}(x) = (\tilde{x}^* - x)^{-3} \sum_0^{\infty} \tilde{C}_n (\tilde{x}^* - x)^n. \quad (4)$$

Следующая теорема позволяет обосновать влияние погрешности теоретически.

Теорема 1. *Требуем выполнения следующие условий:*

- 1) $r(x) \in C^\infty$ в области $|\tilde{x}^* - x| < \rho_1$, где $0 < \rho_1 = \text{const}$;
- 2) $\exists M_i : \frac{|r^{(n)}(\tilde{x}^*)|}{n!} \leq M_i, M_i = \text{const}$;
- 3) $\tilde{x}^* \leq x^*$;
- 4) известна оценка погрешности для значения $\tilde{x}^* : |\tilde{x}^* - x^*| \leq \Delta \tilde{x}^*$;
- 5) $\Delta \tilde{x}^* < 1/\sqrt[6]{M+1}$.

В этом случае приближенное решение (3) задачи (1)–(2) для любой из областей

$$\tilde{x}^* - \rho_2 < x < \tilde{x}^* - \Delta \tilde{x}^*, \quad (5)$$

$$\tilde{x}^* - \Delta \tilde{x}^* < x < \tilde{x}^* \quad (6)$$

будет иметь оценку погрешности

$$\Delta \tilde{y}_N \leq \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 \leq 60 \frac{\Delta \tilde{x}^* (3\alpha^2 + \alpha \Delta \tilde{x}^* + (\Delta \tilde{x}^*)^2)}{\alpha^6},$$

$$\Delta_1 = \frac{\Delta \tilde{x}^*}{1 - 2^6(M+1)\alpha^6} (2^{-2}\alpha^{-2} + 2^{-1}\alpha^{-1} + 1 + 2\alpha + 2^2\alpha^2 + 2^3\alpha^3(M+1)),$$

$$\Delta_2 \leq \frac{\Delta \tilde{x}^* \Delta M}{1 - 2^6(M+\Delta M+1)\alpha^6} (2^{-2}\alpha^{-2} + 2^{-1}\alpha^{-1} + 1 + 2\alpha + 2^2\alpha^2 + 2^3\alpha^3(M+\Delta M+1)),$$

$$\Delta_3 \leq \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \alpha^{N+1}}{1 - (M+1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4) + 120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1) + 120} + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N + 120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2) + 120} \right)$$

в случае $N+1 = 6n$,

$$\Delta_3 \leq \frac{(M+1)^{\frac{N}{6}} \alpha^{N+1}}{1 - (M+1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4) + 120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1) + 120} + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N + 120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2) + 120} \right)$$

для варианта $N+1 = 6n+1$,

$$\Delta_3 \leq \frac{(M+1)^{\frac{N-1}{6}} \alpha^{N+1}}{1 - (M+1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4) + 120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1) + 120} + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N + 120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2) + 120} \right)$$

при $N+1 = 6n+2$,

$$\Delta_3 \leq \frac{(M+1)^{\frac{N-2}{6}} \alpha^{N+1}}{1 - (M+1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4) + 120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1) + 120} + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N + 120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2) + 120} \right)$$

для случая $N+1 = 6n+3$,

$$\Delta_3 \leq \frac{(M+1)^{\frac{N-3}{6}} \alpha^{N+1}}{1 - (M+1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4) + 120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1) + 120} + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N + 120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2) + 120} \right)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120} +$$

$$+ \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}$$

при условии, что $N+1 = 6n+4$, и

$$\Delta_3 \leq \frac{(M+1)^{\frac{N-4}{6}} \alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \right.$$

$$+ \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120} +$$

$$\left. + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120} \right)$$

для $N+1 = 6n+5$, при этом

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{2\sqrt[6]{M+1}} \right\}, \quad M = \max \left\{ \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(\tilde{x}^*)|}{n!} \right\}, |y_0|, |y_1|, |y_2| \right\},$$

$$\Delta M = \left(\sup_n \left\{ \frac{|r^{(n+1)}(\tilde{x}^*)|}{n!} \right\} \right) \Delta \tilde{x}^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha = \begin{cases} |\tilde{x}^* - x| & \text{для } x \text{ из области (5),} \\ \Delta \tilde{x}^* & \text{для } x \text{ из области (6).} \end{cases}$$

Доказательство.

$$\Delta \tilde{y}_N(x) = |y(x) - \tilde{y}_N(x)| \leq |y(x) - \tilde{y}(x)| + |\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)|.$$

Оценим выражение:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = \left| \sum_0^\infty C_n(x^* - x)^{n-3} - \sum_0^\infty \tilde{C}_n(\tilde{x}^* - x)^{n-3} \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_0^\infty C_n(x^* - x)^{n-3} - \sum_0^\infty \tilde{C}_n(x^* - x)^{n-3} \right| + \left| \sum_0^\infty \tilde{C}_n(x^* - x)^{n-3} - \sum_0^\infty \tilde{C}_n(\tilde{x}^* - x)^{n-3} \right| \leq$$

$$\leq \sum_0^\infty |C_n - \tilde{C}_n| |x^* - x|^{n-3} + \sum_0^\infty |\tilde{C}_n| |(x^* - x)^{n-3} - (\tilde{x}^* - x)^{n-3}| \leq$$

$$\leq \sum_0^\infty |C_n - \tilde{C}_n| |x^* - x|^{n-3} + \sum_0^\infty |\tilde{C}_n| |(\tilde{x}^* - x + \Delta \tilde{x}^*)^{n-3} - (\tilde{x}^* - x)^{n-3}|.$$

А так как

$$|\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)| = \left| \sum_0^\infty \tilde{C}_n(\tilde{x}^* - x)^{n-3} - \sum_0^N \tilde{C}_n(\tilde{x}^* - x)^{n-3} \right| =$$

$$= \left| \sum_{N+1}^\infty \tilde{C}_n(\tilde{x}^* - x)^{n-3} \right| \leq \sum_{N+1}^\infty |\tilde{C}_n| |\tilde{x}^* - x|^{n-3},$$

то для $\Delta\tilde{y}_N(x)$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{y}_N(x) &\leq \sum_0^{\infty} |C_n - \tilde{C}_n| |x^* - x|^{n-3} + \\ &+ \sum_0^{\infty} |\tilde{C}_n| |(\tilde{x}^* - x + \Delta\tilde{x}^*)^{n-3} - (\tilde{x}^* - x)^{n-3}| + \sum_{N+1}^{\infty} |\tilde{C}_n| |\tilde{x}^* - x|^{n-3} \end{aligned}$$

или, с учетом того, что

$$C_0 = -60, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = 0,$$

$$C_6 = \frac{A_0}{126}, \quad C_7 = \frac{A_1}{144}, \quad C_8 = \frac{A_2}{180}, \quad C_9 = \frac{A_3}{240}, \quad C_{10} = \frac{A_4}{330}, \quad C_{11} = \frac{A_5}{456}, \quad \dots,$$

имеем

$$\Delta\tilde{C}_0 = \Delta\tilde{C}_1 = \dots = \Delta\tilde{C}_5 = 0,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{y}_N(x) &\leq |\tilde{C}_0| \left| \frac{1}{((\tilde{x}^* - x) + \Delta\tilde{x}^*)^3} - \frac{1}{(\tilde{x}^* - x)^3} \right| + \\ &+ \sum_6^{\infty} |\tilde{C}_n| |(\tilde{x}^* - x + \Delta\tilde{x}^*)^{n-3} - (\tilde{x}^* - x)^{n-3}| + \sum_6^{\infty} |\Delta\tilde{C}_n| |x^* - x|^{n-3} + \\ &+ \sum_{N+1}^{\infty} |\tilde{C}_n| |\tilde{x}^* - x|^{n-3} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= |\tilde{C}_0| \left| \frac{1}{((\tilde{x}^* - x) + \Delta\tilde{x}^*)^3} - \frac{1}{(\tilde{x}^* - x)^3} \right| = 60 \left| \frac{(\tilde{x}^* - x)^3 - ((\tilde{x}^* - x) + \Delta\tilde{x}^*)^3}{((\tilde{x}^* - x) + \Delta\tilde{x}^*)^3 (\tilde{x}^* - x)^3} \right| \leq \\ &\leq 60 \frac{\Delta\tilde{x}^* (3|\tilde{x}^* - x|^2 + |\tilde{x}^* - x| \Delta\tilde{x}^* + (\Delta\tilde{x}^*)^2)}{|\tilde{x}^* - x|^6} \leq 60 \frac{\Delta\tilde{x}^* (3\alpha^2 + \alpha\Delta\tilde{x}^* + (\Delta\tilde{x}^*)^2)}{\alpha^6}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \begin{cases} |\tilde{x}^* - x| & \text{для } x \text{ из области (5),} \\ \Delta\tilde{x}^* & \text{для } x \text{ из области (6).} \end{cases}$$

Оценим Δ_1 . С учетом структуры оценок C_n [2]

$$|C_{6n}| \leq \frac{1}{(6n-3)(6n-4)(6n-5) + 120} (M+1)^n = V_{6n},$$

$$|C_{6n+1}| \leq \frac{1}{(6n-2)(6n-3)(6n-4) + 120} (M+1)^n = V_{6n+1},$$

$$|C_{6n+2}| \leq \frac{1}{(6n-1)(6n-2)(6n-3) + 120} (M+1)^n = V_{6n+2},$$

$$|C_{6n+3}| \leq \frac{1}{6n(6n-1)(6n-2) + 120} (M+1)^n = V_{6n+3},$$

$$|C_{6n+4}| \leq \frac{1}{(6n+1)(6n-1)6n + 120} (M+1)^n = V_{6n+4},$$

$$|C_{6n+5}| \leq \frac{1}{(6n+2)(6n+1)6n + 120} (M+1)^n = V_{6n+5}$$

и ограниченности производных в силу пункта 2 настоящей теоремы, получаем

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \sum_6^\infty |\tilde{C}_n| |(\tilde{x}^* - x + \Delta\tilde{x}^*)^{n-3} - (\tilde{x}^* - x)^{n-3}| \leq \\
&\leq \sum_6^\infty |\tilde{C}_n| |\Delta\tilde{x}^*(n-3)(\tilde{x}^* - x + \Delta\tilde{x}^*)^{n-4}| = \sum_0^\infty 2^{6n-2} |\tilde{C}_{6n+1}| |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n-2}| + \\
&\quad + \sum_0^\infty 2^{6n-1} |\tilde{C}_{6n+2}| |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n-1}| + \sum_0^\infty 2^{6n} |\tilde{C}_{6n+3}| |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n}| + \\
&\quad + \sum_0^\infty 2^{6n+1} |\tilde{C}_{6n+4}| |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+1}| + \sum_0^\infty 2^{6n+2} |\tilde{C}_{6n+5}| |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+2}| + \\
&\quad + \sum_0^\infty 2^{6n+3} |\tilde{C}_{6n+6}| |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+3}| \leq \\
&\leq \sum_0^\infty 2^{6n-2} \frac{(M+1)^n}{(6n-2)(6n-3)(6n-4) + 120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n-2}| + \\
&\quad + \sum_0^\infty 2^{6n-1} \frac{(M+1)^n}{(6n-1)(6n-2)(6n-3) + 120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n-1}| + \\
&\quad + \sum_0^\infty 2^{6n} \frac{(M+1)^n}{6n(6n-1)(6n-2) + 120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n}| + \\
&\quad + \sum_0^\infty 2^{6n+1} \frac{(M+1)^n}{(6n+1)(6n-1)6n + 120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+1}| + \\
&\quad + \sum_0^\infty 2^{6n+2} \frac{(M+1)^n}{(6n+2)(6n+1)6n + 120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+2}| + \\
&\quad + \sum_0^\infty 2^{6n+3} \frac{(M+1)^{n+1}}{(6n+3)(6n+2)(6n+1) + 120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+3}| \leq \\
&\leq \frac{2^{-2}\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|^{-2}}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{2^{-1}\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|^{-1}}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{\Delta\tilde{x}^*}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} + \\
&\quad + \frac{2\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{2^2\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|^2}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{2^3\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|^3(M+1)}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} = \\
&= \frac{\Delta\tilde{x}^*}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} (2^{-2}|\tilde{x}^* - x|^{-2} + 2^{-1}|\tilde{x}^* - x|^{-1} + \\
&\quad + 1 + 2|\tilde{x}^* - x| + 2^2|\tilde{x}^* - x|^2 + 2^3|\tilde{x}^* - x|^3(M+1)).
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\Delta_1 \leq \frac{\Delta\tilde{x}^*}{1 - 2^6(M+1)\alpha^6} (2^{-2}\alpha^{-2} + 2^{-1}\alpha^{-1} + 1 + 2\alpha + 2^2\alpha^2 + 2^3\alpha^3(M+1))$$

в области $\alpha \leq 1/(2\sqrt[6]{M+1})$.

Переходим к оценке Δ_2 . Необходимо доказать справедливость оценок для $\Delta\tilde{C}_{6n}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+1}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+2}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+3}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+4}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+5}$:

$$\begin{aligned} |\Delta C_{6n}| &\leq \frac{\Delta M}{(6n-3)(6n-4)(6n-5)+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n}, \\ |\Delta C_{6n+1}| &\leq \frac{\Delta M}{(6n-2)(6n-3)(6n-4)+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+1}, \\ |\Delta C_{6n+2}| &\leq \frac{\Delta M}{(6n-1)(6n-2)(6n-3)+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+2}, \\ |\Delta C_{6n+3}| &\leq \frac{\Delta M}{6n(6n-1)(6n-2)+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+3}, \\ |\Delta C_{6n+4}| &\leq \frac{\Delta M}{(6n+1)(6n-1)6n+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+4}, \\ |\Delta C_{6n+5}| &\leq \frac{\Delta M}{(6n+2)(6n+1)6n+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+5}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta M = \left(\sup_n \left\{ \frac{|r^{(n+1)}(\tilde{x}^*)|}{n!} \right\} \right) \Delta \tilde{x}^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

С учетом доказанной ранее теоремы существования и единственности решения имеем рекуррентное соотношение:

- 1) $n + \rho - 3 = n + 2\rho$;
- 2) $(n-3)(n-4)(n-5)C_n = C_n^* + A_{n-6}$, где $C_n^* = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$.

Докажем справедливость оценок для случая $\Delta\tilde{C}_{6n+6}$:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{C}_{6n+6} &= |\tilde{C}_{6n+6} - C_{6n+6}| = \left| \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120}(\tilde{C}_{6n+6}^* + A_{n-6}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120}(C_{6n+6}^* + A_{n-6}) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120} \left| \sum_{i=0}^{6n+6} \tilde{C}_i \tilde{C}_{6n+6-i} - \sum_{i=0}^{6n+6} C_i C_{6n+6-i} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120} \times \\ &\quad \times \left| \sum_{i=0}^{6n+6} (C_i + \Delta\tilde{C}_i)(C_{6n+6-i} + \Delta\tilde{C}_{6n+6-i}) - \sum_{i=0}^{6n+6} C_i C_{6n+6-i} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120} \times \\ &\times \left| \sum_{i=0}^{6n+6} (C_i C_{6n+6-i} + C_i \Delta\tilde{C}_{6n+6-i} + \Delta\tilde{C}_i C_{6n+6-i} + \Delta\tilde{C}_i \Delta\tilde{C}_{6n+6-i}) - \sum_{i=0}^{6n+6} C_i C_{6n+6-i} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120} \times \end{aligned}$$

$$\times \left| \sum_{i=0}^{6n+6} \left(C_i \Delta \tilde{C}_{6n+6-i} + \Delta \tilde{C}_i C_{6n+6-i} + \Delta \tilde{C}_i \Delta \tilde{C}_{6n+6-i} \right) \right|.$$

После ряда преобразований получаем оценку для $\Delta \tilde{C}_{6n+6}$:

$$\Delta \tilde{C}_{6n+6} \leq \frac{\Delta M}{(6n+2)(6n+2)(6n+1) + 120} (M + \Delta M + 1)^{n+1}.$$

Таким же образом показываем справедливость оценок для $\Delta \tilde{C}_{6n+1}$, $\Delta \tilde{C}_{6n+2}$, $\Delta \tilde{C}_{6n+3}$, $\Delta \tilde{C}_{6n+4}$, $\Delta \tilde{C}_{6n+5}$.

Переходим к оценке для Δ_2 :

$$\begin{aligned} & \sum_6^{\infty} |\Delta \tilde{C}_n| |\tilde{x}^* - x + \Delta \tilde{x}^*|^{n-3} = \sum_0^{\infty} 2^{6n-2} |\Delta \tilde{C}_{6n+1}| |(\tilde{x}^* - x)^{6n-2}| + \\ & + \sum_0^{\infty} 2^{6n-1} |\Delta \tilde{C}_{6n+2}| |(\tilde{x}^* - x)^{6n-1}| + \sum_0^{\infty} 2^{6n} |\Delta \tilde{C}_{6n+3}| |(\tilde{x}^* - x)^{6n}| + \\ & + \sum_0^{\infty} 2^{6n+1} |\Delta \tilde{C}_{6n+4}| |(\tilde{x}^* - x)^{6n+1}| + \sum_0^{\infty} 2^{6n+2} |\Delta \tilde{C}_{6n+5}| |(\tilde{x}^* - x)^{6n+2}| + \\ & + \sum_0^{\infty} 2^{6n+3} |\Delta \tilde{C}_{6n+6}| |(\tilde{x}^* - x)^{6n+3}| \leq \\ & \leq \sum_0^{\infty} 2^{6n-2} \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^n}{(6n-2)(6n-3)(6n-4) + 120} |(\tilde{x}^* - x)^{6n-2}| + \\ & + \sum_0^{\infty} 2^{6n-1} \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^n}{(6n-1)(6n-2)(6n-3) + 120} |(\tilde{x}^* - x)^{6n-1}| + \\ & + \sum_0^{\infty} 2^{6n} \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^n}{6n(6n-1)(6n-2) + 120} |(\tilde{x}^* - x)^{6n}| + \\ & + \sum_0^{\infty} 2^{6n+1} \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^n}{(6n+1)6n(6n-1) + 120} |(\tilde{x}^* - x)^{6n+1}| + \\ & + \sum_0^{\infty} 2^{6n+2} \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^n}{(6n+2)(6n+1)6n + 120} |(\tilde{x}^* - x)^{6n+2}| + \\ & + \sum_0^{\infty} 2^{6n+3} \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^{n+1}}{(6n+3)(6n+2)(6n+1) + 120} |(\tilde{x}^* - x)^{6n+3}| \leq \\ & \leq \frac{2^{-2} \Delta M |\tilde{x}^* - x|^{-2}}{1 - 2^6 (M + \Delta M + 1) |\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{2^{-1} \Delta M |\tilde{x}^* - x|^{-1}}{1 - 2^6 (M + \Delta M + 1) |\tilde{x}^* - x|^6} + \\ & + \frac{\Delta M}{1 - 2^6 (M + \Delta M + 1) |\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{2 \Delta M |\tilde{x}^* - x|}{1 - 2^6 (M + \Delta M + 1) |\tilde{x}^* - x|^6} + \\ & + \frac{2^2 \Delta M |\tilde{x}^* - x|^2}{1 - 2^6 (M + \Delta M + 1) |\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{2^3 \Delta M |\tilde{x}^* - x|^3 (M + \Delta M + 1)}{1 - 2^6 (M + \Delta M + 1) |\tilde{x}^* - x|^6} = \\ & = \frac{\Delta \tilde{x}^* \Delta M}{1 - 2^6 (M + \Delta M + 1) |\tilde{x}^* - x|^6} (2^{-2} |\tilde{x}^* - x|^{-2} + 2^{-1} |\tilde{x}^* - x|^{-1} + \end{aligned}$$

$$+ 1 + 2|\tilde{x}^* - x| + 2^2|\tilde{x}^* - x|^2 + 2^3|\tilde{x}^* - x|^3(M + \Delta M + 1)).$$

Окончательно для Δ_2 получаем оценку

$$\Delta_2 \leq \frac{\Delta \tilde{x}^* \Delta M}{1 - 2^6(M + \Delta M + 1)\alpha^6} (2^{-2}\alpha^{-2} + 2^{-1}\alpha^{-1} + 1 + 2\alpha + 2^2\alpha^2 + 2^3\alpha^3(M + \Delta M + 1)).$$

При оценке Δ_3 воспользуемся результатом доказанной теоремы об априорной погрешности аналитического приближенного решения [2], на основании которого в случае $N + 1 = 6n$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta_3 \leq & \frac{(M + 1)^{\frac{N+1}{6}} \alpha^{N-1}}{1 - (M + 1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N - 2)(N - 3)(N - 4) + 120} + \right. \\ & + \frac{\alpha}{(N - 1)(N - 2)(N - 3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N - 1)(N - 2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N + 1)N(N - 1) + 120} + \\ & \left. + \frac{\alpha^4}{(N + 1)(N + 2)N + 120} + \frac{\alpha^5}{(N + 1)(N + 3)(N + 2) + 120} \right), \end{aligned}$$

а так же для случая $N + 1 = 6n + 1$:

$$\begin{aligned} \Delta_3 \leq & \frac{(M + 1)^{\frac{N}{6}} \alpha^{N+1}}{1 - (M + 1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N - 2)(N - 3)(N - 4) + 120} + \right. \\ & + \frac{\alpha}{(N - 1)(N - 2)(N - 3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N - 1)(N - 2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N + 1)N(N - 1) + 120} + \\ & \left. + \frac{\alpha^4}{(N + 1)(N + 2)N + 120} + \frac{\alpha^5}{(N + 1)(N + 3)(N + 2) + 120} \right), \end{aligned}$$

для варианта $N + 1 = 6n + 2$ следует

$$\begin{aligned} \Delta_3 \leq & \frac{(M + 1)^{\frac{N-1}{6}} \alpha^{N+1}}{1 - (M + 1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N - 2)(N - 3)(N - 4) + 120} + \right. \\ & + \frac{\alpha}{(N - 1)(N - 2)(N - 3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N - 1)(N - 2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N + 1)N(N - 1) + 120} + \\ & \left. + \frac{\alpha^4}{(N + 1)(N + 2)N + 120} + \frac{\alpha^5}{(N + 1)(N + 3)(N + 2) + 120} \right), \end{aligned}$$

при $N + 1 = 6n + 3$ будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_3 \leq & \frac{(M + 1)^{\frac{N-2}{6}} \alpha^{N+1}}{1 - (M + 1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N - 2)(N - 3)(N - 4) + 120} + \right. \\ & + \frac{\alpha}{(N - 1)(N - 2)(N - 3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N - 1)(N - 2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N + 1)N(N - 1) + 120} + \\ & \left. + \frac{\alpha^4}{(N + 1)(N + 2)N + 120} + \frac{\alpha^5}{(N + 1)(N + 3)(N + 2) + 120} \right), \end{aligned}$$

для случая $N + 1 = 6n + 4$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta_3 \leq & \frac{(M + 1)^{\frac{N-3}{6}} \alpha^{N+1}}{1 - (M + 1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N - 2)(N - 3)(N - 4) + 120} + \right. \\ & + \frac{\alpha}{(N - 1)(N - 2)(N - 3) + 120} + \frac{\alpha^2}{N(N - 1)(N - 2) + 120} + \frac{\alpha^3}{(N + 1)N(N - 1) + 120} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120} \Big),$$

а при условии, что $N+1 = 6n+5$ справедлива оценка

$$\Delta_3 \leq \frac{(M+1)^{\frac{N-4}{6}} \alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6} \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120} \right),$$

при этом

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}} \right\}, \quad M = \max \left\{ \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(\tilde{x}^*)|}{n!} \right\}, |y_0|, |y_1|, |y_2| \right\}.$$

Теорема доказана. \square

3. Численный эксперимент. Рассмотрим задачу Коши (1)–(2): $r(x) \equiv 0$, $y(0) = 100$, $y'(0) = 75$, $y''(0) = 90$, с приближенным значением возмущенной подвижной особой точки $\tilde{x}^* = 0,9962$, $\Delta\tilde{x}^* = 0,0002$. Рассматривается структура приближенного решения (4) \tilde{y}_N , где x_1 соответствует области указанной в теореме при $\rho_2 = 0,354$. Значения численного расчета задачи Коши (1)–(2) приведены в табл. 1, где $\tilde{y}_9(x_1)$ — аналитически приближенное решение (4); Δ — априорная оценка погрешности, полученная по теореме 1; Δ_1 — апостериорная оценка.

Таблица 1. Результаты численного расчета для аналитически приближенного решения

x_1	$\tilde{y}_9(x_1)$	Δ	Δ_1
0,7	2306,98928	0,0007	0,00005

Для $\Delta_1 = 0,00005$ в структуре приближенного решения (4) требуется $N = 12$. Так как слагаемые с 10 по 12 в структуре приближенного решения не превышают $\varepsilon = 0,00005$, то можно утверждать, что значение аналитического приближенного решения $\tilde{y}_9(x_1)$ имеет точность $\varepsilon = 0,00005$.

4. Заключение. В статье дано развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особенностями. Представлено исследование задачи о влиянии погрешности подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения. Полученные результаты подтверждены численными расчетами и оптимизированы с помощью апостериорной оценки. Представленные исследования являются одним из этапов в развитии теории нелинейных дифференциальных уравнений и их приложений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. no. 56. P. 2507–2514.
- [2] Орлов В. Н., Гасанов М. В. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью седьмой степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник ЧГУУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1(43). С. 92–99. doi: 10.37972/chg.pu.2020.43.1.011 18.

- [3] Гасанов М. В. Тестирование одного класса нелинейного дифференциального уравнений в окрестности подвижной особой точки // Сб. науч. тр. по мат. XXVII Междунар. науч. конф. “Научные тенденции: вопросы точных и технических наук” (2020 г.). doi: 10.18411/sciencepublic-12-05-2020-06, idsp: sciencepublic-12-05-2020-06.
- [4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. no. 365. doi: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.
- [5] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // Int. J. of Modeling, Simulation and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3, 2050026. World Scientific Publishing Company. doi: 10.1142/S1793962320500269.
- [6] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russ.) doi: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
- [7] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. no. 456. 012122 IOP Publishing. doi: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
- [8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. 2019. no. 97. 03031. XXII Int. Sci. Conf. “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). doi: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703031>.
- [9] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. Conf. Series 1425 012127. IOP Publishing. doi: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703036>.
- [10] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. Conf. Series 1425 012129. IOP Publishing. doi: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.
- [11] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. Москва: МПГУ, 2013. 174 с.
- [12] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4(35). С. 23–32.
- [13] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2020. Т. 2. doi:10.14498/vsgtu1727.
- [14] Ив Б. Б. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 4. С. 980–986. doi: <https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2018.4.6>.

T. S. Aleroev, M. V. Gasanov

INDIGNATION MOVING SINGULARITY AND ANALYTICAL APPROXIMATE SOLUTION OF A NONLINEAR THIRD-ORDER EQUATIONS

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. This paper presents a study of one class of nonlinear differential equations with movable singular points. On the basis of the previously proved theorem of existence and uniqueness of the solution, the structure of the analytical approximate solution was obtained, for which, in this work, the influence of the perturbation of a moving singular point was established. Results are tested using a numerical experiment. To optimize the prior estimates, the posterior estimate was used.

Keywords: wave processes, elastic beam, nonlinear differential equations, moving singular point, analytical approximate solution, a priori estimate.

REFERENCES

- [1] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. no. 56. P. 2507–2514.
- [2] Orlov V. N., Gasanov M. V. Existence theorem for a solution of a class of nonlinear differential equations of the third order with a polynomial right-hand side of the seventh degree in a neighborhood of a moving singular point // *Bulletin of ChGPU im. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics*. 2020. no. 1(43). P. 92–99. (in Russian). doi: 10.37972/chg.pu.2020.43.1.011 18.
- [3] Gasanov M. V. Testing one class of nonlinear differential equations in the vicinity of a moving singular point // *Collection of scientific papers based on the materials of the XXVII international scientific conference “Scientific trends: Questions of exact and technical sciences” (2020)*. (in Russian). doi: 10.18411/sciencepublic-12-05-2020-06, idsp: sciencepublic-12-05-2020-06.
- [4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. no. 365. doi: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.
- [5] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // *Int. J. of Modeling, Simulation and Scientific Computing*. 2020. Vol. 11, no. 3, 2050026. World Scientific Publishing Company. doi: 10.1142/S1793962320500269.
- [6] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]*. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russian). doi: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
- [7] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2018. no. 456. 012122 IOP Publishing. doi: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
- [8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // *E3S Web Conf*. 2019. no. 97. 03031. XXII Int. Sci. Conf. “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). doi: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703031>.
- [9] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // *IOP Conf. Series: Journal of Physics*. 2020. Conf. Series 1425 012127. IOP Publishing. doi: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703036>.
- [10] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // *IOP Conf. Series: Journal of Physics*. 2020. Conf. Series 1425 012129. IOP Publishing. doi: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.
- [11] Orlov V. N. Method of approximate solution of the first, second differential equations of Painlevé and Abel. Moscow: MPGU, 2013. 174 p. (in Russian).
- [12] Orlov V. N. Investigation of the approximate solution of the differential Abel equation in the vicinity of a moving singular point // *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Series: Natural Sciences*. 2009. no. 4(35). P. 23–32. (in Russian).
- [13] Orlov V. N., Leontyeva T. Y. On the expansion of the domain for the analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations of the second order in the complex domain // *Bulletin of the Samara State tech. university. Ser.: Phys.-mat. Science*. 2020. Vol. 2. (in Russian). doi:10.14498/vsgtu1727.
- [14] Yves B. B. Existence theorem for a solution of one class of nonlinear differential equations of the fourth order with polynomial right-hand side of the second degree in the vicinity of a moving singular point // *Bulletin of the Bashkir University*. 2018. Vol. 23, no. 4. P. 980–986. (in Russian). doi: <https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2018.4.6>.

Aleroev Temirkhan Sultanovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Gasanov Magomedysuf Vladimirovich, Teacher, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

О. П. Ткаченко

УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРУБОПРОВОДА С ИЗЛОМОМ ПРОФИЛЯ

Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск, Россия

Аннотация. Сформулирована замкнутая краевая задача расчета напряженно-деформированного состояния трубопровода как оболочки Власова с линией излома поверхности. Выведены разрешающие уравнения оболочки в перемещениях в избранной криволинейной системе координат; в локальных координатах, связанных с линией излома, выведены кинематические условия сопряжения; на линии излома поверхности наложены и доказаны условия сопряжения для моментов и усилий в оболочке. Условия сопряжения выведены в перемещениях оболочки на линии излома, не являющейся координатной линией. Доказано наличие сингулярности в условиях сопряжения. Установлена согласованность результатов численного анализа с известными результатами.

Ключевые слова: оболочка, линия излома, сингулярность, трубопровод, напряженно-деформированное состояние.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.003

УДК: 539.384

Введение

Современные трубопроводы содержат системы труб, соединенные между собой многочисленными стыками и врезками. Расчет напряжений в этих соединениях, а также при их ослаблении, представляет собой сложную научно-техническую задачу [1]. Изломы профиля трубопровода происходят и под действием смещения грунта вследствие землетрясения, см., например [2].

Таким образом, задачи расчета напряженно-деформированного состояния трубы в окрестности мест излома профиля трубопровода актуальны.

Вопрос о целесообразности рассмотрения труб как оболочек был поднят в статье [3]. Были установлены пределы применимости стержневой и оболочечной моделей для одного класса задач о трубопроводах, а именно, проблеме туннелирования, когда труба непосредственно укладывается в грунт. Было указано на ограничения стержневой

© Ткаченко О. П., 2020

Ткаченко Олег Павлович

e-mail: olegt1964@gmail.com, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 21-11-00039.

Поступила 06.05.2020

модели для рассмотренного круга задач, так как в сущности трубопровод представляет собой трехмерную структуру, со всех сторон окруженную внешней средой.

Эта дискуссия о пределах применимости различных математических моделей для подземных трубопроводов была продолжена в статье [2]. В этой работе был исследован излом трубопровода при обратном сдвиге грунта, его пределы прочности и закритическое поведение, что невозможно было бы сделать по стержневой модели.

При наличии в оболочке линий излома возникают области концентрации напряжений. Одним из первых проблему корректного наложения условий сопряжения на линии излома исследовал А.Л. Гольденвейзер, см. монографию [4]. В этом труде рассматривается соединение двух оболочек по острому углу, в отличие от плавно сопряженных оболочек, рассмотренных в [5]. В труде [4] установлено, что задача формулировки корректных условий сопряжения на линиях излома поверхностей оболочек не является тривиальной, и развиваются асимптотические методы ее решения.

Позднее были предприняты многочисленные попытки улучшить теорию врезки труб в рамках теории пологих оболочек для различных соотношений r/R . Например, в работе [6] выполнен анализ напряжений для цилиндрических оболочек с нормально пересекающимися соплами, подвергающихся моментным нагрузкам на концах оболочек с соотношением диаметров $r/R \leq 0.8$. Решение в терминах функции перемещений основано на уравнениях Гольденвейзера, это решение в главном компоненте основано на мембранной теории оболочек.

Современным направлением является развитие математических моделей труб, содержащих жидкость, как оболочек Коитера слабой регулярности. Это направление развито в работе J. Тамбаца [7]. Поверхность оболочки в этом случае параметризована функцией из $W^{1,\infty}$. В недеформированной геометрии моделируемого объекта углы содержатся в постановке задачи. Эта новая модель связана с известными моделями оболочки двумя способами. В первом показано, что асимптотически модель ведет себя как модель мембраны или модель изгибающей оболочки в соответствующем режиме. Во втором способе члены в слабой формулировке модели связываются с членами в классической модели оболочки Нагди для достаточно гладких участков средней поверхности. Здесь возможно использовать идею А.Л. Гольденвейзера [4] о суммировании напряженно-деформированного состояния оболочки из мембранного и изгибающего напряженного состояния, так как имеем оболочку Коитера [8].

Идеи теории оболочек Коитера и Нагди слабой регулярности применены в статье [9]. Эта работа посвящена взаимодействию жидкости со структурой (FSI) между изогнутой коронарной артерией с имплантированным стентом, пульсирующим кровотоком и сокращением сердца. Это вычислительное исследование, в котором поведение различных геометрий стентов, имплантированных в изогнутые коронарные артерии, изучается с использованием полного FSI.

Как правило, публикации по тематике врезки в трубопроводах развивают смешанный подход к исследованию стыковых соединений оболочек. При этом подходе уравнения и условия сопряжения содержат как перемещения, так и силовые факторы. Это позволяет не исследовать особенности напряжений, возникающие в местах стыка, не сталкиваясь с трудностями, описанными в [7, 9]. Но, как известно из теории упругости [10], в вершинах входящих углов функции, описывающие напряжения и деформации, имеют особенности. Очевидно, что эти особенности должны присутствовать и в математической модели металлической трубы как оболочки. Для построения такой модели

необходимо придерживаться единого подхода к выводу уравнений и условий сопряжения, при котором они будут содержать в качестве неизвестных функций либо только напряжения, либо перемещения. Подход, при котором неизвестными функциями являются перемещения, развит в работах W.T. Koiter [8] и В.З. Власова [11].

Ранее была построена и численно проанализирована математическая модель трубопровода как полубезмоментной цилиндрической оболочки, изогнутой по своей образующей [12]. Помимо этого, изучены колебания различных изогнутых трубопроводов, рассматриваемых как оболочки [13, 14]. Построена математическая модель трубопровода как моментной оболочки с плавным изгибом осевой линии [15]. Там же предложен алгоритм поиска приближенных решений уравнений этой модели, позволяющий свести задачу к одномерной постановке.

Заметим, что в ранее созданной модели [15] параметр кривизны осевой линии был малым параметром, и по нему проводилось разложение решения в асимптотический ряд. Сейчас этот параметр, напротив, стремится к бесконечности в окрестности линии излома, что дает особенность в самой постановке задачи.

Целью данной работы является построение математической модели трубопровода как полностью моментной оболочки Коитера-Власова с линиями излома поверхности в местах контакта сегментов трубопровода. Главная проблема — нахождение условий сопряжения на линии излома, при условии, что эти линии не совпадают с координатными линиями.

Были поставлены задачи:

1. Вывести уравнения равновесия системы труб как пересекающихся по линии излома моментных оболочек Власова.
2. Выразить усилия на косых сечениях трубы как функции перемещений оболочки.
3. Наложить условия сопряжения на линии стыка труб для перемещений и угла поворота нормали.
4. Наложить условия сопряжения для изгибающих моментов, сдвиговых усилий, поперечных и нормальных усилий.

Также было показано наличие точек особенности решения на линии соединения сегментов трубопровода, как теоретически, так и на численном примере.

1. Геометрические свойства системы

Моделируемый объект представляет собой две цилиндрические металлические трубы, соединенные под прямым углом. Обе трубы имеют одинаковые радиусы и толщину стенки.

Обозначим:

h — толщина стенки трубы; R_i — внутренний радиус трубы; R_e — внешний радиус трубы; L_1, L_2 — длины первого и второго участков труб вдоль осевой линии, соответственно; $R_0 = 0.5(R_e + R_i)$ — радиус срединной поверхности трубы; \mathcal{L} — линия пересечения срединных поверхностей двух труб.

Под пересечением труб далее понимается поверхность стыкового соединения двух цилиндрических труб, или линия стыкового соединения их срединных поверхностей, в зависимости от контекста.

Соединенные участки трубопровода ниже называются сегментами ① и ②.

Введем декартову систему координат $(O; x, y, z)$, начало O которой совместим с одним из торцев соединенных труб. При этом плоскость (y, O, z) совпадает с плоскостью торца, которому принадлежит начало координат, рис. 4(а).

Следовательно, ось (Ox) совпадает с осевой линией сегмента ①. Уравнение осевой линии сегмента ② следует из элементарной геометрии:

$$x = L_1 \tag{1}$$

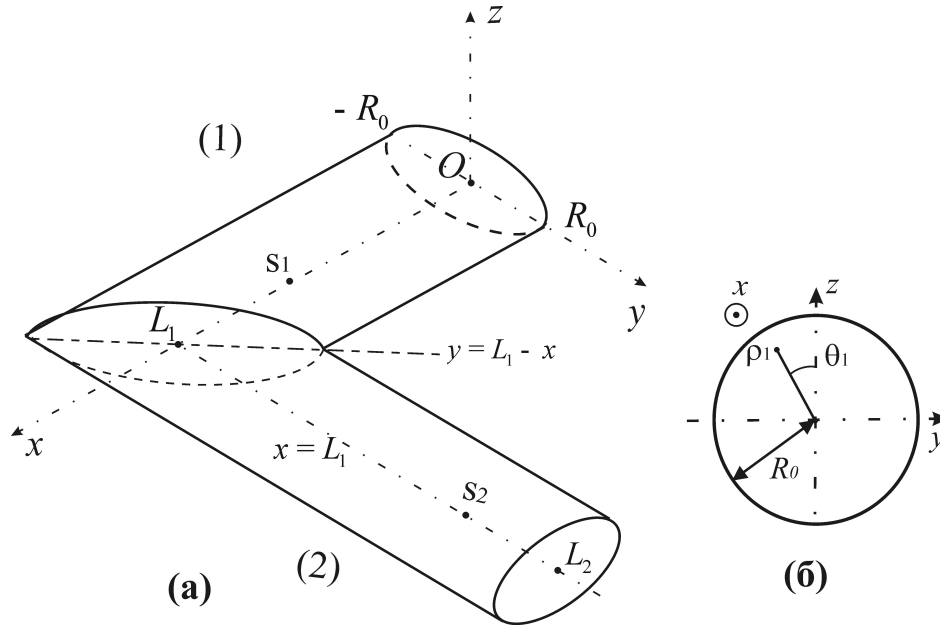


Рис. 1. Глобальные декартовы координаты для трубы со стыком. Две системы цилиндрических координат и полярные координаты в поперечном сечении трубы.

Для каждого сегмента мы введем отдельную цилиндрическую систему координат, рис. 4(б).

Очевидно, что в декартовых координатах уравнение плоскости пересечения сегментов имеет вид:

$$x + y - L_1 = 0. \tag{2}$$

Из (1), (2) и формул связи цилиндрических и декартовых координат [16] последовательно получим следующие геометрические соотношения.

Формулы связи декартовых и цилиндрических координат:

Сегмент ①, рис. 4(б):

$$x = s_1, \quad y = -\rho_1 \sin \theta_1, \quad z = \rho_1 \cos \theta_1; \quad x \leq L_1 - y, \quad s_1 \leq L_1 + \rho_1 \sin \theta_1. \tag{3}$$

Сегмент ②:

$$x = L_1 + \rho_2 \sin \theta_2, \quad y = s_2, \quad z = \rho_2 \cos \theta_2; \quad y \geq L_1 - x, \quad s_2 \geq -\rho_2 \sin \theta_2. \tag{4}$$

Заметим, что (3), (4) включают ограничения на декартовы координаты срединной поверхности. На срединной поверхности выполнены соотношения: $\rho_i = R_0$, где $i = 1, 2$.

Отсюда следуют выражения для радиус-векторов точек трубы:

Сегмент ①:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}s_1 - \mathbf{j}\rho_1 \sin \theta_1 + \mathbf{k}\rho_1 \cos \theta_1.$$

Сегмент ②:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}(L_1 + \rho_2 \sin \theta_2) + \mathbf{j}s_2 + \mathbf{k}\rho_2 \cos \theta_2.$$

Фиксируя нумерацию криволинейных координат:

$$x_1 = s, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \rho, \quad (5)$$

и находя единичные векторы базиса криволинейной системы координат по формулам [17], получим единичные векторы базиса:

Сегмент ②:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{i} \cos \theta_2 - \mathbf{k} \sin \theta_2, \quad \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{i} \sin \theta_2 + \mathbf{k} \cos \theta_2. \quad (6)$$

Сегмент ①:

$$\mathbf{e}_1^1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2^1 = -\mathbf{j} \cos \theta_1 - \mathbf{k} \sin \theta_1, \quad \mathbf{e}_3^1 = -\mathbf{j} \sin \theta_1 + \mathbf{k} \cos \theta_1. \quad (7)$$

Компоненты метрического тензора и коэффициенты Ламе равны [11, 17]:

$$\begin{aligned} g_{11}^{(i)} &= 1, & g_{22}^{(i)} &= \rho_i^2, & g_{33}^{(i)} &= 1; \\ g^{11(i)} &= 1, & g^{22(i)} &= \frac{1}{\rho_i^2}, & g^{33(i)} &= 1; \end{aligned} \quad (8)$$

$$H_1^{(i)} = 1, \quad H_2^{(i)} = \rho_i, \quad H_3^{(i)} = 1; \quad i = 1, 2.$$

Из (8) при $\rho_i = R_0$ следуют формулы для коэффициентов первой квадратичной формы срединных поверхностей $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ и кривизн срединных поверхностей $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$ цилиндрических труб:

$$\begin{aligned} A^{(i)} &= 1, & B^{(i)} &= R_0; \\ k_1^{(i)} &= 0, & k_2^{(i)} &= R_0; \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

В формулах (6)–(9) верхним индексом обозначен номер сегмента.

Известно, что пересечением двух цилиндров с круглым поперечным сечением является эллипс [16]. Проекция этого эллипса изображена на рис. 4(а), в плоскости контакта срединных поверхностей цилиндров $y = L_1 - x$. Рассмотрим линию пересечения срединных поверхностей труб \mathcal{L} .

Отметим условие единственности точки на линии пересечения:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta. \quad (10)$$

Из уравнения плоскости сечения (2), уравнений для координаты z (3), (4), уравнения для координаты y (3) и условия (10) следует

Предложение 1. *Параметрические уравнения линии пересечения срединных поверхностей труб с параметром θ в выбранной декартовой системе отсчета имеют вид:*

$$x = L_1 + R_0 \sin \theta, \quad y = -R_0 \sin \theta, \quad z = R_0 \cos \theta. \quad (11)$$

Из условия (10), уравнения (2) и соотношений (3), (4) следует

Предложение 2. *Параметрические уравнения линии пересечения срединных поверхностей труб с параметром θ в предложенных цилиндрических системах координат имеют вид:*

$$\begin{aligned} \rho_1 &= R_0, & \rho_2 &= R_0; \\ \theta_1 &= \theta, & \theta_2 &= \theta; \\ s_1 &= L_1 + R_0 \sin \theta, & s_2 &= -R_0 \sin \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Из геометрических свойств поверхности стыка труб следует, что единичные векторы внешней нормали к i -му сегменту, $i = 1, 2$, на этой поверхности выражаются формулами:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, \\ \vec{v}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.\end{aligned}\tag{13}$$

Для линии \mathcal{L} по правилам аналитической геометрии [16] и по формулам (10)–(12) найдены три взаимно перпендикулярных характеристических вектора. Это векторы касательной \mathbf{t} , нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{b} к линии соединения \mathcal{L} , здесь они определяются по формулам:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} (\cos \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}),\tag{14}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} (\sin \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} + 2 \cos \theta \mathbf{k}),\tag{15}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.\tag{16}$$

2. Математическая модель трубы как оболочки

В разделе выведены уравнения математической модели распределения перемещений и деформаций в окрестности стыка двух труб. Каждая труба рассматривается как моментная цилиндрическая оболочка Власова [11], разрешающие уравнения которой записаны в перемещениях.

Предполагается, что $h/R_0 \leq 1/20$; и величины $\sim O(h^3/R_0^3)$ пренебрежимо малы.

Алгоритм построения математической модели изложен в [11, 12].

Введем обозначения:

ε^{ij} — контравариантные компоненты тензора деформаций;

x_i — координаты, введенные равенствами (5);

∇_i — оператор ковариантного дифференцирования;

w^i — контравариантные компоненты вектора перемещения материальной точки;

$\varepsilon_p^{ij}, w_p^i$ — физические компоненты тензора деформаций и вектора перемещений в смысле [17];

σ_{ij} — физические компоненты тензора напряжений;

Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля [17];

X_i, Y_i, Z_i — компоненты внешней силы, действующей на оболочку;

u_i, v_i, w_i — компоненты вектора перемещения срединной поверхности i -того сегмента.

Для i -того сегмента трубопровода обозначим:

$$\begin{aligned}\gamma^{(i)} &= \rho_i - R_0, \quad -h/2 \leq \gamma^{(i)} \leq h/2; \\ u_i &= w_p^{1(i)}(\gamma^{(i)} = 0), \quad v_i = w_p^{2(i)}(\gamma^{(i)} = 0); \\ w_i &= w_p^{3(i)}(\gamma^{(i)} = 0); \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{17}$$

Равенствами (17) определяются перемещения срединной поверхности трубы и координата отсчета по толщине трубы γ .

Выражения для компонент тензора деформаций через перемещения во введенных системах координат найдены по формулам (5.47), (5.58) главы II, (3.9) главы IV из монографии [17]:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2} (g^{ii} \nabla_i w^j + g^{jj} \nabla_j w^i); \\ \nabla_i w^k &= \frac{\partial w^k}{\partial x_i} + w^j \Gamma_{ji}^k; \\ \varepsilon_p^{ij} &= \varepsilon^{ij} \sqrt{g_{ii} g_{jj}}, \quad w_p^i = w^i \sqrt{g_{ii}}.\end{aligned}\tag{18}$$

В последней строке отсутствует суммирование по i, j .

Из (18) получены формулы для физических компонент тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_p^{11} &= \frac{\partial w_p^1}{\partial s_i}; \quad \varepsilon_p^{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p^2}{\partial s_i} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial w_p^1}{\partial \theta_i} \right); \quad \varepsilon_p^{21} = \varepsilon_p^{12}; \\ \varepsilon_p^{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p^3}{\partial s_i} + \frac{\partial w_p^1}{\partial \rho_i} \right); \quad \varepsilon_p^{31} = \varepsilon_p^{13}; \quad \varepsilon_p^{22} = \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial w_p^2}{\partial \theta_i} + w_p^3 \right); \\ \varepsilon_p^{23} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial w_p^3}{\partial \theta_i} - w_p^2 \right) + \frac{\partial w_p^2}{\partial \rho_i} \right]; \quad \varepsilon_p^{32} = \varepsilon_p^{23}; \quad \varepsilon_p^{33} = \frac{\partial w_p^3}{\partial \rho_i}.\end{aligned}\tag{19}$$

Для обоих сегментов трубопровода формулы (19) идентичны.

Раскладывая деформации в ряды по γ [11]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_p^{11} &= \varepsilon_1 + \kappa_1 \gamma + \varphi_1 \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \kappa_{1n} \gamma^n, \\ \varepsilon_p^{22} &= \varepsilon_2 + \kappa_2 \gamma + \varphi_2 \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \kappa_{2n} \gamma^n, \\ \varepsilon_p^{12} &= \omega + \tau \gamma + \psi \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \tau_n \gamma^n,\end{aligned}$$

получим выражения для коэффициентов разложений, которые приведены в Ч. II монографии [11], формулы (7.11'), (7.11'').

В аналогичные ряды разложим первый инвариант тензора деформаций:

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial s} (H_2 H_3 w_p^1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H_3 H_1 w_p^2) + \frac{\partial}{\partial \rho} (H_1 H_2 w_p^3) \right]$$

и линейное кручение стенки:

$$\mathcal{X} = \frac{1}{2H_1 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial s} (H_2 w_p^2) - \frac{\partial}{\partial \theta} (H_1 w_p^1) \right).$$

Эти ряды имеют вид:

$$\begin{aligned}I(\varepsilon) &= I_1 + I_1 \gamma + I_2 \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} I_n \gamma^n, \\ \mathcal{X} &= \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_1 \gamma + \mathcal{X}_2 \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{X}_n \gamma^n.\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему, получим формулы (7.13'), (7.13'') Ч. II монографии [11].

Не переписывая уравнений, известных из литературы, отметим, что далее следует выписать уравнения (10.4), (10.5) из [11], которые являются полной математической моделью для произвольной оболочки.

Затем следует учесть значения величин $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ (9) в общих уравнениях оболочки, выполняя подстановку величин I , \mathcal{X} , и приводя подобные относительно физических компонент вектора перемещения оболочки. Тем самым докажем следующее

Предложение 3. *Разрешающие уравнения математической модели напряженно-деформированного состояния стенки трубы как моментной оболочки в предложенных координатах (5) имеют вид:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial s_i^2} + \frac{1-\nu}{2R_0^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta_i^2} + \frac{1+\nu}{2R_0} \frac{\partial^2 v_i}{\partial s_i \partial \theta_i} + \frac{\nu}{R_0} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} - \frac{h^2}{12R_0} \frac{\partial^3 w_i}{\partial s_i^3} + \frac{(1-\nu)h^2}{24R_0^3} \frac{\partial^3 w_i}{\partial s_i \partial \theta_i^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh} X_i = 0, \\ \frac{1+\nu}{2R_0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial s_i \partial \theta_i} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta_i^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial s_i^2} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta_i} - \\ - \frac{3-\nu}{2} \frac{h^2}{12R_0^2} \frac{\partial^3 w_i}{\partial \theta_i \partial s_i^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh} Y_i = 0, \quad (20) \\ -\nu \frac{\partial u_i}{\partial s_i} - \frac{1}{R_0} \frac{\partial v_i}{\partial \theta_i} - \frac{w_i}{R_0} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial s_i^3} - \frac{2}{R_0^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta_i^2} + \frac{3-\nu}{2R_0} \frac{\partial^3 v_i}{\partial \theta_i \partial s_i^2} - \right. \\ \left. - \frac{1-\nu}{2R_0^2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial s_i \partial \theta_i^2} \right) - \frac{h^2}{12} R_0 \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial s_i^4} + \frac{2}{R_0^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial s_i^2 \partial \theta_i^2} + \frac{1}{R_0^4} \frac{\partial^4 w_i}{\partial \theta_i^4} \right) + R_0 \frac{1-\nu^2}{Eh} Z_i = 0. \end{aligned}$$

Количество краевых условий на каждом торце трубы как моментной оболочки равно четырем, как показано в [5]. Например, в [12] использованы условия жесткого закрепления:

$$\begin{aligned} u_2 = v_2 = w_2 = 0; \quad \frac{\partial w_2}{\partial s_2} = 0, \quad \text{при } s_2 = L_2; \\ u_1 = v_1 = w_1 = 0; \quad \frac{\partial w_1}{\partial s_1} = 0, \quad \text{при } s_1 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Система шести уравнений в частных производных (20) с восемью краевыми условиями (21) не является замкнутой краевой задачей. Для замыкания задачи необходимо наложить условия сопряжения на линии соединения оболочек.

Как следует из теории моментных оболочек [4], этих условий должно быть восемь. Далее мы получим четыре кинематических (или геометрических) условия для перемещений, и четыре силовых условия для усилий и моментов на линии соединения оболочек.

3. Кинематические условия сопряжения

Обозначим \mathbf{u}_i — вектор перемещения срединной поверхности i -того сегмента, $i = 1, 2$. Эти векторы разложим по единичным векторам базиса (6), (7):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= u_1 \mathbf{e}_1^1 + v_1 \mathbf{e}_2^1 + w_1 \mathbf{e}_3^1, \\ \mathbf{u}_2 &= u_2 \mathbf{e}_1^2 + v_2 \mathbf{e}_2^2 + w_2 \mathbf{e}_3^2. \end{aligned}$$

Из этих выражений и формул (6), (7) следуют выражения для разложения перемещений сегментов оболочки по векторам глобальной декартовой системы отсчета:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &= (v_2 \cos \theta_2 + w_2 \sin \theta_2) \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + (w_2 \cos \theta_2 - v_2 \sin \theta_2) \mathbf{k}, \\ \mathbf{u}_1 &= u_1 \mathbf{i} - (v_1 \cos \theta_1 + w_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} + (w_1 \cos \theta_1 - v_1 \sin \theta_1) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Геометрическое условие неразрывности перемещений на линии \mathcal{L} имеет вид:

$$(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{t}) = (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{t}), \quad (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}), \quad (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{b}). \quad (22)$$

Векторы \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} определены равенствами (14)–(16). Раскрывая скалярные произведения (22), докажем следующее предложение.

Предложение 4. *На линии пересечения \mathcal{L} двух срединных поверхностей цилиндрических труб, координаты точек которой описываются формулами (11), (12), выполнены следующие соотношения между компонентами векторов перемещений в криволинейных координатах (3), (4):*

$$\begin{aligned}v_2 - u_2 \cos \theta &= v_1 + u_1 \cos \theta, \\ -u_2 \sin \theta - v_2 \sin \theta \cos \theta + w_2 (1 + \cos^2 \theta) &= \\ &= u_1 \sin \theta - v_1 \sin \theta \cos \theta + w_1 (1 + \cos^2 \theta), \quad (23) \\ u_2 + v_2 \cos \theta + w_2 \sin \theta &= u_1 - v_1 \cos \theta - w_1 \sin \theta.\end{aligned}$$

Тем самым получены три из восьми условий сопряжения на линии соединения \mathcal{L} .

Замечание 1. Уравнения (22) можно переписать в проекциях на декартовы координаты. Это равносильно покомпонентному приравнению векторов перемещения:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2,$$

примененному совместно с условием (10). Форма записи (22) фактически означает переход от декартовых координат к координатам, связанным с тройкой сопровождающих векторов $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ кривой \mathcal{L} . Вид (22) представляется более предпочтительным, поскольку все изложение ведется в координатах, связанных с трубой. В распоряжении автора имеется доказательство эквивалентности обоих подходов.

Угол поворота нормали к срединной поверхности трубы определяется формулой [5]:

$$\vartheta^{(i)} = k_1^{(i)} u_i - \frac{\partial w_i}{\partial s_i}, \quad \text{где } i = 1, 2. \quad (24)$$

Здесь, как и ранее, через i обозначен номер сегмента трубопровода.

С разных сторон линии соединения оболочек знак углового параметра ϑ разный [5], поэтому условие сопряжения углов поворота нормали имеет вид:

$$\vartheta^{(1)} = -\vartheta^{(2)}. \quad (a)$$

Из условий на линии контакта (12) следуют формулы:

$$\begin{aligned}s_2 &= -R_0 \sin \theta, \quad s_1 = L_1 + R_0 \sin \theta; \\ \frac{\partial w_2}{\partial s_2} &= -\frac{\partial w_2}{\partial \theta} \frac{1}{R_0 \cos \theta}; \quad \frac{\partial w_1}{\partial s_1} = \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{1}{R_0 \cos \theta}.\end{aligned} \quad (b)$$

Подставляя (24) в (a) и используя (b), докажем следующее положение.

Предложение 5. На линии пересечения \mathcal{L} (11) двух срединных поверхностей цилиндрических труб выполнено следующее соотношение в криволинейных координатах:

$$\frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \frac{\partial w_2}{\partial \theta}. \quad (25)$$

Равенства (23), (25) из предложений 4, 5 содержат полный набор кинематических (геометрических) условий сопряжения на линии соединения срединных поверхностей цилиндрических труб с кольцевым поперечным сечением.

4. Силовые условия сопряжения

В данном разделе получено четыре условия сопряжения для силовых факторов в оболочке. Линия \mathcal{L} не совпадает с координатной линией, поэтому ниже используются понятия силовых факторов на косых сечениях [4]. Эти условия включают:

- (1) соотношение для изгибающих моментов M ;
- (2) соотношение для сдвигающих усилий S ;
- (3) два соотношения, связывающие нормальные N и перерезывающие Q усилия.

4.1. Силовые факторы на косых сечениях

Силовые факторы на нормальных сечениях (координатных площадках) определяются по формулам (11.1'), (11.1'') из монографии [11].

Замечание 2. Для понимания связи с [11] необходимо установить соответствия в обозначениях: M_1, M_2 – изгибающие моменты; M_{12}, M_{21} – крутящие моменты; N_1, N_2 – нормальные усилия; S_1, S_2 – сдвигающие усилия; Q_1, Q_2 – поперечные (перерезывающие) усилия.

Соответствие в обозначениях компонент тензора напряжений: $\sigma_{11} = \sigma_\alpha, \sigma_{22} = \sigma_\beta, \sigma_{12} = \tau_{\alpha\beta}, \sigma_{21} = \tau_{\beta\alpha}, \sigma_{31} = \tau_{\gamma\alpha}, \sigma_{32} = \tau_{\gamma\beta}$.

Физические компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_p^{ij} связаны законом Гука [17]. Выполняя переход к перемещениям оболочки, получим закон Гука для внутренних силовых факторов оболочки на нормальных сечениях в координатах (5):

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\nu}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\nu}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right]; \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{R_0^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right]; \\ M_{12} &= \frac{Eh^3}{12R_0(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right); \\ M_{21} &= -\frac{Eh^3}{12R_0(1+\nu)} \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{h^2}{12R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right); \\
S_2 &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{h^2}{12R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right); \\
N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\nu}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{w}{R_0} - \frac{h^2}{12R_0} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right); \\
N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_0} + \frac{h^2}{12R_0^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \\
Q_1 &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{1-\nu}{2R_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + R_0^2 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right); \\
Q_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_0^2} \left[(1-\nu)R_0 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - R_0 \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right].
\end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрим линию \mathcal{L} с касательным вектором \mathbf{t} , составляющим угол γ_i с координатной линией s_i . Углы между вектором \mathbf{t} (14) и координатными векторами \mathbf{e}_1^i (6), (7) можно вычислить по определению:

$$\begin{aligned}
\cos \gamma_2 &= (\mathbf{t}, \mathbf{e}_1^2) = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}; \\
\cos \gamma_1 &= (\mathbf{t}, \mathbf{e}_1^1) = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}; \\
\sin \gamma_1 &= \sin \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}.
\end{aligned}$$

Силовые факторы на косом сечении, касательная линия которого составляет угол γ_i с вектором \mathbf{e}_1^i , можно найти по формулам, приведенным в [4] (в обозначениях (26)):

$$\begin{aligned}
S^{(i)} &= \left(N_1^{(i)} - N_2^{(i)} \right) \sin \gamma_i \cos \gamma_i - S_1^{(i)} \sin^2 \gamma_i + S_2^{(i)} \cos^2 \gamma_i; \\
N^{(i)} &= -N_1^{(i)} \sin^2 \gamma_i - N_2^{(i)} \cos^2 \gamma_i - \left(S_1^{(i)} + S_2^{(i)} \right) \sin \gamma_i \cos \gamma_i; \\
Q^{(i)} &= Q_1^{(i)} \sin \gamma_i + Q_2^{(i)} \cos \gamma_i; \\
H^{(i)} &= M_{12}^{(i)} \sin^2 \gamma_i - M_{21}^{(i)} \cos^2 \gamma_i + \left(M_1^{(i)} - M_2^{(i)} \right) \sin \gamma_i \cos \gamma_i; \\
M^{(i)} &= \left(M_{12}^{(i)} + M_{21}^{(i)} \right) \sin \gamma_i \cos \gamma_i - M_1^{(i)} \sin^2 \gamma_i - M_2^{(i)} \cos^2 \gamma_i.
\end{aligned} \tag{27}$$

Индекс i различает сегменты трубопровода. Через $M^{(i)}$, $S^{(i)}$, $N^{(i)}$, $H^{(i)}$, $Q^{(i)}$ обозначены изгибающий момент, сдвигающее усилие, нормальное усилие, крутящий момент и перерезывающее усилие, соответственно, на площадке с нормалью $\vec{\nu}_i$, которая определяется формулами (13).

4.2. Условия сопряжения для силовых факторов

Линия соединения \mathcal{L} определяется уравнениями (11) и векторами (14)–(16). Согласно [5], для изгибающих моментов и сдвигающих усилий условия сопряжения имеют вид:

$$M^{(1)} = M^{(2)}; \quad S^{(1)} = -S^{(2)}. \tag{28}$$

Выведем условия сопряжения для перерезывающих усилий $Q^{(i)}$ и нормальных усилий $N^{(i)}$.

Предложение 6. *Условие сопряжения на линии соединения \mathcal{L} для нормальных и поперечных усилий имеет вид:*

$$\begin{cases} -Q^{(2)}\sqrt{1+3\cos^2\theta} + N^{(2)}\sin\theta = N^{(1)}\sin\theta + Q^{(1)}\sqrt{1+3\cos^2\theta}; \\ -Q^{(2)}\sin\theta - N^{(2)}\sqrt{1+3\cos^2\theta} = N^{(1)}\sqrt{1+3\cos^2\theta} - Q^{(1)}\sin\theta. \end{cases} \quad (29)$$

Доказательство.

Представим, что поверхность оболочки рассечена по линии \mathcal{L} . В каждой точке кривой \mathcal{L} можно построить векторы \mathbf{n} , \mathbf{b} (15), (16) и координатные векторы \mathbf{e}_1^1 , \mathbf{e}_1^2 (6), (7) (см. рис. 2).

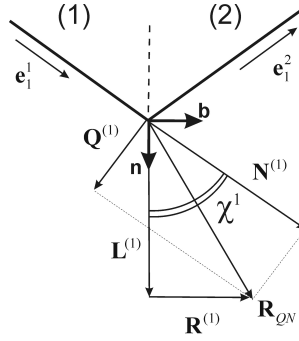


Рис. 2. Усилия в точке соединения сегментов трубопровода

Углы между векторами вычислены по определению:

$$\cos \mathcal{X}^i = (\mathbf{e}_1^i \cdot \mathbf{n}), \quad i = 1, 2.$$

Получим:

$$\begin{aligned} \cos \mathcal{X}^2 &= -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\theta}}, & \sin \mathcal{X}^2 &= \sqrt{\frac{1+3\cos^2\theta}{2(1+\cos^2\theta)}}; \\ \cos \mathcal{X}^1 &= \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\theta}}, & \sin \mathcal{X}^1 &= \sqrt{\frac{1+3\cos^2\theta}{2(1+\cos^2\theta)}}. \end{aligned} \quad (30)$$

На рис. 2 изображены внутренние силовые факторы $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(1)}$, которые получены методом, известным из теории сопротивления материалов [18]. Эти усилия дают в сумме результирующую силу \mathbf{R}_{QN} . Сила \mathbf{R}_{QN} может быть разложена на компоненты вдоль направлений \mathbf{n} , \mathbf{b} . Эти компоненты разложения обозначены $\mathbf{L}^{(1)}$, $\mathbf{R}^{(1)}$, соответственно. Аналогично внутренние силовые факторы $\mathbf{L}^{(2)}$, $\mathbf{R}^{(2)}$ выделены справа от сечения линией \mathcal{L} .

Поскольку сила \mathbf{R}_{QN} на рис. 2 для сегментов слева и справа от сечения плоскостью кривой \mathcal{L} одна и та же, то и ее компоненты по направлениям \mathbf{n} , \mathbf{b} совпадают слева и справа:

$$L^{(1)} = L^{(2)}, \quad R^{(1)} = R^{(2)}. \quad (c)$$

Учитывая положительные и отрицательные направления силовых факторов $\mathbf{N}^{(i)}$, $\mathbf{Q}^{(i)}$, которые изображены на рис. 2 в соответствии с правилами знаков [18], получим скалярные выражения $L^{(i)}$, $R^{(i)}$ через $N^{(i)}$, $Q^{(i)}$:

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= N^{(1)} \cos \mathcal{X}^1 + Q^{(1)} \sin \mathcal{X}^1; \\ R^{(1)} &= N^{(1)} \sin \mathcal{X}^1 - Q^{(1)} \cos \mathcal{X}^1; \\ L^{(2)} &= -Q^{(2)} \sin \mathcal{X}^2 - N^{(2)} \cos \mathcal{X}^2; \\ R^{(2)} &= Q^{(2)} \cos \mathcal{X}^2 - N^{(2)} \sin \mathcal{X}^2. \end{aligned} \tag{d}$$

Подставим (d) в (c) и используем (30). В результате получим равенства (29).

Предложение доказано.

Замечание 3. Равенства (28), (29) являются полным набором силовых условий сопряжения на линии соединения оболочек \mathcal{L} . Формулы (27) выражают силовые факторы (28), (29) на косом сечении \mathcal{L} через силовые факторы на нормальных сечениях. Косое сечение \mathcal{L} определено вектором бинормали $\mathbf{b} = \vec{v}_1$ (13), (16). Силовые факторы на нормальных сечениях в правых частях (27) связаны с перемещениями оболочки законом Гука (26).

Выполним последовательную подстановку (27) \rightarrow (28), (29), затем в результат вычислений подставим (26), и получим силовые условия сопряжения в перемещениях оболочки. Таким образом, доказано

Предложение 7. При введенных предположениях о механической системе силовые условия сопряжения двух цилиндрических оболочек на линии соединения \mathcal{L} выражаются формулами:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \left(2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \right) + \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \left((2 - \nu) \operatorname{tg} \theta + \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) + \\ & + w_2 \cos^2 \theta - \frac{3 - \nu}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1 - \nu}{2} \cos \theta \right) = \\ & = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \left(2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \right) + \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \left((2 - \nu) \operatorname{tg} \theta + \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) + \\ & + w_1 \cos^2 \theta - \frac{3 - \nu}{2} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(\frac{1 - \nu}{2} \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right). \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) - \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \left(\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right) - \frac{h^2}{24R_0^2} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \left(\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) + \\ & + \frac{h^2}{24R_0^2} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(\cos^2 \theta - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) - w_2 \cos \theta = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) - \\ & - \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \left(\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right) - \frac{h^2}{24R_0^2} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \left(\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) + \\ & + \frac{h^2}{24R_0^2} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(\cos^2 \theta - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) - w_1 \cos \theta. \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{12R_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{3-\nu}{2 \cos \theta} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \operatorname{tg} \theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^3 w_2}{\partial \theta^3} \left(\frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(5 + \frac{3}{\cos^2 \theta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \left(\frac{2+3 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1+2 \sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} + \cos \theta \right) \right\} (1 + \cos^2 \theta) = \\
& \quad = - \left[\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \right) + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} (1 + \cos^2 \theta) + w_1 (\nu + \cos^2 \theta) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{h^2}{12R_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right\} \right] \sin \theta \sqrt{\frac{1+3 \cos^2 \theta}{1+\cos^2 \theta}} + \\
& \quad + \frac{h^2}{6R_0^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1-\nu}{2} \right) + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \operatorname{tg} \theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta^3} \left(\frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(5 + \frac{3}{\cos^2 \theta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \left(\frac{2+3 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1+2 \sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} + \cos \theta \right) \right] \cos^2 \theta. \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{6R_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{3-\nu}{2 \cos \theta} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \operatorname{tg} \theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^3 w_2}{\partial \theta^3} \left(\frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(5 + \frac{3}{\cos^2 \theta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \left(\frac{2+3 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1+2 \sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} + \cos \theta \right) \right\} \cos^2 \theta + \\
& \quad + \left[\frac{\partial u_2}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial v_2}{\partial \theta} (1 + \cos^2 \theta) - w_2 (\nu + \cos^2 \theta) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{h^2}{12R_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \cos^2 \theta \right) + \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right\} \right] \sin \theta \sqrt{\frac{1+3 \cos^2 \theta}{1+\cos^2 \theta}} = \\
& = \frac{h^2}{12R_0^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1-\nu}{2} \right) + \frac{3-\nu}{2 \cos \theta} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \operatorname{tg} \theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta^3} \left(\frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(5 + \frac{3}{\cos^2 \theta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \left(\frac{2+3 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1+2 \sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} + \cos \theta \right) \right] (1 + \cos^2 \theta). \quad (34)
\end{aligned}$$

Вывод полного набора силовых условий сопряжения закончен.

5. Полная математическая модель трубопровода и ее сингулярность

Математическая модель соединенных труб как моментной оболочки Власова состоит из следующих компонент:

- (1) Система уравнений равновесия (20) с краевыми условиями (21).

(2) Кинематические (геометрические) условия сопряжения на линии соединения \mathcal{L} (23), (25).

(3) Условия сопряжения для силовых факторов на линии соединения \mathcal{L} (31)–(34).

Эта математическая модель содержит сингулярность в силовых условиях сопряжения (31)–(34). Каждое из этих условий содержит функции $\cos^k \theta$, $k = 2, 3$ в знаменателе в левой и правой частях, обращающуюся в ноль при $\theta = n\pi/2$. Эта сингулярность является неустранимой, что можно увидеть на следующем рассуждении.

Замечание 4. Умножим левую и правую часть равенства (31) на $\cos^3 \theta$. Положим $\theta = n\pi/2$. Тогда это условие совпадет с условием (25). Следовательно, во всех точках $\theta = n\pi/2$ условий сопряжения будет недостаточно для нахождения решения краевой задачи (20), (21), (23), (25), (31)–(34). Поэтому рассмотренный метод устранения сингулярности некорректен.

5.1 Пример расчета напряжений на линии излома

Для численной иллюстрации наличия особенности в решении был использован свободно распространяемый пакет прикладных программ FreeCAD со встроенной программой расчета по методу конечных элементов CalculiX. Возможности пакетов позволяют увидеть рост напряжения в окрестности линии стыка, как показано далее.

Пакет прикладных программ FreeCAD сначала тестировался на примере задачи Ламе для толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением. Точное решение этой задачи приведено в [17]. Тестовый расчет показал согласование приближенного решения, полученного FreeCAD, и точного решения.

Были найдены численные решения МКЭ для нескольких тестовых задач. Ниже представлены две из них.

Задача 1.

3D-модель соединения цилиндрических труб под прямым углом. Выбраны параметры: $h = 20$ мм, $R_e = 100$ мм, $L_1 = 500$ мм, $L_2 = 400$ мм. Материал: сталь S335JO, параметры материала: $\rho_t = 7800$ кг/м³, $E = 210$ ГПа, $\nu = 0.3$. Закрепление полагалось жестким по внешним торцам труб, что соответствует краевым условиям (21). Наложено равномерно распределенное давление на всю внутреннюю поверхность труб величиной $p = 100$ МПа.

Сетка, построенная встроенным во FreeCAD генератором сеток NetGen <https://sourceforge.net/projects/netgen-mesher/> и предельные значения напряжений по Мизесу показаны на рис. 3.

На рис. 3 слева видно слабое сгущение сетки в окрестности линии стыка труб. Это вызвано настройкой точности как средней при построении сетки.

На рис. 3 справа виден значительный разброс величин напряжений по Мизесу между максимальным, средним и минимальным напряжением. Это иллюстрирует то, что напряжения имеют участки быстрого роста, иными словами, поле напряжений имеет особенности. Максимальное напряжение достигает величины 2098 МПа, что значительно превышает предел прочности стали S335JO. Это значение достигается на внутренней стороне стенки трубы во входящем угле области при $\theta = 3\pi/2$, на линии стыка. В то же время далеко от линии особенности напряжение падает до 25 МПа.

Задача 2.

3D-модель врезки трубы меньшего диаметра в трубу большего диаметра под прямым углом.

Параметры трубы большего диаметра: $h = 5$ мм, $R_{e1} = 20$ мм, $L_1 = 100$ мм.

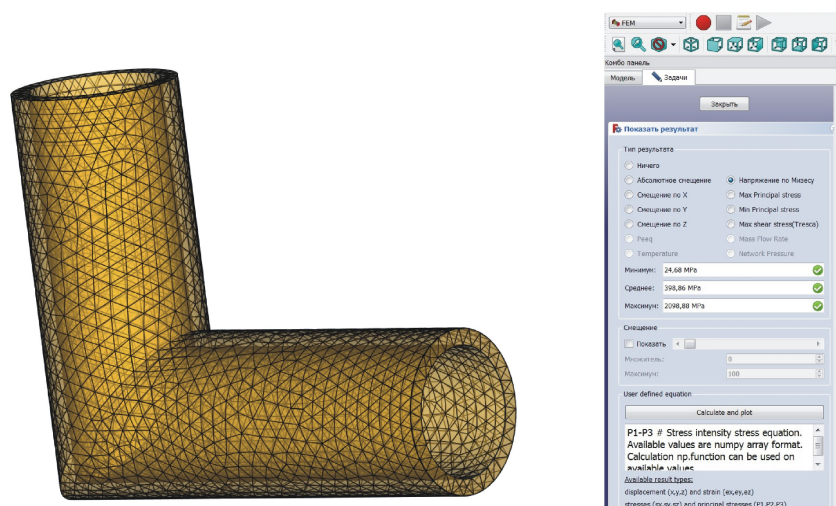


Рис. 3. Сетка метода конечных элементов и значения напряжений по Мизесу в Задаче 1.

Параметры трубы меньшего диаметра: $h = 2$ мм, $R_{e2} = 10$ мм, $L_2 = 100$ мм.

Материал обеих труб — сталь S335JO, параметры материала указаны в Задаче 1.

Закрепление полагалось жестким по внешним торцам труб, что соответствует крайним условиям (21). Наложено равномерно распределенное давление на всю внутреннюю поверхность труб величиной $p = 100$ МПа.

Сетка, построенная встроенным генератором сеток NetGen и предельные значения напряжений по Мизесу показаны на рис. 4.

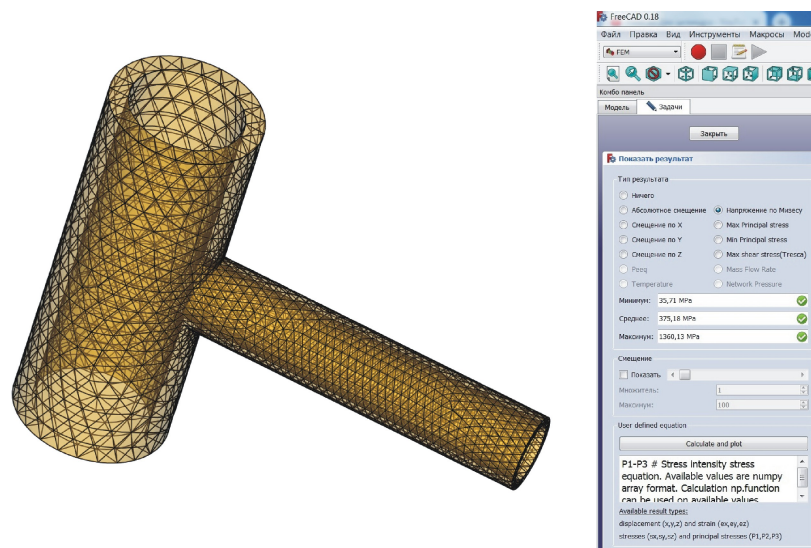


Рис. 4. Сетка метода конечных элементов и значения напряжений по Мизесу в Задаче 2.

В целом, результаты расчета Задачи 2 эквивалентны результатам расчета Задачи 1. Поэтому сосредоточимся на их отличиях.

На рис. 4 слева видно более сильное сгущение сетки в окрестности линии стыка труб. Это вызвано настройкой точности как высокой при построении сетки. Подробности метода построения сеток можно найти на официальном сайте проекта NetGen <https://ngsolve.org/docu/latest/>

На рис. 4 справа видно, что разброс величин напряжений по Мизесу между максимальным, средним и минимальным напряжением меньше, чем в Задаче 1. Это означает, что особенности поля напряжений выражены в этой задаче меньше. Но по-прежнему максимальное напряжение достигает величины 1360 МПа, что превышает предел прочности стали S335JO. Это значение достигается на внутренней стороне стенки трубы при симметричных значениях $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_2 = 3\pi/2$ на линии стыка, если рассматривать трубу меньшего диаметра.

Эти результаты соответствуют известным данным о том, что при небольших соотношениях $\alpha = R_{e2}/R_{e1}$ влияние особенности уменьшается, см. [6]. Здесь, как легко увидеть, $\alpha = 0.5$.

Далеко от линии особенности напряжение падает до 36 МПа.

Замечание 5. Результаты расчета тестовых задач стандартным пакетом прикладных программ не проясняют многие вопросы об особенностях поля напряжений в окрестности линии стыка. Является ли рост напряжений по Мизесу проявлением недостатков численного метода, или же он вызван присутствием особенности в точном решении? Как модифицировать численный метод, чтобы найти более точное поле напряжений? Если по результатам расчета напряжение превышает предел прочности, должна ли быть изменена физическая модель (например, учетом пластических деформаций), или же необходимо улучшить численный метод? Таким образом, наряду с несомненным существованием особенности, показана недостаточность применения пакетов прикладных программ FreeCAD и CalculiX для численного анализа задач с особенностями. Вопрос о применимости коммерческих пакетов прикладных программ остается открытым. Предположительно ответ будет тем же, но это нуждается в доказательстве.

Заключение

Построена и обоснована математическая модель трубопровода как полностью моментной оболочки Власова с линиями излома поверхности в местах соединения сегментов трубопровода.

Решены задачи: (1) выведены уравнения равновесия трубы как моментной оболочки Власова с изломом; (2) усилия на косых сечениях выражены как функции перемещений оболочки; (3) наложены и обоснованы условия сопряжения на линии стыка труб для перемещений и угла поворота нормали; (3) наложены и обоснованы условия сопряжения для изгибающих моментов, сдвиговых усилий, поперечных и нормальных усилий; (4) доказано наличие особенности в условиях сопряжения на линии соединения оболочек.

На численных примерах проиллюстрировано наличие особенности решения уравнений математической модели в точках на линии соединения сегментов трубопровода.

Отмечены недостатки существующих комплексов программ с точки зрения проведения численных экспериментов по задачам теории упругости с особенностями. Установлена согласованность результатов численного анализа задачи о врезке трубы с известными результатами.

Рассматриваемая задача о соединении цилиндрических оболочек по своему смыслу близка к задаче теории упругости с входящим углом на границе (см. [10]), поэтому в дальнейшем для ее численного решения предполагается использовать методика, предложенную в работе [19].

Возникла новая задача исследования вида особенности в зависимости от угла стыка трубопроводов. Как показали численные эксперименты, не включенные в данную статью, сингулярность выражается слабее, если угол раствора труб приближается к 180° .

Численные эксперименты были проведены на вычислительном кластере ЦКП «Центр данных ДВО РАН».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Geon H. L., Jung K. S., Jeom K. P. Condition assessment of damaged elbow in subsea pipelines // *Ships and Offshore Structures*. 2017. Vol. 12, no. 1. P. 135–151. <https://doi.org/10.1080/17445302.2015.1116245>.
- [2] Effects of steel properties on the local buckling response of high strength pipelines subjected to reverse faulting / X. Liu, H. Zhang, M. Li et al. // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 2016. Vol. 33. P. 378–387. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2016.05.036>.
- [3] Klar A., Marshall A. M. Shell versus beam representation of pipes in the evaluation of tunneling effects on pipelines // *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2008. Vol. 23. P. 431–437. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2007.07.003>.
- [4] Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва: Наука, 1976. 512 с.
- [5] Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Санкт-Петербург: С.-Петербургский университет, 2010. 380 с.
- [6] Analytical solution for cylindrical thin shells with normally intersecting nozzles due to external moments on the ends of shells. / M. Xue, H. Wang, W. Chen et al. // *Science in China Series A: Mathematics*. 1999. Vol. 42, no. 3. P. 293–304. <https://doi.org/10.1007/BF02879064>.
- [7] Tambača J., Tutek Z. A new linear Naghdi type shell model for shells with little regularity // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. P. 10549–10562. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.07.007>.
- [8] Koiter W. T. On the Mathematical Foundation of Shell Theory. Actes du Congrès international des mathématiciens, 3. Mathématiques appliquées. Nice, France: 1–10 September, 1970. P. 123–130. <https://pdfs.semanticscholar.org/152e/e2e52a03aa65682be3e90ad8cd78274a940e.pdf>.
- [9] Fluid–structure interaction between pulsatile blood flow and a curved stented coronary artery on a beating heart: A four stent computational study / M. Bukač, S. Čanić, J. Tambača et al. // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2019. Vol. 350. P. 679–700. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.03.034>.
- [10] Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill, 1987. 608 p.
- [11] Власов В.З. Избранные труды. Т.1. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Москва: Академия наук СССР, 1962. 528 с.
- [12] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Dynamics of a fluid-filled curvilinear pipeline // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018. Jun. Vol. 39, no. 6. P. 905–922. <https://doi.org/10.1007/s10483-018-2338-9>.
- [13] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical and Asymptotic Solution of the Equations of Propagation of Hydroelastic Vibrations in a Curved Pipe // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2000. Nov. Vol. 41, no. 6. P. 1102–1110. <https://doi.org/10.1023/A:1026619009228>.

-
- [14] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical analysis of the mathematical model of hydroelastic oscillations in a curved pipeline // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2011. Aug. Vol. 3, no. 4. P. 508–516. <https://doi.org/10.1134/S2070048211040090>.
 - [15] Ткаченко О. П. Разрешающие уравнения математической модели изогнутого трубопровода // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2017. Т. 34, № 4. С. 114–124.
 - [16] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. Москва: Наука, 1980. 976 с.
 - [17] Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Москва: Лань, 2004. Т. 1. 528 с.
 - [18] Timoshenko S. P. *Strength of materials*. Huntington, New York: R.E. Krieger Pub. Co., 1976. 1010 p.
 - [19] Rukavishnikov V. A. Weighted FEM for two-dimensional elasticity problem with corner singularity // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2016. Vol. 112. P. 411–419. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39929-4_39.

O. P. Tkachenko

INTERFACING CONDITIONS IN THE PIPELINE MATHEMATICAL MODEL WITH A KINK OF PROFILE

Computing Center of Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia

Abstract. A closed-ended formulation of the boundary-value problem of calculating the pipeline stress-strain state as a Vlasov shell with a kink line of surface was given. The resolving equations of the shell in displacements in the chosen curvilinear coordinate system were derived; in the local coordinates associated with the kink line, the kinematic conjugation conditions on this line were derived; conjugation conditions for moments and forces in the shell on the surface kink line were stated and proved. All conjugation conditions were deduced in the displacements of the shell on the kink line, which is not a coordinate line. The presence of a singularity in the obtained conjugation conditions was proved. The consistency of the numerical analysis results with known results was established.

Keywords: shell, kink line, singularity, pipeline, stress-strain state.

REFERENCES

- [1] Geon H. L., Jung K. S., Jeom K. P. Condition assessment of damaged elbow in subsea pipelines // *Ships and Offshore Structures*. 2017. Vol. 12, no. 1. P. 135–151. <https://doi.org/10.1080/17445302.2015.1116245>.
- [2] Effects of steel properties on the local buckling response of high strength pipelines subjected to reverse faulting / X. Liu, H. Zhang, M. Li et al. // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 2016. Vol. 33. P. 378–387. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2016.05.036>.
- [3] Klar A., Marshall A. M. Shell versus beam representation of pipes in the evaluation of tunneling effects on pipelines // *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2008. Vol. 23. P. 431–437. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2007.07.003>.
- [4] Gol'Denveizer A. L. *Theory of Elastic Thin Shells*. Moscow: Nauka, 1976. 512 p. (in Russian).
- [5] Novozhilov V. V. *Thin Shell Theory*. St. Petersburg: St. Petersburg University, 2010. 380 p. (in Russian).
- [6] Analytical solution for cylindrical thin shells with normally intersecting nozzles due to external moments on the ends of shells. / M. Xue, H. Wang, W. Chen et al. // *Science in China Series A: Mathematics*. 1999. Vol. 42, no. 3. P. 293–304. <https://doi.org/10.1007/BF02879064>.
- [7] Tambača J., Tutek Z. A new linear Naghdi type shell model for shells with little regularity // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. P. 10549–10562. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.07.007>.
- [8] Koiter W. T. On the Mathematical Foundation of Shell Theory. *Actes du Congrès international des mathématiciens, 3. Mathématiques appliquées*. Nice, France: 1–10 September, 1970. P. 123–130. <https://pdfs.semanticscholar.org/152e/e2e52a03aa65682be3e90ad8cd78274a940e.pdf>.
- [9] Fluid–structure interaction between pulsatile blood flow and a curved stented coronary artery on a beating heart: A four stent computational study / M. Bukač, S. Čanić, J. Tambača et al. // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2019. Vol. 350. P. 679–700. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.03.034>.
- [10] Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill, 1987. 608 p.
- [11] Vlasov V. S. *Selected Works. Vol.1. General theory of shells and its applications in technology*. Moscow: USSR Academy of Sciences, 1962. 528 p. (in Russian).

Tkachenko Oleg Pavlovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Ass. Professor, Leading Research Worker, Computing Center of Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia.

-
- [12] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Dynamics of a fluid-filled curvilinear pipeline // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018. Jun. Vol. 39, no. 6. P. 905–922. <https://doi.org/10.1007/s10483-018-2338-9>.
- [13] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical and Asymptotic Solution of the Equations of Propagation of Hydroelastic Vibrations in a Curved Pipe // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2000. Nov. Vol. 41, no. 6. P. 1102–1110. <https://doi.org/10.1023/A:1026619009228>.
- [14] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical analysis of the mathematical model of hydroelastic oscillations in a curved pipeline // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2011. Aug. Vol. 3, no. 4. P. 508–516. <https://doi.org/10.1134/S2070048211040090>.
- [15] Tkachenko O. P. The resolving equations of the mathematical model of curved pipeline // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2017. no. 4 (34). P. 114–124. (in Russian).
- [16] Bronstein I. N., Semendyayev K. A. *Maths Guide for Engineers and University Students*. Moscow: Nauka, 1980. 976 p. (in Russian).
- [17] Sedov L. I. *Mechanics of Continuous Media*. Moscow: Lan', 2004. Vol. 1. 528 p.
- [18] Timoshenko S. P. *Strength of materials*. Huntington, New York: R.E. Krieger Pub. Co., 1976. 1010 p.
- [19] Rukavishnikov V. A. Weighted FEM for two-dimensional elasticity problem with corner singularity // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2016. Vol. 112. P. 411–419. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39929-4_39.

Т. С. Алероев, М. В. Гасанов

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается нелинейное уравнение третьего порядка с полиномом второй степени в правой части. Отличительной чертой этого класса уравнений является наличие подвижных особенностей, что делает эти уравнения неразрешимыми в квадратурах. В работе получены интервальные критерии существования подвижных особых точек. Представленная теория является подспорьем для написания различных алгоритмов в различных программных комплексах для нахождения подвижных особых точек.

Ключевые слова: волновые процессы, нелинейные дифференциальные уравнения, критерии существования подвижных особых точек.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.004

УДК: 539.374

Введение.

В работе [1] рассматриваются волновые процессы в стержне на основе обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \varphi(u)}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}, \quad m, \mu = \text{const.}$$

В случае стационарного процесса, когда время отсутствует, уравнение переходит в категорию обыкновенное дифференциальное уравнение. В зависимости от параметров уравнения переходим к исследуемому нами классу дифференциальных уравнений. В указанной публикации при рассмотрении исходного уравнения не была учтена специфика рассматриваемого уравнения, существование подвижной особой точки. Поэтому

© Алероев Т. С., Гасанов М. В., 2021

Алероев Темирхан Султанович

e-mail: aleroevts@mgsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Гасанов Магомедюсуф Владимирович

e-mail: gasanovmv@mgsu.ru, преподаватель, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 10.01.2021

о строгом аналитическом решении не приходится, так как наличие подвижных особых точек является условием того, что уравнение является неразрешимым в квадратурах.

В публикации [2] так же проводится исследование волновых процессов, но уже в эластичных балках. Рассматривается данная задача в виде дифференциального уравнения третьего порядка, заданного неявно:

$$f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(0) = u'(0) = u'(1) = 0.$$

Неявный случай подразумевает как линейный случай, так и нелинейный. Поэтому, аналогично, как и в случае с работой [1] не была учтена важная специфика нелинейных дифференциальных уравнений, существование подвижных особенностей.

Для реализации метода нахождения аналитического приближенного решения с подвижными особенностями необходимо строить алгоритмы для программного обеспечения, основой которого и является теоретический материал, представленный в данной работе. Реализация данного метода была рассмотрена в работах [3–5].

Если работах [6, 7] дается теоретическое обоснование учета особенностей, применяемого класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка для исследования волновых процессов в эластичных балках, то в статьях [6–9] дано развитие общих теоретических положений при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особенностями. Отметим ряд работ последнего времени с приложением данной категории уравнений для строительных конструкций [10–17].

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_1(x)y^2 + a_2(x)y + a_3(x), \quad (1)$$

которое путем некоторой замены переменной, показанной в работе [7], приводиться к нормальной форме

$$y''' = y^2 + r(x), \quad (2)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^2 + r(x), \quad (3)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_1) = y_1, \\ y''(x_2) = y_2. \end{cases} \quad (4)$$

Далее, путем замены $y(x) = \frac{1}{u(x)}$ переходим к инверсному уравнению:

$$u''' \cdot u^2 = u^2 + 6u \cdot u' \cdot u'' - 6(u')^3 + u^2 \cdot r(x), \quad (5)$$

$$\begin{cases} u(x_0) = u_0, \\ u'(x_1) = u_1, \\ u''(x_2) = u_2. \end{cases} \quad (6)$$

Используя связь локальных экстремумов инверсионной и прямой функции, сформируем следующую теорему:

Теорема 1. *Потребуем выполнение следующих условий:*

- (1) $y(x), u(x) \in C[a; b]$
 (2) $\forall x \in [a; b] \ u(x) > 0 \ (u(x) < 0)$.

Тогда необходимым и достаточным условием локального максимума $y(x)$ в точке $c \in (a; b)$ является $u(x)$ имело в точке c .

Доказательство данного факта основывается на использовании классического метода математического анализа, а именно применении необходимого и достаточного условия локального экстремума.

Теорема 2. Пусть $y(x)$ определена на полуинтервале $[x_0; x^*)$, где $x_0 < x^*$, x^* — подвижная особая точка задачи (3)-(4). Тогда найдется некоторая окрестность $[a; x^*)$ точки x^* , $x^* > a$, в которой функция $y(x)$, ее первая и вторая производная имеют один знак $y(x) > 0, y'(x) > 0, y''(x) > 0, (y(x) < 0, y'(x) < 0, y''(x) < 0)$.

Доказательство. Функцию $y(x)$ можно представить в виде

$$y(x) = (x^* - x)^{-3} \sum_0^{\infty} C_n (x^* - x)^n. \quad (7)$$

Согласно теореме существования, найдется точка $x_1 \in [x_0; x^*)$, для которой правильная часть ряда (7) сходится в области $[x_1; x^*)$. Расписывая правую часть (7) получаем:

$$y(x) = -60(x^* - x)^{-3} + C_6(x^* - x)^3 + C_7(x^* - x)^4 + \dots \quad (8)$$

Дифференцируя обе части равенства (8), имеем:

$$y'(x) = -240(x^* - x)^{-4} - 3C_6(x^* - x)^2 - 4C_7(x^* - x)^3 - \dots \quad (9)$$

Введем обозначения

$$y'(x) = g_1(x) + h_1(x), \\ g_1(x) = -240(x^* - x)^{-4}; \ h_1(x) = -3C_6(x^* - x)^2 - 4C_7(x^* - x)^3 + \dots$$

Учитывая, что $g_1(x) \rightarrow -\infty$, а так же $h_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^* - 0$, то найдется точка $x_2 : x_2 \geq x_1$, и $\forall x \in [x_2; x^*)$ будет выполняться неравенство $g_1(x) < h_1(x)$, следовательно $y'(x) < 0$.

Дифференцируем теперь выражение (9). Тогда имеем:

$$y''(x) = -960(x^* - x)^{-5} + 6C_6(x^* - x) + 12C_7(x^* - x)^2 + \dots \quad (10)$$

Обозначим

$$y''(x) = g_2(x) + h_2(x), \\ g_2(x) = -960(x^* - x)^{-5}; \ h_2(x) = 6C_6(x^* - x) + 12C_7(x^* - x)^2 + \dots$$

Так как $g_2(x) \rightarrow -\infty$ и $h_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^* - 0$, то существует такая точка $x_3 : x_3 \geq x_2$, что для любого ϵ из полуинтервала $[x_3; x^*)$ будет выполняться неравенство $g_2(x) < h_2(x)$, следовательно $y''(x) < 0$.

Теорема 3. (точечный критерий существования подвижных особых точек) Чтобы x^* являлась подвижной особой точкой функции $y(x)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $u(x)$ удовлетворяла следующим условиям:

$$u(x^*) = 0, \ u'(x^*) = 0, \ \ u''(x^*) = 0, \ \ u'''(x^*) = -360. \quad (11)$$

Доказательство. Необходимость. Представим функцию $u(x)$ в виде регулярно-го ряда:

$$u(x) = D_0(x^* - x)^3 + D_6(x^* - x)^9 + D_7(x^* - x)^{10} + \dots \quad (12)$$

Тогда

$$u'(x) = -3D_0(x^* - x)^2 - 9D_6(x^* - x)^8 - 10D_7(x^* - x)^9 + \dots \quad (13)$$

и

$$u''(x) = 6D_0(x^* - x) + 72D_6(x^* - x)^7 + 90D_7(x^* - x)^8 + \dots,$$

а также

$$u'''(x) = 6D_0 + 504D_6(x^* - x)^6 + 648D_7(x^* - x)^7 + \dots$$

В итоге получаем требуемое

$$u(x^*) = 0, u'(x^*) = 0, u''(x^*) = 0, u'''(x^*) = -360. \quad (14)$$

где $D_0 = C_0 = -60$.

Достаточность. Подвижная особая точка задачи (3)-(4) является регулярной точкой для задачи (5)-(6), следовательно, $u(x)$ можно представить в виде:

$$u(x) = \sum_0^{\infty} C_n(x^* - x)^n.$$

Из условия теоремы получаем значения коэффициентов разложения $C_0 = C_1 = C_2 = 0, C_3 = -360$. С учетом коэффициентов для $u(x)$ получаем:

$$u(x) = -360(x^* - x)^3 + C_4(x^* - x)^4 + C_5(x^* - x)^5 + \dots$$

или

$$u(x) = (x^* - x)^3 (-360 + C_4(x^* - x) + C_5(x^* - x)^2 + \dots).$$

В силу используемой замены $y(x) = \frac{1}{u(x)}$, x^* является полюсом 3-го порядка для $y(x)$.

Теорема 4 (*интервальный критерий существования подвижной особой точки*). x^* является подвижной особой точкой решения задачи (3)-(4) тогда и только тогда, когда существует некоторая окрестность подвижной особой точки $[x_1; x_2]$, $x^* \in [x_1; x_2]$, для которой функция $u(x)$ являлась бы непрерывной, и выполнялось условие:

$$u(x_1) > 0, u(x_2) < 0.$$

Доказательство. Необходимость. Так как уравнение было переведено в инверсное, то точка x^* для функции $u(x)$ переходит в класс регулярных. На отрезке $[x_1; x_2]$, $y(x)$ имеет значение разных знаков на концах отрезка $y(x_1) > 0, y(x_2) < 0$. В силу зависимости $y(x)$ и $u(x)$ функция $u(x)$ так же принимает значения разных знаков на концах отрезка, а ввиду того что точка x^* является регулярной для функции $u(x)$, то в окрестности точки x^* функция является непрерывной.

Достаточность. Так как функция $u(x)$ непрерывна и имеет различные знаки на концах отрезка $u(x_1) > 0, u(x_2) < 0$, то существует точка $x_3 \in [x_1; x_2]$ в которой функция $u(x)$ равна нулю. Тогда в силу инверсии x_3 является подвижной особой точкой для решения задачи Коши (3)-(4).

Вывод. В данной статье решена задача о нахождении точных критериев существования подвижных особенностей, что может позволить разрабатывать различные

алгоритмы в программных комплексах для нахождения подвижных особых точек с любой наперед заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чугайнова А.П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2013. Т. 281. с. 204–212.
- [2] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.
- [3] Леонтьева Т. Ю. Об одном обобщении точных критериев существования подвижных особых точек одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*. 2017. № 13 (262).
- [4] Орлов В. Н., Гузь М. П. Точные критерии существования подвижных особых точек решения одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева*. 2013. Т. 4, № 80.
- [5] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.
- [6] Orlov V. N., Gasanov M. V. Study of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. jan. Vol. 1030. p. 012081.
- [7] Орлов В.Н., Гасанов М.В. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью седьмой степени в окрестности подвижной особой точки // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 1(43). с. 92–99.
- [8] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки*. 2009. № 4(35). с. 23–32.
- [9] Орлов В.Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2020. Т. 2.
- [10] Орлов В. Н., Ив Б. Б. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // *Вестник Башкирского университета*. 2018. Т. 23, № 4. с. 980–986.
- [11] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. 2020. Vol. 11, no. 3. p. 2050026.
- [12] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. jun. Vol. 365. p. 042045.
- [13] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2018. aug. no. 79.
- [14] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. dec. Vol. 456. p. 012122.
- [15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // *E3S Web of Conferences*. 2019. Vol. 97. p. 03031.
- [16] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. dec. Vol. 1425. p. 012127.

- [17] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // Journal of Physics: Conference Series. 2019. dec. Vol. 1425. p. 012129.

T. S. Aleroev, M. V. Gasanov

A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR THE EXISTENCE OF A MOBILE SINGULAR POINTS FOR A THIRD-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. A nonlinear third-order equation with second degree polynomial on the right. The hallmark of this class equations is the presence of movable singularities, which makes these equations undecidable in quadratures. The work obtained interval criteria the existence of movable singular points. The theory presented is help for writing various algorithms in various software complexes for finding movable singular points.

Keywords: wave processes, nonlinear differential equations, criteria for the existence of movable singular points.

REFERENCES

- [1] Chugainova A. Nonstationary solutions of the generalized Korteweg – de Vries – Burgers equation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. Vol. 281. P. 204–212.
- [2] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.
- [3] Leont’eva T. Y. On a generalization of exact criteria for the existence of movable singular points of one class of nonlinear ordinary differential equations in a complex domain // Scientific Vestniks of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. 2017. no. 13 (262).
- [4] Orlov V., Guz M. Exact criteria for the existence of movable singular points of the solution of one nonlinear ordinary differential equation // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2013. Vol. 4, no. 80.
- [5] Orlov V. Method of approximate solution of the first, second differential equations of Painlevé and Abel. M.: MPG, 2013. 174 p.
- [6] Orlov V. N., Gasanov M. V. Study of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. jan. Vol. 1030. p. 012081.
- [7] Orlov V., Hasanov M. Existence theorem for a solution of one class of nonlinear differential equations of the third order with a polynomial right-hand side of the seventh degree in a neighborhood of a moving singular point // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2020. no. 1 (43). p. 92–99.
- [8] Orlov V. Investigation of the approximate solution of the Abel differential equation in the vicinity of a moving singular point // Vestnik of MSTU im. N.E.Bauman. Series: Natural Sciences. 2009. no. 4 (35). p. 23–32.
- [9] Orlov V., Leont’eva T. Y. On the extension of the domain for the analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations of the second order in the complex domain // Vestnik of the Samara State Technical University. Series: Physics and Mathematics. 2020. Vol. 2.

Aleroev Temirkhan Sultanovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Gasanov Magomedysuf Vladimirovich, Teacher, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

-
- [10] Orlov V. N., Yves B. B. Existence theorem for a solution of one class of nonlinear differential equations of the fourth order with polynomial right-hand side of the second degree in a neighborhood of a moving singular point // Vestnik of the Bashkir University. 2018. Vol. 23, no. 4. p. 980–986.
- [11] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3. p. 2050026.
- [12] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modeling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. jun. Vol. 365. p. 042045.
- [13] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2018. aug. no. 79. URL: <https://doi.org/10.18698>
- [14] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. dec. Vol. 456. p. 012122.
- [15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web of Conferences. 2019. Vol. 97. p. 03031.
- [16] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Journal of Physics: Conference Series. 2019. dec. Vol. 1425. p. 012127.
- [17] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // Journal of Physics: Conference Series. 2019. dec. Vol. 1425. p. 012129.

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГО-ВЯЗКИХ БАЛОК ВЗРЫВНОЙ НАГРУЗКОЙ В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Представлено аналитическое решение задачи о деформировании взрывом сосредоточенного заряда конденсированного взрывчатого вещества (ВВ) балки, материал которой чувствителен к скорости деформации. Влияние внешней среды (воды) на процесс и результаты деформирования учитывается введением присоединенной массы. Коэффициент вязкости и модуль упругости в фиксированных интервалах скоростей деформирования определяются из экспериментов. Для этих параметров, характеризующих материал балки при импульсном деформировании, получена аналитическая взаимосвязь и нижняя граница значений для коэффициента вязкости. Решение задачи найдено методом разделения переменных в определяющем уравнении движения. При этом форма упругой линии балки для каждого момента времени выбрана, исходя из требования выполнения граничных условий и принципа минимума работы деформирования.

Ключевые слова: балка, взрывная нагрузка, скорость деформации, присоединенная масса, вязкость, взрыв в воде, принцип наименьшего действия.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.005

УДК: 531/534

Введение

Известно [1], что при взрыве зарядов ВВ в воздухе на близких расстояниях от элементов конструкций основными носителями нагрузки являются продукты взрыва, а на более далеких расстояниях – воздушная ударная волна, то есть в обоих случаях нагрузка передается через среду, плотность которой существенно меньше плотности материала элемента конструкции.

При взрыве неконтактных зарядов в воде нагрузка на элементы передается через среду, плотность которой соизмерима с плотностью материала конструкции.

© Володин Г.Т., Кочергин Д.С., 2021

Володин Геннадий Тимофеевич

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Кочергин Денис Сергеевич

e-mail: sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 20.03.2021

С началом деформации элемента в воде в движение приходит не только сам элемент, но и значительная часть частиц среды, находящихся с ним в непосредственном контакте, в результате этого движение элемента будет тормозиться [1]. Этот эффект сопротивления среды перемещению в ней твердого тела в гидродинамике, например [2], принято учитывать введением присоединенной массы, которая в общем случае зависит не только от размеров элемента, но и от направления движения.

Таким образом, при выводе уравнения движения балочной конструкции в воде необходимо учитывать эффект сопротивления среды, эквивалентный введению присоединенной массы.

Будем также учитывать увеличение модуля упругости материала балочной конструкции с увеличением скорости деформации, а также и вязкостные характеристики материала.

Постановка задачи

Физическая модель (основные допущения).

Рассматриваются балки, удовлетворяющие следующим ограничениям [3]:

- 1) сечение балки имеет хотя бы одну ось симметрии;
- 2) все внешние силы лежат в плоскости симметрии балки;
- 3) прогибы балки малы по сравнению с её длиной;
- 4) материал балки изотропный, чувствительный к скорости деформации, при этом зависимость между напряжением, деформацией и скоростью деформации принимается в виде [4]:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

где σ – нормальное напряжение в сечении балки, ε – относительная деформация, $\dot{\varepsilon}$ – скорость относительной деформации, E – модуль упругости материала балки, η – коэффициент вязкости;

5) используется классическая гипотеза плоских сечений. Внешняя динамическая нагрузка является импульсной, созданной взрывом сосредоточенного заряда ВВ в ближней области действия взрыва [1]. Деформирование балки вследствие весьма кратковременного действия нагрузки происходит уже после снятия нагрузки в период свободных колебаний балки.

Математическая модель.

Рассмотрим балку длиной l , свободно опирающуюся по концам на недеформируемые опоры. Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в середину длины балки. Пусть над серединой балки, находящейся в воде, на высоте a от её оси расположен заряд ВВ массы S .

В момент времени $t = 0$ происходит взрыв заряда над балкой, её деформирование при $t > 0$ и возможное разрушение. Под разрушением балки понимаем образование трещин, нарушающих несущую способность соответствующей балочной конструкции, разделение балки на фрагменты, соскакивание с опор.

Требуется, исходя из принятых гипотез, составить уравнение движения произвольного элемента балки, найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее краевым и начальным условиям; используя найденное решение определить условия гарантированного разрушения или гарантированной взрывостойкости рассматриваемой балочной конструкции.

Совместим ось балки с осью абсцисс прямоугольной декартовой системы координат.

Выделим двумя сечениями, перпендикулярными оси, элемент балки длиной dx (Рис.1)

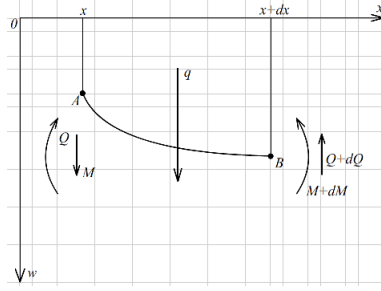


Рис. 1 Схема движения элемента балки под действием импульсной нагрузки

На рисунке 1 показан элемент балки в состоянии движения с указанием действующих на него сил и моментов. Уравнение движения элемента

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2)$$

дополняем уравнением баланса моментов

$$\frac{\partial M}{\partial x} + Q = 0. \quad (3)$$

Учитывая соотношения

$$M = \int_S \sigma z dS, \quad \sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \int_S z^2 dS = J,$$

где S – площадь сечения балки, z – расстояние элемента площади до нейтральной оси, J – момент инерции площади, получим

$$M = \left(\frac{E}{r} - \frac{\eta}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right) \cdot J. \quad (4)$$

Учитывая равенство $\varepsilon = \frac{z}{r}$, где r – радиус кривизны упругой линии в соответствующей точке, а также соотношения

$$\frac{1}{r} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z}{r} \right) = -z \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}$$

получим

$$\dot{\varepsilon} = -z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в соотношение (4), получим:

$$M = EJ \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \eta J \left(-\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (6)$$

Уравнение движения (2) с учетом полученных соотношений (4) и (5) принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta J \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = q, \quad (7)$$

где q – интенсивность внешней нагрузки.

Отметим, что величина ρ , входящая в уравнения (2) и (7), в связи с расположением балки в воде, представлена суммой двух составляющих

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad (8)$$

где ρ_0 – погонная плотность материала балки, ρ_1 – погонная плотность присоединенной массы воды [1]; тем самым реализован эффект влияния присоединенной массы на процесс движения и деформирования балки, находящейся в воде.

Граничные условия для уравнения (7) определяются из способа закрепления концов балки. Если, как указывалось выше, начало введенной декартовой прямоугольной системы координат поместить в середине длины балки, ось которой совмещена с осью абсцисс, и рассматривать случай свободного опирания балки концами на неподвижные недеформируемые опоры, то для каждого конца балки его перемещение и изгибающий момент будут равны нулю, т.е.

$$w\left(-\frac{l}{2}, t\right) = w\left(\frac{l}{2}, t\right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(-\frac{l}{2}, t\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{l}{2}, t\right) = 0. \quad (10)$$

Начальные условия для уравнения (7) соответствуют действующей внешней нагрузке. Взрывная нагрузка, как указывалось выше, является импульсной, которая действует в течение очень малого промежутка времени ($\tau \sim 10^{-6} - 10^{-4}$) с в зависимости от вида заряда ВВ. Поэтому деформирование балки происходит в период её свободных колебаний, описываемых однородным уравнением, соответствующим уравнению (7), т.е. уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta J \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0. \quad (11)$$

Начальные условия, следовательно, можно записать в виде:

$$w(x, 0) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \frac{i_*(x)}{\rho}, \quad (13)$$

где i_* – погонный (на единицу длины) импульс, при этом,

$$i_*(x) = bi(x) \frac{K_1}{S}, \quad (14)$$

где

$$i = \frac{A_0 C}{a^2} \cos^4(\alpha) \quad (15)$$

$$i = \int_0^\tau P(x, t) dt \quad (16)$$

– удельный импульс, $a_0 = \arctg\left(\frac{l}{2a}\right)$, α – угол падения частиц возмущенной среды на балку (Рис.2).

A_0 – энергетическая характеристика ВВ, например для тротила $A_0 = 400 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, K_1 – коэффициент формы [1], который учитывает расположение балки по отношению к заряду ВВ.

Как видно из приведенных соотношений, определяющих начальные условия для уравнения (11), форма изменения действующего давления во времени не имеет существенного значения – важным является величина импульса, полученного за действующий малый промежуток времени τ .

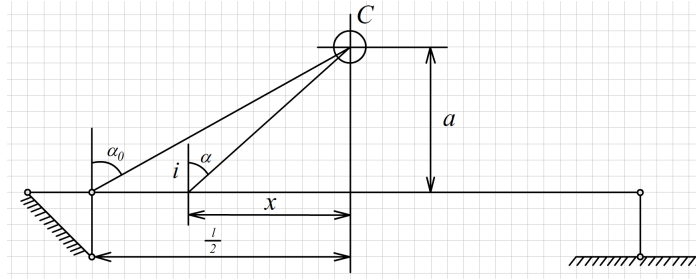


Рис. 2 Схема расположения заряда над балкой

Интегрирование определяющего уравнения (11) выполним методом разделения переменных, при этом, функцию распределения прогибов балки по её длине выберем, исходя из принципа выполнения для неё граничных условий и принципа наименьшего действия Остроградского-Гамильтона, согласно которому работа деформирования балки действующей внешней нагрузкой для выбранной функции должна быть минимальной.

Функцию времени найдём из обыкновенного дифференциального уравнения, которое получается после подстановки выбранной функции распределения прогибов в любой момент времени в уравнение движения (11).

Функцию прогибов возьмем аналогично работе [5] в виде

$$w = w_0(t) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (17)$$

Отличие от работы [5] состоит в том, что в формуле (17) $w_0(t)$ является неизвестной и подлежащей определению функцией времени, а в работе [5] она является константой, определяющей максимальный прогиб в центре балки.

Исследование альтернативной формы упругой линии в виде неполного полинома 4-й степени выполнено в работе [5]; в результате принята функция вида (17), так как она приводит к меньшей чем для альтернативной функции работе деформирования.

Предполагая, что это соотношение сохраняется и для функции (17), принимаем форму упругой линии в любой момент времени в виде (17).

Запишем уравнение (11) в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0, \quad (18)$$

где

$$\beta_1 = \frac{EJ}{\rho}, \quad \beta_2 = \frac{\eta J}{\rho}. \quad (19)$$

Функция (17) удовлетворяет граничным условиям (9), (10). Подставив её в уравнение (18), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w_0(t)$:

$$w_0''(t) + \gamma_2 w_0'(t) + \gamma_1 w_0(t) = 0, \quad (20)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\pi^4}{l^4} \beta_1, \quad \gamma_2 = \frac{\pi^4}{l^4} \beta_2 \quad (21)$$

Характеристическое уравнение запишем в виде

$$\lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_1 = 0. \quad (22)$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = \gamma_2^2 - 4\gamma_1 \quad (23)$$

определяет не только форму решения уравнения (20), но и величины интервалов для параметра η , в каждом из которых представлена соответствующая форма решения. Действительно, пусть $D > 0$, тогда согласно соотношениям (19), (21) и (23) получим интервал значений

$$\eta > 2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E\rho}{J}} \quad (24)$$

в котором решение уравнения (20) можно записать в виде

$$w_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (25)$$

где $\lambda_1 = \frac{-\gamma_2 + \sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-\gamma_2 - \sqrt{D}}{2}$.

Коэффициенты C_1 и C_2 определим из начальных условий (12) и (13), которые приводят к системе уравнений

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = \delta \end{array} \right\} \quad (26)$$

где $\delta = \frac{bK_1 A_0 C}{a^2 \rho}$. Решение системы (26) имеет вид

$$C_1 = \frac{\delta}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\delta}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (27)$$

Если $D = 0$, то $\eta = 2 \cdot \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E\rho}{J}}$ и решение примет вид

$$w_0(t) = C_3 e^{\lambda t} + C_4 t e^{\lambda t} = (C_3 + C_4 t) e^{\lambda t}, \quad (28)$$

где $\lambda = -\frac{\gamma_2}{2}$.

Из начальных условий (12), (13) найдем $C_3 = 0$, $C_4 = \delta$ и решение (27) примет вид

$$w_0(t) = \delta t e^{\lambda t}. \quad (29)$$

Если $D < 0$, то получаем для параметра η интервал

$$0 < \eta < 2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E\rho}{J}}. \quad (30)$$

Обозначим $D_1 = |D|$, тогда имеем комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma_2}{2} + j \frac{\sqrt{D_1}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma_2}{2} - j \frac{\sqrt{D_1}}{2},$$

где $j = \sqrt{-1}$ и решение примет вид

$$w_0(t) = e^{-\frac{\gamma_2 t}{2}} \cdot \left(C_5 \cos\left(\frac{\sqrt{D_1}}{2} t\right) + C_6 \sin\left(\frac{\sqrt{D_1}}{2} t\right) \right). \quad (31)$$

Из начальных условий находим

$$C_5 = 0, \quad C_6 = \frac{2\delta}{\sqrt{D_1}}. \quad (32)$$

Следовательно, для рассматриваемого интервала η решение уравнения (20) запишем в виде

$$w_0(t) = \frac{2\delta}{\sqrt{D_1}} e^{\frac{-\gamma_2}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{D_1}}{2}t\right). \quad (33)$$

Таким образом, получив из экспериментов величину параметра η и располагая значениями модуля упругости E в диапазоне наблюдаемых в эксперименте скоростей деформаций, выбираем функцию $w_0(t)$ в зависимости от интервала для η . Полное решение задачи о свободных колебаниях балки получим после подстановки выбранной таким образом функции $w_0(t)$ в соотношение (17), определяющее распределение прогибов балки (её упругую линию) в любой момент времени в рассматриваемом временном диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Т.М Саламахин. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.
- [2] Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В Розе. Теоретическая гидромеханика, часть 1. Москва: ГИФМЛ, М, 1963. 584 с.
- [3] Н.М Беляев. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 608 с.
- [4] Н.И Безухов. Основы теории упругости, пластичности, ползучести. Высшая школа, 1968. 612 с.
- [5] Г.Т Володин. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидкой среде. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. – Тула: «Левша». 2005. 160 с.

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

DEFORMATION OF ELASTIC-VISCOUS BEAMS BY EXPLOSIVE LOAD IN WATER

Tula State University, Tula, Russia.

Abstract. An analytical solution to the problem of deformation by an explosion of a concentrated charge of a condensed explosive (HE) of a beam, the material of which is sensitive to the rate of deformation, is presented. The influence of the external environment (water) on the process and the results of deformation is taken into account by introducing the added mass. The viscosity coefficient and the modulus of elasticity in fixed intervals of strain rates are determined from experiments. For these parameters, which characterize the material of the beam under impulse deformation, an analytical relationship and a lower limit of values for the viscosity coefficient are obtained. The solution to the problem is found by the method of separation of variables in the governing equation of motion. In this case, the shape of the elastic line of the beam for each moment of time is selected based on the requirement to fulfill the boundary conditions and the principle of minimum deformation work.

Keywords: beam, explosive load, strain rate, added mass, viscosity, explosion in water, principle of least action.

REFERENCES

- [1] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
- [2] Kochin N. E., Kibel I. A., Rose N. V. Theoretical hydromechanics, part 1. Moscow: GIFML, 1963. 584 p. (in Russian).
- [3] Belyaev N. M. Strength of materials. Moscow, 1976. 608 p. (in Russian).
- [4] Bezukhov N. I. Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity, creep. Moscow: Higher school, 1968. 512 p. (in Russian).
- [5] Volodin G. T. The effect of the explosion of charges of condensed explosives in a gas and liquid medium. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).

Volodin Gennady Timofeevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia,

Kochergin Denis Sergeevich, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

Ю. А. Завьялова, М. А. Лапшина, А. А. Трещев

ТЕРМОСИЛОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ ДЕФОРМАЦИОННО АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия Россия

Аннотация. Объектами рассмотренных исследований послужил частный случай оболочечных конструкций, а именно оболочка вращения – замкнутая круговая цилиндрическая, так как подобные сооружения весьма часто встречаются при проектировании и строительстве промышленных и гражданских объектов, а также в энергетике. Особенностью конструкции исследуемых оболочек являются материалы, из которых они выполнены, обладают анизотропией двоякого характера. Рассмотрена структурная анизотропия материала уровня ортотропии в совокупности с деформационной, появляющейся в зависимости жесткостных и прочностных свойств от вида напряженного состояния. Оболочка загружается внутренним давлением, которое сводится к равномерно распределенной осесимметричной нагрузке. Кроме того, при постановке задачи строительной механики учтено, что конкретные сооружения эксплуатируются не в идеальном стационарном изолированном пространстве, а в среде с изменяющимися температурными параметрами. При этом учтена вероятность проявления температурного перепада между внутренней загруженной поверхностью оболочки и наружной – свободной от силового воздействия. Известно, что в общем случае температурные и силовые поля взаимосвязаны, а распределение температуры в материале конструкции зависит от напряженного состояния, но как показали многочисленные исследования, связанность термомеханической задачи заметно проявляется только в короткий начальный период температурного изменения до возникновения установившегося перепада. Поэтому в представленной статье задача по термосиловому нагружению цилиндрической оболочки рассматривается в несвязанной постановке, когда общую задачу можно разделить на две независимые: строительной механики и термодинамики.

Учитывая, что классические теории термомеханики оболочек, выполненных из материалов, обладающих анизотропией двоякого характера, не позволяют получить достаточно надежные результаты, а большинство известных моделей, предназначенных для указанных материалов, обладают серьезными недостатками, здесь использована методика нормированного тензорного пространства напряжений. В статье представлена система дифференциальных уравнений задачи термоупругости цилиндрической оболочки из материалов с усложненными термомеханическими свойствами. Приведены отдельные решения с наиболее характерными результатами расчета напряженно-деформированного состояния оболочки с их анализом.

Ключевые слова: структурная ортотропия, деформационная анизотропия, термоупругость, несвязанная задача, цилиндрическая оболочка.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.006

УДК: 539.3:624.073

1. Введение В современном строительстве широкое распространение получают высокопрочные композитные материалы, основой которых являются полимеры с направленным или хаотическим армированием базальтовыми и “стекловолокнами”, термомеханические свойства которых существенно отличаются от распространенных стальных и железобетонных конструкций [1–7]. В частности, эти материалы могут обладать структурной анизотропией различного класса, а при деформировании их под нагрузкой по разному реагируют на величину и соотношения возникающих напряжений так, что тензор податливостей оказывается не инвариантен к виду напряженного состояния. Такие материалы принято называть деформируемыми структурами с двоякой анизотропией. У структурно анизотропных материалов проявляется зависимость от направлений не только в жесткостных характеристиках, но и тепло-физических [8–11]. Наиболее распространенными в строительстве являются конструкционные материалы со структурной ортотропией физико-механических свойств. Традиционные расчетные модели механики твердого тела и строительной механики, формально оперирующие с обобщенным законом Гука или соотношениями малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина [12], приводят к серьезным ошибкам не только в получаемых количественных характеристиках напряженно-деформированного состояния строительных конструкций, но и искажают его качественную картину. Подобные факты не позволяют обеспечить должную точность расчетов конструкций и надежность принимаемых проектных решений. В свете вышеизложенного, для расчета строительных конструкций, выполненных из указанных материалов, следует использовать апробированные теории и модели, максимально подтвержденными экспериментальными данными.

Изменение температурного режима эксплуатации строительных конструкций на основе материалов с анизотропией двоякого рода вносит еще большие сложности в математические модели и методы их расчета. Решение задач термоупругости для конструкций, выполненных из материалов со структурной и деформационной анизотропией, до сих пор носит эпизодический характер и не позволяют разработать методические рекомендации по проектированию особенно тонкостенных пространственных сооружений. Так как рассматриваемые материалы обладают высокими модулями упругости и пределами прочности, они получили широкое распространение при изготовлении и возведении тонкостенных оболочек, которые при минимальной толщине и общей массе имеют весомые преимущества в несущей способности.

Ниже рассмотрен частный вариант оболочек вращения, а именно – замкнутая круговая цилиндрическая оболочка, которая подвергается наиболее часто встречающейся осесимметричной нагрузке в виде равномерного давления. Котлы цилиндрической

© Завьялова Ю. А., Лапшина М. А., Трещев А. А., 2021

Завьялова Юлия Андреевна

e-mail: zavyalova_yuliya95@mail.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Лапшина Мария Александровна

e-mail: mary51296@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия. *Трещев Александр Анатольевич*

e-mail: taa58@yandex.ru, профессор, доктор технических наук, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 20.01.2021

конфигурации, подверженные паровому давлению, аналогичные резервуары с вертикальной или горизонтальной осью, испытывающие действие внутреннего давления жидкости или газа, а также трубопроводы с гидравлическим давлением – это именно объекты подобного рода расчетных задач. Очевидно, что конструкция указанных сооружений кроме внутреннего давления в период эксплуатации подвергаются температурным колебаниям.

Практически все известные ортотропные деформационно анизотропные материалы проявляют эффект связанности температурных и деформационных полей только в коротком периоде начального приложения температурного перепада на противоположных поверхностях конструкций, а величина этого эффекта достаточно мала. После появления установившегося стационарного перепада температур эффект связанности термических и силовых полей вообще исчезает [13, 14]. Поэтому механизм теплопередачи, происходящей в неравномерно нагретой конструкции за счет контакта с окружающей средой, позволяет пренебречь влиянием напряженного состояния на распределение температуры в ней. В связи с этим, исследование температурного поля в теле конструкции, соответствующего конкретным условиям теплопередачи, проводится независимо от ее напряженно-деформированного состояния, то есть здесь рассматривается несвязанная задача термоупругости.

2. Постановка задачи В цилиндрической системе координат рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, изготовленную из ортотропного деформационно анизотропного материала [1, 2]. Положение конкретной точки тела оболочки определим гауссовыми переменными $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Примем координатные оси совпадающими с главными осями ортотропии при следующих геометрических параметрах: длина L , толщина стенки h , радиус средней цилиндрической поверхности R . Один торец оболочки при $\beta_1 = 0$ примем жестко заземленным, а противоположный – при $\beta_1 = L$ свободным от закрепления и нагрузки. Термическое состояние оболочки таково, что в исходный момент времени температура в любой точке оболочки одинакова – T_0 , а в последующем устанавливается разность температур такая, что на внутренней поверхности возникла температура T_1 и наружной – T_2 . В дальнейшем примем, что температурные изменения происходят только по толщине оболочки с разностью температур ΔT , являющейся функцией от координаты β_3 . Силовое нагружение осуществляется равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q_3 изнутри оболочки (внутреннее давление).

Примем оболочку настолько тонкой, что применение гипотез Кирхгофа-Лява не вызывало сомнений, конфигурацию – таковой, чтобы ее можно было отнести к классу пологих, для которых применимы зависимости:

а) деформации срединной поверхности:

$$\varepsilon_1 = u_{,1} + 0,5\theta_1^2; \quad \varepsilon_2 = v_{,1} + kw + 0,5\theta_2^2; \quad \gamma = v_{,1} + u_{,2} + \theta_1\theta_2, \quad (1)$$

где u, v, w – перемещения в срединной поверхности (осевые, тангенциальные и радиальные); $k = 1/R$ – главная кривизна в недеформированном состоянии; $\theta_1 = -w_{,1}$; $\theta_2 = -w_{,2} + kv$;

б) кривизны и крутка срединной поверхности:

$$\chi_1 = -w_{,11}; \quad \chi_2 = -w_{,22}; \quad \tau = -w_{,12}; \quad (2)$$

в) полные деформации в любой точке оболочки с координатой β_3 относительно срединной поверхности:

$$e_{11} = \varepsilon_1 + \beta_3 \chi_1; \quad e_{22} = \varepsilon_2 + \beta_3 \chi_2; \quad \gamma_{12} = \gamma + 2\beta_3 \tau. \quad (3)$$

Уравнения связи тензоров деформаций и напряжений в отличие от работ [15–18] – примем на основе потенциала деформаций, представленного в рамках нормированного тензорного пространства напряжений, наиболее обоснованного и теоретически непротиворечивого, который детально представлен в исследованиях [19–21]. Очевидно, что с учетом влияния температурного перепада гипотезы Кирхгофа-Лява сводят эти уравнения в главных осях ортотропии к виду:

$$\begin{aligned} e_{11} &= C_{1111}\sigma_{11} + C_{1122}\sigma_{22} + \alpha_{1T}\Delta T; \\ e_{22} &= C_{1122}\sigma_{11} + C_{2222}\sigma_{22} + \alpha_{2T}\Delta T; \\ \gamma_{12} &= 2e_{12} = C_{1212}\tau_{12}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1111} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}) + 0, 5[B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2) - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3] + \\ &+ B_{1122}\alpha_{22}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}); \quad C_{2222} = (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}) + \\ &+ 0, 5[B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3] + B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}); \\ C_{1212} &= A_{1212} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3) - 2B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); \\ C_{1122} &= A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); \end{aligned}$$

A_{ijkl}, B_{ijkl} – константы потенциала, определяемые через модули упругости, коэффициенты поперечной деформации материала в главных осях ортотропии на растяжение, сжатие и через модули сдвига; $\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$ – компоненты тензора нормированных напряжений; $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\tau_{12}^2}$ – модуль тензора напряжений; α_{1T}, α_{2T} – коэффициенты линейного температурного расширения в главных осях ортотропии.

Проведя испытания стандартных образцов на осевое растяжение и сжатие в главных осях ортотропии и на сдвиг в главных плоскостях [20, 21], получаем значения констант уравнений (4):

$$\begin{aligned} A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; \quad B_{kkkk} = (1/E_k^+ - 1/E_k^-)/2; \quad A_{ijij} = 1/G_{ij}; \\ A_{iijj} &= -(\nu_{ij}^+/E_j^+ + \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; \quad B_{iijj} = -(\nu_{ij}^+/E_k^+ - \nu_{ij}^-/E_j^-)/2, \end{aligned}$$

где $\nu_{ij}^+/E_j^+ = \nu_{ji}^+/E_i^+$; $\nu_{ij}^-/E_j^- = \nu_{ji}^-/E_i^-$; E_k^\pm, ν_{ij}^\pm – модули упругости и коэффициенты поперечной деформаций на осевое растяжение и сжатие в главных осях ортотропии; G_{ij} – модуль сдвига в главной плоскости ортотропии; $i, j, k = 1, 2$.

3. Система разрешающих дифференциальных уравнений Для формулирования разрешающих уравнений для расчета оболочки обратим уравнения состояния (4) относительно напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= D_{11}e_{11} + D_{12}e_{12} - R_{11} - \varphi_{1T}; \quad \tau_{12} = D_{66}e_{12} - R_{12}; \\ \sigma_{22} &= D_{12}e_{11} + D_{22}e_{12} - R_{22} - \varphi_{2T}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $D_{11} = C_{2222}/\Delta$; $D_{12} = -C_{1122}/\Delta$; $D_{22} = C_{1111}/\Delta$; $D_{66} = 1/C_{1212}$;

$$R_{11} = (A_{2222}T_{11} - A_{1111}T_{22})/\Delta; \quad R_{22} = (A_{1111}T_{22} - A_{1122}T_{11})/\Delta; \quad R_{12} = T_{12}/A_{1212};$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \{B_{1111}\alpha_{11} + 0, 5[B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2) - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3] + \\ &+ B_{1122}\alpha_{22}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22})\}\sigma_{11} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})\sigma_{22}; \end{aligned}$$

$$T_{12} = -[(B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3) - 2B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\tau_{12};$$

$$T_{22} = B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})\sigma_{11} + \{B_{2222}\alpha_{22} + 0, 5[B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 -$$

$$-V_{1212}\alpha_{12}^3] + V_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22})\}\sigma_{22}; \quad \varphi_{1T} = D_{11}\alpha_{1T}\Delta T + D_{12}\alpha_{2T}\Delta T;$$

$$\varphi_{2T} = D_{12}\alpha_{1T}\Delta T + D_{22}\alpha_{2T}\Delta T; \quad \Delta = A_{1111}A_{2222} - A_{1122}^2.$$

Известно, что уравнения равновесия и соотношения Коши не зависят от физической природы материала, поэтому для оболочек, выполненных из материалов, обладающих анизотропией двоякого рода, эти классы зависимостей не меняются. Поэтому уравнения равновесия и неразрывности деформаций сохраняют свой вид как для общей нелинейной теории анизотропных оболочек [22]. В этом случае все внутренние моменты и усилия приводятся к срединной поверхности цилиндрической оболочки при $\beta_3 = 0$. Принимая во внимание то, что оболочка загружена внутренним равномерным давлением при отсутствии крутящих моментов ($\tau_{12} = e_{12} = 0$) и $\beta_3 k \ll 1$, уравнения равновесия и неразрывности деформаций упрощаются, преобразуясь к виду:

$$N_{1,1} = 0; \quad M_{1,1} - Q_1 - N_1\theta_1 = 0; \quad Q_{1,1} - kN_2 + q_3 = 0; \quad k\chi_1 + \varepsilon_{2,11} = 0, \quad (6)$$

а из геометрических соотношений сохраняются следующие:

$$\varepsilon_1 = u_{,1} + 0,5\theta_1^2; \quad \varepsilon_2 = kw; \quad \chi_1 = -w_{,11}; \quad e_{11} = \varepsilon_1 + \beta_3\chi_1; \quad e_{22} = \varepsilon_2, \quad (7)$$

где N_k – продольные усилия в средней поверхности оболочки; Q_1 – поперечное усилие; M_1 – изгибающий момент:

$$N_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kk} d\beta_3; \quad (k = 1, 2); \quad M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}\beta_3 d\beta_3. \quad (8)$$

Интегрируя уравнения (5) по толщине оболочки согласно правилам (8), внося результаты в статические уравнения (6), геометрические зависимости (7) в соотношение сплошности (6), проводя при этом соответствующую перекомбинацию, получим два смешанных дифференциальных уравнений:

$$k\theta_{1,1} + L_{22}N_{2,11} = -\eta_{2,11} - \varepsilon_{2T,11}; \quad P_{11}\theta_{1,11} - kN_2 = -q_3 + J_{11,11} + \chi_{1T,11}, \quad (9)$$

где $L_{11} = K_{22}/\Delta$; $L_{22} = K_{11}/\Delta$; $L_{12} = -K_{12}/\Delta$; $\Delta = K_{11}K_{22} - K_{12}^2$; $K_{ij} = D_{ij}h$; $P_{ij} = D_{ij}h^3/12$; $\eta_1 = L_{11}I_{11} + L_{12}I_{22}$; $\eta_2 = L_{12}I_{11} + L_{22}I_{22}$;

$$I_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} R_{ij} d\beta_3; \quad J_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} R_{ij}\beta_3 d\beta_3; \quad \eta_{iT} = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_{iT} d\beta_3; \quad \chi_{iT} = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_{iT}\beta_3 d\beta_3;$$

$$\varepsilon_{1T} = L_{11}\eta_{1T} + L_{12}\eta_{2T}; \quad \varepsilon_{2T} = L_{12}\eta_{1T} + L_{22}\eta_{2T}.$$

С учетом того, что по условию задачи торец оболочки при $\beta_1 = L$ зашпелен, а торец при $\beta_1 = 0$ полностью свободен, граничные условия для последнего имеют вид: $\theta_1 = 0$; $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{\eta_2 + \varepsilon_{2T}}{L_{22}}$.

4. Температурная составляющая задачи Перепад температур между внутренней и наружной поверхностями оболочки требует значительной корректировки результатов расчета ее НДС [23]. Определение температурных составляющих в рассматриваемой задаче требует самостоятельного рассмотрения процесса передачи тепла сквозь оболочку. Этот процесс однозначно определен известным уравнением теплопроводности:

$$T_{,t} = a_1 \cdot T_{,11} + a_2 \cdot T_{,22} + a_3 \cdot T_{,33}, \quad (10)$$

где a_1, a_2, a_3 – коэффициенты температуропроводности, определяющие теплоинерционность материала по характерным направлениям; t – временной параметр; T – параметр температурного поля.

Рассмотрим стационарный процесс с одномерным распространением температурного поля с перепадом только по толщине оболочки, когда температура меняется только вдоль одной координаты β_3 ортогональной к изотермическим поверхностям. Тогда, уравнение теплопроводности упрощается и принимает вид: $T_{,t} = a_3 T_{,33}$, где $a_3 = \lambda/c$ – коэффициент температуропроводности по нормали к криволинейной поверхности оболочки; λ – коэффициент теплопроводности; c – удельная объемная теплоемкость материала.

Ввиду того, что коэффициент температуропроводности для исследуемых материалов достаточно велик, то для тонкостенной оболочки процесс достижения стационарного равновесного линейного распределения температуры по ее толщине наступает весьма быстро за короткий интервал времени. Поэтому можно сделать вывод о целесообразности исследования термомеханической задачи в момент равновесного распределения температуры.

Для равновесного распределения температуры по толщине оболочки расчет перепада температур ΔT в оболочке определяется по линейному закону распределения:

$$T(\beta_3) = (T_2 - T_1) \beta_3/h + (T_1 + T_2)/2 - T_0. \quad (11)$$

Для температурной составляющей задачи, кроме условий на границах требуются начальные условия, когда в начальный момент времени при $t = 0$ для любой точки тела оболочки температура одинакова и равна T_0 , а граничные условия в текущий момент времени $t = t_k$ принимаются в соответствии с линейным распределением температуры по толщине T_1 и T_2 , на внутренней и наружной поверхностях, соответственно.

Ввиду существенной нелинейности рассматриваемой задачи двойного рода, ее решение строилось в приращениях искомым функций по двухшаговому методу последовательных возмущений параметров В.В.Петрова [24, 25] в сочетании с конечно-разностной аппроксимацией повышенной точности [26], интегрированием по толщине методом Симпсона, а по нагрузке – Адамса. При этом система алгебраических уравнений решалась методом Гаусса.

5. Результаты решения краевой задачи и их анализ

Определим напряженно-деформированное состояние оболочки, расчетная схема которой представлена на рис. 1. Основные геометрические параметры оболочки приняты следующими: длина $L = 2,0$ м; толщина $h = 0,04$ м; диаметр срединной поверхности $2R = 0,8$ м. Рассмотрен вариант приложения внутреннего давления интенсивностью $q_3 = 8$ МПа. Температурная среда осуществляет перенос тепла за счет теплопроводности материала оболочки так, что внутри оболочки поддерживается постоянная температура $T_1 = 0^\circ\text{C}$, а снаружи – постоянная температура $T_2 = +30^\circ\text{C}$ при начальной температуре всей оболочки $T_0 = 0^\circ\text{C}$. В качестве материала оболочки принят – трехармированный тканый полимерный композит марки ПЗ6-50 [1], для которого установлены основные параметры: модули упругости и коэффициенты поперечной деформации вдоль главных осей ортотропии – $E_1^+ = 10,3$ ГПа, $E_1^- = 11,77$ ГПа, $E_2^+ = 17,6$ ГПа, $E_2^- = 18,54$ ГПа, $\nu_{12}^+ = 0,188$, $\nu_{12}^- = 0,215$; коэффициенты теплового расширения $\alpha_1^\pm = 33 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1}$, $\alpha_2^\pm = 40 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1}$ [2]. Как видно, что степень разнотемпературности по всем направлениям принята минимальной 14,3% вдоль оси β_1

и 5,3% вдоль $-\beta_2$. Это чрезвычайно минимальная величина разнсопротивляемости при минимальном перепаде температур.

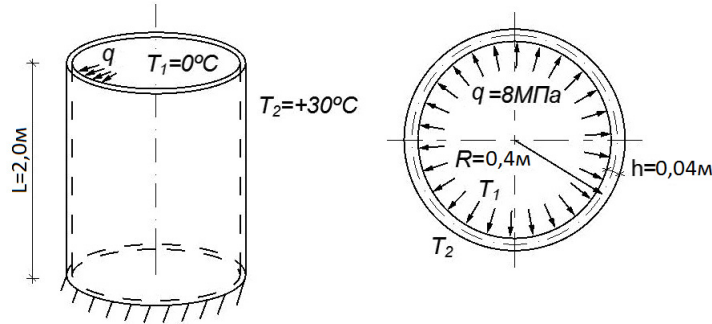


Рис. 1. Расчетная схема оболочки

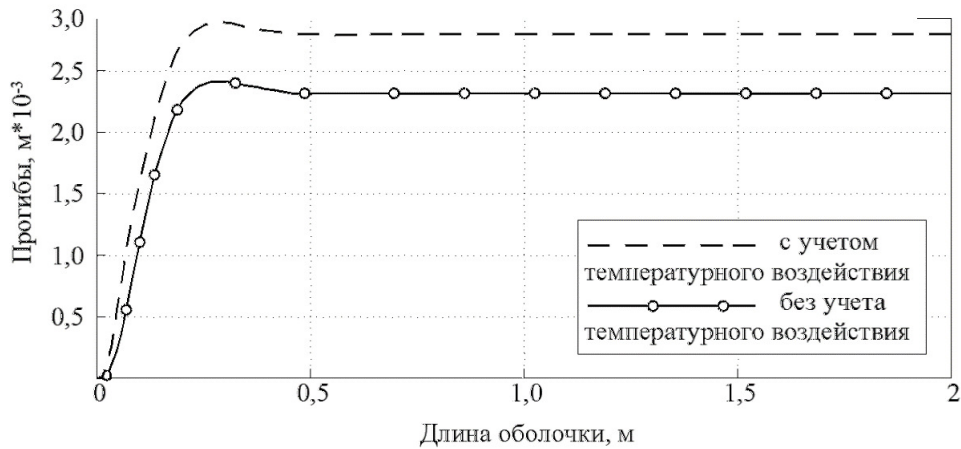


Рис. 2. Прогибы оболочки

На рис. 2 – 4 представлены основные результаты расчета деформирования оболочки с учетом принятых условий. Погрешность при определении максимальных прогибов при нагружении с температурным воздействием и без него составляет 20,8 %.

Осевые и окружные напряжения на внутренней поверхности оболочки без термического воздействия и при нем полностью совпадают, что обусловлено совпадением температур на этой поверхности в любой момент времени. Осевые напряжения на внешней поверхности в заделке без температурного нагружения меньше, чем при нем на 15 %, но для наибольших напряжений растяжения эта разница достигает 34,6 %. Причем на участке $0,125L-L$ воздействие температуры меняет знак напряжений на противоположный.

Окружные напряжения с наружной поверхности оболочки без учета термического воздействия по сравнению с вариантом расчета при нагреве на защемленном торце в 2 и более раз ниже. Максимальные окружные напряжения во внешних волокнах

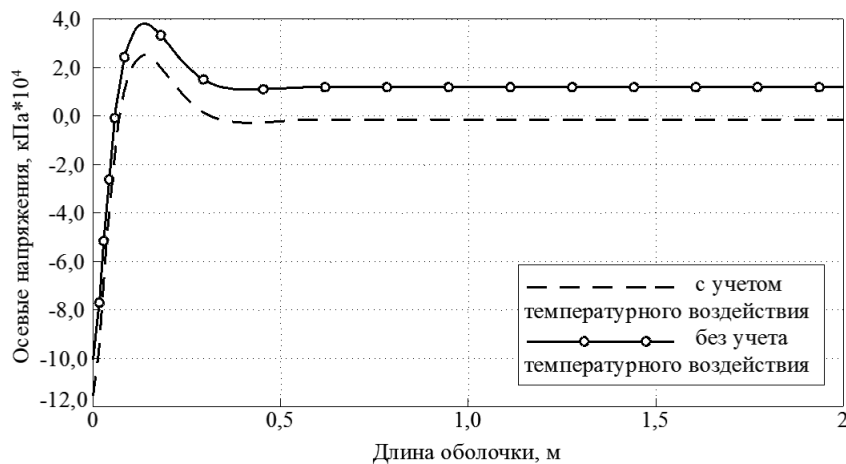


Рис. 3. Осевые напряжения

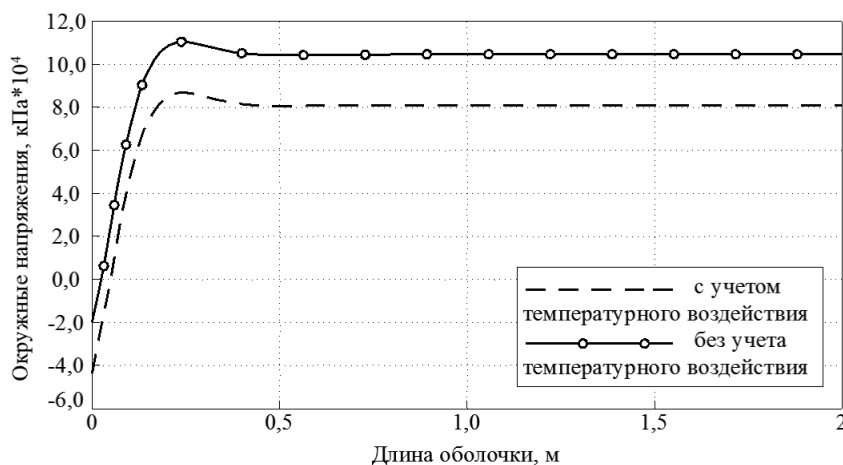


Рис. 4. Окружные напряжения

оболочки при нагреве меньше на 21,5 %, чем без него. Если в качестве материала оболочки принять вариант с большими отличиями деформационных характеристик на растяжение и сжатие в направлениях главных осей ортотропии, то погрешность классических теорий существенно повысится, может достигнуть 100% в отдельных показателях, а иногда и более [27].

6. Выводы Анализ результатов расчета показывает, что учет процесса нагрева цилиндрических оболочек из ортотропных материалов с деформационной анизотропией при температурных воздействиях демонстрирует кардинальное несоответствие получаемых результатов общих классических теорий, которые необходимо модернизировать с учетом универсальных уравнений состояния (4). Это даже показано при применении упрощенных моделей [11, 15–18].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Розе А. В., Жигулин И. Г., Душин М. Н. Трехармированные тканые материалы // *Механика полимеров*. 1970. № 3. С. 471–476.
- [2] Каргин В. А. *Энциклопедия полимеров*. Москва: Советская энциклопедия, 1972. Т. 1. 1224 с.
- [3] О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е. В. Амелина, С. К. Голушко, В. С. Ерасов [и др.] // *ИВТ СО РАН: Вычислительные технологии*. 2015. Т. 20, № 5. С. 27–52.
- [4] Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов / Р. А. Каюмов, С. А. Луканкин, В.Н. Паймушин [и др.] // *Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки*. 2015. Т. 157, № 4. С. 112–132.
- [5] Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts / L. N. Shafigullin, A. A. Bobrishev, V. T. Erofeev et al. // *International Journal of Applied Engineering Research*. 2015. Vol. 10, no. 23. P. 43758–43762.
- [6] Sulfur composite technology from oil refinery waste / A. A. Yusupova, R. Akhmetova, A. A. Treshchev et al. // *International Journal of Applied Engineering Research*. 2016. Vol. 11– Issue 5., no. 1. P. 3057–3061.
- [7] Production of Sulfur Composite Materials from Sulfur Containing Waste for Construction Applications / A. A. Yusupova, R. T. Akhmetova, A. A. Treshchev et al. // *Research Journal of Pharmaceutical, Biological and Chemical Sciences*. 2016–July–August. – RJPBCS. no. 7(4). P. 1411–1419.
- [8] Hart P. E. The effect of pre-stressing on the thermal expansion and Young’s modulus of graphite // *Carbon*. 1972. Vol. 10. P. 233–236.
- [9] Hsu Y. S., Bert C. W., Reddy J. N. Thermoelasticity of Circular Cylindrical Shells Laminated of Bimodulus Composite Materials // *Journal of Thermal Stresses*. 1981. Vol. 4, no. 2. P. 155–177.
- [10] Thermal bending of thin rectangular plates of bimodulus composite materials / J. N. Reddy, C. W. Bert, Y. S. Hsu et al. // *Journal Mach. eng. sci.* 1980. Vol. 22, no. 6. P. 297–304.
- [11] The influence of temperature differences for the analysis of thin orthotropic cylindrical shell / A. A. Treschev, M. V. Spasskaya, M. B. Shereshevsky et al. // *Scientific Review Engineering and Environmental Sciences*. 2017. Vol. 26, no. 4. P. 528–537.
- [12] Ильюшин А. А. *Пластичность*. Москва: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
- [13] Трещёв А. А., Десягин М. Ю. Моделирование оболочки из изотропного разнсопротивляющегося графита с помощью объемных конечных элементов с учетом связанности напряжений и температур // *Materials Physics and Mechanics*. 2013. Т. 17, № 1. С. 59–70.
- [14] Трещёв А. А., Десягин М. Ю. Связанный термомеханический расчет оболочки из графито-композита с учетом существенно нелинейной разнсопротивляемости // *Вестник Поволжского государственного технологического университета*. - Сер. Материалы. Конструкции. Технологии. 2019. № 3(11). с. 91–100.
- [15] Трещев А. А., Теличко В. Г., Ходорович П. Ю. Моделирование напряженно-деформированного состояния толстых цилиндрических оболочек из материалов с усложненными свойствами // *Materials Physics and Mechanics*. 2014. Т. 21, № 1. С. 38–50.
- [16] Спасская М. В., Трещёв А. А. Термомеханическая задача для полой сферической оболочки из материала с усложненными свойствами // *Строительная механика и расчет сооружений*. Москва, 2018. № 5. С. 58–65.
- [17] Трещёв А. А., Спасская М. В. Напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической оболочки из материала с усложненными свойствами // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Т. 29, № 1. С. 32–38.
- [18] The Stress-Strain State Of Layered Orthotropic Conditional Half-Space Taking Into Account Different Resistance / L. N. Shafigullin, A. A. Treschev, P. Y. Hodorovich et al. // *Revista Publicando*. 2017. Vol. 4, no. 13(2). P. 109–127.
- [19] Treschev A. A., Bobrishev A. A., Shafigullin L. N. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasi-linear approximation of the deformation law // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 481, no. 012014. P. 1–7.
- [20] Описание деформирования ортотропных разнсопротивляющихся материалов / А. А. Трещев, Ю. А. Монастырев, В. Д. Чибрикина [и др.] // *Строительная механика и конструкции*. Воронеж, 2019. № 1(20). С. 7–13.

- [21] Трещев А. А., Завьялова Ю. А., Лапшина М. А. Вариант модели деформирования ортотропных композитных материалов // Эксперт: Теория и практика (Научно-практический журнал). Тольятти, 2020. № 3(6). С. 62–68.
- [22] Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974. 446 с.
- [23] Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
- [24] Петров В. В., Кривошеин И. В. Методы расчета конструкций из нелинейно деформируемого материала. Москва: Изд-во АСВ, 2009. 208 с.
- [25] Петров В. В., Кривошеин И. В. Неоднородные пологие оболочки с двумя видами нелинейности // АСАДЕМІА. Архитектура и строительство. 2013. № 1. С. 114–123.
- [26] Варвак П. М., Варвак Л. П. Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций. Москва: Стройиздат, 1977. 160 с.
- [27] Treschev A. A., Zhurin E. A. Bending of Ring Plates, Performed from an Orthotropic Nonlinear Differently Resistant Material // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16, Issue 1. P. 130–146.

Yu. A. Zavyalova¹, M. A. Lapshina¹, A. A. Treshchev¹

THERMAL FORCE LOADING OF AN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL MADE OF A DEFORMATIONALLY ANISOTROPIC MATERIAL

¹Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The objects of the considered studies were a special case of shell structures, namely, the shell of rotation – a closed circular cylindrical one, since such structures are very often found in the design and construction of industrial and civil facilities, as well as in the energy sector. A special feature of the design of the studied shells is the materials, which have anisotropy of a twofold nature. The structural anisotropy of the material of the orthotropy level is considered in conjunction with the deformation one, which appears depending on the stiffness and strength properties of the type of stress state. The shell is loaded with internal pressure, which is reduced to a uniformly distributed axisymmetric load. In addition, when setting the problem of construction mechanics, it is taken into account that specific structures are operated not in an ideal stationary isolated space, but in an environment with changing temperature parameters. At the same time, the probability of a temperature difference between the inner loaded surface of the shell and the outer surface – free from force action-is taken into account. It is known that in the general case, the temperature and force fields are interrelated, and the temperature distribution in the material of the structure depends on the stress state, but as numerous studies have shown, the connectivity of the thermomechanical problem is noticeable only in the short initial period of temperature change before the occurrence of a steady drop. Therefore, in the present article, the problem of thermal force loading of a cylindrical shell is considered in an unrelated formulation, when the general problem can be divided into two independent ones: structural mechanics and thermodynamics. Given that the classical theories of thermomechanics of shells made of materials with anisotropy of a twofold nature do not allow us to obtain sufficiently reliable results, and most of the known models designed for these materials have serious drawbacks, the method of normalized tensor stress space is used here. The article presents a system of differential equations for the problem of thermoelasticity of a cylindrical shell made of materials with complicated thermomechanical properties. Separate solutions with the most characteristic results of calculating the stress-strain state of the shell and their analysis are presented.

Keywords: structural orthotropy, deformation anisotropy, thermoelasticity, unrelated problem, cylindrical shell.

REFERENCES

- [1] Rosa A. V., Zhigulin I. G., Dushin M. N. Trekharmónica fabrics // *Mechanics of polymers*. 1970. no. 3. P. 471–476.
- [2] Kargin B. A. encyclopedia of polymer. Moscow: Soviet Encyclopedia, 1972. Vol. 1. 1224 p.
- [3] On nonlinear deformation of carbon fiber plastics: experiment, model, calculation / E. V. Amelina, S. K. Golushko, V. S. Erasov et al. // *IVT SB RAS: Computational Technologies*. 2015. Vol. 20, no. 5. P. 27–52.
- [4] Identification of mechanical characteristics of fiber-reinforced composites / R. A. Kayumov, S. A. Lukankin, V. N. Paimushin et al. // *Scientific notes of the Kazan University. Physical and mathematical sciences*. 2015. Vol. 157, no. 4. P. 112–132.
- [5] Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts / L. N. Shafigullin, A. A. Bobrishev, V. T. Erofeev et al. // *International Journal of Applied Engineering Research*. 2015. Vol. 10, no. 23. P. 43758–43762.
- [6] Sulfur composite technology from oil refinery waste / A. A. Yusupova, R. Akhmetova, A. A. Treshchev et al. // *International Journal of Applied Engineering Research*. 2016. Vol. 11– Issue 5., no. 1. P. 3057–3061.
- [7] Production of Sulfur Composite Materials from Sulfur Containing Waste for Construction Applications / A. A. Yusupova, R. T. Akhmetova, A. A. Treshchev et al. // *Research Journal of Pharmaceutical, Biological and Chemical Sciences*. 2016 – July-August. - RJPBCS. no. 7 (4). P. 1411–1419.
- [8] Hart P. E. The effect of pre-stressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite // *Carbon*. 1972. Vol. 10. P. 233–236.
- [9] Hsu Y. S., Bert C. W., Reddy J. N. Thermoelasticity of Circular Cylindrical Shells Laminated of Bimodulus Composite Materials // *Journal of Thermal Stresses*. 1981. Vol. 4, no. 2. P. 155–177.
- [10] Thermal bending of think rectangular plates of bimodulus composite materials / Y. S. Hsu, J. N. Reddy, C. W. Bert et al. // *Journal Mach. eng. sci.* 1980. Vol. 22, no. 6. P. 297–304.
- [11] The influence of temperature differences for the analysis of thin orthotropic cylindrical shell / A. A. Treshchev, M. V. Spasskaya, M. V. Shereshevsky et al. // *Scientific Review Engineering and Environmental Sciences*. 2017. Vol. 26, no. 4. P. 528–537.
- [12] Ilyushin A. A. Plasticity. Moscow: Publishing house of the USSR Academy of Sciences, 1963. 271 p.
- [13] Treshchev A. A., Delyagin M. Y. Modeling a shell made of isotropic multi-resistive graphite using volumetric finite elements, taking into account the coupling of stresses and temperatures // *Materials Physics and Mechanics*. 2013. Vol. 17, no. 1. P. 59–70.
- [14] Treshchev A. A., Delyagin M. Y. Associated thermomechanical calculation of a graphite composite shell taking into account essentially nonlinear diversity of resistance // *Bulletin of the Volga State Technological University. - Ser. Materials. Constructions. Technology*. 2019. no. 3 (11). p. 91–100.
- [15] Treshchev A. A., Telichko V. G., Khodorovich P. Y. Modeling the stress-strain state of thick cylindrical shells made of materials with complicated properties // *Materials Physics and Mechanics*. 2014. Vol. 21, no. 1. P. 38–50.
- [16] Spasskaya M. V., Treshchev A. A. Thermo-Mechanical problem for a hollow spherical shell of material with complicated properties // *Structural Mechanics and Calculation of Structures*. Moscow, 2018. № 5. C. 58–65.
- [17] Treshchev A. A., Spasskaya M. V. Stress-strain state of a circular cylindrical shell of a material with complicated properties // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 29, no. 1. P. 32–38.
- [18] The Stress-Strain State Of Layered Orthotropic Conditional Half-Space Taking Into Account Different Resistance / L. N. Shafigullin, A. A. Treshchev, P. Hodorovich et al. // *Revista Publicando*. 2017. Vol. 4, no. 13 (2). P. 109–127.

Zavyalova Yulia Andreevna, Post-graduate student, Tula State University, Tula, Russia.

Lapshina Maria Alexandrovna, Post-graduate student, Tula State University, Tula, Russia.

Treshchev Alexander Anatolyevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department "Construction, Building materials and structures Tula State University, Tula, Russia.

- [19] Treschev A. A., Bobrishev A. A., Shafigullin L. N. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasi-linear approximation of the deformation law // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 481, no. 012014. P. 1–7.
- [20] Description of deformation of orthotropic different-resisting materials / A. A. Treshchev, Y. A. Monastirev, V. D. Chibrikina et al. // Building Mechanics and Structures. Voronezh, 2019. no. 1 (20). P. 7–13.
- [21] Treshchev A. A., Zavyalova Y. A., Lapshina M. A. Variant of the model of deformation of orthotropic composite materials // Expert: Theory and Practice (Scientific and Practical Journal). Togliatti, 2020. no. 3 (6). P. 62–68.
- [22] Ambartsumyan C. A. General theory of anisotropic shells. Moscow: Science, 1974. 446 p.
- [23] Kovalenko A. D. Thermoelasticity. Kiev: Visha school, 1975. 216 p.
- [24] Petrov V. V., Krivoshein I. V. Methods for calculating structures from nonlinearly deformable material. Moscow: Publishing house ASV, 2009. 208 c.
- [25] Petrov V. V., Krivoshein I. V. Inhomogeneous flat shells with two types of nonlinearity // ACADEMIA. Architecture and construction. 2013. no. 1. P. 114–123.
- [26] Varvak P. M., Varvak L. P. The method of grid in problems of calculation of building structures. Moscow: Stroyizdat, 1977. 160 p.
- [27] Treschev A. A., Zhurin E. A. Bending of Ring Plates, Performed from an Orthotropic Nonlinear Differently Resistant Material // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16, Issue 1. P. 130–146.

Т. Г. Рытова¹, Л. А. Максимова^{2,3}, А. Г. Николаева³, Т. М. Макарова³, Н. Г. Пфаненштиль⁴

АНАЛИЗ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БОЛЬШЕПРОЛЕТНОЙ ФЕРМЫ С ФЛАНЦЕВЫМИ СОЕДИНЕНИЯМИ

¹ *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

² *Российский университет транспорта, Москва, Россия*

³ *Чувашский госуниверситет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары, Россия*

⁴ *Казанский филиал Российского государственного университета правосудия, г. Казань, Россия*

Аннотация. Приводится анализ частоты собственных колебаний большепролетной фермы с фланцевыми соединениями. Выполнен расчет фланцевого соединения с различными случаями исключения болтов из работы соединения. Анализ результата расчета показал, что возникновение повреждений и дефектов конструкций здания в локальных зонах, величина которых несущественно снижает общую жесткость каркаса, практически не влияет на динамические характеристики каркаса.

Ключевые слова: частота, колебание, фланцевое соединение, расчет, болты.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.007

УДК: 539.37

Введение

Цель настоящей работы - анализ частоты собственных колебаний фермы с фланцевыми соединениями при ослаблении узлов. Разработана расчетная модель конечных

© Рытова Т. Г., Максимова Л. А., Николаева А. Г., Макарова Т. М., Пфаненштиль Н. Г., 2021

Рытова Татьяна Георгиевна

e-mail: tanusha2884@mail.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры металлических и деревянных конструкций Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, г. Москва, Россия,

Максимова Людмила Анатольевна

e-mail: maximova_ng@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшая математика и естественные науки Российского университета транспорта, профессор кафедры строительных конструкций ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия,

Поступила 10.02.2021

элементов здания ангара, замоделированы узлы фланцевого соединения, выполнен анализ частот собственных колебаний фермы.

Фланцевые соединения могут работать на растяжение или сжатие, на изгиб при наличии в узле изгибающих моментов, а при наличии поперечных сил – на сдвиг. Фланцевые соединения применяются для монтажных стыков балок и ферм, а также в монтажных соединениях балки с колонной, фермы с колонной и т.д. [1, 2].

Фланцевое соединение представляет собой две пластины (рис.1), стягиваемые болтами. Такие соединения имеют массу преимуществ перед другими типами болтовых соединений. Фланцевые соединения обеспечивают возможность возведения каркаса здания при любых климатических условиях и возможность его демонтажа без повреждения несущих элементов. Фланцевые соединения характеризуются высокой надежностью при действии нагрузок и простотой контроля соединения.

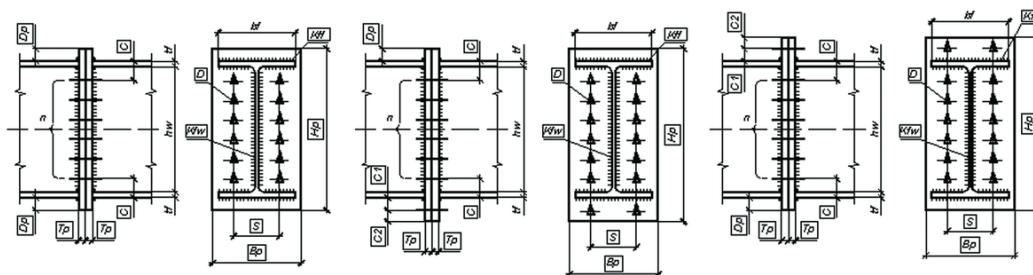


Рис. 1. Фланцевые соединения открытого профиля

В настоящее время изучение работы фланцевых соединений ведется не так активно как в 80-х годах прошлого столетия. Одни из основных современных исследователей работы фланцевых соединений Шафрая С.Д., Шафрая С.А, Клюкина А.Ю., Гладштейна Л.И. и др. Изучение статей в различных научных журналах показало, основной задачей современных исследователей стала разработка корректной расчетной модели с помощью различных программных комплексов. В статье Семенов А. А., Маляренко А. А., Порываев И. А., Семенов С. А. рассматривают расчетную модель фланцевого соединения элементов открытого профиля, выполненную в среде ПК SCAD. В статье проведено сравнение результатов численных исследований с результатами, полученными инженерными методами. Выявлено, что инженерная методика

Николаева Анастасия Георгиевна

e-mail: nag_sf@mail.ru, старший преподаватель ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия,

Макарова Татьяна Михайловна

e-mail: tany96@list.ru, магистрант ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия,

Пфаненштиль Надежда Георгиевна

e-mail: pfedorova83@mail.ru, кандидат исторических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных наук Казанского филиала Российского государственного университета правосудия, г. Казань, Россия, Россия

дает заниженные результаты по отдельным болтам в диапазоне 4 – 20 % по сравнению НДС пространственной численной модели. Также авторы проводили исследование фланцевого монтажного стыка фермы из гнутых сварных замкнутых профилей [4]. При сравнении результатов численных исследований моделей в ПК SCAD [3] с результатами, полученными классическими методами и результатами, полученными в программе ANSYS, авторы обосновали необходимость учета изгибающих моментов и соотношения жесткостей отдельных элементов монтажного стыка. Шафрай К. А., Шафрай С. Д. исследовали работу фланцевых соединений, проведя серию испытаний элементарных Т-образных фланцев и сравнив результаты с численными расчетами. В результате исследования была выявлена зависимость между толщиной фланца и величиной изгибных напряжений: с увеличением толщины фланца изгибные напряжения в болте падают. Основной акцент делается на развитие КЭ моделей для оценки НДС и действительной работы фланцевого соединения.

Теоретическое обоснование.

Фланцевое соединение растянутого пояса проверяется расчетами:

- а) на прочность болтов в зонах полки и стенки;
- б) на прочность фланцев на изгиб и поверхностный отрыв в околошовной зоне;
- в) на прочность сварных швов соединения фланца и профиля;
- г) по критерию нераскрытия соединения (по условию передачи поперечной силы для соединений типа А).

Вопрос прочности фланцевых соединений элементов открытого профиля изучался профессором Грудевым И. Д. [5]. Разработана полуэмпирическая методика расчета на прочность фланцевых соединений элементов открытого профиля. Решение получено численно, а подгоночные параметры определены по данным эксперимента. Для удобства пользования методикой предложена аппроксимационная формула. В основу исследования положены следующие положения: все болты имеют одинаковое предварительное натяжение, болты в составе соединения работают неравномерно, и по характеру своей работы разделяются на две группы: болты внутренней зоны, расположенные в углах сечения и более нагруженные, отмеченные ниже индексом В, и болты наружной зоны с индексом Н, наружная зона разбивается на элементарные Т-образные соединения, последние описываются балочной моделью с учетом только геометрической нелинейности.

Соотношение между усилиями в болтах внутренней и наружной зон описывается кусочно-линейной функцией, полученной путем аппроксимации экспериментальных данных. Если разрушение происходит по болтам, оно имеет вероятностную природу и определяется несущей способностью совокупности болтов внутренней зоны. Изгиб болта, наличие отверстий под болты, неравномерность предварительного натяжения, наличие внешних изгибающих моментов, приводит к необходимости введения подгоночных параметров.

Во многих случаях возникает необходимость выполнять расчеты стальных конструкций по европейским нормам проектирования, в частности согласно восьмой его части EN 1993–1–8 [6], касающейся расчета и проектирования узлов. В связи с этим интересным представляется рассмотреть те расчетные модели фланцевых соединений, которыми оперирует данный нормативный документ.

Существенным отличием Еврокода от отечественных норм при расчете фланцевых соединений является то, что они регламентируют учет развития пластических деформаций. Расчету и проектированию фланцевых соединений рамных узлов металлических конструкций посвящены также работы. При таком подходе появляется возможность использовать резервы несущей способности фланцевых соединений за счет допущения развития пластических деформаций во фланце, а также в сечениях соединяемых элементов в околофланцевой зоне. Требуемая толщина фланца в этом случае будет минимальной.

Расчет фланцевых соединений с учетом развития пластических деформаций выполняют с применением метода предельного равновесия. При этом различают три возможных механизма разрушения, а именно: разрушение болтов, разрушение болтов с частичным развитием пластических деформаций во фланце и развитие глубоких пластических деформаций во фланце (рис. 2).

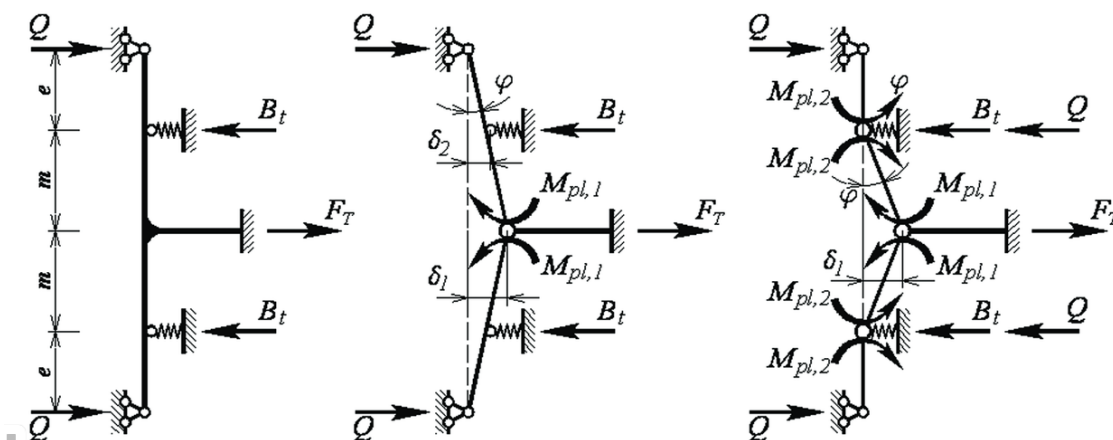


Рис. 2. Расчетные модели фланцевых соединений согласно EN 1993-1-8

Если фланец принять значительной изгибной жесткости, тогда разрушение фланцевого соединения происходит вследствие разрушения болтов, нагруженных внешними силами при отсутствии контактного усилия, обусловленного наличием “рычажного” эффекта.

В случае уменьшений изгибной жесткости фланца (проектирование фланцев меньшей толщины), разрушение фланцевого соединения происходит вследствие разрушения болтов при частичном развитии пластических деформаций во фланце.

В случае использования тонких фланцев разрушение соединения происходит вследствие развития пластических деформаций во фланце.

Необходимо отметить, что развитие пластических деформаций во фланцах и в сечениях соединяемых элементов в околофланцевой зоне вызывает значительное повышение общей деформативности конструкции, которая должна быть соответствующим образом учтена дальнейшим нелинейным анализом стержневой системы.

Так же, на прочность фланцевых соединений может влиять человеческий фактор. Из-за неточности монтажа фланцевые соединения могут иметь значительные зазоры в зоне соприкосновения фланцев.

Итак, у фланцевых соединений есть и свои минусы. Одним из недостатков фланцевых соединений является сложность расчета, так как болты работают неодинаково, кроме того работа фланцевых соединений до конца не исследована, как и их напряженно-деформированное состояние. Необходимо отметить, что несущие конструкции, использующие фланцевые соединения, требуют высокой точности изготовления, поскольку такие соединения не обладают компенсационной способностью. Так, следствием неточностей изготовления конструкции, превышающих регламентированные нормами допустимые отклонения, являются зазоры между контактирующими поверхностями фланцев. Недостаточно исследовано поведение фланцевых соединений динамических нагрузках, ранее проведенные испытания показывают плохую работу соединений такого типа при асимметричном цикле динамических нагрузок.

Расчетная модель.

Объект – здание ангара с покрытием из металлических ферм на фланцевых соединениях пролетом 60 м. Каркас ангара состоит из однопролетных поперечных рам, установленных с шагом 6 м, пролет здания 60 м, расстояние от нулевой отметки до низа стропильных конструкций 16,35 м. Ферма раскосная с малым уклоном 1,5%, имеет строительный подъемный равный 0,45 мм. Высота фермы 4 м.

Между поперечными рамами предусмотрена система связей. Кровля из сэндвич-панелей выполнена по прогонам с шагом 3 м, пролет прогонов 6 м. Для обеспечения геометрической неизменяемости диска покрытия предусмотрена система горизонтальных связей. Пространственная жесткость и устойчивость каркаса здания обеспечивается совместной работой жесткого диска покрытия с вертикальными несущими элементами и системой связей.

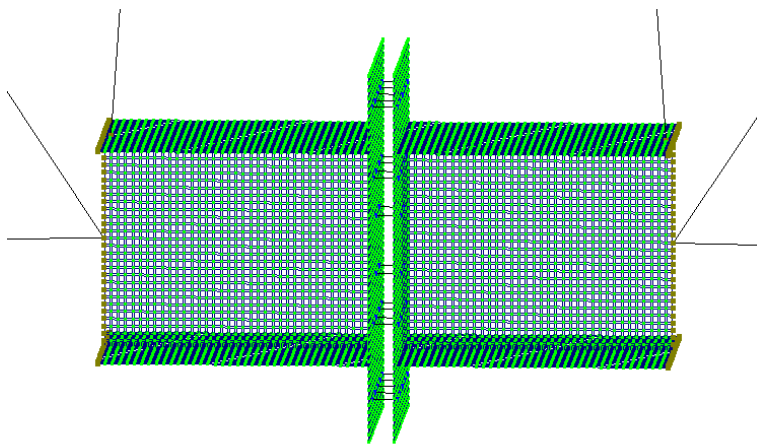


Рис. 3. Центральный узел нижнего пояса

При расчете на динамическую нагрузку определилось 24 формы колебаний для каждого вида динамической нагрузки (от 0,390 Гц, до 19,385 Гц). Поскольку у n -ой формы собственных колебаний частота выше предельной 0,95 согласно СП 20.13330.2016, то ее влияние на напряженно деформированное состояние несущественно и ее допускается не учитывать. Поэтому рассматривали 1 форму колебаний равной 0,390 Гц. Натяжение болтов задавали через температурную нагрузку.

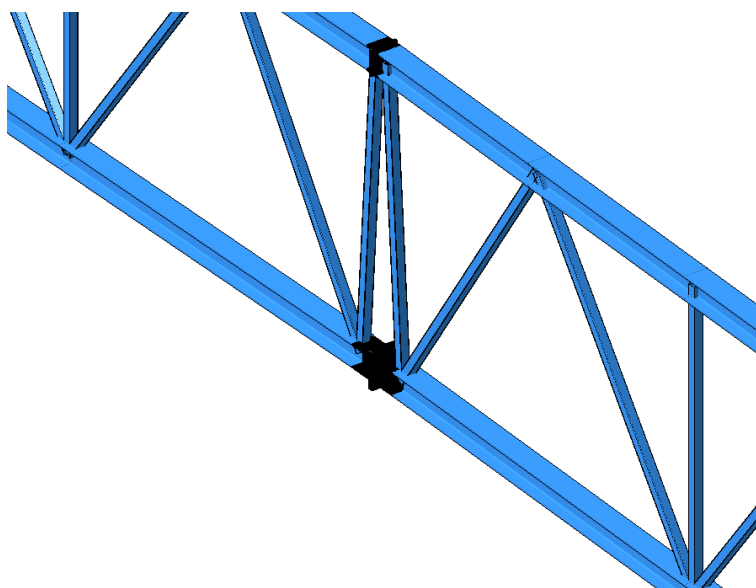


Рис. 4. Пространственная модель рамы (фрагмент)

Результаты расчета.

Выполнен расчет фланцевого соединения с исключением болтов из работы. Анализ результата расчета показал, что возникновение повреждений и дефектов конструкций здания в локальных зонах, величина которых несущественно снижает общую жесткость каркаса (случай 1), практически не влияет на динамические характеристики каркаса.

Рассмотрим вариант механизма разрушения болтов по нижнему поясу. Случай 1: удаляем из работы болты (нижние ряды, отмеченные красным цветом на рис.6):

После удаления болтов увеличился прогиб до 200мм, частоты собственных колебаний не изменились, 0,390 Гц, возросли продольные усилия в стержнях.

Рассмотрим следующий вариант. Случай 2: удаляем из работы болты последующих 2 рядов (рис.8). После удаления болтов увеличился прогиб до 203 мм, частоты собственных колебаний не изменились 0,390 Гц, возросли продольные усилия в болтах.

Полученные расчетные данные представлены в таблице 1.

Расчетный случай	Частота, Гц	Прогибы, мм	Ускорение по Z(G), мм/с ²
без дефектов	0,390	189	0,594
случай 1	0,390	200	0,639
случай 2	0,390	202	0,641

Таблица 1. Результаты расчетов

Заключение.

Как следует из представленных результатов, собственная частота колебаний конструкции не меняется, при различных вариантах последовательного исключения из

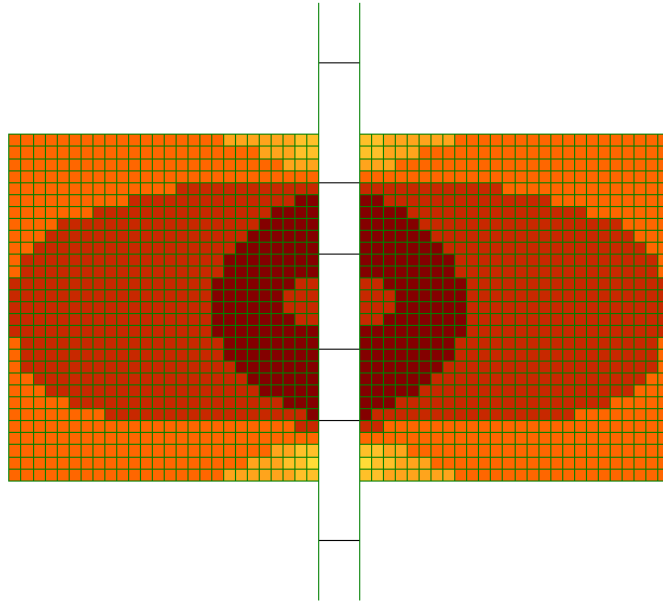


Рис. 5. Мозаика напряжений N_x соединения в середине пролета

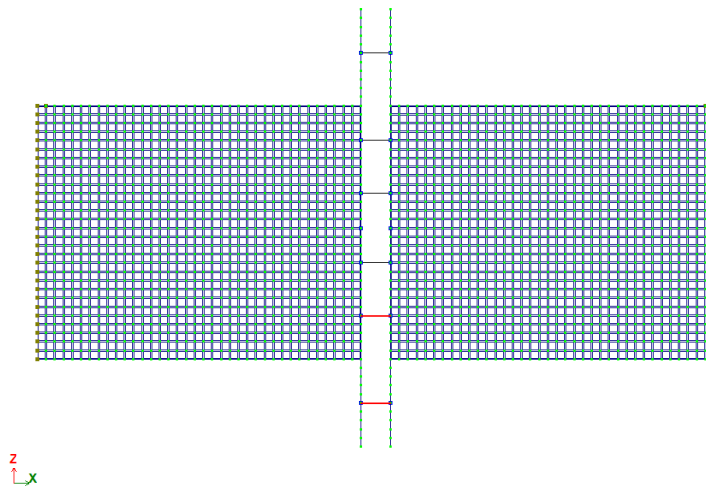


Рис. 6. Узел в середине пролета

работы болтов, поскольку происходит перераспределение усилий в болтах по соединению. Поэтому частота собственных колебаний является малочувствительной характеристикой и ее использование для мониторинга малоперспективно.

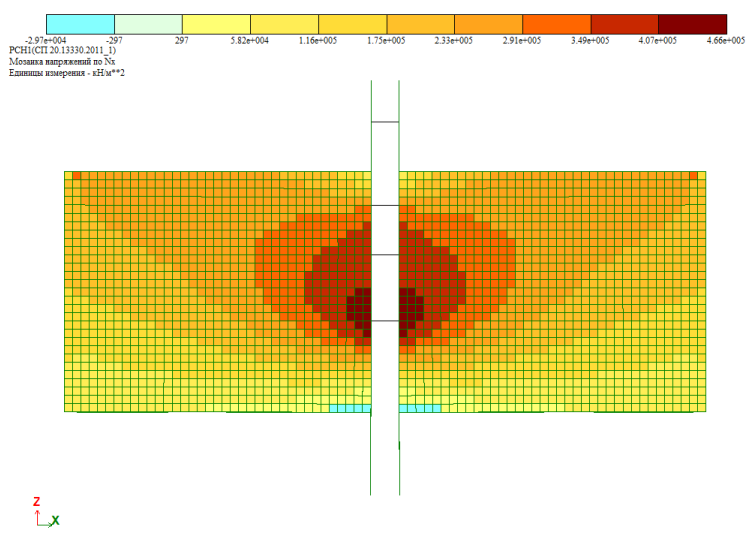
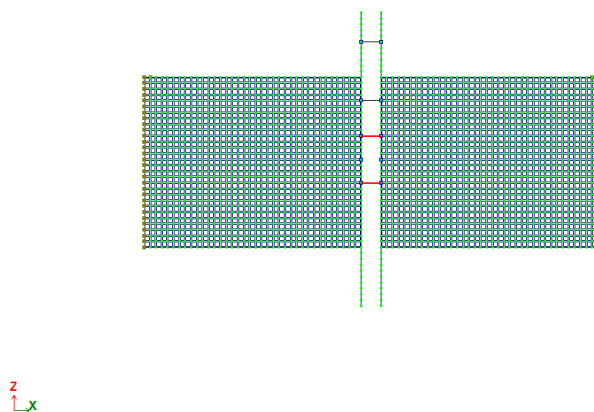
Рис. 7. Мозаика напряжений N_x соединения в середине пролета

Рис. 8. Узел в середине пролета

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рекомендации по расчету, проектированию, изготовлению и монтажу фланцевых соединений стальных строительных конструкций / ВНИПИ Промстальконструкция, ЦНИИПСК им. Мельникова. М.: 1988. 83с.
- [2] Рекомендации по проектированию работающих на сдвиг болтовых соединений стальных строительных конструкций. М.: ЦНИИПСК им. Мельникова, 1990. 18 с.
- [3] Семенов А.А., Маляренко А.А., Порываев И.А., Сафиудлин М.Н. Напряженно-деформированное состояние высокопрочных болтов фланцевых соединений в укрупнительных стыках стропильных ферм // Инженерно-строительный журнал. № 5. 2014. С. 54–62.
- [4] Перельмутер А.В., Криксунов Э.З., Юрченко В.В. Расчетные модели фланцевых соединений рамных узлов металлических конструкций и их программная реализация в "SCAD Office" // CADMaster. 2010. № 3. С. 110–115

- [5] Грудев И. Д. Прочность фланцевых соединений элементов открытого профиля. Болтовые и специальные монтажные соединения в стальных строительных конструкциях. Международный коллоквиум. 1989. Труды. Т. 2. С. 7-13.
- [6] EN 1993-1-8 (2005) (English): Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-8: Design of joints [Authority: The European Union Per Regulation 305/2011, Directive 98/34/EC, Directive 2004/18/EC]

*T. G. Rytova*¹, *L. A. Maximova*^{2,3}, *A. G. Nikolaeva*³, *A. G. Nikolaeva*³, *N. G. Pfanenshtil*⁴

ANALYSIS OF THE NATURAL OSCILLATION FREQUENCY OF THE LONG-SPAN TRUSSES WITH FLANGED CONNECTIONS

¹*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Russian University of Transport, Moscow, Russia*

³*I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

⁴*Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia*

Abstract. The analysis of the natural vibration frequency of a large-span truss with flanged connections is given. The calculation of the flange connection with various cases of exclusion of bolts from the connection operation is performed. Analysis of the calculation results showed that the occurrence of damage and defects in the building structures in local areas, the value of which significantly reduces the overall rigidity of the frame, practically does not affect the dynamic characteristics of the frame.

Keywords: frequency, oscillation, flange connection, calculation, bolts.

REFERENCES

- [1] Recommendations for the calculation, design, manufacture and installation of flanged joints of steel building structures / VNIPI Promstalkonstruktsiya, TsNIIPSK im. Melnikov. M.: 1988. 83 p. (In Russian)
- [2] Recommendations for the design of shear-operated bolted joints of steel building structures. Moscow: TsNIIPSK im. Melnikov, 1990. 18 p. (In Russian)

©Rytova T. G., Maximova L. A., Nikolaeva A. G., Makarova T. M., Pfanenshtil N. G., 2021
Rytova Tatyana Georgievna
 e-mail: tanusha2884@mail.ru, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia,
Maximova Lyudmila Anatolyevna
 e-mail: maximova_ng@mail.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Russian University of Transport, Moscow, Russia, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia,
Nikolaeva Anastasia Georgievna
 e-mail: nag_sf@mail.ru, Senior Lecturer, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia,
Makarova Tatyana Mikhailovna
 e-mail: tany96@list.ru, Master's Student, I.N. Ulyanov Chuvash State University,
Pfanenshtil Nadezhda Georgievna
 e-mail: nfeodorova83@mail.ru, Candidate of Historical Sciences, Associate Professor, Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia

-
- [3] Semenov A. A., Malyarenko A. A., Poryvaev I. A., Safiullin M. N. The stress-strain state of high-strength bolts of flanged joints in the enlarged joints of truss trusses // Civil Engineering Journal. No 5. 2014. pp. 54-62. (In Russian)
 - [4] Perelmuter A.V., Kriksunov E. Z., Yurchenko V. V. Calculation models of flanged joints of frame assemblies of metal structures and their software implementation in "SCAD Office"// CADMaster. 2010. No 3. pp. 110-115. (In Russian)
 - [5] Grudev I. D. Strength of flanged joints of open profile elements. Bolted and special mounting connections in steel building structures. International Colloquium. - 1989. - Proceedings. Vol. 2 - p. 7-13. (In Russian)
 - [6] EN 1993-1-8 (2005) (English): Eurocode 3: Design of steelstructures - Part 1-8: Design of joints [Authority: TheEuropean Union Per Regulation 305/2011, Directive 98/34/EC, Directive 2004/18/EC]

В. И. Гультияев, А. А. Алексеев, И. А. Саврасов, В. В. Гараников

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ПОСТУЛАТА ИЗОТРОПИИ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ СТАЛИ 45 ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ КРИВОЛИНЕЙНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Аннотация. Представлены результаты экспериментальных исследований по проверке достоверности одного из основных законов пластичности – постулата изотропии А.А. Ильюшина в условиях ортогональных сложных нагружений по криволинейным окружным траекториям постоянной кривизны. Экспериментальные исследования выполнены на тонкостенных трубчатых образцах из материала сталь 45 на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СН-ЭВМ. Программы нагружения трубчатых образцов задавались в девиаторном пространстве деформаций А.А. Ильюшина при одновременном комбинированном действии на образец растяжения-сжатия и кручения. В экспериментах реализовано четыре траектории деформирования, представляющие собой окружности, начинающиеся из начала координат. Установлено, что для реализованных сложных траекторий постоянной кривизны постулат изотропии выполняется как по скалярным, так и векторным свойствам.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, постулат изотропии, экспериментальные данные, траектория деформирования, векторные и скалярные свойства материала.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.008

УДК: 579.3

© Гультияев В. И., Алексеев А. А., Саврасов И. А., Гараников В. В., 2021

Гультияев Вадим Иванович

e-mail: vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильные дороги, основания и фундаменты, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

Алексеев Андрей Алексеевич

e-mail: alexeev@bk.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

Саврасов Иван Александрович

e-mail: flam_47@mail.ru, аспирант кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

Гараников Валерий Владимирович

e-mail: mehanika06@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой технической механики, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 10.02.2021

Элементы конструкций и детали машин работают в условиях сложного (непропорционального) нагружения и деформирования, и допускают в своей работе ограниченные пластические деформации. Поэтому проведение экспериментальных исследований механических свойств конструкционных материалов за пределом упругости и исследование закономерностей их поведения при сложном нагружении и разгрузке является важной и актуальной задачей механики деформируемого твердого тела и теории пластичности. Постулат изотропии А.А. Ильюшина [1, 2] как одно из основных положений теории пластичности, был экспериментально проверен для различных конструкционных материалов на разных траекториях деформирования и нагружения [3-12]. Сущность постулата изотропии состоит в том, что при ортогональных преобразованиях вращения и отражения траекторий в векторном девиаторном пространстве с базисом А.А. Ильюшина образ процесса деформирования либо нагружения сохраняется, т.е. сохраняются скалярные и векторные свойства конструкционных материалов. Особый интерес при проверке постулата изотропии представляют траектории деформирования, на которых сложное (непропорциональное) нагружение реализуется с самого начала траектории. В статье [12] отмечено, что ортогональные нагружения могут вносить некоторые поправки в зависимость между напряжениями и деформациями при пластическом деформировании. Поэтому, основной задачей в данной работе являлась проверка достоверности постулата изотропии А.А. Ильюшина на сложных криволинейных траекториях постоянной кривизны, получаемых при ортогональных преобразованиях вращения исходной траектории.

Испытания тонкостенных трубчатых образцов из стали 45 проводились на автоматизированном комплексе СМ-ЭВМ в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета на тонкостенных цилиндрических оболочках с длиной рабочей части $l = 110$ мм, толщиной стенки $h = 1$ мм и радиусом срединной поверхности $r = 15.5$ мм. При обработке результатов экспериментальных данных для определения компонент ε_{ij} , σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тензоров деформаций и напряжений использовались формулы [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta r}{R}, \quad \varepsilon_{12} = \varphi \frac{r}{2l}, \quad \varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{\sigma_0}{K}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \\ \sigma_{11} = \frac{P}{2\pi r h}, \quad \sigma_{22} = p \frac{r}{h}, \quad \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi r^2 h}, \quad \sigma_{33} \approx 0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Δl – абсолютное удлинение рабочей части образца, φ – угол взаимного поворота поперечных сечений, Δr – изменение радиуса срединной поверхности образца, σ_0 – среднее напряжение, ε_0 – средняя деформация, K – объемный модуль упругости, μ – коэффициент поперечной деформации Пуассона, E – модуль продольной упругости, P – осевая сила, p – внутреннее давление, M – крутящий момент. Для стали 45 принято $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0.3$. Так как толщина стенки образцов намного меньше радиуса срединной поверхности ($h \ll r$), то напряженное состояние в точках образцов считалось однородным плоским ($\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$, $\varepsilon_{32} = \varepsilon_{31} = 0$). С появлением пластических деформаций коэффициент поперечной деформации быстро возрастал и приближался к значению $\mu_p = 0.5$, поэтому при обработке экспериментальных данных использовалось условие несжимаемости ($\varepsilon_0 = 0$). Материал образцов с достаточной степенью был начально изотропным, что было установлено в экспериментах при простых нагружениях – растяжении, сжатии, кручении и пропорциональном сжатии с кручением (рис. 1).

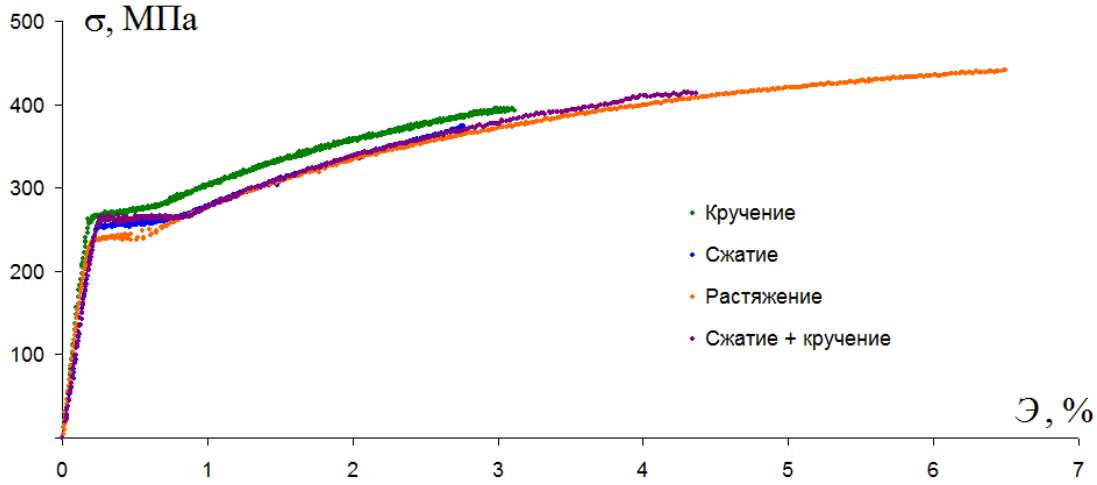


Рис. 1. Диаграммы деформирования $\sigma - \mathcal{E}$ при простых нагружениях.

При использовании векторного представления напряжений и деформаций по А.А. Ильюшину [1-3] девиаторам напряжений и деформаций ставятся в соответствие векторы напряжений и деформаций формоизменения

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где \hat{i}_k – единичные векторы базиса А.А. Ильюшина. Компоненты S_k, e_k ($k = 1, 2, 3$) векторов напряжений и деформаций в девиаторном трехмерном пространстве А.А. Ильюшина, рассчитывались по формулам:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma_{11} - \frac{1}{2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right], \\ S_2 &= \sqrt{2} \left(S_{22} + \frac{1}{2} S_{11} \right) = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12} = \sqrt{2} \sigma_{12}, \\ \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \mathcal{E}_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \quad \mathcal{E}_2 = \sqrt{2} \left(\mathcal{E}_{22} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{11} \right) = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{\sqrt{2}}, \\ \mathcal{E}_3 &= \sqrt{2} \mathcal{E}_{12} = \sqrt{2} \varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \quad (4)$$

– компоненты девиаторов напряжений и деформаций соответственно, δ_{ij} – символ Кронекера. Модули векторов напряжений и деформаций, равные модулям девиаторов напряжений и деформаций определяются соотношениями

$$\sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}} = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^2}. \quad (5)$$

Программы деформирования реализовывались при в девиаторной плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ (жесткое нагружение) при одновременном комбинированном действии на образцы растяжения-сжатия и кручения. Все четыре траектории деформирования представлены на рис. 2. Исходная траектория деформирования (траектория 1, красный цвет) представляет собой окружность радиуса $R = 0.75$ %, начинающуюся из начала координат. По окружности сделан один полный оборот против хода часовой стрелки с приходом в начало координат. Координаты центра окружности $\mathcal{E}_1^0 = 0$, $\mathcal{E}_3^0 = 0.75$ %,

кривизна окружности $\kappa = 133.3$. Ортогональные преобразования исходной траектории осуществлялось вращением против часовой стрелки на 90° (траектория 2, синий цвет), 180° (траектория 3, зеленый цвет) и 270° (траектория 4, фиолетовый цвет). При этом траектории 1 и 3, а так же 2 и 4 являются кососимметричными по отношению друг к другу.

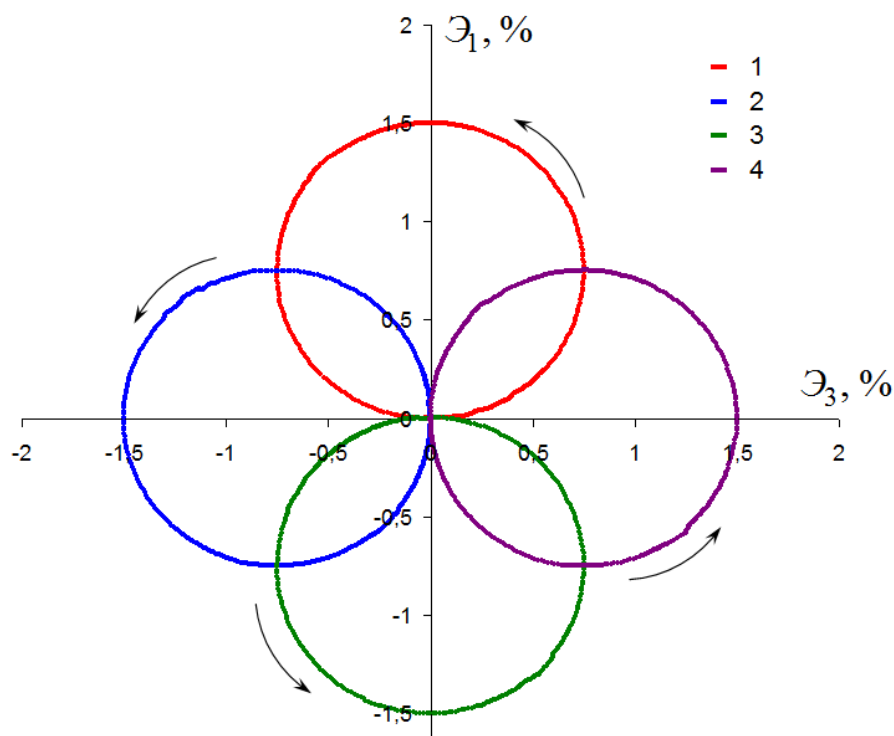
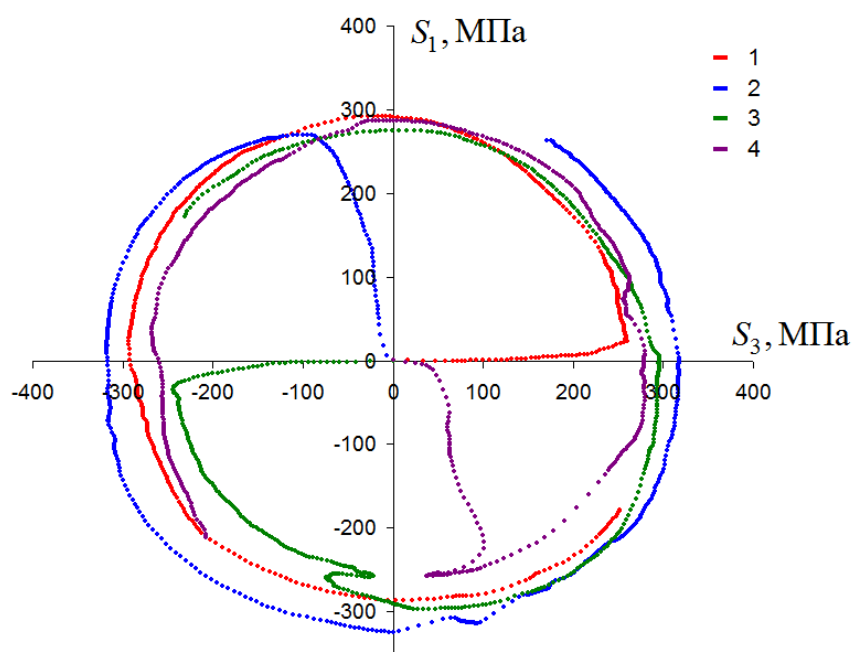
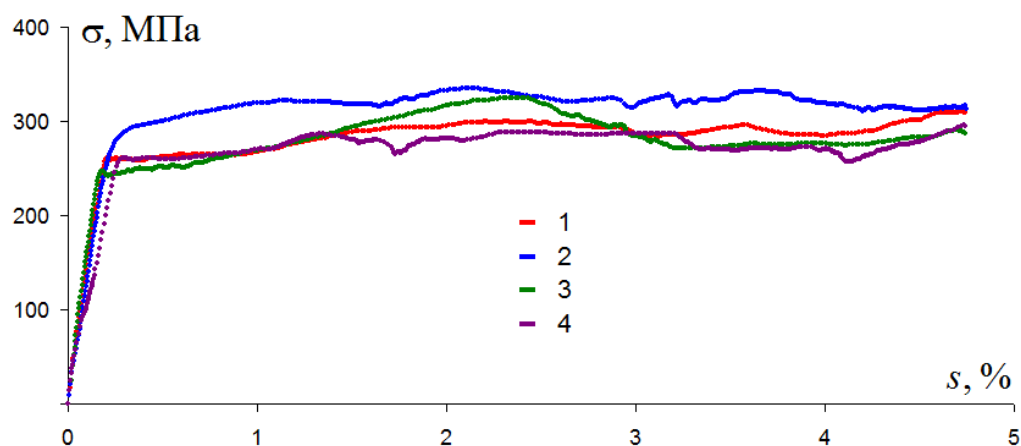


Рис. 2. Траектории деформирования на плоскости $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$.

На рис. 3-8 представлены совмещенные экспериментальные результаты испытаний тонкостенных трубчатых образцов по траекториям деформирования 1, 2, 3 и 4. На рис. 3 представлен отклик по напряжениям на плоскости $S_1 - S_3$. Видно, что траектории напряжений также ортогональны друг другу.

В теории процессов А.А. Ильюшина связь между напряжениями и деформациями определяется скалярными и векторными свойствами материалов. Скалярные свойства материала характеризуют диаграммы деформирования $\sigma - s$, где s – длина дуги траектории деформирования. На рис. 4 представлены совмещенные диаграммы $\sigma - s$ для всех четырех экспериментов. Видно, что все диаграммы на рисунке 4 практически совпадают, значит можно сделать вывод о том, что для данной серии испытаний постулат изотропии по скалярным свойствам выполняется.

На рисунках 5, 6 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия по компонентам $S_1 - \varepsilon_1$ и чистого сдвига по компонентам $S_3 - \varepsilon_3$ соответственно. Из них видно, что диаграммы для траекторий 1 и 3, а так же 2 и 4 являются кососимметричными.

Рис. 3. Отклик по напряжениям на плоскости $S_1 - S_3$.Рис. 4. Диаграмма деформирования $\sigma - s$.

На рисунке 7 представлены совмещенные диаграммы $\vartheta_1 - s$, характеризующие векторные свойства материала, где ϑ_1 – угол, который характеризует отклонение вектора напряжений $\bar{\sigma}$ от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке. Этот угол, называемый углом сближения, отражает влияние векторных свойств материала

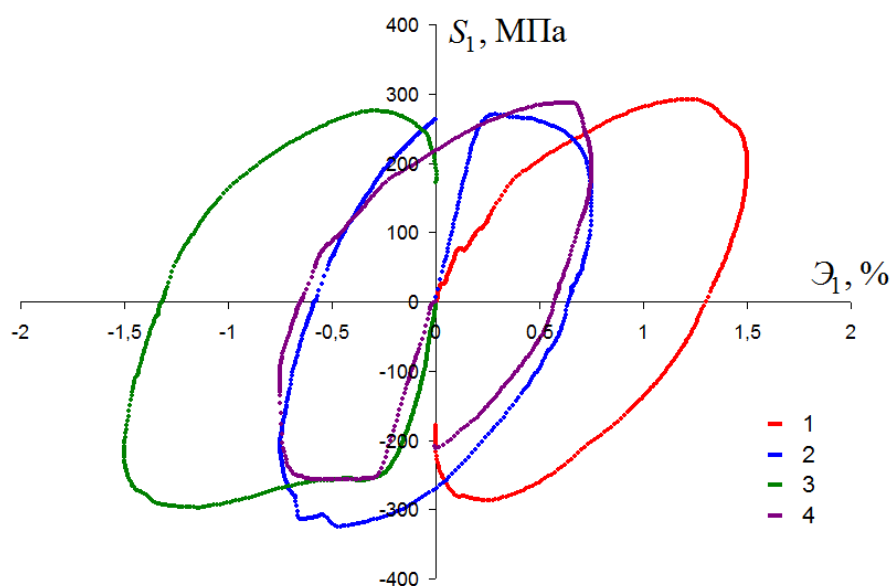


Рис. 5. Локальная диаграмма деформирования $S_1 - \epsilon_1$.

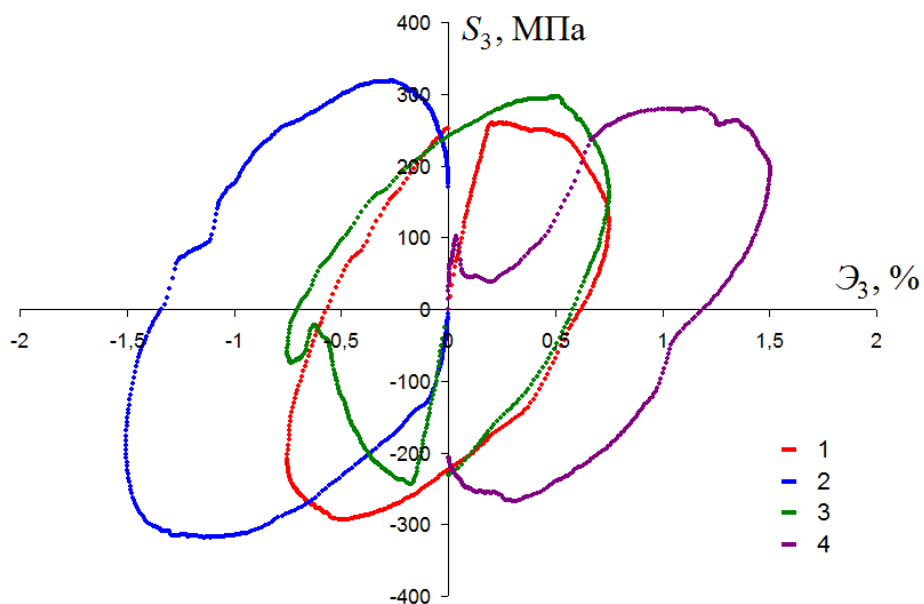


Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования $S_3 - \epsilon_3$.

на процесс деформирования. При обработке экспериментальных данных для определения ϑ_1 использовалось выражение

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma} \left(S_1 \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_3^0)}{R} - S_3 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_1^0)}{R} \right), \quad (6)$$

где $\vartheta_1^0, \vartheta_3^0$ – координаты центров окружностей.

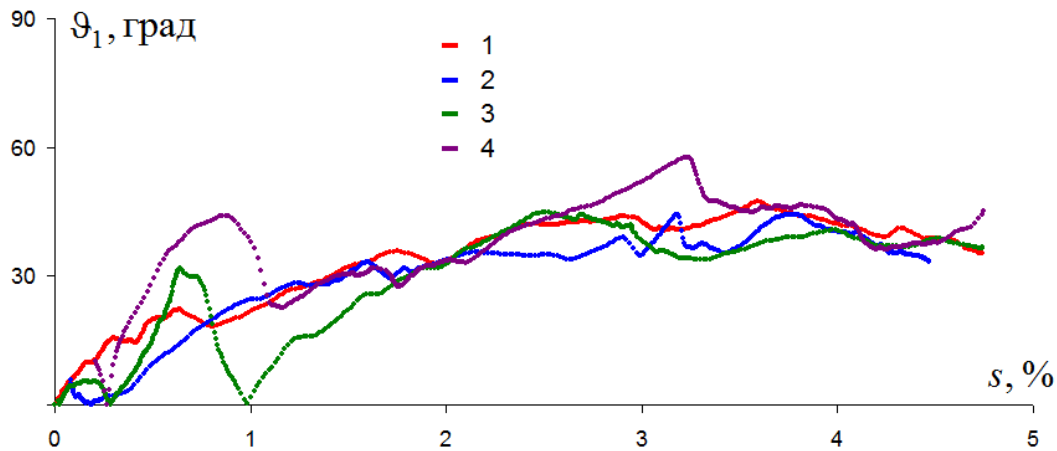


Рис. 7. Диаграмма $\vartheta_1 - s$.

Экспериментально установлено [3], что при деформировании по окружностям устанавливается стационарный режим деформирования с практически постоянным значением угла сближения $\vartheta_1^* \approx \text{const}$. Это что также наблюдается в данной серии экспериментов, причем после стабилизации $\vartheta_1^* \approx 40^\circ$. Так как в данных опытах углы $\vartheta_1 < 90^\circ$, то процессы деформирования по всем четырем траекториям были активными без разгрузок. Также видно, что все диаграммы на рис. 7 близки друг к другу, значит можно сделать вывод о том, что для данной серии экспериментов постулат изотропии выполняется и по векторным свойствам.

Таким образом, в данной работе рассмотрена серия из четырех экспериментов по упругопластическому деформированию материала сталь 45 по ортогональным криволинейным траекториям деформирования в виде окружностей со смещенным центром, выходящих из начала координат. Исследованы скалярные и векторные свойства материала сталь 45. Установлено, что для реализованных сложных траекторий постоянной кривизны постулат изотропии выполняется достаточно точно, как по скалярным, так и по векторным свойствам материала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [2] Ильюшин А. А. Труды (1946-1966). Т.2. Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
- [4] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гулятьев В. И. О построении поверхности текучести стали 45 и проверке постулата изотропии на прямолинейных траекториях при многократных знакопеременных нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 71–88. DOI: 10.15593/pern.mech/2014.3.05
- [5] Ленский В. С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58–82.
- [6] Андреев Л. С. О проверке постулата изотропии // Прикладная механика, 1969. Т. 15. № 7. С. 122-125.
- [7] Васин Р. А., Никиточкин А. Н., Огибалов П. М. О проверке постулата изотропии при переменной скорости деформирования // Механика полимеров. 1975. № 2. С. 224-227.

- [8] Исследование закономерностей термовязкопластического деформирования твердого тела при неизотермических сложных процессах нагружения. Ч. 1 // Прикладная механика. 2001. Т. 37. № 3. С. 3–34. DOI: 10.1023/A:1011331929237
- [9] Щербо А. Г., Завистовский В. Э. Экспериментальная проверка постулата изотропии // Вестник Полоцкого государственного университета. Фундаментальные науки. 2008. № 9. С. 147–153.
- [10] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G., Gultiaev V. I.: Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories. *Materials Physics and Mechanics*. 2017. No 32(3). P. 298–304.
- [11] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Алексеева Е. Г. Проверка постулата изотропии и численное моделирование процессов деформирования материалов на сложных гладких траекториях // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Т. 29. № 2. С. 150–157.
- [12] Зубчанинов В. Г., Гульяев В. И. О проверке постулата изотропии в теории процессов сложного пластического деформирования // *Проблемы прочности и пластичности*. 2008. № 70. С. 18–23.

V. I. Gultiaev, A. A. Alekseev, I. A. Savrasov, V. V. Garanikov

EXPERIMENTAL VERIFICATION OF THE ISOTROPY POSTULATE AT DEFORMATION OF STEEL 45 ALONG ORTHOGONAL CURVILINEAR TRAJECTORIES OF CONSTANT CURVATURE

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The results of experimental studies on validation Ilyushin's isotropy postulate under the conditions of orthogonal complex loads along curvilinear trajectories of constant curvature. Experimental studies were carried out on thin-walled tubular specimens made of steel 45 on SN-EVM testing machine. Loading programs for tubular specimens were set in the deviatorial strain space of A. A. Ilyushin under the combined action of tension-compression and torsion on the specimens. Experimental data are obtained for four strain trajectories, which are circles starting from the origin. It is found that for the realized complex trajectories of constant curvature the isotropy postulate is fulfilled in terms of scalar and vector properties.

Keywords: plasticity, complex loading, isotropy postulate, experimental data, strain trajectory, vector and scalar properties of material.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. *Plasticity: Fundamentals of the general mathematical theory*. Izd-vo AN USSR. Moscow, 1963. 273 p.
- [2] Ilyushin A. A. *Proceedings (1946-1966)*. Vol. 2 *Plasticity*. Moscow, 2004. 480 p.
- [3] Zubchaninov V. G. *Mechanics of processes of plastic environments*. Fizmatlit. Moscow, 2010.
- [4] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultyaev V. I. About drawing of the yield surface for steel 45 and verification of the postulate of isotropy on straight-line paths during repeated sign-variable loadings // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No 3. P. 71–88. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.05

Alekseev, Andrey Alekseevich, Ph.D. (Technical Sciences), Associate Professor, Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

Gultiaev, Vadim Ivanovich, Doctor of technical sciences, Head of Department of Automobile roads, bases and foundations, Tver State Technical University, Tver, Russia,

Savrasov, Ivan Alexandrovich, Postgraduate Student of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

Garanikov, Valery Vladimirovich, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Technical Mechanics, Tver State Technical University, Tver, Russia.

- [5] Lenskii V. S. Experimental verification of the basic postulates from the general theory of elastic-plastic deformations. Moscow, 1961. P. 58–82.
- [6] Andreev L. S.: Verifying the isotropy postulate // Soviet Applied Mechanics. 1969. Vol. 15. No 7. P. 122–125.
- [7] Vasin R. A., Nikitovich A. N., Ogibalov P. M. Verification of the postulate of isotropy during variable rate deformation // Polymer Mechanics. 1975. No 2. P. 224–227.
- [8] Shevchenko Yu. N., Terekhov R. G. Studying the laws of the thermoviscoplastic deformation of a solid under nonisothermal complex loading // International Applied Mechanics. 2001. No 37(3). P. 287–316.
- [9] Shcherbo A. G., Zavistovsky V. E. Experimental verification of the isotropy postulate // Vestnik of Polotsk State University. Fundamental sciences. 2008. No 9. P. 147–153.
- [10] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G., Gultiaev V. I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2017. No 32(3). P. 298–304.
- [11] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G. Verification of the postulate of the isotropy and numerical simulation of the deformation of materials on a complex smooth trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2016. No 29(2). P. 150–157.
- [12] Zubchaninov V. G., Gultiaev V. I. On the verification of the postulate of isotropy in theory of complex plastic deformation processes // Problems of strength and plasticity. 2008. No 70. P. 18–23.

Т. Г. Рытова¹, Л. А. Максимова^{2,3}, А. Г. Николаева³, В. К. Смирнов³, Н. Г. Пфаненштиль⁴

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ СПОСОБОВ УСИЛЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПОКРЫТИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ОГНЯ

¹ *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

² *Российский университет транспорта, Москва, Россия*

³ *Чувашский госуниверситет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары, Россия*

⁴ *Казанский филиал Российского государственного университета правосудия, г. Казань, Россия*

Аннотация. Приводятся результаты численного расчета оптимального способа усиления структурных конструкций покрытий на примере покрытия спортивного зала при воздействии огня при пожаре. Расчеты выполнены в программном комплексе ЛИРА-САПР. На основе выполненных численных исследований составлены рекомендации по усилению структурных конструкций покрытия.

Ключевые слова: температурные воздействия, пожар, структурные конструкции покрытий, перемещения, критическая нагрузка, живучесть.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.009

УДК: 539.37

Введение

В современном мире, с развитием теоретических и численных методов расчета, появляется возможность описать напряженное состояние конструкций под такими нагрузками, которые раньше можно было вычислить только теоретически и сам расчет

© Рытова Т. Г., Максимова Л. А., Николаева А. Г., Смирнов В. К., Пфаненштиль Н. Г., 2021

Рытова Татьяна Георгиевна

e-mail: tanusha2884@mail.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры металлических и деревянных конструкций Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, г. Москва, Россия,

Максимова Людмила Анатольевна

e-mail: maximova_ng@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшая математика и естественные науки Российского университета транспорта, профессор кафедры строительных конструкций ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», г. Чебоксары, Россия,

Поступила 10.02.2021

был довольно приближенным. Одним из видов таких нагрузок является температурная нагрузка или расчет на огнестойкость. Важной особенностью данных нагрузок является характер их приложения и последующего действия на конструктивные элементы.

Расчеты на нагрузки, способные вызвать прогрессирующее обрушение [1], также постепенно внедряются в проектирование современных зданий и сооружений. Стоит отметить, что пожарная нагрузка и расчеты на огнестойкость недостаточно хорошо изучены и нормированы в РФ. Большинство исследований были проведены в СССР и не получили дальнейшего развития, в то время как в Европе расчеты металлических конструкций на действие огня продолжали развиваться. Воздействие огня способно вызвать прогрессирующее обрушение конструкций и повлечь большие человеческие жертвы, поэтому расчеты на огнестойкость становятся также принципиально важными в настоящее время.

Цель настоящей работы - выполнение расчета и дальнейший анализ напряженно-деформированного состояния при воздействии огня на структурную конструкцию покрытия, и определение наиболее эффективного типа усиления данной конструкции.

Методы усиления структурных конструкций покрытия

К настоящему моменту разработаны рекомендации по проектированию и усилению металлических конструкций. Так как сама пространственная конструкция структуры состоит из большого числа плоских конструкций, то можно считать, что усиления, подходящие для ферм, также подойдут в качестве решения проблемы.

Согласно “Пособия по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81*)”:

1. Усиление стальных конструкций осуществляется заменой элементов конструкций, не подлежащих усилению, новыми или введением в усиливаемую конструкцию дополнительных элементов усиления.

2. Наиболее распространенными являются следующие методы усиления конструкций: а) введение дополнительных ненапрягаемых элементов; б) введение предварительно-напряженных элементов; в) подведение дополнительных разгружающих конструкций; г) усиление соединений.

3. Усиление ферм осуществляется введением в конструкцию фермы дополнительных ненапрягаемых, предварительно-напряженных элементов, разгружающих конструкций.

4. Усиление соединений осуществляется увеличением длины или толщины сварных швов, введением в конструкцию узла дополнительных болтов (заклепок).

При составлении расчетной модели предусматривались способы укрепления только что построенной конструкции покрытия, и оно должно справиться с тем, чтобы

Николаева Анастасия Георгиевна

e-mail: nag_sf@mail.ru, старший преподаватель ФГБОУ ВО “Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова”, г. Чебоксары, Россия,

Смирнов Виктор Константинович

e-mail: sm-viktor.flanker@mail.ru, магистрант ФГБОУ ВО “Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова”, г. Чебоксары, Россия,

Пфаненштиль Надежда Георгиевна

e-mail: pfedorova83@mail.ru, кандидат исторических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных наук Казанского филиала Российского государственного университета правосудия, г. Казань, Россия, Россия

сохранить несущую способность под воздействием пожарной нагрузки и последующего прогрессирующего обрушения. Поэтому изначально предполагаем, что вводимые укрепления не несут задачи скрыть дефекты, а делаются с той целью, чтобы перераспределить усилия и внести дополнительные способы защиты помимо огнестойких покрытий и обшивки.

Расчетная модель и нагрузки

В «Пособии по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81*)» приводятся рекомендации по расчету и конструированию структурных покрытий из прокатных профилей. По расчету структурных плит можно выделить следующие пункты, применительно к расчету структурных конструкций покрытия.

1. Расчет структурной конструкции рекомендуется производить по недеформированной схеме без учета физической нелинейности работы стали.

2. В качестве расчетной модели конструкции принимается пространственный стержневой блок, опирающийся на четыре колонны, воспринимающий вертикальные нагрузки, а также горизонтальные воздействия от примыкающих элементов здания или оборудования с учетом особенностей их приложения и конструктивного решения узлов. Расчетная модель включает неразрезные поясные элементы, в том числе продольные изгибно-жесткие элементы верхнего пояса, загруженные по своей длине поперечной нагрузкой.

3. Для конструкций с регулярной решеткой допускается принимать шарнирно-стержневую расчетную модель с узловой передачей нагрузки.

4. В общем случае расчет вручную всех поясов и элементов следует производить согласно СП 16.13330.2017.

Пособие дает нам лишь основные определения и расчет актуальный для 1989 года. Тогда только начали внедрять данные типы конструкций массово, и не было широких технических возможностей проверить действие температурной нагрузки в программных комплексах. Тем более, сейчас большинство структурных перекрытий выполняются не с помощью открытых профилей, а с помощью профилей замкнутого сечения (круглого, прямоугольного). Для современных профилей следует обновить советские базы рекомендаций и уточнить способы расчета и введение дополнительных коэффициентов, учитывающих действие пожара (если это необходимо). Также стоит проверить, какие коэффициенты программные комплексы применяют при расчете на огневое воздействие в настоящее время. Всё это следует сделать по очевидной причине развития технологий изготовления металлопроката (улучшения его качества) и модернизации ЭВМ.

При проектировании структурной конструкции было принято решение взять за основу структурные конструкции типа «Кисловодск». От данного типа конструкций взяты:

1. Габариты нижнего и верхнего поясов.
2. Размещение колонн и их закрепление в фундаменте.
3. Принятое сечение поясов.

Характеристика здания:

1. Размеры в плане – 24x30 м; h (от низа колонн до верхнего пояса) – 10.35 м; h_1 (высота колонны) – 8.9 м; Колонны расположены на расстоянии 1.5 м от сторон нижнего пояса.

2. Жесткости и материалы: Сечение верхнего пояса – труба 60x10; Сечение колонны – двутавр 30К1.

3. Закрепление колонн в фундаменте жесткое; опорных капителей нет

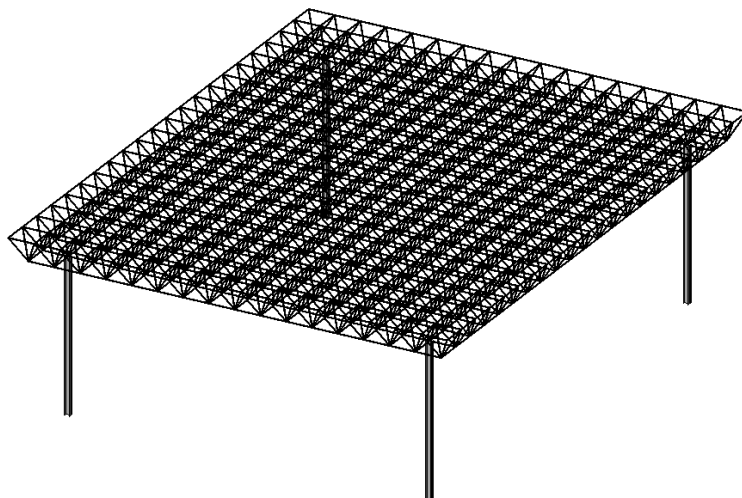


Рис. 1. Пространственная модель структурного покрытия

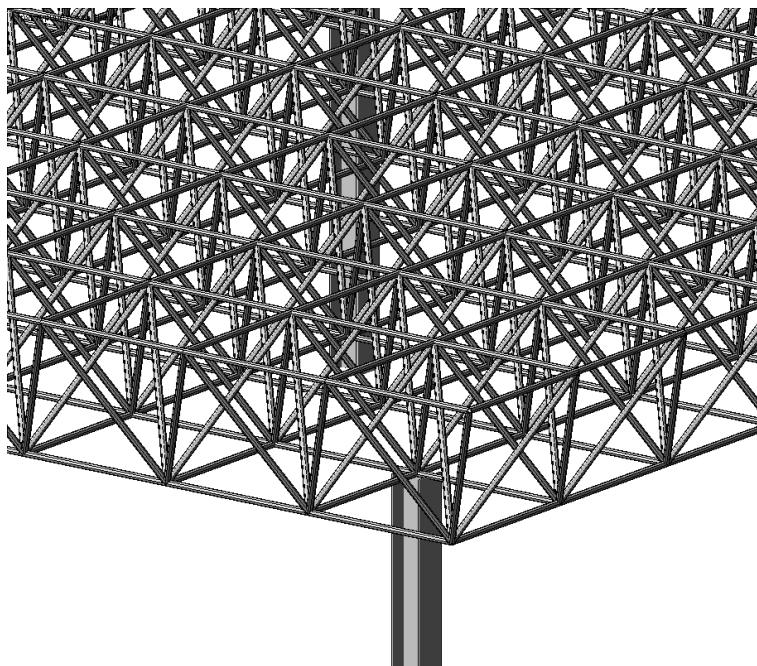


Рис. 2. Узел опирания

Так как конструкция структурного покрытия расположена внутри здания и не является частью основного несущего каркаса, к ней приложены следующие нагрузки и воздействия:

1. Собственный вес стальных элементов и вес кровельного пирога с учетом коэффициента условий работы 0,9.

2. Снеговая нагрузка

3. Температурная нагрузка (шаговая, выполняется в нелинейной постановке)

Зданию назначен III тип огнестойкости. Класс конструктивной пожарной опасности С1. Для каждого типа огнестойкости характерны свои временные требования для элементов конструкции по наступлению предельных состояний. При III типе несущие элементы должны иметь предел R 45; перекрытия междуэтажные REI 45; строительные конструкции бесчердачных покрытий R 15. Покрытие типа "Кисловодск" и другие виды структур подходят под определение бесчердачных, следовательно, необходимо, как минимум, обеспечить предел по несущей способности в течение 15 минут для верхнего и нижнего поясов.

Температурная нагрузка приложена от края к центру, начиная от колонны и распространяясь в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Данные по температуре и времени задавались согласно кривой стандартного действия пожара.

Нагрузка была задана шаговым методом. В комбинациях нелинейного нагружения температурная нагрузка была задана несколькими способами:

1) неравномерными шагами, число шагов 5; 2) равномерными шагами, число шагов 5; 3) неравномерными шагами, число шагов 10. Температурное воздействие идет от колонн к центру структурного покрытия в форме треугольника в плане. Максимальная температура была установлена в 600^0C , что соответствует предельной температуре для незащищенных конструкций, при которой наступает потеря несущей способности металлических элементов [2].

Результаты численного расчета

Данный расчет позволил выявить некоторые особенности структурных конструкций под воздействием температурной нагрузки:

1. Самые большие прогибы конструкций появлялись при расчете нагружения (температурная нагрузка) способом с максимальной разбивкой шагов.

2. Температурную нагрузку для большей точности и для введения запаса следует задавать согласно графику, деля его на как можно большее число элементов.

3. Менее затратные как с технической точки зрения, так и с экономической, следует признать подведение дополнительных опор и усиления в колонны данного структурного покрытия в виде стержней или решетчатых капителей для большего перераспределения нагрузок.

4. Расчет показал наиболее слабые места в конструкции, следовательно, в них можно применить усиление методом увеличения сечения.

5. Конструкция не обрушилась после приложения нагрузки в 600^0C , что говорит об эффекте перераспределения нагрузок и возможности увеличения времени действия условного пожара для анализа поведения конструкции

Для структурного покрытия предложены варианты усиления по повышению живучести конструкции [3]:

1 вариант - (подведение под колонны дополнительных подкосов) (рис. 3);

2 вариант - подведение под колонны дополнительных подкосов и увеличение в ответственных местах конструкции сечения структуры (рис. 4);

3 вариант - устройство дополнительных колонн по периметру покрытия с подведением подкосов) (рис. 5).

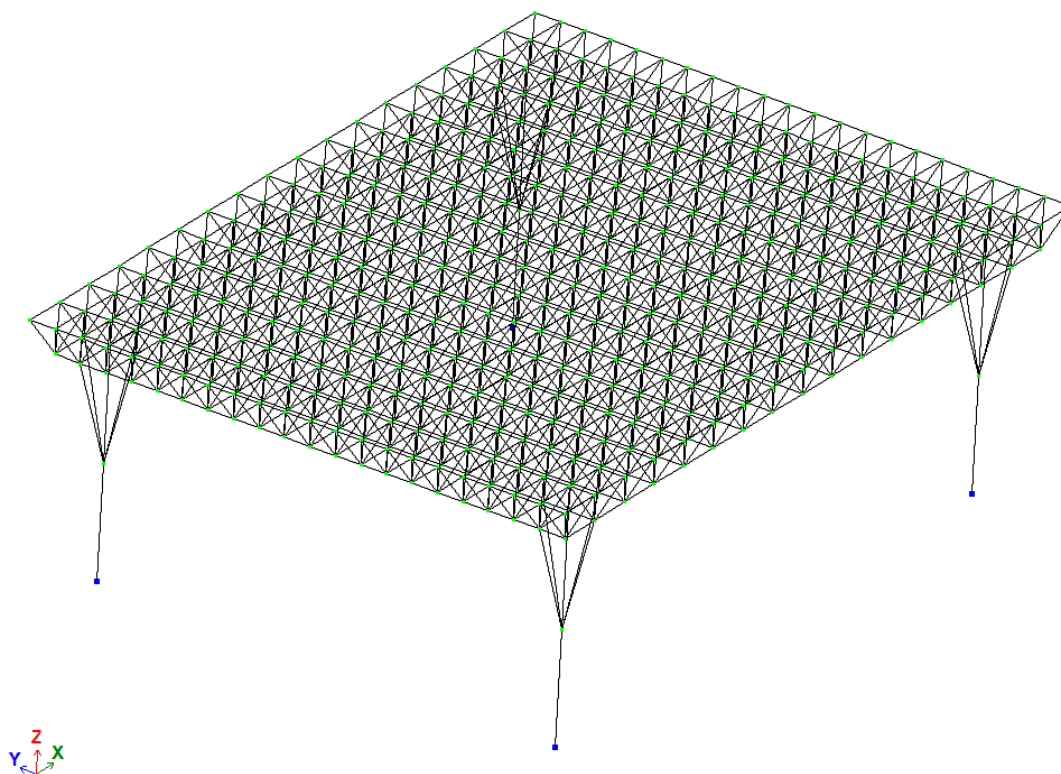


Рис. 3. Первый вариант усиления структурных конструкций покрытия

Для более наглядного представления насколько усиления помогают живучести и уменьшают прогибы и разрушения конструкции, ниже приведены сравнительные таблицы, получившихся значений вертикальных перемещений.

Максимальные вертикальные перемещения, мм			
Без усиления	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
391	156	105	31.8
396	166	108	33.6
438	172	112	34.7
466	175	115	35.7
473	176	115	35.4

Таблица 1. Вертикальные перемещения покрытия

В результате выполненных расчетов по усилению конструкций покрытия, можно сделать следующий вывод:

1. значения прогибов при 5 неравномерных шагов и 5 равномерных шагов комбинациях загрузжений получаются примерно одинаковыми, с разницей 10 мм.

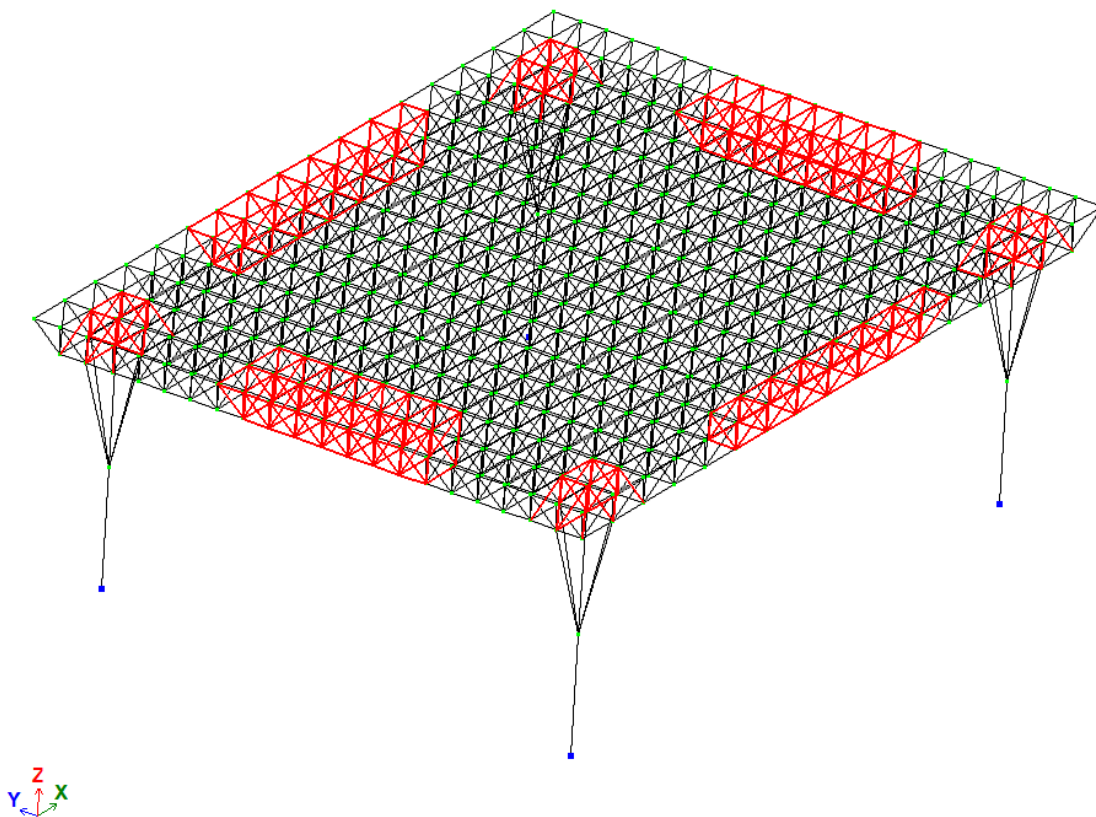


Рис. 4. Второй вариант усиления структурных конструкций покрытия

2. Наибольшие значения прогибов наблюдаются при задании температурной нагрузки с помощью комбинации в 10 неравномерных шагов.

3. Все варианты усиления являются рабочими, так как уменьшают прогибы конструкций и число разрушенных элементов.

4. Каждый вариант усиления в порядке друг за другом соответственно значительно уменьшает предельные прогибы конструкции. 3 вариант усиления способен уменьшить прогиб структурного покрытия при 1 комбинации в 13.3 раза; при 2 комбинации в 14.8 раз; при 3 комбинации в 21.7 раза. Вызвана такая разница уменьшением пролета в результате установки колонн, и добавлением дополнительной жесткости всему покрытию.

5. 1 и 2 варианты усиления уменьшают прогиб в 3 и 4 раза соответственно, что является хорошим аргументом в пользу применения такого типа усиления.

Заключение. Важно отметить, что рекомендации по проектированию и расчету структурных конструкций уже присутствуют в нормативах, выпущенных ЦНИИСК им. Кучеренко [4]. С момента их выпуска за все это время изменились материалы, методы расчета, способы соединения элементов в конструкции, качество изготовления и монтажа покрытий. Расчет металлических конструкций на огнестойкость более развернуто представлен в Еврокодах [5, 6], и он более современный по отношению к вышеназванным нормам. В нём учитывается огромное количество факторов, типов,

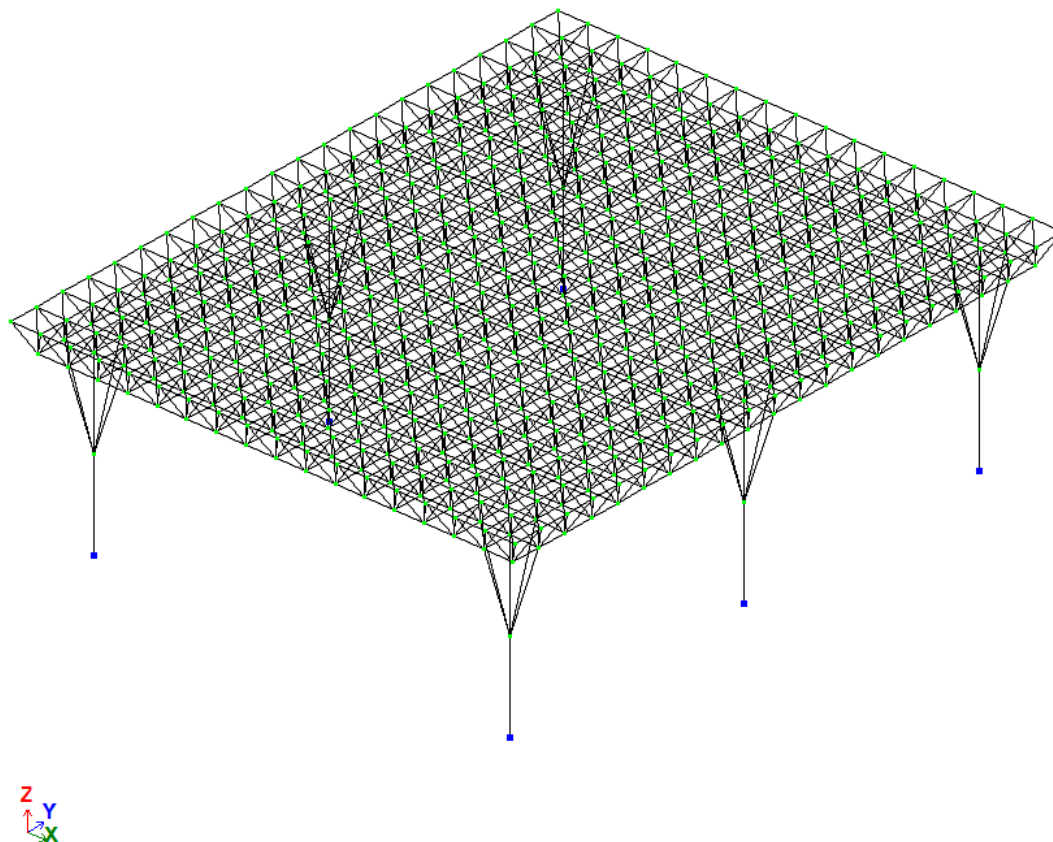


Рис. 5. Третий вариант усиления структурных конструкций покрытия

воздействий пожара на конструкции. На данный момент представлено множество расчетных и модулирующих пожар программ, но нельзя сказать конкретно, какая из них эффективнее описывает данный процесс.

В связи с вышесказанным предлагаются следующие рекомендации по расчету такого типа покрытий/

1. Расчет следует выполнять по нескольким вариантам развития пожара, чтобы определить наиболее уязвимые места в конструкции.

2. При расчете необходимо учесть все возможные при задании температурной нагрузки коэффициенты, для создания более точной модели.

3. Расчет рекомендуется выполнять в нелинейной постановке, с делением нагрузки на как можно большее число шагов, для получения результатов с запасом. Также нелинейная постановка обеспечивает возможность задания нагрузки по различным типам пожара, отличающимися своими графиками кривых.

4. При проектировании усиления следует обращать внимание на подведение дополнительных опор и усиление сечения элементов конструкции.

5. При проектировании конструкции с учётом возникновения пожара, следует дополнительно запроектировать наличие огнезащиты.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лепешкина Д. О. Прогрессирующее обрушение зданий и сооружений // Научное сообщество студентов XXI столетия. Технические науки: сб. ст. по мат. XI междунар. студ. науч.-практ. конф. № 1(60).
- [2] Зайцев А. М. Методика расчета прогрева огнезащищённых стальных конструкций в условиях воздействия экстремального температурного режима пожара // Журнал Пожаровзрывобезопасность. 2006. Т. 15 (№6). С. 15-21.
- [3] Кудишин Ю. И. Живучесть конструкций – важный фактор снижения потерь в условиях аварийных ситуаций // Вопросы обеспечения надежности и живучести крупнопролетных конструкций покрытий: Тезисы к НТС МГСУ. М.: НТС МГСУ, 2008. С. 4–5.
- [4] ЦНИИСК им. Кучеренко Госстроя СССР “Рекомендации по проектированию структурных конструкций”. М., 1984.
- [5] Еврокод 1 EN 1991-1-2:2002 Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-2: General actions – Actions on structures exposed to fire. 6. Еврокод 3 EN 1993-1-2:2005+AC 2005 (E)
- [6] Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-2: General rules. Structural fire design

T. G. Rytova¹, L. A. Maximova^{2,3}, A. G. Nikolaeva³, V. K. Smirnov³, N. G. Pfanenshtil⁴

NUMERICAL CALCULATION OF METHODS FOR STRENGTHENING THE STRUCTURAL STRUCTURES OF THE COATING UNDER THE INFLUENCE OF FIRE

¹*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Russian University of Transport, Moscow, Russia*

³*I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

⁴*Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia*

Abstract. The results of the numerical calculation of the optimal method for strengthening the structural structures of the coverings are presented on the example of the covering of a sports hall under the influence of fire in a fire. The calculations were performed in the LIRA-CAD software package. Based on the performed numerical studies, recommendations for strengthening the structural structures of the coating are made.

Keywords: temperature effects, fire, structural structures of coatings, displacement, critical load, survivability.

REFERENCES

©Rytova T. G., Maximova L. A., Nikolaeva A. G., Smirnov V. K., Pfanenshtil N. G., 2021
Rytova Tatyana Georgievna
 e-mail: tanusha2884@mail.ru, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia,
Maximova Lyudmila Anatolyevna
 e-mail: maximova_ng@mail.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Russian University of Transport, Moscow, Russia, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia,
Nikolaeva Anastasia Georgievna
 e-mail: nag_sf@mail.ru, Senior Lecturer, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia,
Smirnov Viktor Konstantinovich

- [1] Lepeshkina D. O. Progressing collapse of buildings and structures // Scientific community of students of the XXI century. Technical sciences: sat. st. on mat. XI International Student Scientific and Practical Conference-No. 1 (60) (In Russian)
- [2] Zaitsev A. M. Method of calculating the heating of unprotected steel structures under the influence of extreme temperature conditions of fire // Journal of Fire and Explosion Safety. 2006. Vol. 15. No. 6. pp. 15-21. (In Russian)
- [3] Kudishin Yu. I. Survivability of structures – an important factor in reducing losses in emergency situations // Issues of ensuring the reliability and survivability of large-span coating structures: Theses to the NTS MGSU. M.: NTS MGSU, 2008. pp. 4–5 (In Russian)
- [4] TSNIISK im. Kucherenko Gosstroya SSSR «Recommendations for the design of structural structures». Moscow, 1984. (In Russian)
- [5] Еврокод 1 EN 1991-1-2.2002 Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-2: General actions – Actions on structures exposed to fire. 6. Еврокод 3 EN 1993-1-2:2005+AC 2005 (E)
- [6] Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-2: General rules. Structural fire design

e-mail: sm-viktor.flanker@mail.ru, Master's Student, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia,

Pfanenshtil Nadezhda Georgievna

e-mail: nfedorova83@mail.ru, Candidate of Historical Sciences, Associate Professor, Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia

Е. П. Дац¹, Е. В. Мурашкин², А. М. Буруруев², Т. К. Нестеров², Н. Э. Стадник²

РАСЧЕТ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СОСТОЯНИИ УПРУГОЙ РАЗГРУЗКИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАГРЕТОГО НЕОДНОРОДНОГО ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ТОРОИДАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

¹Институт прикладной математики ДВО РАН г. Владивосток, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН г. Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена численному моделированию остаточных напряжений в неоднородном торе. Материал тора полагается термоупругопластическим. Расчет температурных напряжений происходит в рамках квазистатического приближения. Рассчитываются поля остаточных напряжений и деформаций. Приводятся численные результаты решения краевой задачи в тороидальных координатах. Рассматриваются случаи длинного тора и возможность аналитического приближения исходной краевой задачи.

Ключевые слова: температурное напряжение, идеальная пластичность, теплопроводность, термоупругость

DOI: 10.37972/chgru.2021.1.47.011

УДК: 539.374

1. Введение. Разработка и создание новых материалов, конструкций и деталей машин на их основе для всех отраслей народного хозяйства является одним из основных современных направлений научно-технического прогресса. Особое место среди них занимают функционально-градиентные материалы, конструкции и покрытия для космической промышленности и технологии их изготовления. Первые функционально-градиентные структуры были разработаны для создания тепловых барьеров двигателей космических кораблей, однако со временем они стали применяться в совершенно

© Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Буруруев А. М., Нестеров Т. К., Стадник Н. Э. 2021

Дац Евгений Павлович

e-mail: dats@dvo.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 24.02.2021

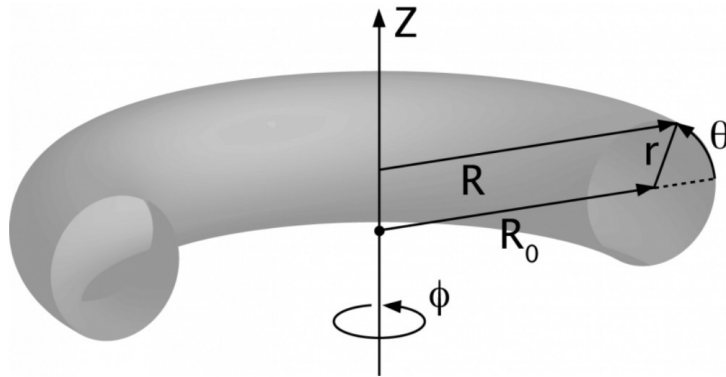


Рис. 1. Система координат.

разных областях – от медицины до атомной промышленности. Тем не менее, наиболее технологичная передовая космическая промышленность по-прежнему является основным их потребителем [1-5].

Математические модели деформирования изделий, изготовленных аддитивными способами, несомненно должны учитывать температурные эффекты. Модель термоупругопластичности, полученная обобщением классической модели Прандтля–Рейса полностью отвечает требованиям, предъявляемым современной инженерией к исследователям. Ранее авторами, настоящего сообщения, был решен ряд краевых задач по расчету температурных напряжений в телах с осевой и центральной симметрией [6–18]. В предлагаемой работе рассмотрим проблему расчета остаточных напряжений в условиях тороидальной симметрии. Основу расчетов пластического течения, предваряющего стадию разгрузки материала, возьмем результаты изложенные в публикациях [19-21].

2. Основные уравнения термоупругой модели в тороидальных координатах. На протяжении статьи будем использовать нотацию предыдущих работ [19-21]. Введем систему координат (см. Рис. 1) тогда переход к декартовым координатам будет происходить согласно соотношениям

$$X = \Omega \cos(\varphi), \quad Y = \Omega \sin(\varphi), \quad Z = R_0 \cos(\theta), \quad \Omega = (R_0 + r \sin(\theta)), \quad (1)$$

где R_0 большой радиус тора, $r \in [r_1, r_2]$, r_1 и r_2 внутренний и внешний радиусы поперечного сечения тора. Центр тора совпадает с нулем декартовой системы координат

Буруруев Алексей Михайлович

e-mail: alexey@bururuev.ru, ведущий инженер, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Нестеров Тимофей Константинович

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, программист, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Стадник Никита Эдуардович

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Деформации $d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$ состоят из термоупругой e_{ij} и пластической p_{ij} частей. В условиях тороидальной симметрии имеем

$$\begin{aligned} d_{\theta\theta} &= \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}, & d_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r \sin(\theta) + u_\theta \cos(\theta)}{\Omega} + \frac{u_{\varphi,\varphi}}{\Omega}, & d_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ d_{rr} &= u_{r,r}, & d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi \sin(\theta)}{\Omega} \right), & d_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{\theta,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,\theta} - \frac{u_\varphi \cos(\theta)}{\Omega} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\Omega} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + \text{ctg}(\theta) \sigma_{r\theta}) &= 0, \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\Omega} (\sigma_{r\theta} + \text{ctg}(\theta) (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})) &= 0, \\ \sigma_{r\varphi,r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{2\sin(\theta)}{\Omega} (\sigma_{r\varphi} + \text{ctg}(\theta) \sigma_{\theta\varphi}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив определяющие соотношения термоупругого тела

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{tr} e_{ij} - \alpha \delta_{ij} (3\lambda + 2\mu)(T - T_0) + 2\mu e_{ij}, \quad (4)$$

в уравнения равновесия не сложно получить уравнения для определения перемещений в областях термоупругого равновесия. В (4) приняты обозначения δ_{ij} — дельта Кронекера, λ, μ — постоянные Ламе, α — коэффициент линейного теплового расширения, $(T - T_0)$ — температур начально T_0 и текущей T .

Уравнение теплопроводности примет вид

$$T_{,rr} + \frac{(R_0 + 2r \sin(\theta))T_{,r}}{r(R_0 + r \sin(\theta))} + \frac{T_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos(\theta)T_{,\theta}}{r(R_0 + r \sin(\theta))} + \frac{T_{,\varphi\varphi}}{(R_0 + r \sin(\theta))^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (5)$$

3. Краевая задача разгрузки в тороидальных координатах. Рассмотрим тело, обладающее тороидальной симметрией, с внутренней полостью радиуса R_0 и параметрами сечения $r_1 < r < r_2$. В случае симметричного температурного поля, получим

$$u_\varphi = 0, \quad d_{r\varphi} = d_{\theta\varphi} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0. \quad (6)$$

Будем рассматривать свободное тепловое расширения, т.е.

$$\sigma_{rr}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_2, \theta) = 0. \quad (7)$$

В предположении малости отношения r_2/R_0 уравнение теплопроводности существенно упрощается и записывается в виде

$$T_{,r} + rT_{,rr} = 0. \quad (8)$$

Уравнения равновесия (3) и компоненты деформаций (2) в этом случае преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, & \quad \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \\ d_{rr} = F_{,r} \quad d_{\varphi\varphi} = C, & \quad d_{\theta\theta} = \frac{F}{r}, \quad d_{r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $F(r)$ — функция, требующая определения, C — не определенные постоянные. Перемещения получаются в виде

$$u_r(r, \theta) = F(r) + R_0 C \sin(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = R_0 C \cos(\theta). \quad (10)$$

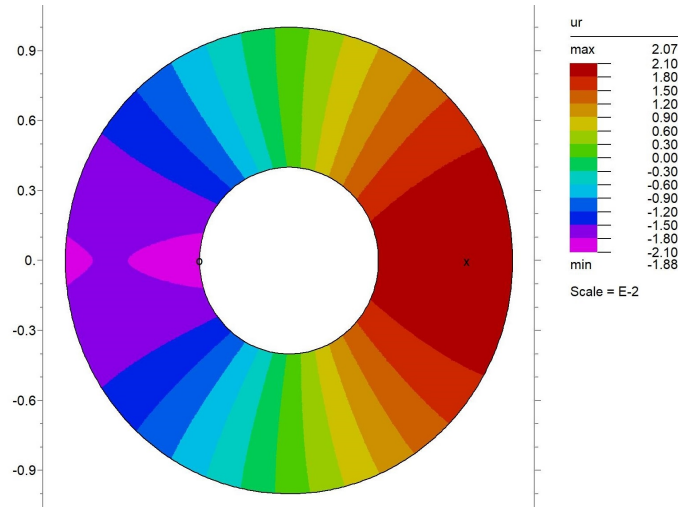


Рис. 2.

Вид функции $F(r)$ зависит от краевых условий рассматриваемой задачи.

Состояние термоупругопластического материала при наличии накопленных необратимых деформаций. Расчет пластического течения обсуждался ранее в работах [19-21]. Приведем графические результаты такого расчета Рис.2-Рис.3. Рассмотрим процесс охлаждения тела до уровня комнатной ($T = T_0$). В этом случае, после пластического течения начнется процесс разгрузки, характеризуемый термоупругим деформированием с учетом накопленных пластических деформаций. Не сложно получить связь компонент необратимых деформаций ($p_{\varphi\varphi} = -p_{rr} - p_{\theta\theta}$), тогда выражения для силовых напряжений примут вид

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{\eta^2} \int_{r_1}^r \frac{p_{rr}(\rho) - p_{\theta\theta}(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{2\mu^2}{(\lambda + 2\mu)r^2} \int_{r_1}^r \rho(p_{rr}(\rho) + p_{\theta\theta}(\rho)) d\rho + \frac{Q}{r^2} + P, \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (r\sigma_{rr}(r))_{,r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \mu\gamma(p_{rr}(r) + p_{\theta\theta}(r)) + \frac{\lambda\sigma_{rr}(r) + \lambda\sigma_{\theta\theta}(r)}{2(\lambda + \mu)},$$

где P, Q — постоянные, определяемые из краевых условий, а компоненты пластических деформаций можно определить согласно зависимостям

$$p_{rr} = \begin{cases} p_{rr}^*, & r_1 \leq r \leq b, \\ p_{rr}^{**}, & b \leq r \leq a, \\ 0, & r_1 \leq a \leq r_2, \end{cases} \quad p_{\theta\theta} = \begin{cases} p_{\theta\theta}^*, & r_1 \leq r \leq b, \\ 0, & b \leq r \leq a, \\ 0, & r_1 \leq a \leq r_2. \end{cases} \quad (12)$$

По формулам (11) и (12) легко провести численные расчеты напряженно деформированного состояния упругой разгрузки материала в условиях тороидальной симметрии.

Заключение. В работе приводятся результаты численного анализа остаточных напряжений термоупругопластического тела, обладающего тороидальной симметрии. Рассмотрен случаи длинного тора и возможность аналитического приближения исходной краевой задачи.

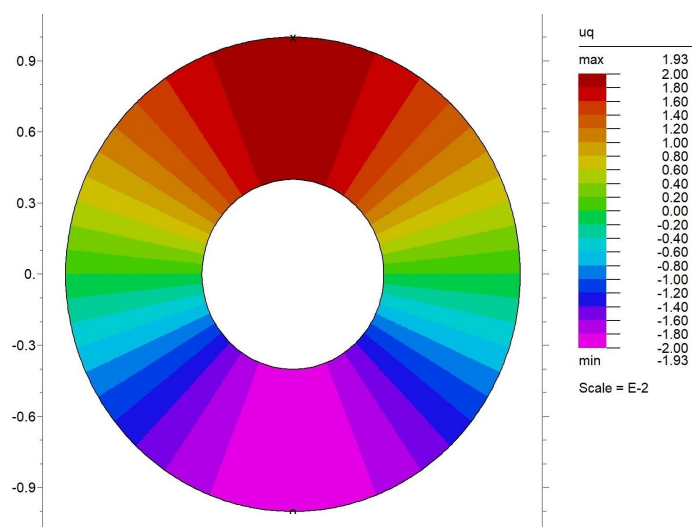


Рис. 3.

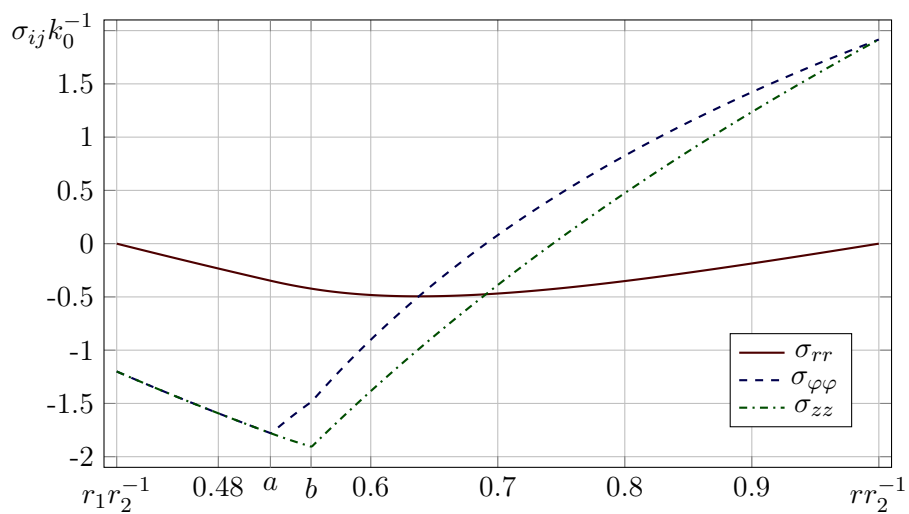


Рис. 4. $r_1r_2^{-1} = 0.4$, $\epsilon = 0.1$, $ar_2^{-1} = 0.521$, $br_2^{-1} = 0.553$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты (№ 19-51-60001, № 20-01-00666).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood et al. // Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. 2019. V. 30. P. 51-58.

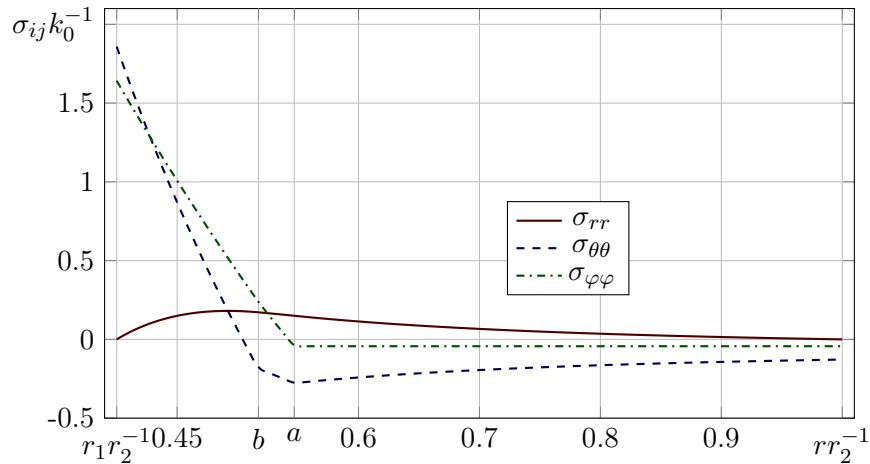


Рис. 5. Остаточные напряжения в тороидальных координатах.

- [2] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer. 2020. P. 515–522.
- [3] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer. 2020. P. 523–529.
- [4] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 555–564.
- [5] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu / Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 503–513.
- [6] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu / Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo et al. // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2020. V. 51. No 6. P. 766–773.
- [7] Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е.П. Дац и др. // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2018. №. 1. P. 32–43.
- [8] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical analysis of the elastic-plastic boundaries in the thermal stresses theory frameworks // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2017. V. 937. No. 1. P. 012030.
- [9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoplasticity // *International Journal of Applied Mathematics*. 2017. V. 47. No. 3.
- [10] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // *Archive of Applied Mechanics*. 1993. V. 63. No. 1. P. 42–50.
- [11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids*. 2014. V. 49. No. 2. P. 218–224.
- [12] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature // *Procedia engineering*. 2017. V. 173. P. 891–896.
- [13] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modelling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. V. 7. P. 427–434.
- [14] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // *Mechanics of Solids*. 2017. V. 52. No. 5. P. 495–500.

-
- [15] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in am fabricated ball during a heating process // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1959. P. 1–5.
- [16] Stadnik N., Dats E. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 991. P. 1–7.
- [17] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 991. P. 1–12.
- [18] Akinlabi E. T., Dats E., Murashkin E. Thermoelasticplastic deformation of a functionally graded spherical layer // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1474(1). P. 012002.
- [19] Orçan Y. Residual stresses and secondary plastic flow in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends // International journal of engineering science. 1995. V. 33. No. 12. P. 1689–1698.
- [20] Murashkin E., Dats E. Thermal stresses computation in donut // Engineering Letters. 2019. V. 27. No 3. P. 568–571.
- [21] Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Температурные напряжения в условиях тороидальной симметрии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. №. 2. С. 57–70.
- [22] Murashkin E. V., Dats E. P. Thermal stresses computation under toroidal symmetry conditions // AIP Conference Proceedings. AIP Publishing LLC. 2019. V. 2116. No. 1. P. 380012.

E. P. Dats¹, E. V. Murashkin², A. M. Bururuev², T. K. Nesterov², N. E. Stadnik²

CALCULATION OF RESIDUAL STRESSES IN THE STATE OF ELASTIC UNLOADING OF A PREHEATED INHOMOGENEOUS THERMOELASTOPLASTIC MATERIAL UNDER CONDITIONS OF TOROIDAL SYMMETRY

¹*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia*

²*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The article is devoted to the numerical simulation of residual stresses in an inhomogeneous torus. The torus material is assumed to be thermoelastoplastic. The calculation of temperature stresses is carried out within the framework of the quasi-static approximation. Residual stress and strain fields are calculated. Numerical results of solving the boundary value problem in toroidal coordinates are presented. The cases of a long torus and the possibility of an analytical approximation of the original boundary value problem are considered.

Keywords: thermal stress, ideal plasticity, yield, heat conduction, thermoelasticity

REFERENCES

- [1] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood et al. // Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. 2019. V. 30.P. 51-58.
- [2] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 515–522.
- [3] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. 2020. P. 523–529.
- [4] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 555-564.
- [5] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu / Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore. Springer. 2020. P. 503-513.

Dats Evgeniy Pavlovich PhD, Researcher, Institute of Applied Mathematics of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Murashkin Evgenii Valerievich PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Bururuev Aleksei Mikhailovich Leading Engineer of the Laboratory for Modeling in Mechanics of Solids IPMech RAS, Moscow, Russia.

Nesterov Timofey Konstantinovich programmer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Stadnik Nikita Eduardovich Junior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project nos. 19-51-60001, 20-01-00666).

- [6] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu / Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo et al. // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2020. V. 51. No 6. P. 766–773.
- [7] Temperature stresses in an elastoplastic pipe depending on the choice of the plasticity condition / E.P. Dats et al. // *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2018. no. 1.P. 32–43.
- [8] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical analysis of the elastic-plastic boundaries in the thermal stresses theory frameworks // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2017. V. 937. No. 1.P. 012030.
- [9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoplasticity // *International Journal of Applied Mathematics*. 2017. V. 47. No. 3.
- [10] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // *Archive of Applied Mechanics*. 1993. V. 63. No. 1.P. 42-50.
- [11] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids*. 2014. V. 49. No. 2.P. 218-224.
- [12] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature // *Procedia engineering*. 2017. V. 173. P. 891–896.
- [13] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modeling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. V. 7. P. 427–434.
- [14] Murashkin E., Dats E. Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // *Mechanics of Solids*. 2017. V. 52. No. 5.P. 495-500.
- [15] Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in am fabricated ball during a heating process // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 1959. P. 1-5.
- [16] Stadnik N., Dats E. Continuum mathematical modeling of pathological growth of blood vessels // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 991. P. 1–7.
- [17] Murashkin E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 991. P. 1-12.
- [18] Akinlabi E. T., Dats E., Murashkin E. Thermoelasticplastic deformation of a functionally graded spherical layer // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1474 (1). P. 012002.
- [19] Orçan Y. Residual stresses and secondary plastic flow in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends // *International journal of engineering science*. 1995. V. 33. No. 12.P. 1689-1698.
- [20] Murashkin E., Dats E. Thermal stresses computation in donut // *Engineering Letters*. 2019. V. 27.No 3.P. 568-571.
- [21] E. P. Dats, E. V. Murashkin Temperature stresses in conditions of toroidal symmetry. *Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics*. 2019. no. 2.P. 57–70.
- [22] Murashkin E. V., Dats E. P. Thermal stresses computation under toroidal symmetry conditions // *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC. 2019. V. 2116. No. 1.P. 380012.

Е. В. Мурашкин

О ФОРМУЛИРОВКАХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ТКАНЫХ 3D МАТЕРИАЛОВ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье обсуждаются формулировки определяющих дифференциальных ограничений на поверхности наращивания на случай моделирования процессов формирования 3D материала, характеризующегося дополнительными характерными директорами (направлениями выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях). Выведена общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительных выделенных направлений. Определить набор совместных рациональных инвариантов тензора напряжений и характерных директоров. Дана инвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Полученные результаты могут быть использованы для постановки и решения краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов.

Ключевые слова: псевдотензор, поверхность наращивания, тканый 3D-материал, микрополярная среда, рациональный инвариант

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.010

УДК: 539.374

Вводные замечания. Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы основаны на различных технологических процессах обработки материалов (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение). [1]. Эти производственные процессы аддитивных технологий связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной (часто ненормальной) формы. При этом следует отметить, что рассматриваемые ростовые процессы не включают процессы так называемого объемного роста. [2, 3]: образование твердого компонента в процессе химической реакции, рост биологических тканей, костей, естественные образования фруктов [4]. В то же

© Мурашкин Е. В. 2021

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.02.2021

время процедура выбора адекватных граничных условий на растущей поверхности является актуальной фундаментальной проблемой современной механики сплошных сред и прикладной математики. Граничные условия играют важную роль в математических моделях растущих твердых тел. Кроме того, трехмерные материалы, используемые в аддитивном производстве, а также конечные продукты, обладают микроструктурными особенностями и механическими свойствами, которые лучше всего описываются асимметричными теориями механики сплошных сред. Следовательно, для разработки математических моделей таких технологических процессов обработки 3D-материалов и изготовления 3D-изделий необходимо использовать механику роста твердого тела и формализм неравновесной термодинамики в сочетании с подходами асимметричных теорий.

Относительные тензоры естественным образом возникают в математических моделях микрополярного материала. В частности, это: вектор микровращения, тензор кривизны, вектор и тензор напряжений пар, микроинерция, пары тел. Литературный поиск показывает, что применение относительных тензоров в теориях механики сплошных сред не имеет широкого распространения, несмотря на глубокие математические исследования (алгебра, теория инвариантов и дифференцирование относительных тензоров). [5–13].

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела иногда является сложной и трудоемкой процедурой. [14, 15]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью. [16].

1. Краевые условия растущей поверхности в микрополярном материале. Уравнение в эйлеровых координатах можно применять для описания поведения растущих твердых тел. Здесь мы используем обозначения и терминологию принятую в исследованиях [17–19], где получены дифференциальные связи для тензора силовых напряжений. Аналитически определим распространяющуюся растущую поверхность Σ в трехмерном пространстве уравнением

$$t = \tau(x^i). \quad (1)$$

Тогда единичный вектор нормали n_i на распространяющейся растущей поверхности Σ направленный в сторону ее распространения, связан с пространственным градиентом (1)

$$n_i = c \partial_i \tau, \quad c = |\nabla \tau|^{-1} \quad (t = \tau), \quad (2)$$

где c — линейная скорость распространения растущей поверхности в нормальном направлении n_k .

Как показано ранее (см., Например, [17–19]), преобразование уравнений равновесия используя формулу для актуальных компонент тензора силовых напряжений σ^{ij}

$$\sigma^{ij} = \int_{\tau+0}^t [\partial. \sigma^{ij}(x^s, t')] dt' + \mathcal{S}^{ji} + \sigma_*^{ij}(x^s), \quad (3)$$

$$\mathcal{S}^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial. \sigma^{ij}(x^s, t')] dt', \quad (4)$$

позволяет вывести уравнение на движущейся растущей поверхности в виде следующих дифференциальных ограничений

$$c[\nabla_j \sigma_*^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + X_*^i(x^s)] - n_j \partial. \sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0). \quad (5)$$

В уравнениях (3)–(5) мы используем обозначения, принятые в [17–19]: \mathcal{S}^{ji} — интеграл, связанный со скачком напряжений, $\sigma_*^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ — компоненты тензора напряжений, соответственно, вычисленные в момент $t = \tau(x^s) - 0$ прямо перед включением элемента в основное твердое тело, $X_*^i(x^s) = X^i(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$. Момент $t = \tau(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к растущей поверхности.

Формулы для компонент тензора парных напряжений по аналогии с уравнениями (3) можно принять в следующем виде

$${}^{[-1]}_{i.} \mu_{.k} = \int_{\tau+0}^t [\partial. {}^{[-1]}_{i.} \mu_{.k}(x^s, t')] dt' + \mathcal{M}_{.k}^{i.} + {}^{[-1]}_{i.} \mu_{.k}^*(x^s), \quad (6)$$

$$\mathcal{M}_{.k}^{i.} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial. {}^{[-1]}_{i.} \mu_{.k}(x^s, t')] dt', \quad (7)$$

где $\mathcal{M}_{.k}^{i.}$ — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений, ${}^{[-1]}_{i.} \mu_{.k}^*(x^s) = {}^{[-1]}_{i.} \mu_{.k}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время $t = \tau(x^s) - 0$.

Следуя процедуре, описанной в работах [17–19], для моментных напряжений получим

$$c[\nabla_i {}^{[-1]}_{i.} \mu_{.k}^*(x^s) + \nabla_i \mathcal{M}_{.k}^{i.} - 2 \frac{[-1]}{\tau_k} + \frac{[-1]}{Y_k}] - n_i \partial. {}^{[-1]}_{i.} \mu_{.k}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0). \quad (8)$$

В общем случае силовых σ_*^{ij} и моментных напряжений ${}^{[-1]}_{i.} \mu_{.k}^*$ выражаются через актуальными напряжения и пары на растущей поверхности с помощью тензорных

материальных уравнений следующим образом

$$\sigma_{*}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma^{ij}, \mu_{.j}^{[-1]i}, n_i, \dots), \quad \mu_{*}^{[-1]i} = \mathfrak{Z}_{.k}^{[-1]i}(\sigma^{ik}, \mu_{.k}^{[-1]i}, n_k, \dots), \quad (9)$$

Функции \mathfrak{F}_{ij} и $\mathfrak{Z}_{.k}^{[-1]i}$ могут быть определены методом черного ящика, характеризующим параметры оценки во временном интервале $\tau - 0 \leq t \leq \tau + 0$ прямо перед прикреплением элементов к растущему телу. “Черный ящик” может быть связан с различными физическими явлениями. В частности, функции \mathfrak{F}_{ij} и $\mathfrak{Z}_{.k}^{[-1]i}$ может зависеть от микроструктурных управляющих и теплофизических скрытых переменных, связанных с распространяющейся растущей поверхностью. Физический смысл дополнительных направляющих может быть связан с характерными направлениями укладки волокон в тканые композитные материалы, армирования в бетонных конструкциях, наматывания нитей в бобину и т. д. \mathfrak{F}_{ij} and $\mathfrak{Z}_{.k}^{[-1]i}$, фактически, должен зависеть от комбинаций аргументов, которые инвариантны относительно поворотов системы координат вокруг единичного вектора нормали n_k .

2. Система совместных алгебраических относительных инвариантов аргументов тензорной функции Как видно из обсуждения в предыдущем разделе, относительные тензоры, связанные с растущим твердым телом и распространяющейся растущей поверхностью, являются единичным вектором нормали, тензорами силы и связующих напряжений. Именно тензорные объекты определяют напряженно-деформированное состояние микрополярного материала, нарастающего на растущей поверхности. В дальнейшем разумно учесть единичный вектор нормали n_i , который определяет локальную геометрию растущей поверхности, и ввести базовые векторы локальной ортонормированной системы координат, включающие единичный вектор нормали n_i и два независимых касательные векторы τ_1 и τ_2 в касательной плоскости к растущей поверхности.

На протяжении всей статьи мы имеем дело с тензорами и векторами второго ранга. Рассмотрим системы независимых инвариантов исследуемых тензорных объектов. Проблема полноты системы инвариантов подробно исследуется в [8]. Полная система этих инвариантов тензора второго ранга $T_{.j}^i$, взаимно ортогональный единичный контравариантный вектор p^k и единичный ковариантный вектор q_k в трехмерном пространстве состоит из

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{p}. \quad (10)$$

Теорема Гамильтона–Кэли остается справедливой и для псевдотензоров. В рассматриваемом случае получаем

$$t^i = n_j \sigma^{ji}, \quad m_s = n_k \mu_{.s}^{[-1]k}, \quad t_s = n_j \sigma^{ji} \sigma_{is}, \quad m_i = n_k \mu_{.s}^{[-1]k} \mu_{.i}^{[-1]s}. \quad (11)$$

Полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов может быть разработана согласно списку инвариантов (10) за счет совместных внутренних произведений рассматриваемых векторов (11). Таким образом, рациональная система алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора

σ^{ij} и векторов n_k и τ_i

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp, \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_2, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_{2\perp}, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2, & \mathbf{t}_{2\perp} \cdot \mathbf{t}_{2\perp}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогичная система для тензора $\mu_{.k}^{[-1]i}$ и векторов n_k и τ_i записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}, & \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{m}_{2\perp}, & \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{m}_{2\perp} \cdot \mathbf{m}_{2\perp}. \end{aligned} \quad (13)$$

Совместные инварианты тензоров σ^{ij} и $\mu_{.k}^{[-1]i}$ определяются согласно

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp, & \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_{2\perp}, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}_2, & \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{t}_{2\perp}, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{t}_{2\perp} \cdot \mathbf{m}_{2\perp}. \end{aligned} \quad (14)$$

Как видим, система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов, представленная уравнениями (12)–(14) является полной, но приводимой. Инварианты не являются независимыми и могут быть исключены из рассмотрения в силу очевидных рациональных сизигий (например, по теореме Пифагора). Более того, совместные алгебраические рациональные относительные инварианты высшего порядка, включающие кубы и биквадраты силовых и моментных напряжений следует исключить из рассмотрения согласно теореме Гамильтона–Кэли [8].

Таким образом, неприводимая полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора силовых напряжений σ^{ij} , моментных напряжений $\mu_{.k}^{[-1]i}$ и векторов n_k и τ_i может быть сведена к

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp. \quad (15)$$

Такая система инвариантов будет нечувствительна к повороту локальной сети координат (n_i, τ_i, τ_i) вокруг единичного вектора нормали n_i к распространяющейся поверхности наращивания Σ .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. Т. 55. С. 155–162.
- [2] Epstein M. Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. Т. 16. С. 951–978.
- [3] A. Maugin G. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. с. 731–741.
- [4] A. Goriely. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 с.
- [5] Veblen O. Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Т. 26. С. 373–377.
- [6] O. Veblen. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 с.
- [7] T. Levi-Civita. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 с.

-
- [8] B. Gurevich G. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.
- [9] A. Einstein. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 c.
- [10] A. Schouten J. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 c.
- [11] S. Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 c.
- [12] Synge J. L. Schild A. Tensor calculus. New York: Courier Corporation, 1978. T. 5. 334 c.
- [13] J. Das A. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 c.
- [14] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [15] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. T. 14. C. 199–209.
- [16] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. T. 48. C. 1–10.
- [17] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 2019. T. 23. C. 646–656.
- [18] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost.* 2019. C. 11–29.
- [19] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // *Mechanics of Solids.* 2019. T. 54. C. 1157–1164.

E. V. Murashkin

ON THE BOUNDARY CONDITIONS FORMULATION IN THE PROBLEMS OF SYNTHESIS OF WOVEN 3D MATERIALS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The article discusses the formulation of the defining differential constraints on the build-up surface in the case of modeling the processes of forming a 3D material characterized by additional characteristic directors (directions of laying fibers in woven materials, reinforcement in concrete structures). The general form of the tensor relation on the growing surface is derived, taking into account the additional selected directions. Determine the set of joint rational invariants of the stress tensor and characteristic directors. An invariant-complete formulation of the constitutive relations on the surface of the build-up is given. The results obtained can be used to formulate and solve boundary value problems that simulate the processes of synthesis of woven 3D materials.

Keywords: pseudotensor, growing surface, 3D woven material, micropolar medium, rational invariant

REFERENCES

- [1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business Horizons*. 2012. T. 55. C. 155–162.
- [2] Epstein M. Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // *International Journal of Plasticity*. 2000. T. 16. C. 951–978.
- [3] A. Maugin G. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009. c. 731–741.
- [4] A. Goriely. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
- [5] Veblen O. Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1924. T. 26. C. 373–377.
- [6] O. Veblen. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.
- [7] T. Levi-Civita. *The absolute differential calculus (calculus of tensors)*. London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 c.
- [8] A. Einstein. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 c.
- [9] A. Schouten J. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 c.
- [10] S. Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 c.
- [11]
- [12] Synge J. L. Schild A. *Tensor calculus*. New York: Courier Corporation, 1978. T. 5. 334 c.
- [13] J. Das A. *Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 c.
- [14] V. Southwell R. *An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists*. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [15] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. T. 14. C. 199–209.
- [16] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. T. 48. C. 1–10.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [17] N. Radayev Yu. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. T. 22. C. 504–517.
- [18] Courant R. Gilbert D. Methods of Mathematical Physics. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat, 1933. 528 c.
- [19] Gelfand I. M. Fomin S. V. Calculus of Variations. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 228 c.
- [20] M. Gunter N. A Cours of the Calculus of Variations. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat, 1941. 308 c.
- [21] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On wave solutions of dynamic equations of hemitropic micropolar thermoelasticity // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2019. T. 19. C. 454–463.
- [22] Radayev Yu. N. Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2019. T. 23. C. 464–474.
- [23] A. Rosenfeld B. A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space. New York, 1988. ix + 471 c.
- [24] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. T. 54. C. 1157–1164.
- [25] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. T. 23. C. 646–656.
- [26] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2019. C. 11–29.
- [27] R. Hamilton W. Lectures on Quaternions. Dublin, 1853. 736 c.
- [28] A. Cayley. A memoir on the theory of matrices // Philosophical transactions of the Royal society of London. 1858. C. 17–37.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.

Ю. В. Немировский

ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЕ НЕУПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИБРИДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ ВЗРЫВАХ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Для гибридных прямоугольных слоистых пластин из произвольных наборов изотропных конструкционных материалов с симметричной структурой расположения слоев относительно отчетной (нейтральной) поверхности получены аналитические формулы оценок допустимой остаточной повреждаемости при воздействии интенсивных нагрузок взрывного типа. Закрепления контура предусматривают любую комбинацию из жестких или шарнирных условий отдельных сторон прямоугольного контура. В основе рассмотренной модели использованы традиционные кинематические гипотезы Кирхгофа, деформационная теория А. А. Ильюшина, принцип слабейшего звена для используемых материалов и деформационный критерий предразрушения для всех используемых фазовых материалов. Использован наиболее распространенный в практике закон изменения во времени давления на фронте взрывной волны.

Ключевые слова: гибридные прямоугольные пластины, взрывные нагрузки, деформационная теория А. А. Ильюшина, принцип слабейшего звена.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.012

УДК: 539.374

В настоящее время в нашей стране и многих зарубежных странах в практику проектирования эффективных технических устройств в области судостроения, элементов авиационной и космической техники, а также ответственных объектов гражданского строительства внедряются полиметаллические гибридные конструкции различных геометрических форм из наборов различных фазовых материалов.

© Немировский Ю. В., 2021

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiruy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 20.03.2019

К настоящему времени разработаны и успешно апробированы разнообразные технологические способы создания гибридных полиметаллических конструкций без каких либо серьезных ограничений по их фазовому составу и топологическому расположению в конструкциях. В качестве примеров таких технологий можно указать методы склеивания, сварок, холодного и плазменного напыления, электронной наплавки и других.

Наличие такого широкого спектра разработанных технологий возбуждает надежды на возможность разработки на их основе эффективных рациональных проектов, защитных гибридных конструкций для эффективного гашения энергии интенсивных воздействий воздушных, подземных и подводных взрывов. К сожалению, разработки аналитических и численных методов оценок степени повреждаемости гибридных конструкций при воздействии нагрузок взрывного типа значительно отстают от практических инженерных потребностей. В частности, автору не удалось найти в научной литературе каких-либо методов решения задач динамического деформирования гибридных прямоугольных пластин при учете реальных диаграмм деформирования фазовых материалов.

В данной работе сделана попытка в какой-то мере восполнить этот пробел.

Будем рассматривать такие слоистые пластинки из изотропных материалов, каждый из которых находится в обобщенном плоском напряженном состоянии и деформируется подчиняясь законам деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина. Считаем, что слои деформируются при изгибе без проскальзываний и расположены попарно симметрично относительно отсчетной (нейтральной плоскости) $z = 0$ декартовой ортогональной системы координаты (x, y, z) .

Обозначим толщины фазовых слоев Δ_α , $(\alpha = 1, 2, \dots, \beta)$, а границы их раздела в направлении оси z через h_δ

$$h_\delta = \sum_{\alpha=1}^{\delta} \Delta_\alpha. \quad (1)$$

Тогда связь напряжений $\sigma_{x\alpha}$, $\sigma_{y\alpha}$, $\sigma_{xy\alpha}$ и деформаций $\varepsilon_{x\alpha}$, $\varepsilon_{y\alpha}$, $\varepsilon_{xy\alpha}$ в фазовом α -слое будет иметь вид

$$\sigma_{x\alpha} = \frac{\sigma_{u\alpha}}{\varepsilon_{u\alpha}} (2\varepsilon_{x\alpha} - \varepsilon_{y\alpha}), \quad \sigma_{y\alpha} = \frac{\sigma_{u\alpha}}{\varepsilon_{u\alpha}} (2\varepsilon_{y\alpha} - \varepsilon_{x\alpha}), \quad \sigma_{xy\alpha} = \frac{\sigma_{u\alpha}}{\varepsilon_{u\alpha}} \varepsilon_{xy\alpha}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{u\alpha} &= [\sigma_{x\alpha}^2 - \sigma_{x\alpha}\sigma_{y\alpha} + \sigma_{y\alpha}^2 + 3\sigma_{xy\alpha}^2]^{1/2}, \\ \varepsilon_{u\alpha} &= \frac{2}{\sqrt{3}} [(\varepsilon_{x\alpha} + \varepsilon_{y\alpha})^2 - \varepsilon_{x\alpha}\varepsilon_{y\alpha} + \varepsilon_{xy\alpha}^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\sigma_{u\alpha}$, $\varepsilon_{u\alpha}$ – соответственно интенсивность напряжений и деформаций в материале α – слоя рассматриваемой конструкции.

Для удобства выполнения конкретных расчетов необходимо использовать однотипные в математической формулировке аппроксимации реальных диаграмм деформирования. В частности, можно использовать зависимости

$$\sigma_{u\alpha} = E_\alpha \varepsilon_{u\alpha} + B_\alpha \varepsilon_{u\alpha}^3, \quad (4)$$

в которых [2], E_α – модуль упругости, а

$$B_\alpha = \frac{4E_\alpha^3}{27(\sigma_\alpha^*)^2} = -\frac{E_\alpha}{3(\varepsilon_\alpha^*)^2}, \quad \varepsilon_\alpha^* = \frac{3\sigma_\alpha^*}{2E_\alpha}, \quad (5)$$

здесь σ_α^* – предел прочности, ε_α^* – предельно допустимая деформация (начала разупрочнения) на диаграмме растяжения образца материала α -слоя.

В соответствии с известными гипотезами Кирхгофа связь деформаций $\varepsilon_{x\alpha}$, $\varepsilon_{y\alpha}$, $\varepsilon_{xy\alpha}$ с прогибом $w(x, y, t)$ отсчетной поверхности пластинки определяется формулами

$$\varepsilon_{x\alpha} = z\kappa_x, \quad \varepsilon_{y\alpha} = z\kappa_y, \quad \varepsilon_{xy\alpha} = z\kappa_{xy}, \quad h_{\alpha=1} \leq z \leq h_\alpha, \quad h_0 = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \beta, \quad (6)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

w – прогиб, t – время, κ_x , κ_y , κ_{xy} – изменение кривизны и кручения отсчетной плоскости в процессе динамического деформирования.

Возникающие при изгибе моменты будут связаны с напряжениями следующими зависимостями

$$M_x = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \left(\int_{h_{\alpha-1}}^{h_\alpha} \sigma_{x\alpha} z dz \right), \quad M_y = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \left(\int_{h_{\alpha-1}}^{h_\alpha} \sigma_{y\alpha} z dz \right), \quad (8)$$

$$M_{xy} = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \left(\int_{h_{\alpha-1}}^{h_\alpha} \sigma_{xy\alpha} z dz \right)$$

и при учете соотношений (1)-(7) могут быть представлены в форме

$$M_x = C(1 + R\kappa_u)(2\kappa_x - \kappa_y), \quad M_y = C(1 + R\kappa_u)(2\kappa_y - \kappa_x), \quad (9)$$

$$M_{xy} = C(1 + R\kappa_u)\kappa_{xy},$$

$$\kappa_u = (\kappa_x^2 + \kappa_x\kappa_y + \kappa_y^2 + \kappa_{xy}^2)^{1/2}, \quad (10)$$

$$C = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{\beta} E_\alpha (h_\alpha^3 - h_{\alpha-1}^3), \quad R = \frac{3 \sum_{\alpha=1}^{\beta} B_\alpha (h_\alpha^5 - h_{\alpha-1}^5)}{5 \sum_{\alpha=1}^{\beta} E_\alpha (h_\alpha^3 - h_{\alpha-1}^3)}. \quad (11)$$

Формулы (9)-(11) позволяют описать зависимости обобщенных моментов M_x , M_y , M_{xy} от прогибов для любых структурных пакетов гибридных пластин с любыми условиями закрепления на контуре.

Для получения разрешающего уравнения для функции прогиба далее необходимо использовать известное уравнение динамического изгиба

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (12)$$

где $q(x, y, t)$ – распределенная динамическая поверхностная нагрузка и m – поверхностная масса гибридной пластины

$$m = \frac{1}{g} \left(\sum_{\alpha=1}^{\beta} \rho_\alpha \delta_\alpha \right), \quad (13)$$

где g – ускорение силы тяжести, ρ_α – плотность материала α – слоя.

Традиционные динамические нагрузки взрывного типа, действующие на плоские преграды, равномерно распределяются по поверхности преграды и во времени развиваются в виде двух характерных участков (рис. 2)

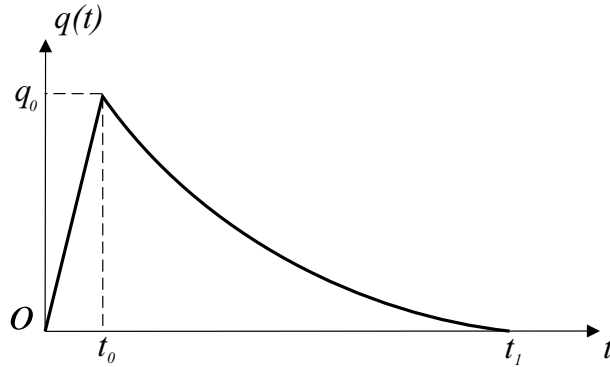


Рис. 1.

Сначала в течение короткого времени $0 \leq t \leq t_0$ нагрузка интенсивно нарастает до некоторой амплитуды q_0 по закону близкому к линейному, а затем на более протяженном интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$ ее интенсивность спадает до нуля практически по экспоненциальному закону. Поэтому в большинстве исследований для функции $q(t)$ используют зависимости в форме

$$q(t) = q_0 \Psi(t), \quad \Psi(t) = \frac{(t_1 t - t^2)}{(t_1 - t_0)t_0} \exp\left(\frac{t_0 - t}{\gamma}\right), \quad (14)$$

здесь q_0, γ, t_0, t_1 – заданные параметры, зависящие от типа используемых взрывчатых веществ, веса и формы заряда, расстояния от источника взрыва и свойств среды, в которой распространяется взрывная волна (воздушный, подводный или подземный взрыв). Эти параметры определяются путем выполнения специальных программ испытаний и содержатся в специально издаваемых атласах свойств взрывчатых веществ [4,5].

Рассматривая прямоугольные пластины с размерами a и b , выберем начало координат в левом нижнем угле и занумеруем стороны по часовой стрелке индексом k ($k = 1, 2, 3, 4$), рис. и будем предполагать, что по условиям закрепления контура может быть либо жестко защемлена либо шарнирно оперта.

Тогда для определенного варианта закрепления, помечаемого в дальнейшем индексом r , форму искомого прогиба $w_r(x, y, t)$ представим в виде

$$w_r(x, y, t) = U_r(t) \varphi_r(x, y), \quad (15)$$

$$\varphi_r(x, y) = x^{\mu_{1r}} (y - b)^{\mu_{2r}} (x - a)^{\mu_{3r}} y^{\mu_{4r}} \quad (16)$$

где $\mu_{kr} = 2$ в случае защемления стороны k и $\mu_{kr} = 3$ в случае ее шарнирного опирания.

Например, для варианта $r = 1$, когда все стороны будут защемлены, следует принять

$$\mu_{11} = \mu_{21} = \mu_{31} = \mu_{41} = 2.$$

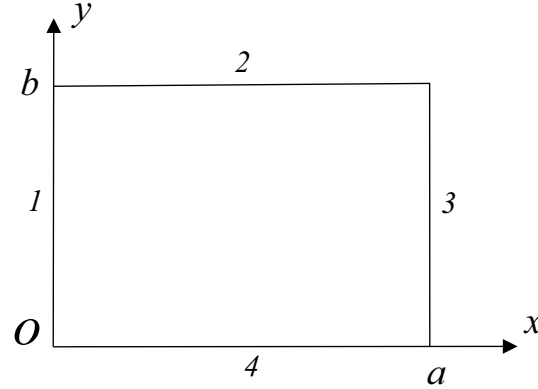


Рис. 2.

Для варианта $r = 2$, когда все стороны будут шарнирно оперты, следует принять

$$\mu_{11} = \mu_{21} = \mu_{31} = \mu_{41} = 3.$$

Для варианта $r = 3$, когда сторона 1 будет закреплена, а стороны 2, 3, 4 шарнирно оперты, следует принять

$$\mu_{13} = 2, \quad \mu_{23} = \mu_{33} = \mu_{43} = 3.$$

С помощью представления (15), (16) для любого варианта закрепления можно найти координаты x_r^* , y_r^* точек максимального прогиба из системы уравнений

$$\left. \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_r^* \\ y = y_r^*}} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} \right|_{\substack{x = x_r^* \\ y = y_r^*}} = 0. \quad (17)$$

В частности имеем

$$x_1^* = x_2^* = \frac{a}{2}, \quad y_1^* = y_2^* = \frac{b}{2}, \quad x_3^* = \frac{2}{5}a, \quad y_3^* = \frac{b}{2}. \quad (18)$$

В качестве предельно допустимого состояния деформирования для каждого конструкционного α -материала будем рассматривать критерии предразрушения [1-3,6], то в рамках вышеописанных принятых положений будем иметь неравенства

$$\kappa_u \leq \frac{\varepsilon_\alpha^*}{h_\alpha}, \quad \kappa_u \beta \leq \sum_{\alpha=1}^{\beta} \frac{\varepsilon_\alpha^*}{h_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \beta). \quad (19)$$

В соответствии с концепцией слабейшего звена

$$\varepsilon^* = \varepsilon_k^* = \min_{1 \leq \alpha \leq \beta} (\varepsilon_\alpha^*). \quad (20)$$

Тогда будем иметь

$$\kappa_u < \frac{\varepsilon^*}{\beta} \sum_{\alpha=1}^{\beta} h_\alpha. \quad (21)$$

заменяя κ_u его наименьшим предельным состоянием вместо (9) получим приближенные зависимости

$$M_x = \tilde{D}(2\kappa_x - \kappa_y), \quad M_y = \tilde{D}(2\kappa_y - \kappa_x), \quad M_{xy} = \tilde{D}\kappa_{xy}, \quad (22)$$

где

$$\tilde{D} = C\left(1 + \frac{R\varepsilon^*}{h_k}\right), \quad (23)$$

– модифицированная жесткость изгибания гибридной пластинки выраженная через основные физические и геометрические параметры топологической структуры рассматриваемой конструкции. Подставляя выражения (22) в уравнение (12) для прогиба $w(x, y, t)$ получим уравнение

$$-\tilde{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(t),$$

из которого учитывая представление (15), (16), для функции $U_r(t)$ получим обыкновенные линейное дифференциальное уравнение второго порядка в виде

$$\ddot{U}_r(t) - \frac{\tilde{D}}{m} F_{1r} U_r(t) = \frac{q_0 \psi(t)}{m F_{2r}}, \quad (24)$$

где точка обозначает производную по времени t , а

$$F_{1r} = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{\varphi_r(x, y)} \left(\frac{\partial^4 \varphi_r}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_r}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_r}{\partial y^4} \right) dx dy, \quad F_{2r} = \int_0^a \int_0^b \frac{dx dy}{\varphi_r(x, y)}. \quad (25)$$

Начальные условия для уравнения (24) имеют вид

$$\dot{U}_r(0) = U_r(0) = 0. \quad (26)$$

Таким образом, при любых рассматриваемых способах закрепления контурных отрезков гибридных прямоугольных пластин общее решение задачи о развитии прогиба может быть выписано в явной аналитической форме на основе известных формул из справочной литературы [7]. Так как для каждой из рассматриваемых пластин коэффициенты решений содержат полный набор физических и геометрических параметров, то полученное решение открывает прямой путь к отысканию рациональных проектов гибридных защитных проектов. Полученное решение не означают разрушение конструкции, а определяет нижнюю грань допустимой амплитуды взрывной волны, при которой может наступать процесс опасного развития разрушения тонкой пластины в окрестности точки с координатами x_r^*, y_r^* . Рассматриваемые процессы происходят при заданной амплитуды взрывной волны в диапазоне времени $t_0 \leq t \leq t_1$.

Если в момент $t = t_{1r}^*$ в r -проекте происходит гашение взрывной волны, то для определения t_{1r} будем иметь уравнение

$$\dot{U}_r(t_{1r}^*) = 0.$$

Подставляя это значение $t = t_{1r}^*$ в (14) получим соответствующее значение предельно допустимую амплитуды взрывной волны q_{0r}^* и предельно допустимый прогиб $w_{1r}^*(x, y, t_{1r}^*)$.

Таким образом, варьируя параметрами внутренней структуры гибридной пластины и способами закрепления контура, можно в значительной степени управлять остаточными формами при взрывных нагружениях без разрушения конструкций.

Общее решение уравнения (24) может быть записано в форме

$$\begin{aligned} U_r(t) &= F_{1r}^0 e^{\lambda_r t} + F_{2r}^0 e^{-\lambda_r t} + \tilde{U}_r(t), \\ \dot{U}_r(t) &= \lambda_r \left(F_{1r}^0 e^{\lambda_r t} - F_{2r}^0 e^{-\lambda_r t} \right) + \dot{\tilde{U}}_r(t), \end{aligned} \quad (27)$$

где при

$$\lambda_r^2 = \frac{\tilde{D}F_{1r}}{m}, \quad p_r = \frac{1}{mF_{2r}}, \quad z_{01} = \frac{\gamma}{(t_1 - t_0)t_0}, \quad (28)$$

F_{1r}^0, F_{2r}^0 – константы, а

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r(t) &= q_0 z_{01} (S_{1r} + S_{2r}t + S_{3r}t^2) e^{\frac{t_0-t}{\gamma}}, \\ \dot{\tilde{U}}_r(t) &= \frac{q_0 z_{01}}{\gamma} (\gamma S_{2r} + (2\gamma S_{3r} - S_{2r})t - S_{3r}t^2) e^{\frac{t_0-t}{\gamma}} \\ S_{1r} &= \frac{\gamma^2 p_r ((1-\gamma)(1-\gamma^2 \lambda_r^2) - 4\gamma)}{(1-\gamma^2 \lambda_r^2)^2}, \\ S_{2r} &= \frac{\gamma^2 p_r^2 (1-4\gamma-\gamma^2 \lambda_r^2)}{(1-\gamma^2 \lambda_r^2)^2}, \quad S_{3r} = -\frac{\gamma^2 p_r}{1-\gamma^2 \lambda_r^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Учитывая начальные условия (26) для определения F_{1r}^0, F_{2r}^0 получим систему двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} F_{1r}^0 + F_{2r}^0 + q_0 z_{01} S_{1r} e^{\frac{t_0}{\gamma}} &= 0, \\ F_{1r}^0 - F_{2r}^0 + \frac{q_0 z_{01}}{\gamma \lambda_r} (2S_{2r} - S_{1r}) e^{\frac{t_0}{\gamma}} &. \end{aligned}$$

В некоторый момент времени $t = t_{1r}^*$ движение пластинки прекратится

$$\left. \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=t_{1r}^*} = 0.$$

Тогда для t_{1r}^* мы получим уравнение

$$(t_{1r}^*)^2 - \frac{2S_{3r} - S_{2r}}{S_{3r}} t_{1r}^* + \frac{S_{1r} - \gamma S_{2r}}{S_{3r}} + \frac{\gamma \lambda_z}{q_0 z_{01} S_{3r}} = 0.$$

Тогда амплитуда максимального остаточного прогиба будет равна

$$U_r^* = U_r(t_{1r}^*).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В. Оптимальное проектирование гибридных тавровых конструкций по предельно допустимым деформациям // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). С. 76–84
- [2] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С.26-37
- [3] Немировский Ю. В. Динамика гибридных упрочняющихся и вязкопластических балок при взрывных воздействиях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4(46). С.115-123
- [4] Расторгуев Б. С., Плотников А. И., Хуснутдинов Д. Э. Проектирование зданий и сооружений при аварийных взрывных воздействиях. М. : Изд-во АСВ, 2007. 152 с.
- [5] Невская Е. Е. Основные методы оценки ударных волн при аварийных взрывах, принципы проектирования взрывоустойчивых зданий и сооружений // Безопасность труда в промышленности. 2017. № 9. С. 20-29
- [6] Немировский Ю. В. Динамическое поведение полиметаллических круглых пластин из упрочняющихся материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). С.3-10
- [7] Бронштейн И. И., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

Yu. V. Nemirovskii

MAXIMUM PERMISSIBLE INELASTIC DEFORMATIONS OF HYBRID RECTANGULAR PLATES DURING INTENSE EXPLOSIONS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. For hybrid rectangular layered plates from arbitrary sets of isotropic structural materials with a symmetric structure of the arrangement of layers relative to the reporting (neutral) surface, analytical formulas for assessing the permissible residual damage under the action of intense explosive loads are obtained. Contour anchors provide for any combination of rigid or hinge conditions of individual sides of a rectangular contour. The considered model is based on the traditional kinematic hypotheses of Kirchhoff, the deformation theory A. A. Ilyushin, the principle of the weakest link for the materials used and the deformation criterion for pre-fracture for all used phase materials. The most widespread law of time variation of pressure at the front of a blast wave is used.

Keywords: hybrid rectangular plates, explosive loads, deformation theory A. A. Ilyushin, the principle of the weakest link.

REFERENCES

- [1] Nemirovskiy Yu. V. Optimal design of hybrid T-structures for maximum permissible deformations // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State Mechanics. 2016. No. 3 (29). P. 76-84
- [2] Nemirovskiy Yu. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2018. No. 3 (37). C.26-37
- [3] Nemirovskiy Yu.V. Dynamics of hybrid hardening and viscoplastic beams under explosive impacts //Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2020. No. 4 (46). C.115-123
- [4] Rastorguev B. S., Plotnikov A. I., Khusnutdinov DZ Design of buildings and structures under emergency explosive effects. Moscow: ASV Publishing House, 2007.152 p.
- [5] Nevskaya E. E. Basic methods for assessing shock waves in emergency explosions, design principles for explosion-proof buildings and structures // Bezopasnost truda v promyshlennosti. 2017. No. 9. P. 20-29
- [6] Nemirovskiy Yu. V. Dynamic behavior of polycrystalline round plates made of hardening materials //Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. No. 3 (29). C.3-10
- [7] Bronshtein I. I., Semendyaev K. A. Mathematical handbook for engineers and university students. Moscow: Nauka, 1986.544 p.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.</i> К вопросу решения плоской задачи ударной деформации в предварительно ненапряженной несжимаемоупругой среде.....	3
<i>Алероев Т. С., Гасанов М. В.</i> Возмущение подвижной особой точки и аналитическое приближенное решение для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка.....	16
<i>Ткаченко О. П.</i> Условия сопряжения в математической модели трубопровода с изломом профиля.....	28
<i>Алероев Т. С., Гасанов М. В.</i> Необходимое и достаточное условие существования подвижной особой точки для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка.....	49
<i>Володин Г. Т., Кочергин Д. С.</i> Деформирование упруго-вязких балок взрывной нагрузкой в воде.....	56
<i>Завъялова Ю. А., Лапшина М. А., Трещев А. А.</i> Термосиловое нагружение ортотропной цилиндрической оболочки, выполненной из деформационно анизотропного материала.....	64
<i>Рытова Т. Г., Максимова Л. А., Николаева А. Г., Макарова Т. М., Пфаненштиль Н. Г.</i> Анализ частоты собственных колебаний большепролетной фермы с фланцевыми соединениями.....	76
<i>Гультяев В. И., Алексеев А. А., Саврасов И. А., Гарикиков В. В.</i> Экспериментальная проверка постулата изотропии при деформировании стали 45 по ортогональным криволинейным траекториям постоянной кривизны.....	86
<i>Рытова Т. Г., Максимова Л. А., Николаева А. Г., Смирнов В. К., Пфаненштиль Н. Г.</i> Численный расчет способов усиления структурных конструкций покрытия при воздействии огня.....	95
<i>Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Буруруев А. М., Нестеров Т. К., Стадник Н. Э.</i> Расчет остаточных напряжений в состоянии упругой разгрузки предварительно нагретого неоднородного термоупругопластического материала в условиях тороидальной симметрии.....	105
<i>Мурашкин Е. В.</i> О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3D материалов.....	114
<i>Немировский Ю. В.</i> Предельно допустимые неупругие деформации гибридных прямоугольных пластин при интенсивных взрывах.....	122
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	131

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	134
СОДЕРЖАНИЕ	136

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2021. № 1 (47)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 28.06.2021. Выход в свет 30.06.2021.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 17,3.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 1789

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38