

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 3(49)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2021

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 3(49)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

Ш. Т. Нгуен, Д. В. Христич

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КВАДРАТИЧНОЙ МОДЕЛИ УПРУГОГО АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассмотрена модель упругости второго порядка для ортотропного материала. Проведенный анализ показывает, что квадратичная часть предложенной модели содержит тринадцать упругих постоянных, из которых девять являются линейно независимыми. Параметры модели определены по данным экспериментов с композитными пластинами. Модель позволяет описывать наблюдаемые в экспериментах нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями в процессах растяжения, сжатия и сдвига, а также разностойкость анизотропных материалов.

Ключевые слова: нелинейные определяющие соотношения, анизотропные материалы, идентификация, композиты.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.001

УДК: 539.3

Введение. Многие материалы, такие как полимеры и полимерные композиционные материалы, имеют ярко выраженное нелинейное поведение. Физическая нелинейность материалов может быть обусловлена их неоднородностью и наличием исходных дефектов, вызванных несовершенством технологий изготовления, и требует описания взаимосвязей между напряжениями и деформациями на основе экспериментальных данных на макроскопическом уровне, то есть без учёта особенностей строения. Обработка таких экспериментальных данных является одним из важнейших этапов построения математических моделей деформирования современных анизотропных материалов.

В статье [1] предложена модель ламинированного композита в форме пластины, изготовленной из нелинейно упругого анизотропного материала. Для описания механического поведения материала используются определяющие соотношения, построенные в [2] и записанные в виде зависимостей деформаций от напряжений. Целью

© Нгуен Ш. Т., Христич Д. В., 2021

Нгуен Ши Тоан

e-mail: sytoantula@gmail.com,

аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Христич Дмитрий Викторович

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 01.10.2021

настоящей работы является определение материальных параметров, входящих в модель, на основании экспериментальных данных, известных из литературы [3, 4].

Построение квадратичной модели материала. Для описания деформированного состояния используем тензор деформаций Коши–Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$. Напряжённое состояние описывается тензором истинных напряжений \mathbf{S} . Рассматриваемые ортотропные материалы имеют три линейных инварианта тензора деформаций [5]

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \quad (1)$$

и три квадратичных инварианта

$$s_{(1)}^2 = \varepsilon_{12}^2, \quad s_{(2)}^2 = \varepsilon_{23}^2, \quad s_{(3)}^2 = \varepsilon_{31}^2. \quad (2)$$

Инварианты тензора напряжений определяются аналогично:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{11} + S_{22} + S_{33}), \quad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2S_{33} - S_{11} - S_{22}), \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{11} - S_{22}) \quad (3)$$

и три квадратичных инварианта

$$t_{(1)}^2 = S_{12}^2, \quad t_{(2)}^2 = S_{23}^2, \quad t_{(3)}^2 = S_{31}^2. \quad (4)$$

В работах [1, 6] был получен вариант определяющих соотношений для нелинейно упругого анизотропного материала на основе конкретизации потенциала Гиббса для обратимых процессов изотермического деформирования таких материалов. Эти соотношения для ортотропного материала могут быть представлены в форме связи между инвариантами напряжений и деформаций (1)–(4) в виде:

$$\begin{aligned} e_0 &= (c_0^{00} + 3c_1^{00}\sigma_0)\sigma_0 + (c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_0 + c_1^{01}\sigma_1)\sigma_1 + (c_0^{02} + 2c_1^{02}\sigma_0 + c_1^{02}\sigma_2)\sigma_2, \\ e_1 &= (c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_1 + c_1^{01}\sigma_0)\sigma_0 + (c_0^{11} + 3c_1^{11}\sigma_1)\sigma_1 + (c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_1 + c_1^{12}\sigma_2)\sigma_2, \\ e_2 &= (c_0^{02} + 2c_1^{01}\sigma_2 + c_1^{02}\sigma_0)\sigma_0 + (c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_2 + c_1^{12}\sigma_1)\sigma_1 + (c_0^{22} + 3c_1^{22}\sigma_2)\sigma_2, \\ s_{(1)} &= 2 \left(D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)}t_{(1)} \right) t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2 \left(D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)}t_{(2)} \right) t_{(2)}, \\ s_{(3)} &= 2 \left(D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)}t_{(3)} \right) t_{(3)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $c_0^{\alpha\beta}$, $c_1^{\alpha\beta}$, $D_0^{(\gamma)}$, $D_1^{(\gamma)}$ — постоянные в выбранном базисе трёхмерного пространства упругие параметры материала. Определяющие соотношения (5) являются моделью упругости второго порядка для ортотропного материала и содержат 9 констант первого порядка и 9 констант второго порядка.

При малых деформациях эти соотношения представляют собой обобщённый закон Гука:

$$\begin{aligned} e_0 &= c_0^{00}\sigma_0 + c_0^{01}\sigma_1 + c_0^{02}\sigma_2, \quad e_1 = c_0^{01}\sigma_0 + c_0^{11}\sigma_1 + c_0^{12}\sigma_2, \quad e_2 = c_0^{02}\sigma_0 + c_0^{12}\sigma_1 + c_0^{22}\sigma_2, \\ s_{(1)} &= 2D_0^{(1)}t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2D_0^{(2)}t_{(2)}, \quad s_{(3)} = 2D_0^{(3)}t_{(3)}, \end{aligned}$$

то есть константы $c_0^{\alpha\beta}$, $D_0^{(\gamma)}$ образуют тензор упругих податливостей, обратный тензору упругости материала.

Для записи определяющих соотношений через компоненты тензоров деформаций и напряжений в трёхмерном пространстве выразим эти компоненты через линейные и квадратичные инварианты из соотношений (1), (3):

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}e_0 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sqrt{3}}{3}e_0 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sqrt{3}}{3}e_0 + \frac{\sqrt{6}}{3}e_1, \quad (6)$$

$$|\varepsilon_{12}| = s_{(1)}, \quad |\varepsilon_{23}| = s_{(2)}, \quad |\varepsilon_{31}| = s_{(3)}.$$

$$S_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_0 - \frac{\sqrt{6}}{6}\sigma_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_2, \quad S_{22} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_0 - \frac{\sqrt{6}}{6}\sigma_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_2, \quad S_{33} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_0 + \frac{\sqrt{6}}{3}\sigma_1,$$

$$|S_{12}| = t_{(1)}, \quad |S_{23}| = t_{(2)}, \quad |S_{31}| = t_{(3)}. \quad (7)$$

Из выражений (5) с учётом (6), (7) получим связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\ &+ B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + B_{1112}S_{11}S_{22} + B_{1113}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= A_{2211}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\ &+ B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + B_{2212}S_{11}S_{22} + B_{2213}S_{11}S_{33} + B_{2223}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= A_{3311}S_{11} + A_{3322}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\ &+ B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{3312}S_{11}S_{22} + B_{3313}S_{11}S_{33} + B_{3323}S_{22}S_{33}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \left(D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)} |S_{12}| \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left(D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)} |S_{23}| \right) S_{23},$$

$$\varepsilon_{31} = 2 \left(D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)} |S_{31}| \right) S_{31}.$$

По данным, полученным в механических экспериментах с макрообразцами, удобнее определять параметры A_{ijkl} и B_{ijkl} , входящие в соотношения (8). Однако для идентификации коэффициентов модели (5) требуется найти значения $c_0^{\alpha\beta}$, $c_1^{\alpha\beta}$. Коэффициенты A_{ijkl} и B_{ijkl} линейно связаны с константами $c_0^{\alpha\beta}$, $c_1^{\alpha\beta}$ соответственно. Для отыскания этих связей удовлетворим условиям существования потенциала Гиббса в форме

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}}. \quad (9)$$

Найдем частные производные компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений:

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = A_{1122} + 2B_{1122}S_{22} + B_{1112}S_{11} + B_{1123}S_{33},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}} = A_{2211} + 2B_{2211}S_{11} + B_{2212}S_{22} + B_{2213}S_{33},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = A_{1133} + 2B_{1133}S_{33} + B_{1113}S_{11} + B_{1123}S_{22},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}} &= A_{3311} + 2B_{3311}S_{11} + B_{3312}S_{22} + B_{3313}S_{33}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} &= A_{2233} + 2B_{2233}S_{33} + B_{2213}S_{11} + B_{2223}S_{22}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}} &= A_{3322} + 2B_{3322}S_{22} + B_{3312}S_{11} + B_{3323}S_{33},\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в условия (9), придём к соотношениям между параметрами модели:

$$\begin{aligned}A_{1122} &= A_{2211}, & A_{1133} &= A_{3311}, & A_{2233} &= A_{3322}, \\ B_{2212} &= 2B_{1122}, & B_{1112} &= 2B_{2211}, & B_{1123} &= B_{2213}, \\ B_{3313} &= 2B_{1133}, & B_{1113} &= 2B_{3311}, & B_{1123} &= B_{3312}, \\ B_{3323} &= 2B_{2233}, & B_{2223} &= 2B_{3322}, & B_{2213} &= B_{3312}.\end{aligned}\tag{10}$$

С учётом равенств (10) определяющие соотношения (8) принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\ &+ B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22} + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\ &+ B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22} + B_{1123}S_{11}S_{33} + 2B_{3322}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\ &+ B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22} + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + 2B_{2233}S_{22}S_{33},\end{aligned}\tag{11}$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \left(D_0^{(1)} + \frac{3}{2} D_1^{(1)} |S_{12}| \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left(D_0^{(2)} + \frac{3}{2} D_1^{(2)} |S_{23}| \right) S_{23},$$

$$\varepsilon_{31} = 2 \left(D_0^{(3)} + \frac{3}{2} D_1^{(3)} |S_{31}| \right) S_{31}.$$

Из выражений (10) и (5) с учётом выражений для инвариантов (6), (7) получим

$$\begin{aligned}A_{1111} &= \frac{c_0^{00}}{3} - \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{3} + \frac{\sqrt{6}c_0^{02}}{3} + \frac{c_0^{11}}{6} - \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3} + \frac{c_0^{22}}{2}, & A_{1122} &= \frac{c_0^{00}}{3} - \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{3} + \frac{c_0^{11}}{6} - \frac{c_0^{22}}{2}, \\ A_{1133} &= \frac{c_0^{00}}{3} + \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{6} + \frac{\sqrt{6}c_0^{02}}{6} - \frac{c_0^{11}}{3} + \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3}, \\ A_{2222} &= \frac{c_0^{00}}{3} - \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{3} - \frac{\sqrt{6}c_0^{02}}{3} + \frac{c_0^{11}}{6} + \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3} + \frac{c_0^{22}}{2}, \\ A_{2233} &= \frac{c_0^{00}}{3} + \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{6} - \frac{\sqrt{6}c_0^{02}}{6} - \frac{c_0^{11}}{3} - \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3}, & A_{3333} &= \frac{c_0^{00}}{3} + \frac{2\sqrt{2}c_0^{01}}{3} + \frac{2c_0^{11}}{3}, \\ B_{1111} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}c_1^{12} + \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\ B_{1122} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}c_1^{12} + \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\ B_{1133} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{2}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{11} + \frac{\sqrt{2}}{3}c_1^{12},\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}
B_{1123} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}c_1^{00} - \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{01} - \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{02} + \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{11} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{12}, \\
B_{2211} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}c_1^{12} - \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\
B_{2222} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}c_1^{12} - \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\
B_{2233} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{01} - \frac{\sqrt{2}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{11} - \frac{\sqrt{2}}{3}c_1^{12}, \\
B_{3311} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} - \frac{\sqrt{3}}{6}c_1^{01} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}c_1^{02} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{11} + \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{6}c_1^{12}, \\
B_{3322} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} - \frac{\sqrt{3}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}c_1^{02} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{11} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}c_1^{12}, \\
B_{3333} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}c_1^{01} + \frac{2\sqrt{6}}{3}c_1^{11}.
\end{aligned}$$

В квадратичной части определяющих соотношений 10 коэффициентов B_{ijk} линейно выражаются через 6 параметров $c_1^{\alpha\beta}$, поэтому линейно независимыми являются 6 констант B_{ijk} . В качестве независимых параметров выберем следующие: B_{1111} , B_{1122} , B_{1133} , B_{2211} , B_{2222} , B_{3311} . Остальные 4 из 10 параметров B_{1123} , B_{2233} , B_{3322} , B_{3333} линейно выражаются через них:

$$\begin{aligned}
B_{1123} &= \frac{255\sqrt{2} + 206\sqrt{3} - 145\sqrt{6} - 360}{2(26\sqrt{6} - 37\sqrt{3} - 45\sqrt{2} + 63)}B_{1111} + \\
&+ \frac{18965\sqrt{6} - 24302\sqrt{3} - 29791\sqrt{2} + 46540}{7256\sqrt{6} - 7918\sqrt{3} - 9694\sqrt{2} + 17746}B_{1122} + \\
&+ \frac{16\sqrt{6} - 29\sqrt{3} - 36\sqrt{2} + 39}{2(3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{6} + 2)}B_{2211} + \frac{222\sqrt{2} + 183\sqrt{3} - 114\sqrt{6} - 279}{30\sqrt{2} + 20\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 6}B_{2222} + 2B_{3311}, \\
B_{2233} &= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2}{4}B_{1111} + \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6} - 2}{4}B_{1122} + B_{1133} + \\
&+ \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 4}{4}B_{2211} + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}{4}B_{2222}, \\
B_{3322} &= \frac{6898\sqrt{3} - 8559\sqrt{2} - 4883\sqrt{6} + 12128}{1257\sqrt{2} - 954\sqrt{3} + 657\sqrt{6} - 1762}B_{1111} + \\
&+ \frac{26904\sqrt{3} - 47443\sqrt{2} - 18469\sqrt{6} + 68446}{232\sqrt{3} - 11069\sqrt{2} + 1267\sqrt{6} + 19172}B_{1122} + \\
&+ \frac{9\sqrt{6} - 8\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 22}{2(3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{6} + 2)}B_{2211} + \frac{75\sqrt{2} + 58\sqrt{3} - 53\sqrt{6} - 132}{30\sqrt{2} + 20\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 6}B_{2222} + B_{3311}, \\
B_{3333} &= (3\sqrt{2} + 6)B_{3311} - \frac{126648\sqrt{2} + 101665\sqrt{3} + 71900\sqrt{6} + 179145}{17550\sqrt{2} + 15232\sqrt{3} + 10778\sqrt{6} + 24840}B_{1111} - \\
&- \frac{825\sqrt{2} + 450\sqrt{3} + 333\sqrt{6} + 1203}{556\sqrt{2} + 432\sqrt{3} + 298\sqrt{6} + 768}B_{1122} + (3\sqrt{2} + 3)B_{1133} -
\end{aligned} \tag{13}$$

$$-\frac{3(4\sqrt{6} - 207\sqrt{2} - 156\sqrt{3} - 12)}{4(15\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3)}B_{2211} + \frac{345\sqrt{2} + 284\sqrt{3} - 148\sqrt{6} - 372}{4(15\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3)}B_{2222}.$$

Если параметры A_{ijj} , B_{ijk} определены из экспериментов, то упругие константы материала $c_0^{\alpha\beta}$, $c_1^{\alpha\beta}$ можно найти, обращая соотношения (12).

Определение параметров модели. Часть параметров модели можно определить по результатам экспериментов с пластинами. Рассмотрим ортотропную пластину, у которой одна ось анизотропии \mathbf{a}_3 перпендикулярна плоскости, а две другие \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 направлены по сторонам пластины. Направим оси декартовой системы координат вдоль сторон пластины.

При плоском напряжённом состоянии ($S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0$) определяющие соотношения (11) записываются в следующем виде:

$$\varepsilon_{11} = A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22},$$

$$\varepsilon_{33} = A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22}, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \left(D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)} |S_{12}| \right) S_{12}.$$

В работе [4] приведены эксперименты по одноосному растяжению, сжатию и сдвигу пластин, у которых главные направления анизотропии совпадают с осями координат. Данные экспериментов позволили, используя метод наименьших квадратов, определить параметры материала A_{1111} , A_{1122} , A_{2222} , B_{1111} , B_{1122} , B_{2211} , B_{2222} , $D_0^{(1)}$, $D_1^{(1)}$, входящие в соотношения (14):

$$A_{1111} = 6,48 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}, \quad A_{1122} = -6,93 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-1}, \quad A_{2222} = 6,48 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1};$$

$$B_{1111} = 6,58 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-2}, \quad B_{1122} = 2,32 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-2}, \quad B_{2211} = 2,32 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-2}, \quad (15)$$

$$B_{2222} = 6,58 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-2}; \quad D_0^1 = 5,364 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}; \quad D_1^1 = 1,36 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-2}.$$

Свойства материала композита, армированного стекловолокном, обусловлены направленным расположением армирующих элементов. В этом случае волокна располагаются в параллельных плоскостях в двух перпендикулярных направлениях. Это объясняет полученные результаты $A_{1111} = A_{2222}$, $B_{1111} = B_{2222}$ и $B_{1122} = B_{2211}$.

На рисунках 1, 2 представлены аппроксимирующие диаграммы, построенные по определяющим соотношениям (14) со значениями параметров материала (15).

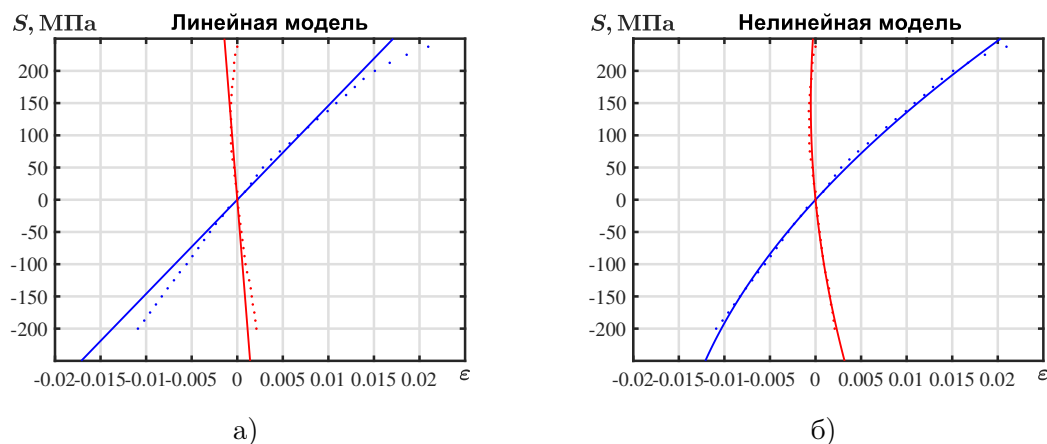


Рис. 1. Зависимости напряжений от деформаций: а) линейные определяющие соотношения; б) квадратичные определяющие соотношения

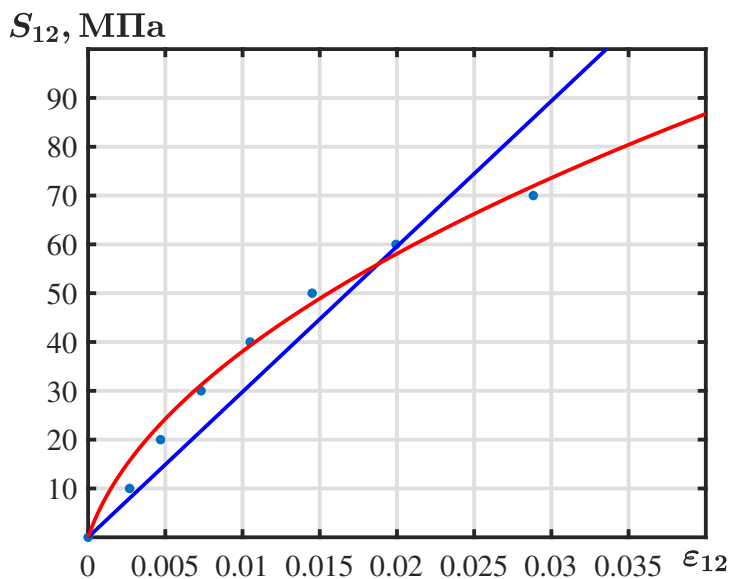


Рис. 2. Зависимость касательных напряжений от деформации сдвига в плоскости пластины

На рисунке 1 точками обозначены экспериментальные данные, сплошными линиями – результаты расчётов по предложенной модели; синим цветом обозначены продольные деформации вдоль оси \mathbf{a}_1 , красным – поперечные. На рисунке 2 точками обозначены экспериментальные данные, синим цветом обозначены результаты расчётов по линейной модели, красным – по квадратичной модели.

Графики на рисунке 1 показывают, что определяющие соотношения в виде (11), учитывающие квадратичную зависимость деформаций от напряжений, позволяют описать результаты экспериментов с анизотропным материалом более адекватно, чем

линейные соотношения обобщённого закона Гука. Они позволяют описывать разносопротивляемость анизотропного материала растяжению и сжатию, наблюдаемую в эксперименте.

Экспериментальные данные, приведённые в [4], использованы также в статье [7] для идентификации и верификации модели, учитывающей нелинейную зависимость сдвиговых деформаций от касательных напряжений, но постулирующей линейную связь между деформациями и напряжениями при растяжении и сжатии вдоль главных осей анизотропии. Рассмотренная в настоящей работе модель (11) учитывает нелинейность в упругом поведении анизотропного материала не только при сдвиге, но и при одноосном нагружении, а её параметры идентифицируются по данным таких экспериментов.

Заключение. В статье приведен вариант определяющих соотношений для нелинейно упругого анизотропного материала в виде квадратичной связи между компонентами деформаций и напряжений, который удовлетворяет требованиям обобщения частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы [8]. Установлены линейные соотношения между константами модели, следующие из условия существования потенциала Гиббса. Выявлена линейная зависимость между коэффициентами квадратичной части соотношений, которая является следствием увеличения числа коэффициентов при переходе от соотношений между инвариантами деформаций и напряжений к связям между компонентами тензора деформаций и тензора напряжений.

Проведена идентификация параметров модели по данным экспериментов [4]. Показано, что предложенная модель позволяет описывать наблюдаемую в экспериментах [4] нелинейность зависимости между напряжениями и деформациями не только в процессах сдвига, но и в процессах растяжения и сжатия вдоль главных осей анизотропии, а также разносопротивляемость анизотропных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколова М.Ю., Христич Д.В., Рудаков В.В. Нелинейная модель пластин из композиционных материалов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 37, № 3. С. 100–106.
- [2] Христич Д.В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипотупругих тел. Дисс. ... д.ф.-м.н. Тула. 2015.
- [3] О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е.В. Амелина, С.К. Голушко, В.С. Ерасов [и др.] // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 5. С. 27–52.
- [4] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // Composites. 1977. no. 8. P. 237–243.
- [5] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: Физматлит, 2013. 320 с.
- [6] Sokolova M., Rudakov V., Khristich D. Strains of plates of nonlinear anisotropic materials // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. p. 012024 (11 pages).
- [7] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [8] Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 38–45.

S. T. Nguyen, D. V. Khristich

IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF THE QUADRATIC MODEL OF THE ELASTIC ANISOTROPIC MATERIAL

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. A second-order elasticity model for an orthotropic material is considered. The analysis shows that the quadratic part of the proposed model contains thirteen elastic constants, nine of which are linearly independent. The parameters of the model are determined from the data of experiments with composite plates. The model allows one to describe experimentally observed nonlinear dependences of stresses and strains in the processes of tension, compression, and shear, as well as the difference in resistance of anisotropic materials.

Keywords: nonlinear constitutive relations, anisotropic materials, identification, composites.

REFERENCES

- [1] Sokolova M.Yu., Khristich D.V., Rudakov V.V. A nonlinear model of plates made of composite materials // Vestnik ChGPU Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2018. T. 37, № 3. С. 100–106. (in Russian).
- [2] Khristich D.V. Identification of anisotropic materials and modeling of processes of finite deformation of hypoelastic bodies. Dissertation for the Degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 2015. (in Russian).
- [3] Nonlinear deformation of carbon fibers: experiment, model, calculation / E.V. Amelina, S.K. Golushko, V.S. Erasov [и др.] // *Computational Technologies*. 2015. T. 20, № 5. С. 27–52. (in Russian).
- [4] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // *Composites*. 1977. no. 8. P. 237–243.
- [5] Markin A.A., Sokolova M.Yu. *Thermomechanics of elastoplastic deformation*. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 с.
- [6] Sokolova M., Rudakov V., Khristich D. Strains of plates of nonlinear anisotropic materials // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. p. 012024 (11 pages).
- [7] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Meccanica*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [8] Markin A., Sokolova M., Khristich D. A.A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations // *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46, no. 1. P. 30–35.

Nguyen Sy Toan, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

Khristich Dmitrii Viktorovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

ИМПУЛЬСНАЯ НАГРУЗКА НА НЕПОДВИЖНУЮ ПРЕГРАДУ ПРИ ВЗРЫВЕ В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. С использованием экспериментальных данных о взрывах в воде найдена аналитическая зависимость распределения удельного импульса взрывной нагрузки по длине балки. Учтены эффекты отражения возмущенного потока воды от поверхности преграды, глубина ее расположения в водоёме, взаимное расположение сферического заряда ВВ и преграды в воде, физические характеристики заряда.

Ключевые слова: импульсная нагрузка, взрыв в воде, эффекты отражения, распределение импульсной нагрузки по поверхности преграды.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.002

УДК: 531/534

Введение

Значительный интерес в расчетах конструкций на действие взрыва в воде представляет задача о нахождении распределения удельного импульса взрывной нагрузки по длине балки, поскольку её решение позволяет найти условия гарантированного разрушения балочной конструкции.

Сначала рассмотрим задачу о нахождении давления, действующего возмущенного потока жидкости (воды) на балку (давления торможения). Пусть к балке под некоторым углом α подходит параллельно-струйный или расходящийся поток возмущенной среды (воды). На рис. 1 показан момент подхода к точке A такого потока, образованного при взрыве сферического заряда радиуса r_0 . Чтобы найти давление, которое создает в этой точке водный поток при его торможении, вырежем мысленно в окрестности точки A бесконечно малую площадку dS и рассмотрим действие на нее частиц потока (рис.2).

© Володин Г.Т., Кочергин Д. С., 2021

Володин Геннадий Тимофеевич

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Кочергин Денис Сергеевич

e-mail: sig.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 04.10.2021

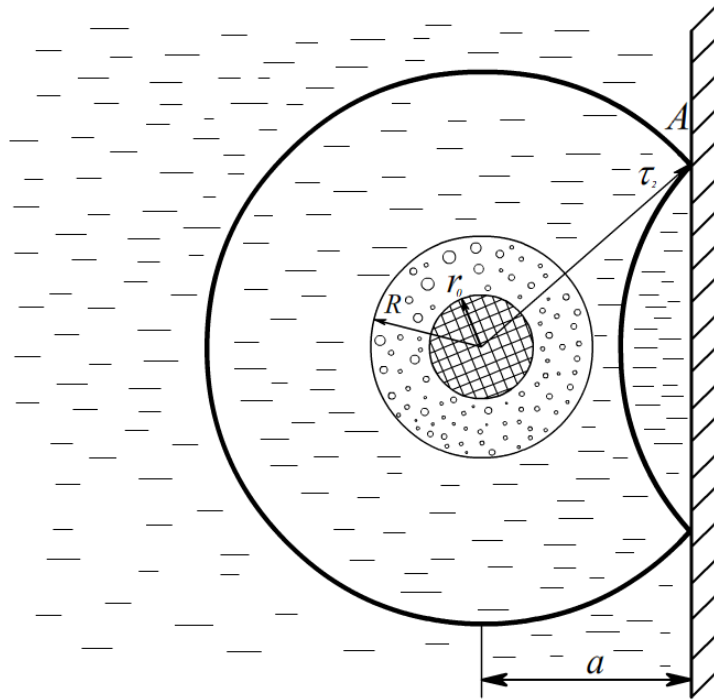


Рис. 1 Схема движения элемента балки под действием импульсной нагрузки

На площадку падает бесконечно малая струйка возмущенной водной среды, площадь поперечного сечения которой $dS \cdot \cos \alpha$. За бесконечно малый промежуток времени dt к площадке dS подойдет масса воды, заключенная в элементарной струйке между площадкой dS и сечением струйки, удаленным на расстояние $u_2 dt \cdot \cos \alpha$, где u_2 – скорость потока на фронте УВ в воде. Эта масса определяется соотношением

$$dm = \rho_2 dS u_2 dt \cos \alpha \quad (1)$$

где ρ_2 – плотность воды в падающей струйке на фронте УВ.

При ударе элементарной струйки о преграду частицы потока, теряя часть нормальной составляющей скорости, отражаются от преграды под некоторым углом $\beta \neq \alpha$. Обозначим нормальную составляющую скорости подходящего к преграде потока u_{2n} , а нормальную составляющую скорости отраженного потока u'_{2n} и применим к элементарной струйке закон сохранения импульса. Согласно этому закону, импульс силы, действующий на площадку dS , равен изменению количества движения струйки, следовательно

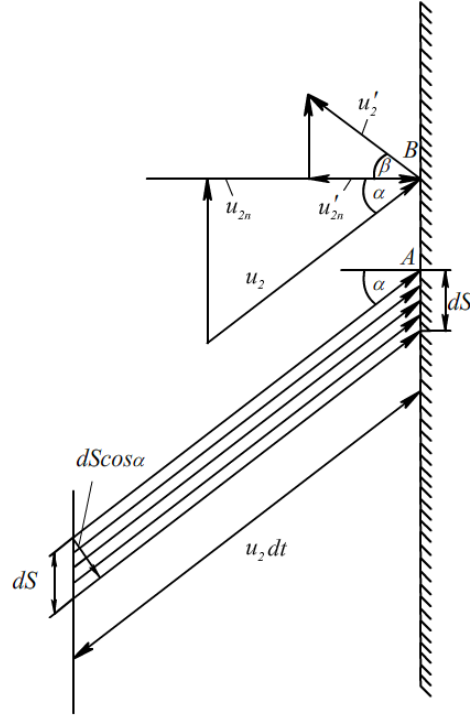
$$P_m dS \cdot dt = dm \cdot (u_{2n} - u'_{2n}), \quad (2)$$

где P_m – максимальное давление при ударе.

С учетом соотношения (1) для элементарной массы dm , из выражения (2) найдем

$$P_m = u_2 \cos \alpha \cdot \rho_2 \cdot u_{2n} \left(1 - \frac{u'_{2n}}{u_{2n}} \right) \quad (3)$$

Отношение модуля нормальной составляющей скорости отраженного потока к модулю нормальной составляющей падающего потока есть коэффициент восстановления при

Рис. 2 Схема для определения давления P_m

ударе

$$K = \frac{|u'_{2n}|}{|u_{2n}|} \quad (4)$$

Так как u'_{2n} и u_{2n} имеют противоположные направления, то

$$1 - \frac{u'_{2n}}{u_{2n}} = 1 + K \quad (5)$$

Согласно рис. 2 $u_{2n} = u_2 \cos \alpha$, следовательно

$$P_m = (1 + K) \rho_2 u_2^2 \cos^2 \alpha \quad (6)$$

Согласно экспериментальным данным в работе [1] получен алгоритм вычислений

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \left(\frac{P_2 - P_{01}}{BP_{01}} + 1 \right)^{-\frac{1}{n}} \\ D &= \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{\varepsilon \rho_1}} \\ u_2 &= \varepsilon D \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{1}{1 - \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

определяющий параметры на фронте УВ по известному давлению на фронте. Это давление определяется по экспериментальным зависимостям [1], [2], [3], [4]:

$$\frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} = 14700 \left(\frac{r_0}{a} \right)^{1,13}, \quad (8)$$

справедливым для сферических зарядов на расстояниях $\frac{r}{r_0} > 12$, и

$$\frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} = 37000 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (9)$$

если $6 < \frac{r}{r_0} < 12$.

В вычислениях по формулам (7) используются соотношения для параметров B и n в виде

$$B = \begin{cases} 2945, & \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} < 3 \cdot 10^4 \\ 4115, & \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} \geq 3 \cdot 10^4 \end{cases} \quad (10)$$

$$n = \begin{cases} 7, 15, & \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} < 3 \cdot 10^4 \\ 6, 29, & \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} \geq 3 \cdot 10^4 \end{cases}$$

В приведенных формулах P_{01} – давление воды на поверхности водоема, P_1 – давление воды на глубине H ; эти величины связаны соотношением

$$P_1 = P_{01} + \rho_1 g H \quad (11)$$

где ρ_1 – плотность воды в невозмущенном состоянии, g – ускорение силы тяжести. Спад давления с течением времени принято [1], [5], [6] определять формулой

$$\frac{P - P_{01}}{P_{01}} = \frac{P_m - P_{01}}{P_{01}} \cdot e^{-\frac{t}{\vartheta}} \quad (12)$$

в которой время t отсчитывается от момента прихода фронта ударной волны в данную точку пространства, а величина ϑ , называемая постоянной времени, определяется из соотношения [1], [4]

$$\frac{a_{01} \vartheta}{r_0} = 1,4 \cdot \left(\frac{a}{r_0} \right)^{0,24} \quad (13)$$

где a_{01} – скорость звука в воде на поверхности водоема (например, при $T = 288^\circ K$, $a_{01} = 1460 \frac{m}{c}$).

Удельный импульс фазы сжатия определяется формулой [1]

$$i = \int_0^{\tau_+} (P - P_{01}) dt = (P_m - P_{01}) \int_0^{\tau_+} e^{-\frac{t}{\vartheta}} dt = (P_m - P_{01}) \vartheta \left(1 - e^{-\frac{\tau_+}{\vartheta}} \right)$$

В неограниченной среде $\frac{\tau_+}{\vartheta} > 5$ [1], поэтому

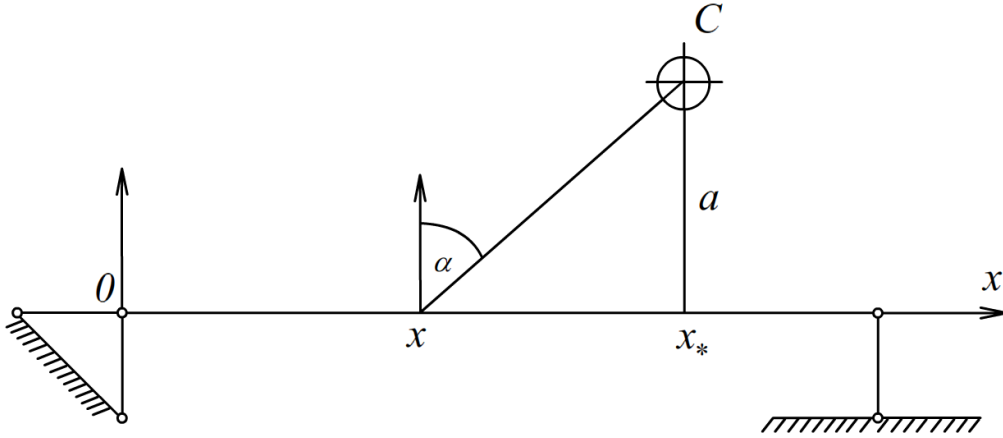
$$i = (P_m - P_{01}) \vartheta \quad (14)$$

Таким образом, удельный импульс, действующий на преграду, определяется формулой (14), где P_m находится из соотношения (6), т.е.

$$i = [(1 + K) \rho_2 u_2^2 \cos^2 \alpha - P_{01}] \vartheta \quad (15)$$

Преобразуем формулу (15), расположив начало координат в левом конце балки (Рис. 3)

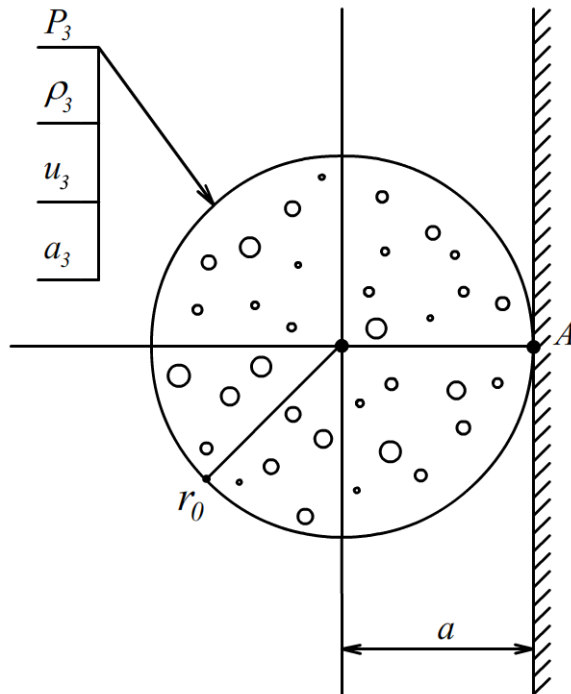
Пусть x – координата точки падения элементарной струйки потока, α – угол падения, x_* – координата проекции заряда C на ось балки (эпицентр взрыва). Учитывая

Рис. 3 Схема для определения удельного импульса i .

соотношения $x_* - x = atg\alpha$; $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{a^2}{(x_* - x)^2 + a^2}$, формулу (15) для удельного импульса представим в виде

$$i = \left[(1 + K)\rho_2 u_2^2 \frac{a^2}{(x_* - x)^2 + a^2} - P_{01} \right] \vartheta \quad (16)$$

Найдём теперь величину коэффициента восстановления K . Для этого рассмотрим случай, когда заряд контактирует в точке A с преградой (балкой) (рис.4).

Рис. 4 Схема расположения заряда для определения величины K

Обозначения P_3, ρ_3, u_3, a_3 соответствуют давлению, плотности, скорости частиц и скорости звука на фронте детонационной волны. Эти величины определяются соотношениями [1]:

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= \frac{D_0}{K_3 + 1} \\ \rho_3 &= \frac{K_3 + 1}{K_3} \rho_0 \\ P_3 &= \frac{\rho_0 D_0^2}{K_3 + 1} \\ a_3 &= \frac{K_3 D_0}{K_3 + 1} \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

где ρ_0 - плотность заряда ВВ, D_0 - скорость детонации заряда, K_3 - показатель политропы на фронте детонационной волны. В рассматриваемом случае контактного расположения заряда в формуле (6) следует положить: $\alpha = 0$, $P_m = P_3$, $\rho_2 = \rho_3$, $u_2 = u_3$ и, для определения K , получим соотношение

$$P_3 = (1 + K) \rho_3 u_3^2; \quad (18)$$

отсюда следует

$$K = \frac{P_3}{\rho_3 u_3^2} - 1 \quad (19)$$

С учётом (19) формулу (16) представим в виде

$$i = \left[P_3 \left(\frac{\rho_2 u_2}{\rho_3 u_3} \right)^2 \frac{a^2}{a^2 + (x_* - x)^2} - P_{01} \right] \vartheta, \quad (20)$$

Погонный импульс вычисляется по формуле

$$i_* = bK_1 i,$$

где K_1 - коэффициент формы, b - ширина балки [1], [3].

Для балки прямоугольного поперечного сечения $b \times h$, где h - высота сечения, $K_1 = 1$.

Заключение. Найденная формула (20) для удельного импульса, воспринимаемого преградой (балкой), определяет его как функцию координаты точки падения (т.е. импульс распределен по длине балки $i_* = i_*(x)$). Эта функция включает определяющие параметры созданного взрывом силового поля: величину C массы заряда ВВ (входит в формулу массы через радиус заряда), характеристики ВВ заряда, расположение заряда в воде на глубине H и на удалении a от преграды (балки), положение эпицентра взрыва x_* . Полученное соотношение (20) для погонного импульса позволяет отыскивать условия гарантированного разрушения элементов конструкций (в рассматриваемом случае - балки) импульсной взрывной нагрузкой в воде. Влияние свойств источника взрыва может быть учтено привлечением экспериментальных данных [5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саламахин Т. М. Физические основы механического действия взрыва и методы определения взрывных нагрузок. Москва: ВИА, 1974. 255 с.
- [2] Коул Р. Г. Подводные взрывы. Москва: ИЛ, 1950. 495 с.
- [3] Христофоров Б. Д. Влияние свойств источника на действие взрыва в воздухе и воде. Физика горения и взрыва, 2004. 115-118 с.

- [4] Кедринский В. К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: СО РАН, 2000.
- [5] Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Москва: Судостроение, 1967. 194 с.
- [6] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированного ВВ в газовой и жидкой средах. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. Тула: Левша, 2005. 160 с.

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

PULSE LOAD ON A STATIONARY BARRIER DURING AN EXPLOSION IN WATER

Tula State University, Tula, Russia.

Abstract. Using experimental data on explosions in water, an analytical dependence of the distribution of the specific impulse of the explosive load along the length of the beam is found. The effects of reflection of the disturbed water flow from the barrier surface, the depth of its location in the reservoir, the mutual location of the spherical explosive charge and the barrier in the water, the physical characteristics of the charge are taken into account.

Keywords: pulse load, explosion in water, reflection effects, pulse load distribution over the barrier surface.

REFERENCES

- [1] Salamakhin T. M. Physical foundations of the mechanical action of an explosion and methods for determining explosive loads. Moscow: VIA, 1974. 255 p. (in Russian).
- [2] Cole R. G. Underwater explosions. Moscow: IL, 1950. 495 p. (in Russian).
- [3] Khristoforov B. D. Influence of source properties on the effect of an explosion in air and water. Tula: Physics of gorenje and explosion, 2004. 115-118 p. (in Russian).
- [4] Kedrinsky V. K. Hydrodynamics of explosion: experiment and models. Novosibirsk: SB RAS, 2000. (in Russian).
- [5] Zamyshlyaev B. V., Yakovlev Y. S. Dynamic loads during an underwater explosion. Moscow: Shipbuilding, 1967. 194 p. (in Russian).
- [6] Volodin G. T. The effect of the explosive charges in gas and liquid media. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).

Volodin Gennady Timofeevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Kochergin Denis Sergeevich, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

А. А. Буренин, А. В. Ткачева

ОСЕВОЕ ВРАЩЕНИЕ В КАЧЕСТВЕ ПРИЧИНЫ ПАДЕНИЯ НАТЯГА В СБОРКЕ СОСТАВНОГО ДИСКА, ПОЛУЧЕННОЙ СПОСОБОМ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКИ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. На примере составного диска, созданного посредством операции горячей посадки, изучается прочность такого соединения на отрыв. Отрывные усилия создаются в качестве центробежных инерционных сил при вращении диска относительно его центральной оси. Показывается, что созданный натяг в сборке имеет выраженную тенденцию к уменьшению. Однако для его обнуления необходимы достаточно значительные угловые скорости вращения. Приведен пример расчета придельной угловой скорости в зависимости от первоначального нагрева охватываемой детали сборки, термомеханических свойств материала сборки и геометрических параметров итоговой конструкции. Подобные расчеты в снижающемся натяге совершенно необходимы, когда эксплуатационные условия требуют принять вращение составного диска в качестве части его функциональных обязанностей.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, посадка с натягом, горячая посадка, напряжения во вращающемся диске.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.003

УДК: 539.374

Введение

Наиболее характерным и известным примером сборки цилиндрических деталей с натягом является предложение ординарного академика Петербургской Академии Наук Гадолина А.В. об использовании двухслойных стволов артиллерийских орудий [1]. Такие предварительно напряженные стволы позволяли выдерживать повышенные давления пороховых газов, способствуя тем самым повышению дальности и точности стрельбы. Собирались такие орудийные стволы способом горячей посадки [1],

© Буренин А. А., Ткачева А. В., 2021

Буренин Анатолий Александрович

e-mail: aab@imim.ru, главный научный сотрудник, доктор физ.-мат. наук, член корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: nansi.valer@yandex.ru, старший научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00147.

Поступила 11.11.2021

когда охватывающий слой нагревался и надевался на холодный охватываемый. Позднее подобные конструкции нашли применение в других отраслях машиностроения, а операция горячей посадки оказалась одной из важнейших в ряду технологий сборки с натягом. Расчет сформировавшихся в процессе посадки предварительных для конструкций напряжений проводился, как правило, в рамках теории температурных напряжений [2, 3] в упругих телах. Связанностью процессов деформирования и теплопередачи пренебрегалось. Учет пластических деформаций в процессе посадки привел к необходимости использования приближенных численных расчетов [4, 5, 5, 6]. В [7–10] на основе использования кусочно-линейных пластических потенциалов пластического течения удалось избежать дискретизации расчетных областей и получить решения в численно – аналитической форме, где приближенные численные методы используются только для графического представления результатов расчетов и выполнения краевых условий решением систем алгебраических уравнений. Однако такие действия необходимо выполнять на каждом временном шаге расчетов, поскольку область пластического течения в свою очередь разделяется на части, в которых пластическое течение подчинено разным граням и ребрам кусочно-линейных поверхностей нагружения. Переходы с грани призмы Треска и Ивлева на ребро и на следующую грань необходимо отслеживать в процессе расчетов.

Имеется ряд работ, где прочность сборки проверяется теоретически и экспериментально. Так в [11, 12] рассматривается кручение сборки, в [13, 14] изучается прочность соединения поворотом охватываемой детали, в [15] в условиях циклических нагружений и, наконец, в [16] сопротивление соединения осевой нагрузке. Здесь рассмотрим прочность соединения в сборке составного диска при его вращении вокруг неподвижной оси. Данную задачу часто называют задачей Ю. Н. Роботнова [17]. В теории ползучести и пластического течения она изучалась неоднократно. Укажем здесь только последние публикации [18, 19]. О других можно составить впечатление по ссылкам этих работ. Возникающие при быстром вращении силы инерции позволяют дать оценку прочности соединения именно на отрыв, что ранее не изучалось.

Соотношения модели упруго пластического тела. Локальные следствия законов сохранения импульса и энергии приводят к дифференциальным уравнениям

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{\chi} = \rho \mathbf{w} \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\gamma}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}); \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}; \rho = \text{const}; \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}; \gamma = \gamma(\mathbf{d}, s)$$

В (1) и (2) принято, что приобретаемые деформации телом являются малыми, $\boldsymbol{\chi}$, γ , s – плотность распределения массовых сил, внутренней энергии и энтропии, \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{q} – векторы перемещений, скоростей перемещений и потока тепла, $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{d} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений, деформаций и скоростей деформаций Эйлера, ρ – плотность, t – время.

Полные деформации \mathbf{d} в теле полагаем состоящими из упругих \mathbf{e} и пластических \mathbf{p} составляющих

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}); \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{d\mathbf{d}}{dt} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (3)$$

Следствием закона сохранения энергии (2) и второго закона термодинамики являются [20] зависимости

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi(\mathbf{e}, T)}{\partial \mathbf{e}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T \quad (5)$$

$$\psi(\mathbf{e}, T) = \gamma(\mathbf{e}, s) - sT; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s} = T; \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = -s;$$

$$\mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + T^{-1} \mathbf{q}$$

Здесь ψ - плотность распределения свободной энергии, \mathbf{J} - вектор потока энтропии, T - температура. Зависимость (4) часто называется формулой Мурнагана, а соотношение (5) уравнением баланса энтропии s . То обстоятельство, что термодинамические потенциалы (свободная и внутренняя энергия) зависят только от обратимых (упругих) деформаций \mathbf{e} и не зависят от необратимых (пластических) деформаций \mathbf{p} является принимаемой упрощающей гипотезой. Это обычное допущение [20, 21].

При простейшем из возможных заданий термодинамического потенциала $\psi = \psi(\mathbf{e}, T)$ из (4) и (5) следует [2, 20] соотношения закона Дюамеля-Неймана и уравнение теплопроводности

$$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - 3\alpha T_0 K \theta) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta - \frac{1}{c T_0} (\delta \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (7)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}$$

Здесь λ , μ - параметры Ламе, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ модуль всестороннего сжатия, T_0 - температура в свободном состоянии тела (комнатная температура), α , c - коэффициент линейного расширения и удельная теплоемкость материала, a - коэффициент температуропроводности, δ - коэффициент связанности.

Пластические деформации растут в материале только в условиях принадлежности напряжений поверхности нагружения (текучести) $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$ (k - предел текучести). В принимаемых далее условиях принципа максимума Мизеса уравнение поверхности нагружения выполняет роль пластического потенциала со следованием ассоциированного закона пластического течения

$$dp = d\eta \frac{df(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad d\eta > 0 \quad (8)$$

В качестве поверхности нагружения принимаем далее боковую поверхность наклонной призмы Ивлева [22] в пространстве главных напряжений σ_j .

$$\max |\sigma_i - \sigma| = \frac{4}{3} k \quad (9)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Данное условие пластического течения называется условием максимальных приведенных [22] напряжений или условием пластического течения Ишлинского-Ивлева.

Зависимость предела текучести $k = k(\theta)$ от температуры принимаем в простейшей ее форме

$$k(\theta) = k_0 (\theta_p - \theta) \theta_p^{-1} \quad (10)$$

Здесь $k_0 = const$ - предел текучести в опытах на сдвиг при комнатной температуре T_0 .

Сборка горячей посадкой. Протеклампированная во введении цель настоящей работы связана с анализом прочности соединения с натягом полученном в результате горячей посадки кольцевого диска на такой же диск, при последующем вращении сборки относительно центральной оси ортогональной общей плоскости соединенных дисков. Именно таким способом предполагается изучить прочность соединения на отрыв.

Итоговая конструкция представлена на рис. 1 (а). Составной деформируемый диск, насажен на жесткий вал радиуса $r = R_0$. Диск состоит из двух частей, воедино собранных с помощью операции горячей посадки. Охватываемая часть диска имеет размеры $R_0 \leq r \leq R_1$, охватывающая - $R_1 \leq r \leq R_2$. Соединение с валом полагается жестким и теплоизолированным. Вал может вращаться вокруг своей оси с переменной угловой скоростью ω . Изменение угловой скорости вращения со временем t задается так, как это представлено на рис. 1 (б), где t_1, t_2, t_3 ω_* назначенные параметры вращения. Очевидно, что, прежде чем приступить к расчету изменений в натяге и в напряжениях в материале составного диска за счет вращения, необходимо знать распределение напряжений и уровень натяга на линии сопряжения $r = R_1$ (иметь начальные условия). Получить такие начальные условия возможно только решением задачи, моделирующей операцию горячей посадки. Данные расчеты проведем в рамках теории температурных напряжений (несвязанной теории).

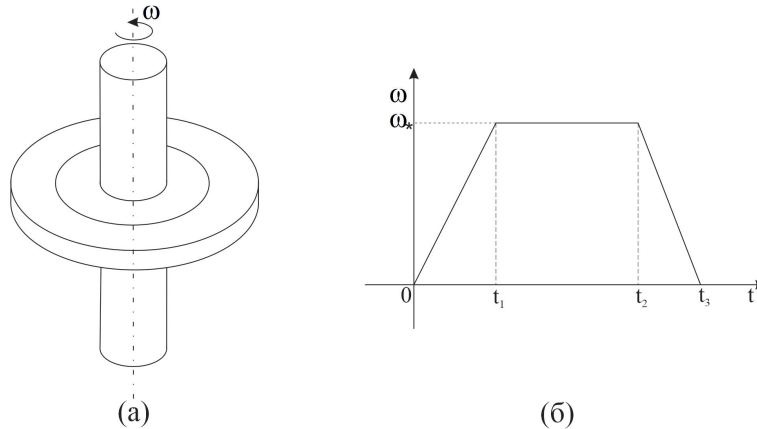


Рис. 1. Постановка задачи. а) вид сборки, б) изменение скорости вращения со временем

Температурная часть задачи состоит из уравнения теплопроводности (7), где связностью (последний слагаемый правой части) пренебрегается. В таком случае из (7) для рассматриваемого случая осевой симметрии в цилиндрических координатах r, φ, z имеем уравнение

$$\theta_{,t} = a (\theta_{,rr} + r^{-1} \theta_{,r}) - \beta \theta \quad (11)$$

Индексом после запятой здесь и в дальнейшем обозначается производная по данной независимой переменной. Последний слагаемый в (11) задает теплоотдачу с поверхности составного диска в окружающую среду, находящуюся при комнатной температуре; β - коэффициент такой теплоотдачи, полагаемый далее постоянным. Начальными условиями для уравнения теплопроводности (11) являются зависимости

$$\theta(R_0 \leq r \leq R_1, 0) = 0; \quad \theta(R_1 \leq r \leq R_2, 0) = \theta_* \quad (12)$$

В (12) $\theta_* = const$ - однородная безразмерная температура предварительного нагрева охватывающей детали сборки составного диска.

Граничными условиями в рассматриваемом случае становятся соотношения

$$\theta_{,r}(R_0, t) = 0; \quad \xi_2 \theta_{,r}(R_2, t) = \beta \theta; \quad (13)$$

$$\theta^+(R_1, t) = \theta^-(R_1, t); \quad \xi_2 \theta_{,r}^+(R_1, t) = \xi_1 \theta_{,r}^-(R_1, t)$$

Здесь ξ_1, ξ_2 - коэффициенты теплопроводности для материалов охватываемой и охватывающей деталей сборки; $\theta^+(r, t)$ распределение температуры в охватывающей детали и $\theta^-(r, t)$ в охватываемой детали. Первое соотношение в (13) задает условие теплоизоляции вала.

Температурная задача (11)-(13) имеет аналитическое решение. Но из-за того, что в механической задаче приходится использовать численные расчеты при выполнении граничных условий в каждый рассчитываемый момент времени, удобнее и в температурной задаче воспользоваться численными расчетами. Такие расчеты не содержат в себе дополнительных трудностей и доведены до простых пользовательских программ, поэтому далее считаем, что поле температур известно (найденно) решением задачи (11)-(13).

Сразу за моментом посадки материалы сборки деформируются обратимо (упруго). При этом деформации связаны с перемещениями зависимостями: $d_r = e_r = u_{r,r}$; $d_\varphi = e_\varphi = r^{-1}u_r$. Остальные компоненты тензора деформации равны нулю. Считая сопрягаемые диски достаточно тонкими, принимаем условия плоских напряженных состояний. Соотношения (6) в таком случае переписывается в форме

$$\sigma_r = (4\mu(\lambda + \mu)u_{r,r} + 2\mu\lambda r^{-1}u_r - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1} \quad (14)$$

$$\sigma_\varphi = (4\mu(\lambda + \mu)r^{-1}u_r + 2\mu\lambda u_{r,r} - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}$$

Подстановка (14) в уравнение равновесия, следующее из (1) в рассматриваемых условиях

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad (15)$$

позволяет записать уравнение (5) в перемещениях u_r

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) = \frac{3K\alpha T_0}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (16)$$

Интегрируя (16), имеем

$$u_r^{(v)} = 1.5K\alpha T_0(\lambda + \mu)^{-1}r^{-1} \int_b^r \rho \theta(\rho) d\rho + 0.5rC_1^{(v)}(t) + r^{-1}C_2^{(v)}(t) \quad (17)$$

В (17) $v = 1$ для охватываемого кольца, $v = 2$ - для охватывающего. Для внутреннего кольца в (17) следует принять $b = R_0$, для внешнего $b = R_1$.

Коэффициенты (функции времени) интегрирования $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2$ в каждый рассчитываемый момент времени определяются выполнением граничных условий

$$\begin{aligned} u_r(R_0, t) = 0; \quad \sigma_{rr}(R_2, t) = 0; \\ u_r^{(1)}(R_1, t) = u_r^{(2)}(R_1, t), \quad \sigma_r^{(1)}(R_1, t) = \sigma_r^{(2)}(R_1, t) \end{aligned} \quad (18)$$

С ростом времени за счет перераспределения температуры по элементам сборки растут и напряжения (14). В некоторый момент времени выполняется условие пластического течения (9) в форме (расчетный факт) $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$. На рис. 2 представлено сечение призмы Ивлева плоскостью $\sigma_3 = 0$ в пространстве главных напряжений.

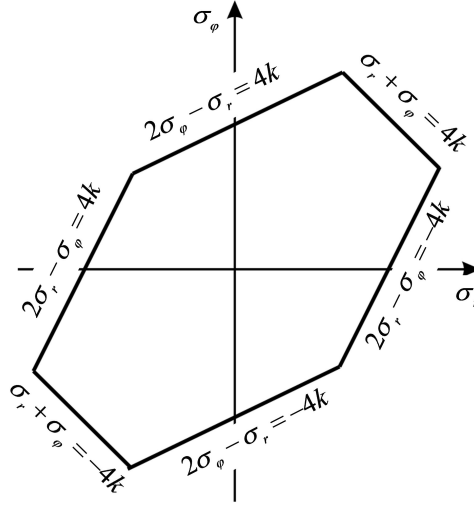


Рис. 2.

Местом первоначального выполнения условия соответствия напряжений грани (рис. 2) призмы Ивлева является поверхность $r = R_1$. Зарождающаяся упругопластическая граница $r = n_1(t)$ начинает с этого момента времени продвигаться по охватывающему диску. В увеличивающейся области пластического течения $R_1 \leq r \leq n_1(t)$ для компонент напряжения имеем в каждый момент времени зависимости учитывающие наличие необратимых деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r) + 2\mu\lambda(r^{-1}u_r - p_\varphi) - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi(r) &= (4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi) + 2\mu\lambda(u_{r,r} - p_r) - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно ассоциированному с гранью $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$ призмы Ивлева закону пластического течения получаем, что $p_\varphi = -2p_r$. Учитывая это, последние зависимости для напряжений в пластической области, возможно, переписать в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (12K\mu u_{r,r} + 6K\mu r^{-1}u_r - 4\mu k(r) - 18K\mu\theta(r))(3\lambda + 5\mu)^{-1} \\ \sigma_\varphi &= (6\mu K u_{r,r} + 3\mu K r^{-1}u_r + 2(3\lambda + 4\mu)k(r) - 9K\mu\theta(r))(3\lambda + 5\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

Если подставить (20) в уравнение равновесия (15) и проинтегрировать результат с учетом соответствия напряжений грани $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$, то получим, что в области пластического течения $R_1 \leq r \leq n_1(t)$, справедливы в любой момент времени

зависимости

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r) &= r^{-0.5}C_1 + 2r^{-0.5} \int_{R_1}^r \rho^{-0.5}k(\rho) d\rho, \sigma_\varphi(r) = 2k(r) + 0.5\sigma_r, \\
u_r(r) &= 1.5r^{-0.5} \int_{R_1}^r \rho^{0.5}\theta(\rho) d\rho - (3\lambda + 5\mu)(3\mu K)^{-1} r^{0.5} \int_{R_1}^r \rho^{-0.5}k(\rho) d\rho + \\
&+ (K + \mu)(\mu K)^{-1} r^{-0.5} \int_{R_1}^r \rho^{0.5}k(\rho) d\rho + r^{0.5}(K + \mu)(4\mu K)^{-1} C_1^{(3)} + r^{-0.5}C_2^{(3)} \\
p_r(r) &= 0.5\theta(r) + (\lambda + \mu)(3\mu K)^{-1} k(r) - \\
&- (\lambda + \mu)(2\mu K)^{-1} \left(r^{-1.5} \int_{R_1}^r \rho^{0.5}k(\rho) d\rho + r^{-0.5} \int_{R_1}^r \rho^{-0.5}k(\rho) d\rho \right) - \\
&- (\lambda + \mu)(8K\mu r^{0.5})^{-1} C_1^{(3)} - 0.5r^{-1.5}C_2^{(3)}
\end{aligned} \tag{21}$$

Постоянные интегрирования в каждый рассчитываемый момент времени необходимо определить решением системы линейных уравнений, следующей из краевых условий (18) и условий непрерывности u_r , σ_r на упругопластической границе $r = n_1(t)$. Вместе с (18) имеем в таком случае семь алгебраических уравнений для определения в любой момент времени шести постоянных $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2, C_1^3, C_2^3$ и положения линии $n_1(t)$. Эти расчеты необходимо проводить на каждом последующем шаге по времени. Более того, количество подобных постоянных (функций времени) с последующими шагами по времени будет возрастать с появлением новых областей пластического течения, соответствующих иным граням поверхности текучести (рис. 2). Эволюция областей пластического течения указана на рис. 3, где время расчетов продвигается сверху вниз. Формирование подобной схемы возникновения и исчезновения областей пластического течения подробно описано в предыдущих наших публикациях, например в [8, 10]. Здесь данный способ, практически, повторяем. На рис. 3 указаны последовательно возникающие области пластического течения с указанием их соответствия разным граням (рис.2) призмы Ивлева до полного остывания сборки. В итоговом состоянии области пластического течения отсутствуют, но присутствуют накопленные пластические деформации. Упругие итоговые деформации создают требуемый натяг в сборке. Поэтому совершенно непонятным и бессмысленным оказывается заявление авторов статьи [23]: «Решение задачи Гадолина в упругопластической постановке длительное время не представляло особого интереса, что не удивительно в виду основной ориентации этой задачи на проектирование орудийных стволов, которые, очевидно, должны быть без пластического слоя». О каком пластическом слое идет речь в цитируемом предложении. Авторы [23] не понимают операцию горячей посадки как процесс. Отсюда и допущенная бессмысленность в целом полезной научной статье.

В качестве примера дальнейшего укажем только одну последующую операцию расчетов, когда образуется вторая область течения (рис.3 в). В условиях развития первичной пластической области (рис. 3. в) напряжения в сборке продолжают своей рост. В некоторый момент времени на поверхности $r = R_1$ наряду с условием $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$ выполняется еще и соотношение $\sigma_\varphi - 2\sigma_r = 4k$. Таким образом, напряженное состояние будет соответствовать ребру призмы Ивлева (рис. 2) . Однако в [24] нами было показано, что при зависимости предела текучести от температуры пластическое течение в соответствии плоских напряжений ребру (рис. 2) Ивлева невозможно. Осуществляется переход на соседнюю грань, не задерживаясь на общем ребре, и поэтому

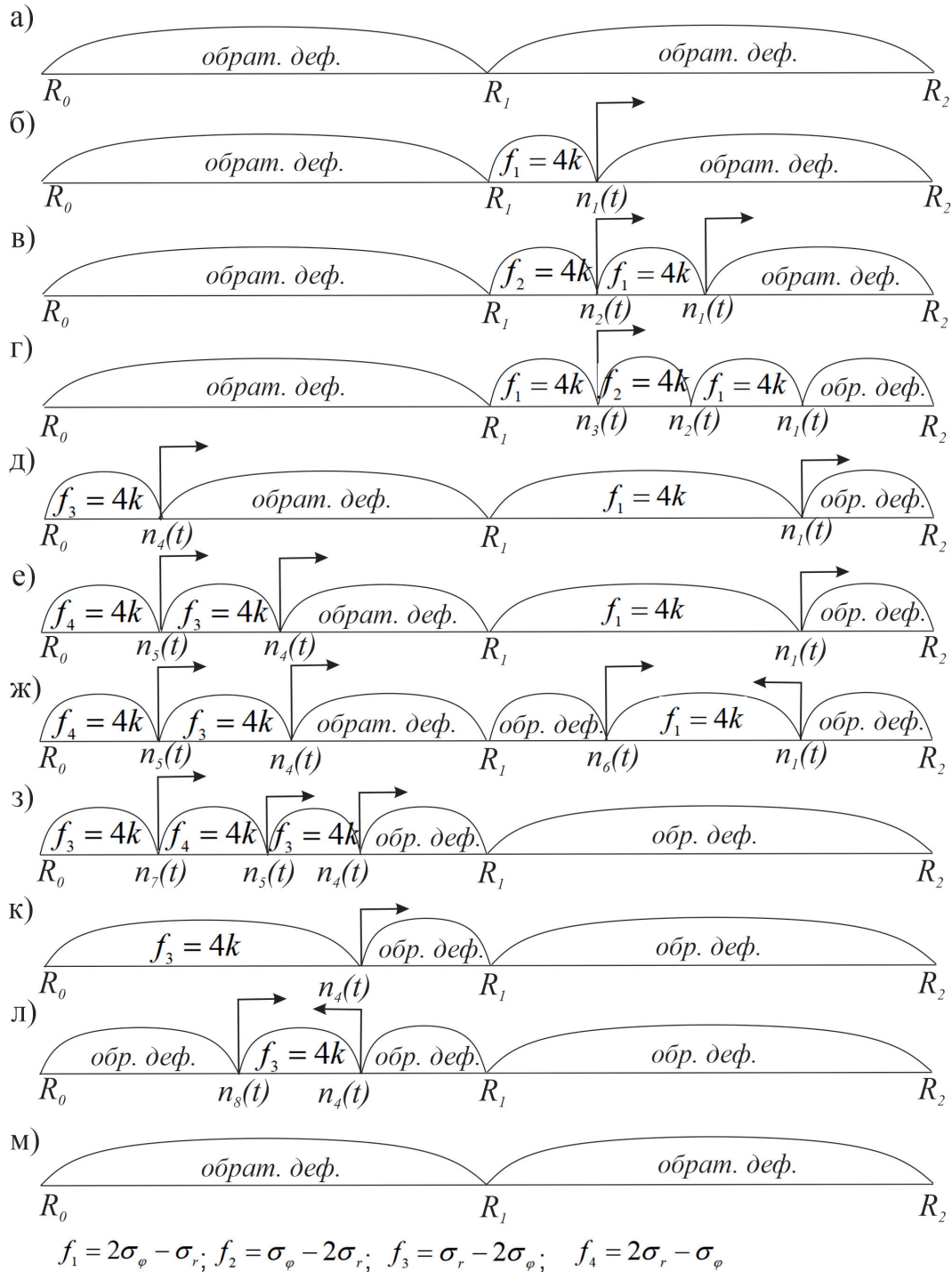


Рис. 3. Схема возникновения и исчезновения разных областей пластического течения в процессе сборки горячей посадкой

развиваемая пластическая область предстает двумя своими частями (рис. 3 в). В одной из них $n_2(t) \leq r \leq n_3(t)$ пластическое течение соответствует грани $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$, а в другой грани $\sigma_\varphi - 2\sigma_r = 4k$. Для напряжений в последней области будем иметь зависимости, справедливые в рассматриваемый момент времени

$$\begin{aligned}\sigma_r(r) &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r - p_r^0) + 2\mu\lambda(r^{-1}u_r - p_\varphi - p_\varphi^0))(\lambda + 2\mu)^{-1} - \\ &\quad - 6K\mu\theta(\lambda + 2\mu)^{-1} \\ \sigma_\varphi(r) &= (4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi - p_\varphi^0) + 2\mu\lambda(u_{r,r} - p_r - p_r^0))(\lambda + 2\mu)^{-1} - \\ &\quad - 6K\mu\theta(\lambda + 2\mu)^{-1}\end{aligned}\quad (22)$$

В (22) p_r^0, p_φ^0 - необратимые деформации, накопленные в прежней области (при $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$) пластического течения. Если $p_r = p_r(r, t)$ и $p_\varphi = p_\varphi(r, t)$, то $p_r^0 = p_r^0(r)$ и $p_\varphi^0 = p_\varphi^0(r)$. Время в последних функциональных зависимостях фиксируется моментом прихода в рассматриваемую точку деформируемого материала граничной поверхности $r = n_2(t)$, разделяющей пластическую область на части. Далее со временем p_r^0, p_φ^0 не меняются. В процессе вычислений распределения необратимых деформаций накапливаются в памяти компьютера и используются в надлежавший момент. Если точка материала участвовала в нескольких процессах течения, то в качестве p_r^0, p_φ^0 принимается итоговая пластическая деформация от всех предшествующих областей необратимого деформирования.

Подстановка (22) в уравнение равновесия (15) с учетом следствия ассоциированного с данной гранью закона пластического течения $p_\varphi = -0.5p_r$ и интегрирование следствия такой подстановки позволяет записать решение задачи для этой области в рассматриваемый момент времени

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 4r \int_{R_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho^2} d\rho + C_1^{(4)} r; \sigma_\varphi = 2\sigma_r + 4k; \\ u_r(r) &= C_1^{(4)} r^2 (K + \mu) (4K\mu)^{-1} + C_2^{(4)} r^{-2} + \\ &\quad + r^{-2} \int_{R_1}^r \rho^2 (2p_r^0(\rho) + p_\varphi^0(\rho)) d\rho + \\ &\quad + \alpha T_0 \left(\left(3r^{-2} + r^{-2} (\lambda + \mu) (K\mu)^{-1} \right) \int_{R_1}^r \rho^2 \theta(\rho) d\rho \right) \\ &\quad + \alpha T_0 \left(r^2 (K + \mu) (K\mu)^{-1} \int_{R_1}^r \rho^{-2} \theta(\rho) d\rho \right)\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}p_{rr}(r) &= (3K + \mu) r (6K\mu)^{-1} C_1^{(4)} - 2r^{-3} C_2^{(4)} - 6r^{-3} \alpha T_0 \int_{R_1}^r \rho^2 \theta(\rho) d\rho - \\ &\quad - 2r^{-3} \int_{R_1}^r \rho^2 (p_r(\rho) + 2p_\varphi(\rho)) d\rho + 2r (3K + \mu) (3K\mu)^{-1} \int_{R_1}^r \rho^{-2} k(\rho) d\rho + \\ &\quad + 8(\lambda + \mu) (3K\mu)^{-1} k(r) + 2\alpha T_0 \theta(r) + \\ &\quad + 2(\lambda + \mu) r^{-3} (\mu K)^{-1} \int_{R_1}^r \rho^2 k(\rho) d\rho + 2p_\varphi(r)\end{aligned}$$

Значение постоянных в рассматриваемый момент времени $C_1^{(4)}$ и $C_2^{(4)}$ вычисляться посредством выполнения граничных условий (18) и условий непрерывности перемещения u_r и напряжения σ_r на продвигающихся поверхностях $r = n_1(t)$ и $r = n_2(t)$. При этом в каждый рассчитываемый момент времени пересчитываются значения постоянных $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2, C_1^3, C_2^3$ и положения n_1 и n_2 продвигающихся граничных линий. Таким способом имеем восемь алгебраических уравнений для восьми неизвестных. Далее количество последних будет только расти.

Не останавливаясь на совершенно подобных дальнейших расчетах, заметим только, в каждой из последующих возникающих областей течения уравнение равновесия возможно проинтегрировать в любой момент времени и получить конечные зависимости для деформаций и напряжений от известного (найденного) распределения температуры. Данную возможность представляет использование кусочно-линейных пластических потенциалов. В рассматриваемом случае это условие максимальных приведенных напряжений [22] (условие пластичности Ишлинского - Ивлева). Условие пластического течения Треска-Сен-Венана, то есть условие максимальных касательных напряжений [22], использовалось нами в расчетах неустановившихся температурных напряжений в [8].

Для дальнейших расчетов необходимы сведения об уровне и распределении остаточных деформаций и напряжений. Для них в качестве итога расчетов согласно приведенной (рис. 3) схеме эволюции областей пластического течения следуют зависимости

$$\begin{aligned}
u_r(r) &= 0.5rC_1^{(i)}(t) + r^{-1}C_2^{(i)}(t) + \\
&+ 3K(4(\lambda + \mu)r)^{-1} \left(\int_b^r \rho (p_r^0(\rho) + p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) + \\
&+ (\lambda + 2\mu)(4(\lambda + \mu))^{-1} r \left(\int_b^r \rho^{-1} (p_r^0(\rho) - p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) \\
\sigma_r(r) &= 1.5K\mu(\lambda + \mu)^{-1} \left(\int_b^r \rho^{-1} (p_r^0(\rho) - p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) - 6\mu K\theta_0(\lambda + 2\mu)^{-1} \\
&- 1.5K\mu(\lambda + \mu)^{-1} r^{-2} \left(\int_b^r \rho (p_r^0(\rho) + p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) + \\
&+ 3\mu K(\lambda + 2\mu)^{-1} C_1^{(i)}(t) - 2\mu r^{-2} C_2^{(i)}(t) \\
\sigma_\varphi(r) &= 3\mu K(\lambda + 2\mu)^{-1} C_1^{(i)}(t) + 2\mu r^{-2} C_2^{(i)}(t) + \\
&+ 3\mu K(\lambda + \mu)^{-1} p_\varphi(r) - 6\mu K\theta_0(\lambda + 2\mu)^{-1} + \\
&+ 1.5\mu K(r(\lambda + \mu))^{-1} \left(r^{-1} \left(\int_b^r \rho (p_r^0(\rho) + p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) \right) \\
&+ 1.5\mu K(r(\lambda + \mu))^{-1} \left(r \left(\int_b^r \rho^{-1} (p_r^0(\rho) - p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) \right)
\end{aligned} \tag{24}$$

В (24) p_r^0 и p_φ^0 итоговые распределения остаточных пластических деформаций. Они снабжены индексом "ноль" с целью подчеркнуть аналогичность их расчетов с предыдущими вычислениями. Для охватываемого элемента сборки $\theta_0 = 0$ $b = R_0$, для охватывающего $\theta_0 = \theta_*$ - задаваемая температура нагрева $b = R_1$.

Характерное распределение остаточных напряжений представлено рис. 4. Конкретные численные значения остаточных напряжений получены в условиях, когда охватываемая и охватывающая детали сборки изготовлены из одного материала (Ст45). Геометрия сборки представлена на рис. 4. Термомеханические параметры материала сборки принимались равными: $a = 0.944 \cdot 10^{-6}$, $\alpha = 11.1 \cdot 10^{-6}$, $k_0 = 360.0$ МПа, $T_p = 1400^\circ C$, $E = 210.0$ ГПа, $\nu = 0.27$, температура первоначального нагрева охватывающего кольца $T_0 = 700^\circ C$.

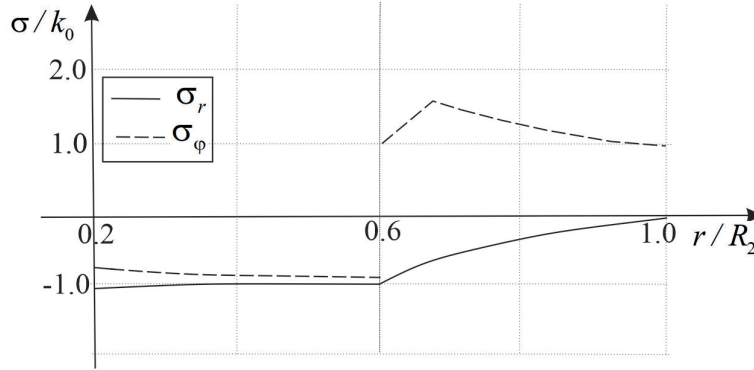


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в материале сборки

Падение напряжений при вращении Теперь считаем, что сборка (рис.1) ускоренно вращается вокруг своей оси. Считая изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$ медленным, пренебрегаем угловым ускорением. Тогда уравнение движения (1) сводится [18, 19, 25] к одному уравнению

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = -\rho r \omega^2 \quad (25)$$

Учитывая условия изотермичности процесса деформирования, задаваемого воздействием центробежных сил инерции, найдем

$$\begin{aligned} u_r(r, t) &= u_r(r) - (\lambda + 2\mu)^{-1} (32\mu)^{-1} (\lambda + \mu)^{-1} \rho \omega^2 r^4 \\ \sigma_r(r, t) &= \sigma_r(r) - (9\lambda + 8\mu)^{-1} (16)^{-1} (\lambda + \mu)^{-1} \rho \omega^2 r^3 \\ \sigma_\varphi(r, t) &= \sigma_\varphi(r) - (3\lambda + \mu)^{-1} (8)^{-1} (\lambda + \mu)^{-1} \rho \omega^2 r^3 \end{aligned} \quad (26)$$

В (26) $u_r(r)$, $\sigma_r(r)$, $\sigma_\varphi(r)$ - перемещение и напряжения, созданные в ходе операции посадки. Это зависимости (24), то есть остаточное перемещение и остаточные напряжения накопленные в материале составного диска до начала его вращения.

Зависимости (26) не являются окончательными, так как в (24) входят неизвестные постоянные в каждый рассчитываемый момент времени $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$. Для каждого элемента сборки они разные. Окончательно зависимости (26) будут решать задачу только после определения этих постоянных в текущий момент времени из граничных условий (18). Более того при высоком нагреве охватывающей детали сборки в условиях вращения составного диска в нем возможны новые области пластического течения. В проведенных расчетах, когда $T_0 = 700^\circ\text{C}$ и местом сборки диска делиться так, что $R_1 - R_0 = R_2 - R_1$, пластического течения при вращении не возникало. На рис. 5 показано распределение напряжений по диску в материале в момент обращения в ноль натяга в сборке.

Расчетное значения угловой скорости при следующем обращении в ноль натяга в сборке оказалось равной $\omega = \omega_* = 9.2 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ или $n_* = 5.95 \cdot 10^4 \text{ об/мин}$.

Следовательно сборка может использоваться в качестве диска, закрепленного на валу только при умеренном его вращении, когда угловая скорость не превысит пороговых своих значений. В случае иных термомеханических свойств материалов составного диска и иных геометрических размерах такие пороговые значения для угловой

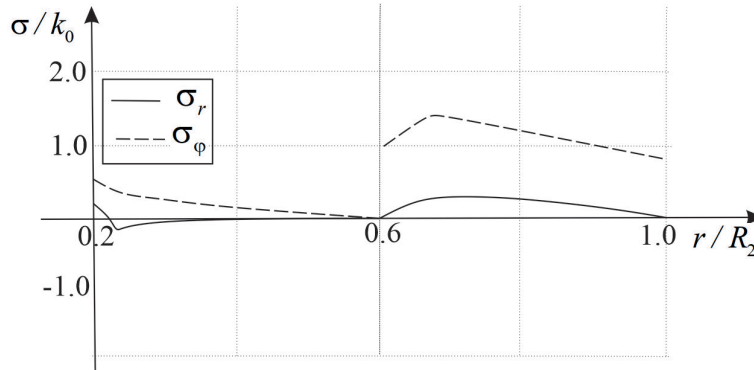


Рис. 5. Распределение напряжений в момент отрыва внешнего кольца

скорости будут иными и требуют своего перерасчета согласно приведенному алгоритму. Когда функциональной обязанностью составного диска оказывается его вращение вокруг неподвижной оси расчет падения натяга обязан быть осуществлен так, как это проведено выше.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гадолин А. В. Теория орудий, скрепленных оброчами // Артелл. журнал. 1861. № 12. С. 1033–1071.
- [2] Паркус Г. Неустоявшиеся температурные напряжения. Москва: Физматлит, 1963. 252 с.
- [3] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Москва: Мир, 1964. 512 с.
- [4] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. 1993. № 63. С. 42–50.
- [5] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // Acta Mechanica. 1994. № 103. С. 243–257.
- [6] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. 1996. no. 2(40). P. 103–112.
- [7] Дац Е. П., Петров М. Р., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборки горячей посадкой // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия механика предельного состояния. 2015. № 4(26). С. 163–179.
- [8] Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустоявшихся температурных напряжений в упругопластических телах // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. № 3(10). С. 245–259.
- [9] Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, А. В. Ткачева [и др.] // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 32–43.
- [10] Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 86–99.
- [11] Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermoelasticplastic shrink-fit assembly // Appl. Math. Modelling. 2013. № 37. С. 2352–2363.
- [12] Arstan E., Mack W. Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub // Composite Struct. 2015. № 121. С. 217–224.
- [13] Askink – fit shaft subject to torsion / A. Sackfield, J. R. Barber, D. A. Hills [и др.] // Europ. J. Meh. Sol. 2002. № 21. С. 73–84.
- [14] Effect of fitted position on stress distribution and strength of a bonded shrink fitted joint subjected to torsion / Airoshi Kawamura, Toshiyuki Sawab, Masahiro Yonenoa [и др.] // Int. J. Adhesion Adhesiveb. 2003. № 23. С. 131–140.

- [15] Gaul L., Schmidt A. Finite element simulation and experiments on a disk assembly by disc shrink fits // *Mech. Syst. and Signal Proc.* 2019. № 127. С. 412–422.
- [16] Lopes J. P., Hills D. A., Paynter R. J. H. The axisymmetric shrink fit problem subjected to axial force // *J. of Mech. Solids*. 2018. № 70. С. 172–180.
- [17] Роботнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
- [18] Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // *ZAMM*. 2020. № 3(100). С. 19–25.
- [19] Прокудин А. Н., Буренин А. А. Упругопластическое Деформирование Вращающегося Сплошного Цилиндра Из Линейно-Упрочняющегося Материала // *Прикладная Математика И Механика*. 2021. № 2(85). С. 172–192.
- [20] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
- [21] Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998. 267 с.
- [22] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [23] Бухалов В. И., Попов А. А., Целубеев Д. А. Задача Годолина в упругопластической постановке // *Прикладная Математика И Механика*. 2018. № 6(82). С. 804–812.
- [24] Буренин А. А., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений // *Механика твердого тела*. 2020. № 6. С. 40–49.
- [25] Mack W., Plochl M. Transient heating of a rotating elastic-plastic shrink fit // *Int. J. Eng. Science*. 2000. № 38. С. 921–938.

A. A. Burenin , A. V. Tkacheva

AXIAL ROTATION AS A CAUSE OF LOSS OF INTERFERENCE IN A SHRINK FITTED SPLIT DISC ASSEMBLY

Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia

Abstract. On the example of a composite disk, created by means of a hot-fit operation, the pull-off strength of such a disk is studied. Separation forces as centrifugal forces with relative rotation of its central axis. It is shown that the created interference fit in the assembly has a pronounced tendency to decrease. However, for vanishing, sufficiently significant angular velocities of rotation are required. An example of calculating the near-limit angular velocity, depending on the original covered part of the assembly, of the thermomechanical properties of the material and the geometric characteristics of the final structure is given. Such computations in decreasing interference are essential when operating conditions require the rotation of the composite disc to be accepted as part of its functionality.

Keywords: elasticity, plasticity, thermal stresses, interference fit, shrink fit, stresses in a rotating disc.

REFERENCES

- [1] Gadolin A. V. Theory of guns held together by hoops. // *Artell. magazine*. 1861. no. 12. P. 1033–1071.
- [2] Parkus G. Unstable temperature stresses. Moscow: Fizmatlit, 1963. 252 p. (in Russian).

Burenin Anatoly Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics Sci., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

Tkacheva Anastasia Valerevna, Can. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

- [3] Bolly B., Weiner J. The theory of thermal stress. Moscow: Mir, 1964. 517 p.
- [4] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft. 1993. P. 42–50.
- [5] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit. 1994. p. 243–257.
- [6] Kovacs Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* 1996. no. 40(2). P. 103–112.
- [7] Dats E. P., Petrov M. R., Tkacheva A. V. Piecewise-linear plastic potentials in thermal stress theory problems of shrink fit assemblies // *Bulletin of ChGPU im. AND I. Yakovleva Series of Limit State Mechanics.* 2015. no. 4 (26). P. 163–179.
- [8] Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. To the calculation of unstable temperature stresses in elastoplastic bodies. // *Computational Continuum Mechanics.* 2017. no. 3 (10). P. 245–259.
- [9] Thermal stresses in an elastoplastic pipe depending on the choice of the plasticity condition. / E. P. Dats, E. V. Murashkin, A. V. Tkacheva et al. // *Izv. RAS. MTT.* 2018. no. 1. P. 32–43.
- [10] Burenin A. A., Tkacheva A. V. About shrink fit a two-layer metal pipe // *Izv. RAS. MTT.* 2019. no. 3. P. 86–99.
- [11] Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermoelasticplastic shrink-fit assembly // *Appl. Math. Modelling.* 2013. no. 37. P. 2352–2363.
- [12] Arstan E., Mack W. Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub // *Composite Struct.* 2015. no. 121. P. 217–224.
- [13] Shrink-fit shaft subject to torsion / A. Sackfield, J. R. Barber, D. A. Hills et al. // *Europ. J. Mech. Sol.* 2002. no. 21. P. 73–84.
- [14] Effect of fitted position on stress distribution and strength of a bonded shrink fitted joint subjected to torsion / A. Kawamura, T. Sawab, M. Yoneno et al. // *Int. J. Adhesion Adhesive.* 2003. no. 23. P. 131–140.
- [15] Gaul L., Schmidt A. Finite element simulation and experiments on rotor dampers assembled by disc shrink fits // *Mech. Syst. and Signal Proc.* 2019. no. 127. P. 412–422.
- [16] Lopes J. P., Hills. D. A., Paynter R. J. H. The axisymmetric shrink fit problem subjected to axial force // *Intern. J. of Mech. Solids.* 2018. no. 70. P. 172–180.
- [17] Robotnov Y. N. Creep of structural elements. Moscow: Science, 1966. 752 p.
- [18] Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // *ZAMM.* 2020. no. 3(100).
- [19] Prokudin A. N., Burenin A. A. Elastoplastic Deformation of a Rotating Solid Cylinder Made of Linear Hardened Material // *Applied Mathematics and Mechanics.* 2021. no. 2 (85). p. 172–192.
- [20] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible deformations and elastic action. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p.
- [21] Godunov S. K., Romensky E. I. Elements of continuum mechanics and conservation laws. Novosibirsk: Scientific book, 1998. 267 p.
- [22] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of Plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p.
- [23] Bukhalov V. I., Popov A. A., Tselubeev D. A. Elastoplastic problem of Godolin // *Applied Mathematics and Mechanics.* 2018. no. 6 (82). P. 804–812.
- [24] Burenin A. A., Tkacheva A. V. Piecewise-linear plastic potentials as a means of calculating plane unspecified temperature stresses // *Rigid Body Mechanics.* 2020. no. 6. P. 40–49.
- [25] Mack W., Ploch M. Transient heating of a rotating elastic-plastic shrink fit // *Int. J. Eng. Science.* 2000. no. 38. P. 921–938.

В. И. Гультияев, В. Г. Зубчанинов, А. А. Алексеев, И. А. Саврасов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЛИ 45 ПО НЕКОТОРОЙ ГЛАДКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия

Аннотация. В работе представлены экспериментальные результаты деформирования тонкостенного трубчатого образца по гладкой криволинейной траектории деформирования постоянной кривизны, в которой на каждом участке изменяется знак кривизны и смещается ее центр. Экспериментальное исследование выполнено на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СН-ЭВМ в девиаторном пространстве деформаций А.А. Ильюшина (жесткое нагружение) при одновременном комбинированном действии на тонкостенный трубчатый образец растяжения-сжатия и кручения. Исследованы скалярные и векторные свойства материала статьи 45. Показано, что экспериментальные диаграммы, характеризующие скалярные и векторные свойства материала носят колебательный характер.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, экспериментальные данные, траектория деформирования, векторные и скалярные свойства материала.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.004

УДК: 539.374

© Гультияев В. И., Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Саврасов И. А., 2021

Гультияев Вадим Иванович

e-mail: vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильные дороги, основания и фундаменты, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич

e-mail: vlgzub@gmail.com, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия,

Алексеев Андрей Алексеевич

e-mail: alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия,

Саврасов Иван Александрович

e-mail: flam_47@mail.ru, аспирант кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 10.10.2021

Исследование закономерностей упругопластического деформирования и прочности материалов, их механических свойств при сложном напряженном состоянии и нагружении является важной и актуальной задачей теории пластичности. Проведение экспериментальных исследований по сложным траекториям деформирования открывают возможность оценки достоверности и границ применимости математических моделей теории пластичности. Результаты экспериментальных исследований деформирования поликристаллических металлов и сплавов при сложном нагружении и варианты моделей теории пластичности представлены в [1-18] и других работах. Особый интерес представляют криволинейные траектории деформирования, особенно с участками средней и большой кривизны, содержащие окружности [3, 6, 9, 16-18] или спирали Архимеда [3, 15].

В данной статье рассмотрена оригинальная криволинейная траектория деформирования постоянной кривизны, в которой на каждом участке изменяется знак кривизны и смещается ее центр. Экспериментальное исследование проведено на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СМ-ЭВМ имени А.А. Ильюшина, реализующем трехпараметрическое воздействие на образец (осевое растяжение-сжатие, кручение и внутреннее давление). Экспериментальные результаты представлены в векторном представлении напряжений и деформаций по А.А. Ильюшину [1-3]. Программа эксперимента реализовывалась в девиаторном пространстве деформаций $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ (жесткое или кинематическое нагружение) при совместном действии на образцы осевой силы и крутящего момента. Процесс нагружения предполагался монотонным изотермическим, а деформации – малыми.

Реализованная траектория деформирования представлена на рисунке 1, она представляет собой начинающиеся из начала координат восемь последовательных полуокружностей радиуса $R = 0,25\%$ и кривизной ± 400 . Тонкостенный трубчатый образец подвергался комбинированному растяжению по \mathcal{E}_1 от нуля до $\mathcal{E}_1^* = 4\%$ и знакопеременному кручению по \mathcal{E}_3 . Реализованная траектория деформирования по терминологии А.А.Ильюшина является гладкой [1], так как в местах перехода ее участков отсутствуют точки излома, но изменяется знак кривизны.

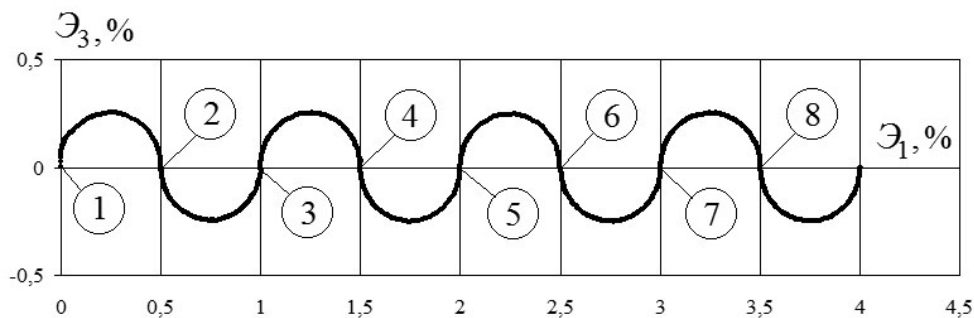


Рис. 1. Траектория деформирования на плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$

Используемый в опыте тонкостенный трубчатый образец, выполненный из стали 45 в состоянии поставки, имел толщину стенки $h = 1$ мм, радиус срединной поверхности

поперечного сечения $r = 15,5$ мм и длину рабочей части $l = 110$ мм. Начальная изотропия материала сталь 45 подтвердилась в базовых опытах при простом пропорциональном нагружении (растяжение, сжатие и кручение). При обработке результатов экспериментальных данных для определения компонент тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} использовались формулы [3]

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta r}{r}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{r\psi}{2l}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{\sigma_0}{K}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{P}{2\pi r h}, \quad \sigma_{22} = q \frac{r}{h}, \quad \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi r^2 l E}, \quad \sigma_{33} \approx 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \end{cases} \quad (2)$$

где Δl и Δr – приращения l и r ; ψ – угол поворота поперечного сечения; P – растягивающая осевая сила; q – внутреннее давление; M – крутящий момент; E – модуль продольной упругости; μ – коэффициент Пуассона; K – объемный модуль упругости. При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости ($\varepsilon_0 = 0$), достаточно точное вне упругой области, так как μ достаточно быстро стремился к значению 0,5. Координаты векторов деформаций и напряжений формоизменения определялись через компоненты тензоров по формулам

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\sigma_{11} - \sigma_0), \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12} = \sqrt{2} \sigma_{12}, \\ \Theta_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Theta_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \quad \Theta_3 = \sqrt{2} \Theta_{12} = \sqrt{2} \varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} , S_{ij} , Θ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – компоненты тензоров и тензоров-девиаторов напряжений и деформаций соответственно; $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$ – средние напряжение и деформация. Модули векторов напряжений и деформаций, равные модулям девиаторов напряжений и деформаций определялись по формулам

$$\sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{S_1^2 + S_3^2}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}} = \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_3^2}. \quad (4)$$

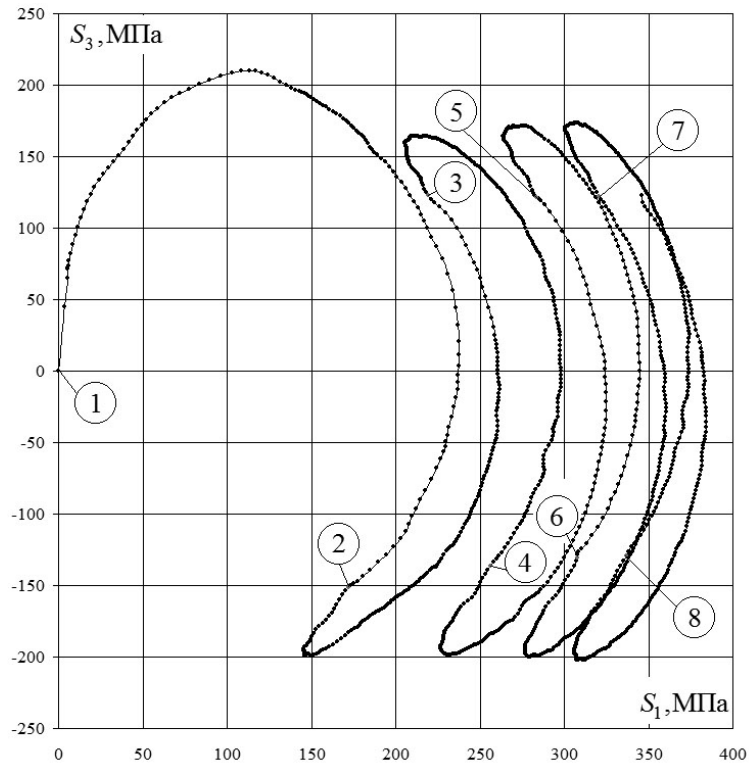
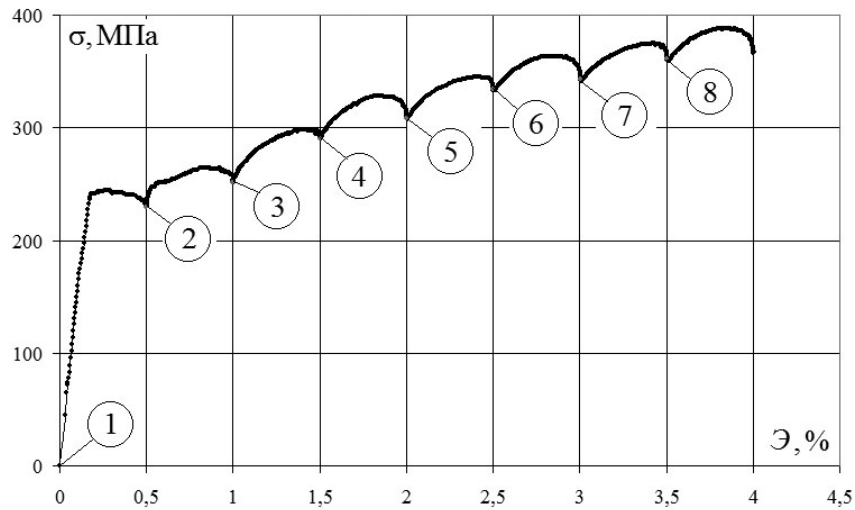
При обработке результатов экспериментальных данных для определения угла отклонения ϑ_1 вектора напряжений от касательной к траектории деформирования использовалось выражение

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma} \left(\pm S_1 \frac{(\Theta_3 - \Theta_3^0)}{R} \mp S_3 \frac{(\Theta_1 - \Theta_1^0)}{R} \right), \quad (5)$$

где Θ_1^0 , Θ_3^0 – координаты центра кривизны полуокружности.

Экспериментальные данные представлены на рисунках 2-7. На рис. 2 представлен отклик в пространстве напряжений $S_1 - S_3$. На рис. 3 представлена глобальная диаграмма деформирования $\sigma - \Theta$, а на рисунке 4 диаграмма прослеживания процесса деформирования $\sigma - s$, характеризующая векторные свойства материала, где s – длина дуги траектории деформирования. На рис. 5, 6 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия по компонентам $S_1 - \Theta_1$ и чистого сдвига по компонентам $S_3 - \Theta_3$. На рис. 7 представлена диаграмма зависимости $\vartheta_1 - s$, характеризующая векторные свойства материала. Цифрами 1-8 на рисунках обозначены точки начала соответствующих полуокружностей.

Как видно из экспериментальных результатов, графики на рисунках носят колебательный характер. На рисунках 4 и 5 дополнительно приведены данные эксперимента

Рис. 2. Отклик по напряжениям на плоскости $S_1 - S_3$.Рис. 3. Диаграмма деформирования $\sigma - \epsilon$.

при простом растяжении (красным цветом) в сравнении с реализованной сложной траекторией деформирования. Из рисунка 4 видно, что диаграмма простого растяжения

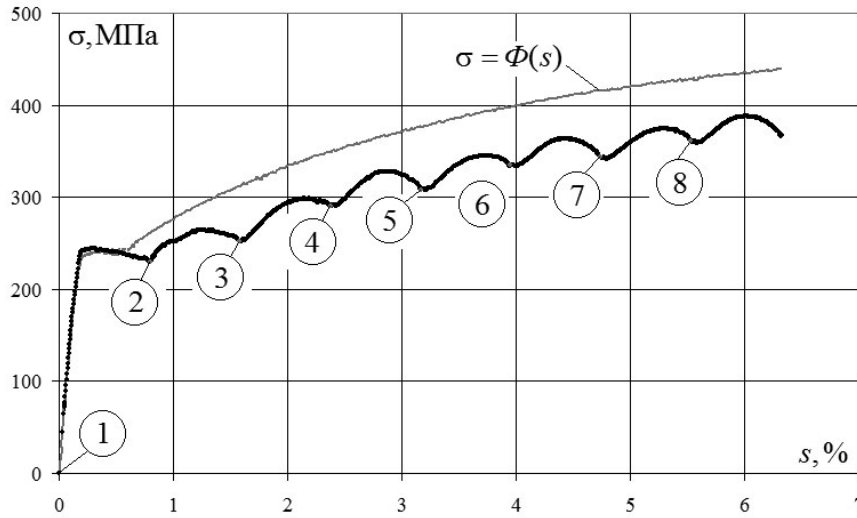


Рис. 4. Диаграмма деформирования $\sigma - s$.

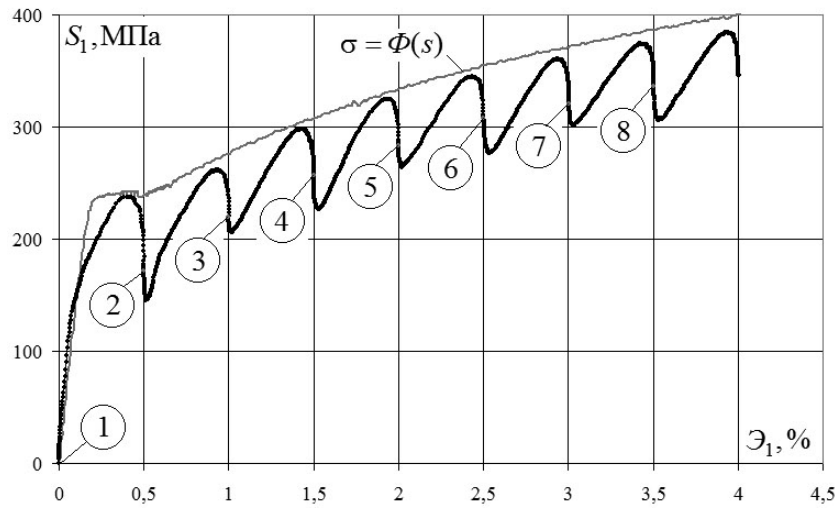
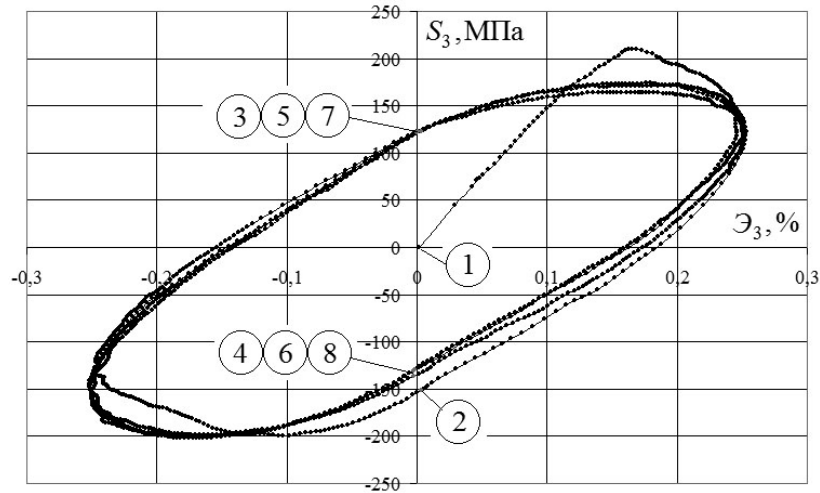
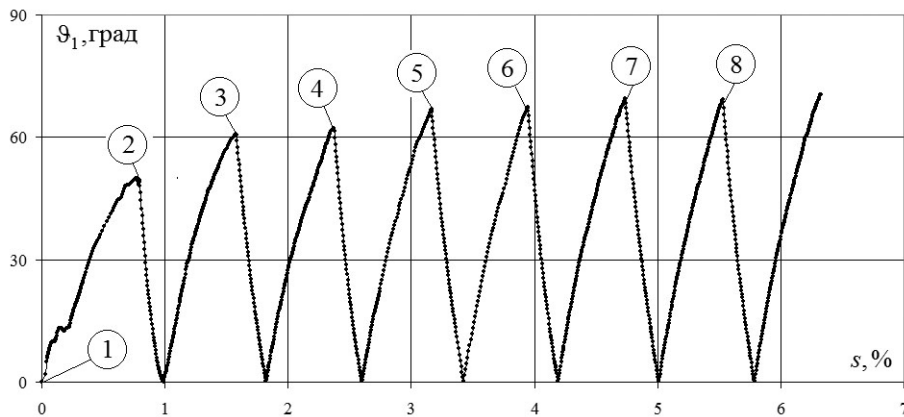


Рис. 5. Локальная диаграмма деформирования $S_1 - \epsilon_1$.

(красный цвет) располагается значительно выше диаграммы при сложном нагружении (черный цвет). Также хорошо виден колебательный характер зависимости $\sigma - s$, которая не может быть принята за универсальную зависимость $\sigma = \Phi(s)$.

Локальная диаграмма деформирования $S_1 - \epsilon_1$ (рисунок 5, черный цвет) при сравнении с диаграммой при чистом растяжении (красный цвет) расположена ниже и практически касается ее в экстремальных точках на каждой из полуокружностей. Локальная диаграмма деформирования $S_3 - \epsilon_3$ (рисунок 6) имеет вид, характерный для диаграмм знакопеременного нагружения-разгрузки.

Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования $S_3 - \varepsilon_3$.Рис. 7. Диаграмма $\vartheta_1 - s$.

Ранее было экспериментально установлено [3, 17, 18], что изменение кривизны траектории деформирования на диаграмме $\sigma - s$ дает эффект, равносильный наличию угла излома траектории с образованием “нырка напряжений”. В данном опыте наблюдается похожий эффект. Зависимости на рисунке 4 показывают, что на первой половине каждого участка (при увеличении ε_3 по модулю) значение σ увеличивается, а на второй половине (при уменьшении ε_3 до нуля) значение σ уменьшается. Таким образом, при смене знака кривизны, величина σ сначала возрастает, а затем плавно убывает, причем уменьшение величины σ по сравнению с наибольшим значением на данном участке не превышает 7 %.

Экспериментально установлено [3, 17], что при деформировании по окружным траекториям постоянной кривизны устанавливается стационарный режим деформирования с практически постоянным значением угла сближения $\vartheta_1^* \approx \text{const}$. Из рисунка

7 видно, что при смене знака кривизны стационарный режим не устанавливается, а диаграмма $\vartheta_1 - s$ носит колебательный характер. Начиная со второй полуокружности угол ϑ_1 сначала убывает до нуля, а затем начинает возрастать, причём с ростом s значение ϑ_1 увеличивается. В данном опыте было получено максимальное значение $\vartheta_1 \approx 70^\circ$. Поскольку на протяжении всего эксперимента $\vartheta_1 < 90^\circ$, то процесс деформирования по данной сложной траектории траекториям был активным (без сложной разгрузки).

Заключение. Представлены экспериментальные данные по сложному упругопластическому деформированию материала сталь 45 по криволинейной траектории деформирования постоянной кривизны, в которой на каждом участке изменяется знак кривизны и смещается ее центр. Исследованы скалярные и векторные свойства материала сталь 45. Установлено, что экспериментальные диаграммы $\sigma - s$ и $\vartheta_1 - s$ носят колебательный характер. При этом, начиная со второго участка на каждом участке величина σ сначала возрастает, а затем плавно убывает, а величина ϑ_1 сначала убывает до нуля, а затем начинает возрастать. Результаты экспериментального исследования будут полезны при аттестации и верификации существующих математических моделей теории пластичности и установления границ их применимости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильющин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1971. 310 с.
- [2] Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
- [4] Зубчанинов В. Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильющина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 29-46. DOI: 10.3103/S0027133018050011
- [5] Аннин Б. Д., Жигалкин В. М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
- [6] Митенков Ф. М., Волков И. А., Игумнов Л. А., Коротких Ю. Г. и др. Прикладная теория пластичности. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.
- [8] Васин Р. А. Экспериментальное исследование неупругого поведения материалов // Прикладная механика и техническая физика, 2016. № 5. С. 30–34. doi: 10.15372/PMTF20160504
- [9] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110-135. DOI: 10.3103/S0025654416010106
- [10] Krieg R. D. A Practical Two Surface Plasticity Theory // Journal of Applied Mechanics. Vol. 42, 1975. pp . 641-646.
- [11] Chaboche J. L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // International Journal of Plasticity. Vol. 24. No 10. 2008. pp. 1642–1693. doi: 10.1016/j.ijplas.2008.03.009
- [12] Ohashi Y., Tanaka E. Plastic Deformation Behavior of Mild Steel Along Orthogonal Trilinear Strain Trajectories in Three-Dimensional Vector Space of Strain Deviator // Journal of Engineering Materials and Technology. Vol. 103(4). 1981. pp. 287–292. doi: 10.1115/1.3225018
- [13] Babamuratov K. Sh., Abirov R. A. The new approach to the analysis of elasto-plastic deformation of solids within the bounds of theory of processes by A.A. Ilyushin // ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings. 2001. pp. 899-903.
- [14] Молодцов И. Н. Прикладные вопросы теории упругопластических процессов А. А. Ильющина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. № 5. 2020. С. 33-38
- [15] Алексеев А. А. Моделирование процесса упругопластического деформирования стали 45 по траекториям типа спирали Архимеда. Вычислительная механика сплошных сред. Т. 14(1). 2021. С. 102-109. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.1.9

- [16] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultiaev V. I. Modeling of deformation processes of structural steels along circular paths // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1425(1). 2020. P. 012186
- [17] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultiaev V. I., Alekseeva E. G. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally // Materials Physics and Mechanics. 2019. vol. 42. No 5. pp. 528-534.
- [18] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И. Влияние замены неаналитических траекторий с точками излома гладкими траекториями на сложность процессов деформирования и нагружения материалов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 2. С. 52-63. doi: 10.15593/perm.mech/2020.2.05

V. I. Gultiaev, V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, I. A. Savrasov

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF STEEL 45 ALONG SOME SMOOTH CURVILINEAR STRAIN TRAJECTORY

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The paper presents experimental results of deformation of a thin-walled tubular specimen along a smooth curvilinear strain trajectory of constant curvature, in which the sign of curvature changes at each section and its center shifts. Experimental data were obtained on the automated calculation-experimental complex SN-Computer in the deviator space of deformations A.A. Ilyushin (rigid loading) with a simultaneous combined action on the specimen of tension-compression and torsion. Scalar and vector material properties of steel 45 are investigated. It is shown that experimental diagrams characterizing scalar and vector properties of the material have oscillatory character.

Keywords: plasticity, complex loading, experimental data, strain trajectory, vector and scalar material properties.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ilyushin A. A. Continuum Mechanics. MSU Publishing House: Moscow, 1990. 310 p.
- [2] Ilyushin A. A. Plasticity Fundamentals of the general mathematical theory. Izd-vo AN USSR: Moscow, 1963. 273 p.
- [3] Zubchaninov V. G.: Mechanics of processes of plastic environments. Fizmatlit: Moscow, 2010. 352 с.
- [4] Zubchaninov V. G. The General Mathematical Theory of Plasticity and the Il'yushin Postulates of Macroscopic Definability and Isotropy // Moscow University Mechanics Bulletin. 2018. Volume 73. Issue 5. pp. 101–116. doi: 10.3103/S0027133018050011
- [5] Annin B. D., Zhigalkin V. M. Material Behavior under Conditions of Complex Loading. Izdat. SO RAN: Novosibirsk, 1999. 342 p.
- [6] Mitenkov F. M., Volkov I. A., Igumnov L. A., Kaplienko A. V., Korotkikh Yu. G., Panov V. A. Applied theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2015. 284 p.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.

Gulyaev, Vadim Ivanovich, Doctor of technical sciences, Head of Department of Automobile roads, bases and foundations, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Zubchaninov, Vladimir Georgievich, Doctor of technical sciences, Professor, Department of Strength of materials, theory of elasticity and plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,
Alekseev, Andrey Alekseevich, Ph.D. (Technical Sciences), Associate Professor, Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

Savrasov, Ivan Alexandrovich, Postgraduate Student of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia.

-
- [8] Vasin R. A. Experimental study of the inelastic behavior of materials // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016, Vol. 57. Issue 5, pp. 789–791. doi: 10.1134/S0021894416050047
- [9] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification // *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51. Issue 1. pp 91–113. doi: 10.3103/S0025654416010106
- [10] Krieg R. D. A Practical Two Surface Plasticity Theory // *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 42. 1975. pp . 641-646.
- [11] Chaboche J. L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // *International Journal of Plasticity*. Vol. 24. No 10. 2008. pp. 1642–1693. doi: 10.1016/j.ijplas.2008.03.009
- [12] Ohashi Y., Tanaka E. Plastic Deformation Behavior of Mild Steel Along Orthogonal Trilinear Strain Trajectories in Three-Dimensional Vector Space of Strain Deviator // *Journal of Engineering Materials and Technology*. Vol. 103(4). 1981. pp. 287–292. doi: 10.1115/1.3225018
- [13] Babamuratov K. Sh., Abirov R. A. The new approach to the analysis of elasto-plastic deformation of solids within the bounds of theory of processes by A.A. Ilyushin // *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings*. 2001. pp. 99-903.
- [14] Molodtsov I. N. Applied questions of Il'yushin theory of elastoplastic processes // *Moscow University Mathematics Bulletin. Ser. 1. Mat. Mekh*. 2020. No 5, pp. 33–38
- [15] Alekseev A. A. Modeling of elastoplastic deformation of steel 45 along Archimedes spiral type trajectories // *Computational Continuum Mechanics*. Vol. 14(1). 2021. pp. 102-109. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.1.9
- [16] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultiaev V. I. Modeling of deformation processes of structural steels along circular paths // *Journal of Physics: Conference Series*. 1425(1). 2020. pp. 012186
- [17] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultiaev V. I., Alekseeva E. G. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally // *Materials Physics and Mechanics*. 2019. vol. 42. № 5. pp. 528-534.
- [18] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultiaev V. I. The effect of replacing non-analytic trajectories with break points on smooth paths to the complexity of deformation and loading processes of materials // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2020. No 2. pp. 52-63. doi: 10.15593/perm.mech/2020.2.05

Б. Г. Миронов¹, Ю. Б. Миронов²

К ВОПРОСУ КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. Работа посвящена исследованию кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала, находящихся под действием переменного внешнего давления линейно меняющегося вдоль образующей стержня. Определены основные соотношения теории кручения исследуемых стержней. Найдены характеристики основных соотношений и определены соотношения вдоль характеристик. В работе получены интегралы основных соотношений при различных условиях предельного состояния стержня.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, неоднородность, кручение, деформация.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.005

УДК: 539.735

Кручение является одним из распространенных видов деформации тел. Оно довольно часто встречается в инженерной практике. Теории кручения стержней из идеального жесткопластического материала посвящены многочисленные работы, в частности кручение изотропных и анизотропных стержней изложено в [1–3]. Работы [4, 5] и [6, 7] посвящены исследованию кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала. Кручение стержней из упрочняющегося материала приводит к определенным сложностям. В этом случае, задача не является статически определимой. Возникают трудности с точной постановкой задачи. Требуется совместного рассмотрения поля напряжений и деформаций. Отдельные случаи в линеаризованной постановке рассмотрены в работе [8]. В [9] исследовано кручение стержней из анизотропного жесткопластического материала, находящегося под действием давления, меняющегося вдоль образующей.

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2021

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chsru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математика и естественные науки», Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, декан факультета «Сети и системы связи», Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 01.11.2021

Рассмотрим неоднородный цилиндрический или призматический стержень из идеального жесткопластического материала. Предположим, что образующие стержня параллельны оси z . Стержень находится под действием переменного внешнего давления линейно меняющегося вдоль образующей стержня. Предположим также, что стержень закручивается вокруг своей оси. При этом боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

Напряженное состояние в стержне характеризуется следующими значениями компонент напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu \quad (\lambda, \mu - const) \\ \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

определяется из уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \quad (2)$$

и условия пластичности

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}, x, y) = 0. \quad (3)$$

Деформированное состояние в стержне характеризуется следующими компонентами скоростей деформаций

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0 \quad (4)$$

и определяется из соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \quad (5)$$

где ε_{ij} – компоненты скоростей деформаций.

На контуре поперечного сечения стержня имеет место равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \quad (6)$$

Из (6) следует, что вектор $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ касательного напряжения на контуре поперечного сечения направлен по касательной к ней.

Дифференцируя соотношение (3) по переменной x , имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Согласно (7) из уравнения равновесия (2) получим

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}. \quad (8)$$

Из (8) следует

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} \quad (9)$$

Из соотношений (9) имеем уравнение характеристик

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} dx + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} dy = 0 \quad (10)$$

и соотношения вдоль характеристик

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right) dx = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{yz} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right) dy = 0. \quad (11)$$

Аналогично, дифференцируя соотношение (3) по переменной y и поставляя полученное в уравнение равновесия (2), имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}. \quad (12)$$

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \quad (13)$$

Из соотношений (13) следует, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{xz} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) dx = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) dy = 0. \quad (14)$$

Соотношения (10), (11) и (14), в общем случае, проинтегрированы могут быть только численно. Для некоторых случаев условия пластичности (3) можно получить интегралы этих уравнений.

(1) Рассмотрим случай, когда условие пластичности (3) не зависит от x и y :

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0. \quad (15)$$

Согласно (11) вдоль характеристик (10), в этом случае, имеют место соотношения

$$\tau_{yz} = \lambda y + c_{11}, \quad \tau_{xz} = c_{12}(y), \quad (16)$$

где $c_{11} = const$, $f(c_{12}(y), \lambda y + c_{11}) = 0$.

Уравнение характеристик (10) примет вид

$$x = \int \frac{b_{11}(y)}{a_{11}(y)} dy + c_1 \quad (17)$$

где $a_{11}(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{12}(y), \lambda y + c_{11})$, $b_{11}(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{12}(y), \lambda y + c_{11})$, $c_1 = const$

Согласно (14) вдоль характеристик (10), в этом случае, имеют место соотношения

$$\tau_{xz} = \lambda x + c_{13}, \quad \tau_{yz} = c_{14}(x), \quad (18)$$

где $c_{13} = const$, $f(\lambda x + c_{13}, c_{14}(x)) = 0$.

Уравнение характеристик (10) примет вид

$$y = \int \frac{a_{12}(x)}{b_{12}(x)} dx + c_2 \quad (19)$$

где $a_{12}(x) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(\lambda x + c_{13}, c_{14}(x))$, $b_{12}(x) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(\lambda x + c_{13}, c_{14}(x))$, $c_2 = const$

(1) В случае, когда условие текучести (3) не зависит от x

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}, y) = 0, \quad (20)$$

соотношения вдоль характеристик (10), имеют вид

$$\tau_{yz} = \lambda y + c_{21}, \quad \tau_{xz} = c_{22}(y), \quad (21)$$

где $c_{21} = const$, $f(c_{22}(y), \lambda y + c_{21}, y) = 0$.

Уравнение характеристик (10) примет вид

$$x = \int \frac{b_{21}(y)}{a_{21}(y)} dy + c_3 \quad (22)$$

где $a_{21}(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{22}(y), \lambda y + c_{21}, y)$, $b_{21}(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{22}(y), \lambda y + c_{21}, y)$, $c_3 = const$

Согласно (14) вдоль характеристик (10), в этом случае, имеют место соотношения

$$\tau_{xz} = \lambda x + c_{23}, \tau_{yz} = c_{24}(x), \quad (23)$$

где $c_{13} = const$, $f(\lambda x + c_{13}, c_{14}(x)) = 0$.

Аналогично, когда условие текучести (3) не зависит от y

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}, x) = 0, \quad (24)$$

соотношения вдоль характеристик (10), примут вид

$$\tau_{xz} = \lambda x + c_{23}, \tau_{yz} = c_{24}(x), \quad (25)$$

где $c_{23} = const$, $f(\lambda x + c_{24}, c_{24}(x), x) = 0$.

Уравнение характеристик (10) примет вид

$$y = \int \frac{a_{22}(x)}{b_{22}(x)} dx + c_4 \quad (26)$$

где $a_{22}(x) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{24}(x), \lambda x + c_{23}, x)$, $b_{22}(x) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{24}(x), \lambda x + c_{23}, x)$, $c_4 = const$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [2] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. Москва: ИЛ, 1956. 398 с.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.
- [4] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964. 156 с.
- [5] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.
- [6] Mironov V. G., Mironov Y. B. Torsion anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. p. 012009.
- [7] Mironov V. G., Mironov Y. B. Torsion of Non-Uniform Cylindrical and Prismatic Rods Made of Ideally Plastic Material under Linearized Yield Criterion // Mechanics of solids. 2020. Vol. 55. Issue 6. P. 813–819.
- [8] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. — Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.
- [9] Миронов Б. Г., Козлова Л. С. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Известия РАН. МГТ. 2014. № 3. С. 107–113.

B. G. Mironov¹, Yu. B. Mironov²

ON THE ISSUE OF TORSION OF INHOMOGENEOUS RODS UNDER THE INFLUENCE OF EXTERNAL PRESSURE

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. The work is devoted to the investigation of the torsion of inhomogeneous rods made of ideal hard-plastic material under the action of variable external pressure linearly varying along the generatrix rod. The basic relations of the theory of torsion of the investigated rods. The characteristics of the basic relations are found and relationships along characteristics. The integrals of the basic ratios under different conditions of the limiting state of the bar.

Keywords: stress, plasticity, inhomogeneity, torsion, deformation.

REFERENCES

- [1] Sokolovskij V. V. Theory of plasticity. Moscow: Higher school, 1969. 608 p. (in Russian).
- [2] Prager V., Hoge F. G. Theory of ideally plastic bodies. Moscow: IL, 1956. 398 p. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Science, 1966. 232 p. (in Russian).
- [4] Ivlev D. D. Mechanics of plastic media: in 2 vol. — V. 2. General issue. Rigid-plastic and elastic-plastic state of bodies. Strengthening. Deformation theories. Complex environment. Moscow: Fizmatlit, 2002. 448 p. (in Russian).
- [5] Olshak V., Ryhlevskiy Y., Urbanovskiy B. Theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G. On the theory of torsion of inhomogeneous rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2014. no. 4(22). P. 236–240. (in Russian).
- [7] Mironov B. G., Kozlova L. S. Torsion of prismatic rods under the action of pressure varying linearly along the generatrix // Izvestiya RAN. MTT. 2014. no. 3. P. 107–113. (in Russian).
- [8] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. p. 012009.
- [9] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion of Non-Uniform Cylindrical and Prismatic Rods Made of Ideally Plastic Material under Linearized Yield Criterion // Mechanics of solids. 2020. Vol. 55. Issue 6. P. 813–819.

Boris Gurjevich Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Yuri Borisovich Mironov, Candidate of technical Sciences, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.

А. Н. Матвеева¹, С. В. Матвеев²

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛ ПРИ ОТРЫВЕ В СЛУЧАЕ ОБЩЕЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

¹ Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

² Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Работа посвящена решению общей плоской задачи, связанной с определением предельного состояния тел при отрыве. Уравнения, определяющие условия предельного состояния принимаются функциями, зависящими от среднего давления и направлений отрыва. В результате вычислений были получены характеристические уравнения для двух случаев: при достижении предельных значений отрыва двумя главными напряжениями и при достижении предельного значения отрыва одним главным напряжением. Для двух рассмотренных случаев были получены уравнения характеристик и соотношения вдоль них.

Ключевые слова: предельное состояние, анизотропия, отрыв, уравнения характеристик

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.006

УДК: 539.374

Введение

В данной работе рассматривается общая плоская задача определения состояния тел в случае отрыва. Предельное состояние тел при отрыве, достигается в двух случаях

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 < p, \\ \sigma_3 = p, \quad \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3, \quad p = const.\end{aligned}$$

© Матвеева А. Н., Матвеев С. В., 2021

Матвеева Алёна Николаевна

e-mail: goshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович

e-mail: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.09.2021

Задачи определения статически определимого состояния тел в случае отрыва рассматривались в работах [1–3], в работах [4, 5] было получено решение для пространственной задачи определения предельного состояния при отрыве, в случае зависимости функции отрыва от направлений осей главных напряжений и среднего напряжения. Полученные в работе [4] соотношения использовались в работах [6–10], для решения ряда задач определения состояния тел с учетом сопротивления отрыву. В данной работе приводится решение задачи определения статически определимого состояния тела при отрыве в случае общей плоской задачи. Общее плоское напряжённое состояние описывается тремя семействами характеристик. При этом p – функция отрыва, характеризующая свойства материала.

1. Предельное состояние для первого условия отрыва

Для первого случая отрыва будет справедливо выражение

$$\sigma_1 = \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 < p. \quad (1)$$

Запишем выражения для компонент напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p + 3(\sigma - p)n_1^2, & \tau_{xy} &= 3(\sigma - p)n_1n_2, \\ \sigma_y &= p + 3(\sigma - p)n_2^2, & \tau_{yz} &= 3(\sigma - p)n_2n_3, \\ \sigma_z &= p + 3(\sigma - p)n_3^2, & \tau_{xz} &= 3(\sigma - p)n_1n_3, \\ \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \end{aligned} \quad (2)$$

Для направляющих косинусов третьего главного напряжения будет справедливо выражение

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

где $n_1 = \cos \alpha$, $n_2 = \cos \beta$, $n_3 = \cos \gamma$ – направляющие косинусы.

Примем

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}, \quad \sin \varphi = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma},$$

тогда

$$n_1 = \sin \gamma \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \gamma \sin \varphi, \quad n_3 = \cos \gamma. \quad (3)$$

Из (2) с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p + 3(\sigma - p)\sin^2\gamma\cos^2\varphi, & \tau_{xy} &= 3(\sigma - p)\sin^2\gamma\cos\varphi\sin\varphi, \\ \sigma_y &= p + 3(\sigma - p)\sin^2\gamma\sin^2\varphi, & \tau_{yz} &= 3(\sigma - p)\sin\gamma\cos\gamma\sin\varphi, \\ \sigma_z &= p + 3(\sigma - p)\cos^2\gamma, & \tau_{xz} &= 3(\sigma - p)\sin\gamma\cos\gamma\cos\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Функцию отрыва будем считать функцией вида

$$p = p(\sigma, \varphi, \gamma). \quad (5)$$

Примем, что компоненты напряжения (4) не зависят от координаты z и определяются значениями

$$\sigma = \sigma(x, y), \quad \gamma = \gamma(x, y), \quad \varphi = \varphi(x, y). \quad (6)$$

С учетом (6) уравнения равновесия запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Из (4) и (7) с учетом (5), (6) имеем

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial p}{\partial \sigma} + 3 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\
 & + \left[\frac{\partial p}{\partial \varphi} - 3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi - 3 (\sigma - p) \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi + 3 (\sigma - p) \sin^2 \gamma \cos 2\varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \\
 & + \left[\frac{\partial p}{\partial \gamma} - 3 \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi + 3 (\sigma - p) \sin 2\gamma \cos^2 \varphi \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi + \frac{3}{2} (\sigma - p) \sin 2\gamma \sin 2\varphi \right] \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0, \\
 & \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left[\frac{\partial p}{\partial \sigma} + 3 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi + 3 (\sigma - p) \sin^2 \gamma \cos 2\varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
 & + \left[\frac{\partial p}{\partial \varphi} - 3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi + 3 (\sigma - p) \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi + \frac{3}{2} (\sigma - p) \sin 2\gamma \sin 2\varphi \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \\
 & + \left[\frac{\partial p}{\partial \gamma} - 3 \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi + 3 (\sigma - p) \sin 2\gamma \sin^2 \varphi \right] \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0, \\
 & \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \sin 2\gamma \cos \varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \sin 2\gamma \sin \varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin 2\gamma \cos \varphi - \frac{3}{2} (\sigma - p) \sin 2\gamma \sin \varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin 2\gamma \sin \varphi + \frac{3}{2} (\sigma - p) \sin 2\gamma \cos \varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \cos \varphi + 3 (\sigma - p) \cos 2\gamma \cos \varphi \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \sin \varphi + 3 (\sigma - p) \cos 2\gamma \sin \varphi \right] \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Для определения соотношений вдоль характеристик дополним систему уравнений (8) соотношениями

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy = d\sigma, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} dx + \frac{\partial \gamma}{\partial y} dy = d\gamma. \tag{9}$$

Решение системы уравнений (8), (9) будем искать относительно компонент

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \frac{\partial \gamma}{\partial y}.$$

Будут справедливы выражения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\Delta_5}{\Delta}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\Delta_6}{\Delta}, \tag{10}$$

где Δ , Δ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ определяются по правилу Крамера. Уравнения характеристик и соотношений вдоль них определим из условий

$$\Delta = \Delta_i = 0. \tag{11}$$

Согласно (8), (9), (11), уравнения характеристик получим из кубического уравнения

$$\begin{aligned}
& (dy)^3 \left[3absin^2\gamma cos^3\varphi - \frac{\partial p}{\partial \sigma} b (\cos 2\varphi \cos 2\gamma + 2sin^2\varphi cos^2\gamma) \cos \varphi - \right. \\
& \left. - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cos^2\varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \cos^3\varphi \right] - dxdy^2 \left[9absin^2\gamma \cos^2\varphi \sin \varphi \right. \\
& \left. - \frac{\partial p}{\partial \sigma} b (\cos 2\varphi \cos 2\gamma + 2cos^2\gamma \sin^2\varphi) \sin \varphi + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cos \varphi (\cos^2\varphi - 2sin^2\varphi) + \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \cos^2\varphi \sin \varphi \right] + (dx)^2 dy \left[9absin^2\gamma \sin^2\varphi \cos \varphi \right. \\
& \left. - \frac{\partial p}{\partial \sigma} b (2cos^2\gamma \cos^2\varphi - \cos 2\varphi \cos 2\gamma) \cos \varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin \varphi (\sin^2\varphi - 2cos^2\varphi) + \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2\varphi \sin 2\gamma \cos \varphi \right] - (dx)^3 \left[3absin^2\gamma \sin^3\varphi \right. \\
& \left. - \frac{\partial p}{\partial \sigma} b \sin \varphi (\sin^2\varphi \cos 2\gamma + \sin^2\gamma \cos^2\varphi) + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2\varphi \cos \varphi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \sin^3\varphi \right] = 0, \tag{12}
\end{aligned}$$

где $a = 1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma}$, $b = \sigma - p$. Соотношения вдоль характеристик (12) определим из условия $\Delta_5 = 0$.

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 [-Ad\sigma + B(d\gamma + d\varphi)] + \left(\frac{dy}{dx} \right) [Cd\sigma - Dd\gamma - Ed\varphi] + Fd\gamma = 0, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cos \varphi + b \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)^2 \sin \varphi \right) \sin 2\gamma, \\
B &= \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \frac{\partial p}{\partial \varphi} b \sin \varphi + \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)^2 \cos \varphi + 3b^2 \frac{\partial p}{\partial \sigma} \sin^2\gamma \cos \varphi \right) \sin 2\gamma, \\
C &= \frac{3}{2} \left(-\frac{\partial p}{\partial \sigma} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin \varphi + b \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)^2 \cos \varphi \right) \sin 2\gamma, \\
D &= -\frac{9}{2} b \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2\gamma \sin 2\gamma \sin^2\varphi \cos \varphi - \frac{3}{2} b \frac{\partial p}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) \sin 2\gamma \cos \varphi + \\
&+ \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)^2 \sin \varphi \sin 2\gamma + 3b \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos 2\gamma + 9b \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2\gamma \sin^3\varphi + \\
&+ 9b^2 \frac{\partial p}{\partial \sigma} \sin^2\gamma \sin \varphi (\sin 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\gamma) - 27ab^2 \sin^4\gamma \sin^2\varphi \cos \varphi, \\
E &= \frac{3}{2} \left(-b \frac{\partial p}{\partial \sigma} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cos \varphi + \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)^2 \sin \varphi + 3b^2 \frac{\partial p}{\partial \sigma} \sin^2\gamma \sin \varphi \right) \sin 2\gamma, \\
F &= -9 \left(\frac{1}{2} b \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \sin \varphi + b \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2\varphi \cos \varphi + \right. \\
&+ b^2 \frac{\partial p}{\partial \sigma} \sin \varphi (\sin^2\varphi \cos 2\gamma + \sin^2\gamma \cos^2\varphi) + 3ab^2 \sin^2\gamma \sin^3\varphi \left. \right) \sin^2\gamma.
\end{aligned}$$

2. Предельное состояние для второго условия отрыва

Второе условие отрыва запишем в виде

$$\sigma_3 = p, \quad \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3. \tag{14}$$

Выражения для компонент напряжения примем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{3\sigma-p}{2} + \frac{3(p-\sigma)}{2} \sin^2\gamma \cos^2\varphi, & \tau_{xy} &= \frac{3(p-\sigma)}{4} \sin^2\gamma \sin 2\varphi, \\
\sigma_y &= \frac{3\sigma-p}{2} + \frac{3(p-\sigma)}{2} \sin^2\gamma \sin^2\varphi, & \tau_{yz} &= \frac{3(p-\sigma)}{4} \sin 2\gamma \sin \varphi, \\
\sigma_z &= \frac{3\sigma-p}{2} + \frac{3(p-\sigma)}{2} \cos^2\gamma, & \tau_{xz} &= \frac{3(p-\sigma)}{4} \sin 2\gamma \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{15}$$

Из (7) и (15) с учетом (5), (6) имеем

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{2} \left(3 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 1 \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 1 \right) \times \\
 & \times \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi - \right. \\
 & - \frac{3}{2} (p - \sigma) \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \left. \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left[\frac{3}{4} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi + \right. \\
 & + \frac{3}{2} (p - \sigma) \sin^2 \gamma \cos 2\varphi \left. \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi + \right. \\
 & + \frac{3}{2} (p - \sigma) \sin 2\gamma \cos^2 \varphi \left. \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \left[\frac{3}{4} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi + \right. \\
 & + \frac{3}{4} (p - \sigma) \sin 2\gamma \sin 2\varphi \left. \right] \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0, \\
 & \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 1 \right) \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \\
 & + \left[\frac{1}{2} \left(3 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 1 \right) \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\
 & + \left[\frac{3}{4} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi + \frac{3}{2} (p - \sigma) \sin^2 \gamma \cos 2\varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
 & + \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} (p - \sigma) \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \\
 & + \left[\frac{3}{4} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi + \frac{3}{4} (p - \sigma) \sin 2\varphi \sin 2\gamma \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \\
 & + \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} (p - \sigma) \sin^2 \varphi \sin 2\gamma \right] \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0, \\
 & \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 1 \right) \sin 2\gamma \cos \varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 1 \right) \sin 2\gamma \sin \varphi \right] \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\
 & + \left[\frac{3}{4} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin 2\gamma \cos \varphi - \frac{3}{4} (p - \sigma) \sin 2\gamma \sin \varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
 & + \left[\frac{3}{4} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin 2\gamma \sin \varphi + \frac{3}{4} (p - \sigma) \sin 2\gamma \cos \varphi \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \\
 & + \left[\frac{3}{2} (p - \sigma) \cos 2\gamma \cos \varphi + \frac{3}{4} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \cos \varphi \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \\
 & + \left[\frac{3}{4} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \sin \varphi + \frac{3}{2} (p - \sigma) \cos 2\gamma \sin \varphi \right] \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнения характеристик, согласно (9), (11), (16) найдем из уравнения

$$(\cos \varphi dy - \sin \varphi dx) \left\{ \bar{A}(dy)^2 + \bar{B}dx dy + \bar{C}(dx)^2 \right\} = 0, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= -\frac{1}{6} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} + 3 \right) b \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi - \frac{1}{6} b \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \\
 & - \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin \gamma \cos \gamma \cos^2 \varphi, \\
 \bar{B} &= \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cos 2\varphi + \frac{1}{6} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} + 3 \right) b \sin^2 \gamma \sin \varphi \cos \varphi, \\
 \bar{C} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin \gamma \cos \gamma \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{6} b \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) - \\
 & - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} + 3 \right) b \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi.
 \end{aligned}$$

Уравнения характеристик, согласно (11) (17) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 &= tg \varphi, \\
 \left(\frac{dy}{dx} \right)_{2,3} &= \frac{-\bar{B} \pm \sqrt{\bar{D}}}{2\bar{A}},
 \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\bar{D} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)^2 - b^2 \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)^2 - 9 \right) \sin^2 \gamma - b^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right)^2 - b \frac{\partial p}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \sin 2\gamma.$$

Соотношения вдоль характеристик (18) определим из условия .

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [-Ad\sigma + B(d\gamma + d\varphi)] + \left(\frac{dy}{dx}\right) [Cd\sigma - Dd\gamma - Ed\varphi] + Fd\gamma = 0, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{16} \sin 2\gamma \left[b \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right)^2 \sin \varphi - 2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \cos \varphi \right], \\ B &= \frac{3}{16} \sin 2\gamma \left[b^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \sin^2 \gamma \cos \varphi + 2 \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)^2 \cos \varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \sin \varphi \right], \\ C &= -\frac{3}{16} \sin 2\gamma \left[b \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right)^2 \cos \varphi - 2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \sin \varphi \right], \\ D &= -\frac{9}{8} b^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} + 3 \right) \sin^4 \gamma \sin^2 \varphi \cos \varphi - \frac{3}{8} b \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \cos 2\gamma \sin \varphi + \\ &+ \frac{9}{8} b \frac{\partial p}{\partial \varphi} (a + 2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \gamma \sin \varphi - \frac{27}{64} b \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \left[\frac{3}{8} \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi \cos \varphi + \right. \\ &+ 8a \sin^4 \gamma \sin^4 \varphi \cos \varphi - \left. \frac{4}{9} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \cos \varphi \right] - \\ &- \frac{3}{16} \sin 2\gamma \left[b^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \sin^2 \gamma \sin \varphi - 2 \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)^2 \sin \varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \cos \varphi \right], \\ E &= -\frac{3}{16} \sin 2\gamma \left[b^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \sin^2 \gamma \sin \varphi - 2 \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)^2 \sin \varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) \cos \varphi \right], \\ F &= -\frac{9}{8} b \sin^2 \gamma \sin \varphi \left[\frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin 2\varphi + b \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - 3 \right) (2 \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma - \cos 2\varphi \cos 2\gamma) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \sin^2 \varphi - 3ab \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi \right]. \end{aligned}$$

3. Обсуждение

Для первого случая отрыва из (12) при $p = const$ получим

$$(dy)^3 - 3 \operatorname{tg} \varphi (dy)^2 dx + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi dy (dx)^2 - \operatorname{tg}^3 \varphi (dx)^3 = 0, \quad (20)$$

тогда уравнение характеристик запишутся в виде

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2,3} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (21)$$

В случае $p = const$ выражение (13) может быть записано в виде

$$d\gamma (\cos \varphi dy - \sin \varphi dx) = 0. \quad (22)$$

Из уравнения характеристик для первого условия отрыва (21) при $p = const$, получим

$$y - x \operatorname{tg} \varphi = const. \quad (23)$$

Очевидно, что при $p = const$, согласно (5) будет справедливо $\varphi = const$. Анализируя выражение (22) можно получить тривиальное решение $\gamma = const$. Согласно (23), в качестве характеристических поверхностей выступают плоскости, чьи проекции на плоскость Oxy образуют прямые. Для прямых возможны два случая, в первом случае будет неизменна величина угла наклона φ первого главного напряжения σ_1 к оси Ox , во втором случае неизменным будет угол наклона третьего главного напряжения σ_3 к оси Oz . Если принять, что функция отрыва p зависит только от среднего напряжения

$p = p(\sigma)$, тогда из (12) получим $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg} \varphi$. Два других решения определяются из уравнения

$$3a \sin^2 \gamma (dy \cos \varphi - dx \sin \varphi)^2 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \left[(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \cos 2\varphi) (dy)^2 + (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos 2\gamma) (dx)^2 \right] = 0.$$

В случае, если функция отрыва не зависит от среднего напряжения и находится в зависимости от направления, $p = p(\varphi, \gamma)$, с учетом $\frac{\partial p}{\partial \sigma} = 0$ из (12) получим

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_3 = \frac{3(\sigma - p) \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial p}{\partial \varphi}}{3(\sigma - p) \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin 2\gamma - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi}.$$

Для второго случая отрыва, при $p = \operatorname{const}$ из (18) следует

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 &= \operatorname{tg} \varphi, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{2,3} &= \frac{\sin^2 \gamma \sin \varphi \cos \varphi \pm \sqrt{\sin^2 \gamma - 1}}{\sin^2 \gamma \cos^2 \varphi - 1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) при условии $\sin^2 \gamma = 1$ получим выражения для характеристических поверхностей

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{2,3} = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (25)$$

Учитывая выражение $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg} \varphi$, при $p = \operatorname{const}$ уравнение (19) запишем в виде

$$\cos \gamma d\sigma - b \sin \gamma \cos^2 \varphi d\gamma = 0. \quad (26)$$

При $\sin^2 \gamma = 1$, $\cos \gamma = 0$ из уравнения (26) следует $\gamma = \operatorname{const}$.

Заключение

В работе были определены выражения для определения предельного состояния общей плоской задачи при условии зависимости функции отрыва от среднего давления σ и направления осей напряжения. На основании полученных общих соотношений были рассмотрены частные случаи, зависимости функции отрыва только от среднего гидростатического давления: только от направления главных осей тензора напряжений и случай $p = \operatorname{const}$. Варьируя данными параметрами, можно задавать разные анизотропные свойства материала. Таким образом, в работе получены общие соотношения для статически определимых плоских задач предельного состояния при отрыве для анизотропных сред.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Наука: Москва, 1966. 232 с.
- [2] Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Р.И. Непершин [и др.]. ФИЗМАТЛИТ: Москва, 2008. 832 с.
- [3] Ивлев Д.Д., Магченко Н.М. О предельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина. 2006. С. 288–290.
- [4] Роштова А. Н. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 131–134.

- [5] On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material / A.N. Matveeva, S.V. Matveev, S.V. Tikhonov [и др.] // Journal of Physics: Conference Series. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018". 2018. с. 012037.
- [6] Матвеев С.В., Матвеева А.Н., Рыбакова Т.И. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). С. 59–65.
- [7] Матвеев С.В., Матвеева А.Н., Тихонов С.В. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). С. 95–103.
- [8] Равномерное растяжение тонкой неоднородной пластины с круговым отверстием, при условии предельного сопротивления отрыву / В.Г. Ефремов, С.В. Матвеев, А.Н. Матвеева [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). С. 95–103.
- [9] Матвеев С.В., Матвеева А.Н., Тихонов С.В. Равномерное растяжение многослойной тонкой анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1(39). С. 94–101.
- [10] Матвеев С.В., Матвеева А.Н. Двуосное растяжение тонкой пластины из упругопластического материала при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4(46). С. 182–189.

A. N. Matveeva¹, S. V. Matveev²

THE LIMITING STATE OF BODIES DURING SEPARATION IN THE CASE OF THE GENERAL PLANE PROBLEM

¹ *I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

² *I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. The work is devoted to the solution of the general plane problem related to the determination of the limiting state of bodies during separation. The equations defining the conditions for the limiting state are taken as functions that depend on the average pressure and directions of separation. As a result of calculations, the characteristic equations were determined for two cases: when the limiting values of separation by two main stresses are reached and when the limiting value of separation by one main stress is reached. For the two considered cases, equations of characteristics and relations along them were obtained.

Keywords: limiting state, anisotropy, separation, equations of characteristics.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. The theory of ideal plasticity. Science: Moscow, 1966. 232 p.
- [2] Limit state of deformable bodies and rocks / D.D. Ivlev, L.A. Maksimova, R.I. Nepershin [и др.]. FIZMATLIT: Moscow, 2008. 832 с.

Matveeva Alena Nikolaevna, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Matveev Sergey Vladimirovich, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

-
- [3] Ivlev D., Matchenko N. About breakaway limit state // Problems in the mechanics of deformable solids and rocks. Collection of articles dedicated to the 75th anniversary of E.I. Shemyakin. 2006. P. 288–290.
- [4] Roshtova A. On general separation limiting conditions for compressible anisotropic media // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2007. no. 2. P. 131–134.
- [5] On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material / A. Matveeva, S. Matveev, S. Tikhonov et al. // Journal of Physics: Conference Series. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018". 2018. p. 012037.
- [6] Matveev S.V. and Matveeva A., Rybakova T. Uniform stretching of a thin anisotropic plate weakened by an elliptical hole, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2017. no. 4 (34). P. 59–65.
- [7] Matveev S.V. and Matveeva A., Tikhonov S. Uniform stretching of a thin anisotropic plate with a circular hole, reinforced by inclusion, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2017. no. 4 (34). P. 95–103.
- [8] Uniform stretching of a thin non-uniform plate with a circular hole, subject to ultimate pull-off strength / V. Efremov, S. Matveev, A. Matveeva et al. // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2019. no. 3 (41). P. 95–103.
- [9] Matveev S., Matveeva A., Tikhonov S. Uniform stretching of a multilayer thin anisotropic plate with an elliptical hole, subject to tear resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2019. no. 1 (39). P. 94–101.
- [10] Matveev S.V., Matveeva A.N. Biaxial tension of a thin plate made of elastoplastic material under the condition of resistance to separation // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2020. № 4(46). C. 182–189.

В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин

О ПОСТАНОВКЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА ТКАНЫХ МАТЕРИАЛОВ

¹Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье обсуждаются проблемы постановка краевых задач при моделировании процессов аддитивного производства 3D материала, при учете наличия в нем дополнительных выделенных направлений (выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях, биоволокон в мышечной ткани и т.д.). Выводится общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительного выделенного направления. Определяется необходимая система независимых аргументов определяющей тензорной функции на поверхности наращивания в рассматриваемом случае. Определяется полный набор совместных рациональных инвариантов тензора напряжений и характерных директоров. Дается инвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложены постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов. Полученные дифференциальные ограничения конкретизируются для ортогональных систем координат, учитывающих геометрию процесса наращивания.

Ключевые слова: определяющая тензорная функция, псевдотензор, поверхность наращивания, тканый 3D-материал, микрополярная среда, рациональный инвариант

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.009

УДК: 539.374

Вводные замечания. Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы основаны на различных технологических

© Ковалев В. А., Мурашкин Е. В. 2021

Ковалев Владимир Александрович

e-mail: vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.02.2021

процессах обработки материалов (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение). [1]. Эти производственные процессы аддитивных технологий связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной (часто ненормальной) формы. При этом следует отметить, что рассматриваемые ростовые процессы не включают процессы так называемого объемного роста. [2, 3]: образование твердого компонента в процессе химической реакции, рост биологических тканей, костей, естественные образования фруктов [4]. В то же время процедура выбора адекватных граничных условий на поверхности наращивания является актуальной фундаментальной проблемой современной механики сплошных сред и прикладной математики. Граничные условия играют важную роль в математических моделях растущих твердых тел. Кроме того, трехмерные материалы, используемые в аддитивном производстве, а также конечные продукты, обладают микроструктурными особенностями и механическими свойствами, которые лучше всего описываются асимметричными теориями механики сплошных сред. Следовательно, для разработки математических моделей таких технологических процессов обработки 3D-материалов и изготовления 3D-изделий необходимо использовать механику роста твердого тела и формализм неравновесной термодинамики в сочетании с подходами асимметричных теорий.

Относительные тензоры естественным образом возникают в математических моделях микрополярного материала. В частности, это: вектор микровращения, тензор кривизны, вектор и тензор напряжений пар, микроинерция, пары тел. Литературный поиск показывает, что применение относительных тензоров в теориях механики сплошных сред не имеет широкого распространения, несмотря на глубокие математические исследования (алгебра, теория инвариантов и дифференцирование относительных тензоров). [5–13].

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела иногда является сложной и трудоемкой процедурой. [14, 15]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью. [16].

1. Условия на поверхности наращивания в материалах с характерными выделенными направлениями. На протяжении всей статьи будем применять описание в эйлеровых координатах. Терминология и обозначения в основном соответствуют аналогичным в работах [17–20]. Определим распространяющуюся поверхность наращивания Σ в трехмерном евклидовом пространстве неявным уравнением

$$t = \tau(x^i). \quad (1)$$

На элемент поверхности наращивания dS с вектором единичной нормали n_i действуют векторы поверхностных сил \mathbf{t} и моментов $\mathbf{m}^{[-1]}$ (см. рис. 1), выселяющихся через компоненты тензора актуальных силовых $\boldsymbol{\sigma}$ и моментных $\boldsymbol{\mu}^{[-1]}$ напряжений согласно формулам

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{m}^{[-1]} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]}. \quad (2)$$

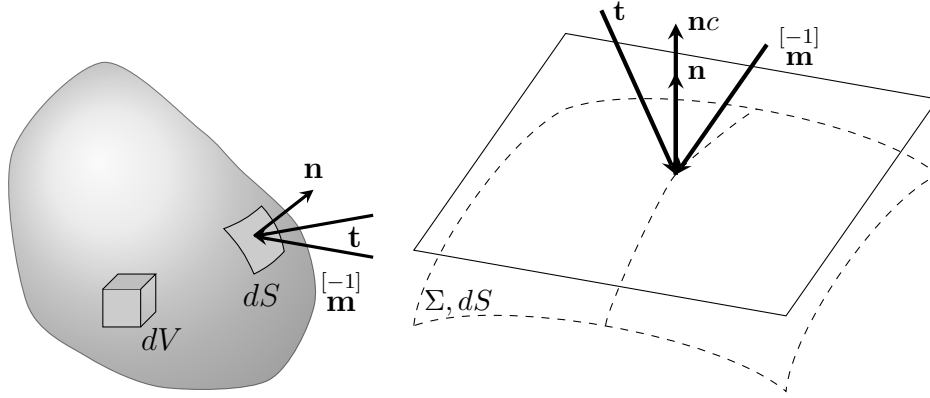


Рис. 1. Caption

Тогда единичный вектор нормали n_i на нарастающей поверхности Σ направленный в сторону ее распространения, связан с пространственным градиентом (1)

$$n_i = c \partial_i \tau, \quad c = |\nabla \tau|^{-1} \quad (t = \tau), \quad (3)$$

где c — линейная скорость распространения поверхности нарастания в нормальном направлении n_k .

Ранее в работах подробно обсуждался вывод краевых условий на поверхности нарастания (см., Например, [17–19]). Приведем здесь лишь окончательные формулы для актуальных компонент тензора силовых напряжений σ^{ij}

$$\sigma^{ij} = \int_{\tau+0}^t [\partial \sigma^{ij}(x^s, t')] dt' + S^{ji} + \sigma_*^{ij}(x^s), \quad (4)$$

$$S^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial \sigma^{ij}(x^s, t')] dt', \quad (5)$$

$$c[\nabla_j \sigma_*^{ji}(x^s) + \nabla_j S^{ji} + X_*^i(x^s)] - n_j \partial \sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0). \quad (6)$$

и для компонент тензора моментных напряжений

$${}^{[-1]} \mu_{.k}^i = \int_{\tau+0}^t [\partial {}^{[-1]} \mu_{.k}^i(x^s, t')] dt' + \mathcal{M}_{.k}^i + {}^{[-1]} \mu_{.k}^i(x^s), \quad (7)$$

$$\mathcal{M}_{.k}^i = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial {}^{[-1]} \mu_{.k}^i(x^s, t')] dt', \quad (8)$$

$$c[\nabla_i {}^{[-1]} \mu_{.k}^i(x^s) + \nabla_i \mathcal{M}_{.k}^i - 2 {}^{[-1]} \tau_k + {}^{[-1]} Y_k] - n_i \partial {}^{[-1]} \mu_{.k}^i(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0). \quad (9)$$

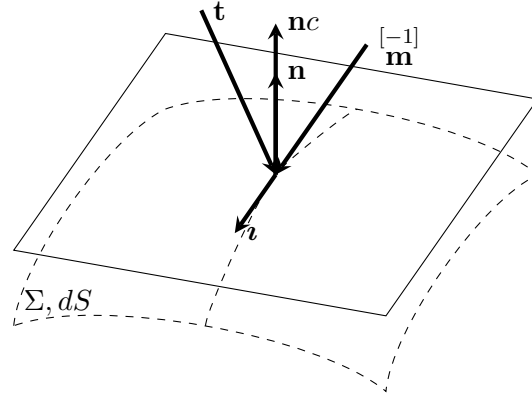


Рис. 2. Геометрическая визуализация векторов действующих на плоский касательный элемент T к поверхности наращивания Σ .

В приведенных выше уравнениях (4)–(9) введены следующие обозначения: \mathcal{S}^{ji} — интеграл, связанный со скачком напряжений, $\sigma_*^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ — компоненты тензора напряжений, соответственно, вычисленные в момент $t = \tau(x^s) - 0$ прямо перед включением элемента в основное твердое тело, $X_*^i(x^s) = X^i(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$. Момент $t = \tau(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к поверхности наращивания, $\mathcal{M}_{*k}^{[-1]i}$ — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений, $\mu_*^{[-1]i.k}(x^s) = \mu_*^{[-1]i.k}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время $t = \tau(x^s) - 0$.

2. Тензорные функции связи актуальных силовых и моментных напряжений с напряжениями в наращиваемом элементе с учетом выделенного направления. В процессах производства тканых материалов можно выделить характерные направления на поверхности наращивания. Обозначим направляющий вектор такого направления \mathbf{t} (см. рис. 2), где черный круг означает момент создания наращиваемого элемента. В этом случае тензорные функции связи силовых σ_*^{ij} и моментных напряжений $\mu_*^{[-1]i.k}$ с актуальными напряжениями и моментами на поверхности наращивания можно принять в форме

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma_*^{ij}, \mu_*^{[-1]i.j}, n_j, \nu_j, \dots), \quad \mu_*^{[-1]i.k} = \mathfrak{Z}_{*j}^{[-1]i.k}(\sigma_*^{ij}, \mu_*^{[-1]i.j}, n_j, \nu_j, \dots), \quad (10)$$

и если возможно обратно

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{K}^{ij}(\sigma_*^{ij}, \mu_*^{[-1]i.k}, n_j, \nu_j, \dots), \quad \mu_*^{[-1]i.k} = \mathfrak{M}_j^{[-1]i.k}(\sigma_*^{ij}, \mu_*^{[-1]i.j}, n_j, \nu_j, \dots), \quad (11)$$

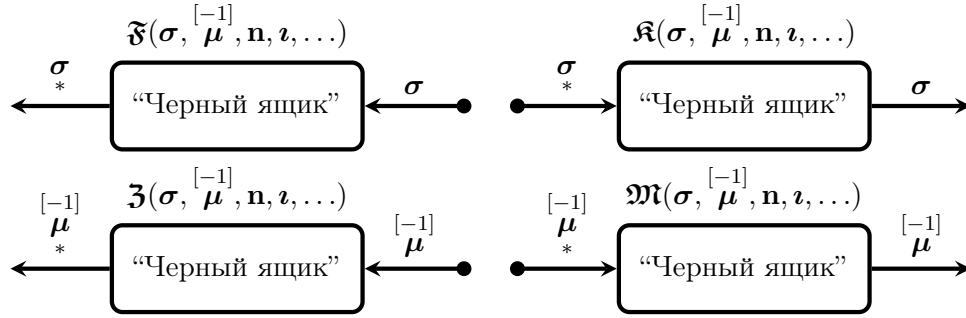


Рис. 3. Идея физического принципа “Черного ящика” в механике наращиваемых тел.

Соотношения (10) и (11) необходимо уточнить путем экспериментального определения функций \mathfrak{F}_{ij} , $\mathfrak{Z}_k^{i.}$, \mathfrak{K}_{ij} и $\mathfrak{M}_k^{i.}$. Схематически процесс определения необходимых параметров процесса наращивания изображен на рис. 3. В этом случае под “черным ящиком” понимаются возможные изменения параметров напряженно деформированного состояния материала во временном промежутке от момента создания наращиваемого элемента до момента его присоединения к основному телу, т.е. во временном интервале $\tau - 0 \leq t \leq \tau + 0$. “Черный ящик” может быть связан с различными физическими явлениями.

В частности, тензорные функции \mathfrak{F}_{ij} , $\mathfrak{Z}_k^{i.}$, \mathfrak{K}_{ij} и $\mathfrak{M}_k^{i.}$ при производстве тканых материалов могут зависеть от подвижных выделенных направлений, связанных с распространяющейся поверхностью наращивания. Физический смысл дополнительных направляющих может быть связан с характерными направлениями укладки волокон в тканых композитных материалах, направлениях армирования более жесткими волокнами, направлениями наматывания нитей в бобину и т. д. Важное ограничение, накладываемое на тензорные функции \mathfrak{F}_{ij} , $\mathfrak{Z}_k^{i.}$, \mathfrak{K}_{ij} и $\mathfrak{M}_k^{i.}$, которое следует принять — является инвариантность их аргументов относительно поворотов подвижной системы координат вокруг единичного вектора нормали n_j к поверхности наращивания. В этом случае необходимо выбрать систему совместных инвариантов тензорных σ^{ij} , $\mu_j^{[-1].}$ и векторных n_j, v_j величин, удовлетворяющих условию ротационной инвариантности относительно вектора n_j .

3. Способы построения систем совместных алгебраических относительных инвариантов тензора второго ранга и вектора. Как видно из обсуждения в предыдущем разделе, для дальнейшей конкретизации определяющих тензорных функций на поверхности наращивания необходимо определить систему совместных инвариантов тензорных σ^{ij} , $\mu_j^{[-1].}$ и векторных n_j, v_j . В дальнейшем разумно учесть, что единичный вектор нормали n_i и касательный к поверхности наращивания вектор v_j определяют ее локальную. Введем специальную ортонормированную систему координат, с базисными векторами: единичным вектором нормали n_i касательным

вектором ν_j и вектором в касательной плоскости к поверхности наращивания, который можно определить через векторы n_i и ν_j согласно правилу

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu}. \quad (12)$$

В этом случае система трех взаимно-ортогональных векторов \mathbf{n} , $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\tau}$ будет правоориентированной.

Алгоритм построения систем совместных рациональных инвариантов подробно рассмотрены в монографии [8]. Следуя методологии, изложенной в [8], для рассматриваемого здесь случая получим рациональную систему алгебраических рациональных инвариантов тензора силовых напряжений σ^{ij} и векторов n_k и ν_i

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp, \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp, \quad \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp. \end{aligned} \quad (13)$$

тогда для псевдоаффинора моментных напряжений $\mu_{.k}^{[-1]i}$ и векторов n_k и ν_i записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{[-1]} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{m}_2^{[-2]} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]} \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{m}^{[-1]} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{m}_\perp^{[-1]} \cdot \mathbf{m}_\perp, \\ \mathbf{m}^{[-1]} \cdot \mathbf{m}_2^{[-2]}, \quad \mathbf{m}_\perp^{[-1]} \cdot \mathbf{m}_\perp^{[-2]}, \quad \mathbf{m}_2^{[-2]} \cdot \mathbf{m}_2^{[-2]}, \quad \mathbf{m}_\perp^{[-2]} \cdot \mathbf{m}_\perp^{[-2]}. \end{aligned} \quad (14)$$

Совместные инварианты тензоров σ^{ij} и $\mu_{.k}^{[-1]i}$ определяются согласно

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}^{[-1]}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp^{[-1]}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}_2^{[-2]}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp^{[-2]}, \\ \mathbf{m}^{[-1]} \cdot \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{m}_\perp^{[-1]} \cdot \mathbf{t}_\perp, \quad \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_2^{[-2]}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp^{[-2]}. \end{aligned} \quad (15)$$

При построении системы совместных инвариантов (13)–(15) векторы \mathbf{t}_\perp , $\mathbf{m}_\perp^{[-1]}$, \mathbf{t}_\perp и $\mathbf{m}_\perp^{[-2]}$ есть проекции векторов \mathbf{t} , $\mathbf{m}^{[-1]}$, \mathbf{t}_2 и $\mathbf{m}_2^{[-2]}$, соответственно, в касательную плоскость к поверхности наращивания.

Очевидно, что система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов, представленная уравнениями (13)–(15) является полной. Вместе с этим совместные инварианты, входящие в нее, не являются независимыми и частично могут быть исключены из рассмотрения с помощью рациональных сизигий. Более того, совместные алгебраические рациональные инварианты высоких порядков, включающие кубы и биквадраты тензора силовых и псевдотензора моментных напряжений следует исключить в силу теоремы Гамильтона–Кэли [8].

Таким образом, неприводимая полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора силовых напряжений σ^{ij} , псевдотензора моментных напряжений $\mu_{.k}^{[-1]i}$ и векторов n_k и ν_i может быть принята в виде

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{m}^{[-1]} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{m}^{[-1]} \cdot \mathbf{m}^{[-1]}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}^{[-1]}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp^{[-1]}. \quad (16)$$

Отметим еще раз, что система инвариантов (16) не чувствительна к вращениям локальной ортогональной системы координат с базисными ортами n_i , ν_i , τ_i вокруг единичного орта n_i .

4. Определяющие тензорные функции в специфической ортогональной системе координат. Рассмотрим инвариантно–геометрическую интерпретацию случая в специальной ортогональной системе координат с оортами n_i, v_i, τ_i . Пусть на поверхности наращивания известны поверхностные усилия \mathbf{t} и моменты ${}^{[-1]}\mathbf{m}$. В этом случае, определяющие тензорные функции (10) на поверхности наращивания в терминах полной системы совместных инвариантов (16) для сужения на двумерный плоский касательный элемент T тензора $\mathbf{\tau}^*$, примет вид

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp). \quad (17)$$

$$\mu_*^{[-1]i} = \mathfrak{Z}_j^{[-1]i}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp). \quad (18)$$

Для проекций векторов \mathbf{t}_\perp и ${}^{[-1]}\mathbf{m}_\perp$ в касательной плоскости T к поверхности наращивания следует

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}_\perp|^2 &= |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{t}_\perp \cdot \boldsymbol{\tau}|^2, \\ |{}^{[-1]}\mathbf{m}_\perp|^2 &= |{}^{[-1]}\mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{v}|^2 + |{}^{[-1]}\mathbf{m}_\perp \cdot \boldsymbol{\tau}|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Квадраты совместных инвариантов и длины векторов (16) и длины проекций (19) легко вычисляются через актуальные значения \mathbf{t} и ${}^{[-1]}\mathbf{m}$ на поверхности наращивания, т.е. через актуальные компоненты силовых и моментных напряжений, согласно формулам

$$\begin{aligned} |\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}| &= |\sigma_{33}|, & |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{v}|^2 &= \sigma_{31}^2, & |\mathbf{t}_\perp \cdot \boldsymbol{\tau}|^2 &= \sigma_{32}^2, \\ |{}^{[-1]}\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}| &= |\mu_{33}|, & |{}^{[-1]}\mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{v}|^2 &= \mu_{31}^2, & |{}^{[-1]}\mathbf{m}_\perp \cdot \boldsymbol{\tau}|^2 &= \mu_{32}^2, \\ |\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}| &= |\sigma_{3s}\sigma_{s3}| = |\sigma_{31}\sigma_{13} + \sigma_{32}\sigma_{23} + \sigma_{33}^2|, \\ |{}^{[-1]}\mathbf{m} \cdot {}^{[-1]}\mathbf{m}| &= |\mu_{3s}\mu_{s3}| = |\mu_{31}\mu_{13} + \mu_{32}\mu_{23} + \mu_{33}^2|. \end{aligned} \quad (20)$$

Определяющие тензорные функции (17) и (18) на поверхности наращивания с учетом выражений (20) и приняв следующие обозначения для инвариантов,

$$\begin{aligned} I &= |\sigma_{33}|, & II &= \sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2, & III &= |\sigma_{31}\sigma_{13} + \sigma_{32}\sigma_{23} + \sigma_{33}^2|, \\ IV &= |\mu_{33}|, & V &= \mu_{31}^2 + \mu_{32}^2, & VI &= |\mu_{31}\mu_{13} + \mu_{32}\mu_{23} + \mu_{33}^2|, \\ VII &= |\sigma_{33}\mu_{33}|. \end{aligned} \quad (21)$$

можно выписать в форме

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{F}^{ij} (I, II, III, IV, V, VI, VII). \quad (22)$$

$$\mu_*^{[-1]i} = \mathfrak{Z}_j^{[-1]i} (I, II, III, IV, V, VI, VII). \quad (23)$$

Граничные условия в форме дифференциальных ограничений на поверхности наращивания (6), (9) обладают необходимыми свойствами чувствительности к геометрии поверхности наращивания и характерным направлениям выкладки материала в процессах намотки нитей или производстве тканых композитов.

5. Заключение. В статье обсуждаются проблемы постановки граничных условий и конкретизации определяющих соотношений при моделировании процессов аддитивного производства 3D материала, при учете наличия в нем дополнительных выделенных направлений (выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях, биоволокон в мышечной ткани и т.д.). Приведена общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительного выделенного направления. Определена необходимая система независимых аргументов определяющей тензорной функции на поверхности наращивания в указанном случае. Определен полный набор совместных рациональных инвариантов тензора силовых и моментных напряжений и характерных директоров. Дана инвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложены постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов. Полученные дифференциальные ограничения конкретизируются для специальных ортогональных систем координат, учитывающих геометрию процесса наращивания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business Horizons*. 2012. Vol. 55. P. 155–162.
- [2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // *International Journal of Plasticity*. 2000. Vol. 16. P. 951–978.
- [3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009. p. 731–741.
- [4] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York: Springer, 2017. xxii + 646 p.
- [5] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377.
- [6] Veblen O. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.
- [7] Levi-Civita T. *The absolute differential calculus (calculus of tensors)*. London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 p.
- [8] Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.
- [9] Einstein A. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 p.
- [10] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 p.
- [11] Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
- [12] Synge J. L. S. A. *Tensor calculus*. New York: Courier Corporation, 1978. Vol. 5. 334 p.
- [13] Das A. J. *Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 p.
- [14] Southwell R. V. *An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists*. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [15] Kovalev V. A. R. Y. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. Vol. 14. P. 199–209.
- [16] Arutyunyan N. K., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. Vol. 48. P. 1–10.
- [17] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 2019. Vol. 23. P. 646–656.
- [18] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. № 3(41). С. 11–29.
- [19] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164.

- [20] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). С. 114–121.

V. A. Kovalev¹, E. V. Murashkin²

ON THE STATEMENTS OF BOUNDARY CONDITIONS IN MODELS OF THE WOVEN MATERIALS PRODUCTION

¹*Moscow City University of Management, Moscow, Russia*

²*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The article discusses the problem of boundary value problems in models of the additive production processes of a 3D material, taking into account the presence of additional selected directions in it (laying out fibers in woven materials, reinforcement in concrete structures, biofibers in muscle tissue, etc.). The general form of the tensor relation on the growing surface is shown, taking into account the additional selected direction. The necessary system of independent arguments of the constitutive tensor function on the growing surface in the considered case is determined. A complete set of joint rational invariants of the stress tensor and characteristic directors is determined. An invariant-complete formulation of the constitutive relations on the growing surface is given. The formulation of boundary value problems that simulate the processes of synthesis of woven 3D materials are proposed. The resulting differential constraints are specified for orthogonal coordinate systems taking account of the geometry of the growing process.

Keywords: pseudotensor, growing surface, 3D woven material, micropolar medium, rational invariant

REFERENCES

- [1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. Т. 55. С. 155–162.
- [2] Epstein M. Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. Т. 16. С. 951–978.
- [3] A. Maugin G. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. с. 731–741.
- [4] A. Goriely. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
- [5] Veblen O. Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Т. 26. С. 373–377.
- [6] O. Veblen. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.
- [7] T. Levi-Civita. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 c.
- [8] B. Gurevich G. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.
- [9] A. Einstein. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 c.
- [10] A. Schouten J. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 c.

Kovalev Vladimir Alexandrovich

e-mail: vlad_koval@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

-
- [11] S. Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 c.
- [12] Synge J. L. Schild A. *Tensor calculus*. New York: Courier Corporation, 1978. Т. 5. 334 с.
- [13] J. Das A. *Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 с.
- [14] V. Southwell R. *An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists*. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [15] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. Т. 14. С. 199–209.
- [16] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. Т. 48. С. 1–10.
- [17] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // *Mechanics of Solids*. 2019. Т. 54. С. 1157–1164.
- [18] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 2019. Т. 23. С. 646–656.
- [19] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a class of constitutive equations on propagating growing surface // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2019. С. 11–29.
- [20] В. Мурашкин Е. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2021. С. 114–121.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ОБОБЩЕННАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА СТОКСА ДЛЯ КОВАРИАНТНОГО ПСЕВДОТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Ориентируемые континуумы играют важную роль в микрополярной теории упругости, все реализации которой возможны только в рамках псевдотензорного формализма и представления об ориентируемом многообразии. Особенно это касается теории микрополярных гемитропных упругих сред. В настоящей работе рассматриваются различные формулировки интегральной теоремы Стокса для асимметричного ковариантного псевдотензорного поля, заданного веса. Тем самым достигается распространение известной интегральной формулы Стокса на случай псевдотензоров. Последнее обстоятельство позволяет использовать, указанное обобщение для микрополярных континуумов. Исследование существенно опирается на класс специальных координатных систем.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, микрополярный гемитропный континуум, M -ячейка, репер, теорема Стокса

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.010

УДК: 539.374

1. Введение. Теоремы преобразования объемных интегралов в поверхностные (теоремы: Стокса, Грина, Остроградского–Гаусса) играют чрезвычайно важную роль в механике сплошных сред. Особенно при вариационных формулировках законов сохранения и выводе уравнений баланса термодинамических переменных. Другим важным объектом современной геометрии, широко используемым в механике континуума, является понятие ориентируемого многообразия [1–3], естественным образом появляющееся в теории микрополярной упругости [4–6]. При формулировке интегральных

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2021

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.08.2021

теорем и законов сохранения особое внимание следует уделять согласованию ориентаций реперных направлений элементарных ячеек внутри континуума и на его границе. Все базовые понятия, связанные с измерениями тензорного объема ячейки, требуют привлечения аппарата псевдотензорного исчисления и фундаментального понятия об ориентируемых многообразиях [1–3, 7–9].

В ходе изложения вопросов связанных с многомерной геометрией, будем следовать терминологии и идеям [3]. Минимальные сведения о тензорных элементах объема и площади можно найти в [1, см. приложение Дж. Л. Эриксона] и [3]. Вопросы применения алгебры псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости обсуждались в работах [5–7, 10–13].

В представленной работе рассмотрим различные формулировки интегральной теоремы Стокса для асимметричного ковариантного псевдотензорного поля, заданного целого веса. Тем самым достигается распространение известной интегральной формулы Стокса на случай псевдотензоров. Последнее обстоятельство позволяет использовать, указанное обобщение для микрополярных континуумов. Исследование существенно опирается на класс специальных координатных систем, характеризующихся условием $e^2 = 1$ ^[2], где e — фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр.

2. Ориентация M -многообразия. Псевдотензоры целого веса. Тензорный и псевдотензорный элементы объема. В данной работе мы не будем воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Подробное изложение алгебры псевдотензоров можно найти в руководствах по тензорному анализу [2, 3, 9] и в статьях [5, 10]. В дальнейшем изложении сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях.

В N -мерном “плоском” пространстве выберем криволинейную систему координат x^k ($k = 1, 2, \dots, N$). Будем называть M -многообразием — многообразие (поверхность) математической размерности M ($M \leq N$), погруженное в указанное внешнее пространство. Рассмотрим два репера с различными угловыми точками x^k и \bar{x}^k и концевыми точками $x^k + \underset{c}{dx}^k$ и $\bar{x}^k + \underset{c}{d\bar{x}}^k$. Тогда внешние координаты векторов первого и второго реперов будут $\underset{c}{dx}^k$ и $\underset{c}{d\bar{x}}^k$ соответственно. Ориентируемые многообразия имеют исключительное значение в микрополярных теориях механики континуума [4]. Ясно, что ориентация репера в точке микрополярного тела задается нумерацией реперных направлений. При перестановке двух номеров реперных направлений ориентация всего репера изменяется на противоположную, т.е. правоориентированный репер становится левоориентированным. В механике континуума ориентацию *базисного* репера удобно задавать фундаментальным ориентирующим скаляром e [5, 10]. В трехмерном пространстве e определяется смешанным произведением базисных векторов

$$e = \overset{[+1]}{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \times \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1}. \quad (1)$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (1) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда построенного на векторах $\underset{a}{\mathbf{1}}$. Нетрудно показать, что

$$e^2 = g. \quad (2)$$

Ясно, что $e > 0$ для правоориентированной координатной системы, $e < 0$ для левоориентированной координатной системы.

Отметим, что фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр позволяет легко преобразовывать псевдотензоры произвольного веса W в абсолютные тензоры. Введем тензор \mathbf{T} согласно

$$\mathbf{T} = e^{-W} \mathbf{T}^{[W]}. \quad (3)$$

Сравнивая веса, приходим к заключению о том, что \mathbf{T} является абсолютным тензором. В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как ϵ и e , указание на их вес будем опускать.

Ковариантная производная относительного тензора $T_{ij\dots k}^{lm\dots n}$ веса W вычисляется по аналогии с соответствующей операцией для обычных тензоров [2, 3, 9, 10]:

$$\begin{aligned} \nabla_p T_{ij\dots k}^{lm\dots n} &= \partial_p T_{ij\dots k}^{lm\dots n} + T_{ij\dots k}^{sm\dots n} \Gamma_{sp}^l + \dots + T_{ij\dots k}^{lm\dots s} \Gamma_{ip}^s - \\ &- \Gamma_{sp}^l T_{sj\dots k}^{lm\dots n} - \dots - \Gamma_{sp}^l T_{ij\dots s}^{lm\dots n} - W T_{ij\dots k}^{lm\dots n} \Gamma_{sp}^s. \end{aligned} \quad (4)$$

В частности для псевдоскаляра ковариантная производная примет вид

$$\nabla_p T = \partial_p T - W T \Gamma_{sp}^s, \quad (5)$$

где

$$\Gamma_{sp}^s = \frac{\partial_p e}{e}.$$

Учитывая свойства символов Кристоффеля Γ_{sp}^s и соотношение (2) получим выражение для ковариантной производной (5)

$$\nabla_p T = \partial_p T - e^{-1} W T \partial_p e. \quad (6)$$

Пусть, рассматриваемое дифференцируемое M -многообразие, можно задать его Гауссовой (intrinsic) параметризацией u^α ($\alpha = 1, 2, \dots, M$)

$$x^k = x^k(u^1, u^2, \dots, u^M). \quad (7)$$

В формуле (7) x^k являются внешними координатами для M -многообразия, а u^α — внутренними.

Разобьем M -многообразие на систему M -ячеек (M -cell). Каждая M -ячейка задается угловым репером, который характеризуется угловой вершиной (с внешними координатами x^k и внутренними координатами u^α) и концевыми точками репера, имеющими внутренние координаты

$$u^\alpha + du^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M \quad (8)$$

и внешние координаты

$$x^k + dx^k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

где индекс шрифта “фрактур” \mathfrak{c} нумерует реперные направления ($\mathfrak{c} = 1, 2, \dots, M$). С внешней (пространственной) точки зрения направления рассматриваемого репера задаются абсолютными контравариантными векторами

$$dx_{\mathfrak{c}}^k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Тензорный элемент объема M -ячейки определим согласно формуле

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = M! dx_1^{i_1} dx_2^{i_2} \dots dx_M^{i_M}. \quad (11)$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы по которым выполняется антисимметризация.

Учитывая следующую формулу для дифференциалов внешних координат вдоль реперных направлений M -ячейки

$$dx_b^k = (\partial_\alpha x^k) du_b^\alpha, \quad (12)$$

соотношение (11) можно записать в виде [3, с. 256–257]

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \dots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \det(du_b^\gamma). \quad (13)$$

Последний множитель в (13) называется внутренним (intrinsic) объемом M -ячейки. Пользуясь представлением о внутреннем объеме M -ячейки, можно построить алгоритм, ориентирующий M -многообразие (детали имеются в книге [3]).

Если элементарные M -ячейки нарезаны с помощью координатных поверхностей $u^\alpha = c^\alpha$, то для случая $M = N$ получим

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_N} = d\tau^{[-1]12\dots N} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}, \quad (14)$$

где $d\tau^{[-1]12\dots N}$ — естественный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса -1 , который определяется, следующим образом

$$d\tau^{[-1]12\dots N} = \det(\partial_\alpha x^k) du^1 du^2 \dots du^N = dx^1 dx^2 \dots dx^N. \quad (15)$$

3. Обобщенная псевдотензорная формулировка интегральной теоремы Стокса. Важную роль в механике и термомеханике континуума, особенно при формулировке законов сохранения, играют теоремы преобразования интегралов. Для любого дифференцируемого асимметричного ковариантного поля $A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}$ можно сформулировать теорему Стокса [3, р. 269]

$$\int \partial_{i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \oint_{\partial} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}, \quad (16)$$

где $d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M}$ вычисляется с использованием внутренней параметризации u^1, u^2, \dots, u^M , а $d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}$ с использованием внутренней параметризации $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \dots, \tilde{u}^{M-1}$. Отметим, что в формулировке (16) подразумевается, что поле $A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}$ может вообще не иметь тензорной природы. В силу этого, теорема Стокса в равной мере будет справедлива и для псевдотензорного поля целого веса W

$$\int \partial_{i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \oint_{\partial} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}. \quad (17)$$

Инвариантный (абсолютно инвариантный) интеграл на ориентируемом M -многообразии для ковариантного псевдотензорного поля $A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]}$ веса W записывается в форме

$$\int A_{i_1 i_2 \dots i_M}^{[W]} e^{-W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M}. \quad (18)$$

Подчеркнем, что интеграл (18) является абсолютным инвариантом.

Теорему (16) можно сформулировать в следующем виде

$$\int \partial_{i_M} \left(A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} e^{-W} \right) d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \oint_{\partial} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} e^{-W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}, \quad (19)$$

где в круглые скобки заключено абсолютное тензорное поле.

Очевидно, что подинтегральное выражение в (19) можно преобразовать следующим образом:

$$\partial_{i_M} \left(e^{-W} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} \right) = -W e^{-W} \frac{\partial_{i_M} e}{e} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} + e^{-W} \partial_{i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), получим

$$\begin{aligned} & - \int W e^{-W} \frac{\partial_{i_M} e}{e} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} + \\ & + \int e^{-W} \partial_{i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \\ & = \oint_{\partial} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} e^{-W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}. \quad (21) \end{aligned}$$

С другой стороны, в (19) подинтегральное выражение в интеграле слева, при учете того, что

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = d\tau^{[i_1 i_2 \dots i_M]} \quad (22)$$

преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} & \partial_{i_M} \left(A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} e^{-W} \right) d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \\ & = \partial_{[i_M} \left(A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}] }^{[W]} e^{-W} \right) d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \\ & = \nabla_{[i_M} \frac{A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}]}{e^W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M}. \quad (23) \end{aligned}$$

Учитывая свойство фундаментального ориентирующего псевдоскаляра, т.е. его *ковариантное постоянство*

$$\nabla_i e^m = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Соотношение (23) преобразуется к виду

$$\nabla_{[i_M} \frac{A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}]}{e^W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = e^{-W} \nabla_{[i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}]}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M}. \quad (24)$$

Теорема Стокса (19) записывается следующим образом

$$\int e^{-W} \nabla_{[i_M} [A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}]^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \oint_{\partial} e^{-W} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}, \quad (25)$$

что еще раз подтверждает справедливость формулировки (17).

Сравнивая формулировки теоремы Стокса (21) и (25) приходим к выводу, что

$$\int e^{-W} \frac{\partial_{i_M} e}{e} [A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}]^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = 0. \quad (26)$$

Последнее соотношение заведомо будет выполнено, если

$$\partial_{i_M} e = 0^{[+1]} \quad (i_M = 1, 2, \dots, N). \quad (27)$$

Полученное условие (27) мы будем интерпретировать, следуя статье [16], как выбор специальных систем координат, характеризуемых условием

$$\sqrt{g} = 1^{[+1]} \quad (28)$$

или более широким условием, учитывающем левостороннюю и правостороннюю ориентацию системы координат,

$$e = \pm 1^{[+1]}. \quad (29)$$

Это оказывается существенным в механике гемитропных микрополярных сред, когда определяющие тензоры чувствительны к изменениям ориентации пространства.

Подчеркнем, что при $e = -1^{[+1]}$ возникает неоднозначность вычисления степени e^{-W} .¹ Последнее означает, что псевдотензоры не могут иметь дробно-рационального веса.

Отметим, что ограничение $\sqrt{g} = 1^{[+1]}$ часто используется не только в астрономии и теории относительности [17], но и в механике деформируемого твердого тела [18]. В монографии [17, с. 135–142] условие $\sqrt{g} = 1^{[+1]}$ используется при выводе уравнения тяготения в 4-пространстве–времени, что существенно упрощает уравнения теории поля. В монографии [18] условие (28) используется в процессе разделения изостатических координат в основных уравнениях математической теории пластичности.

Заключение. В настоящей работе рассматриваются различные формулировки интегральной теоремы Стокса для асимметричного ковариантного псевдотензорного поля, заданного целого веса.

- (1) Обсуждаются понятия ориентируемого многообразия и континуума, играющие важную роль в микрополярной теории упругости. В особенности это касается теории гемитропных упругих сред.
- (2) В статье приведено обсуждение фундаментальных тензоров, характеризующих метрические и ориентационные свойства трехмерного пространства. Обсуждается представление о фундаментальном ориентирующем псевдоскаляре.
- (3) Приводится правило перехода от псевдотензоров к абсолютным, характерное для микрополярных теорий.

¹Например, если $e = -1^{[+1]}$ и $W = \frac{1}{2}$, то $e^W = \frac{1}{i}^{[+1/2]}$, что невозможно, оставаясь в рамках вещественной схемы построения теории.

- (4) Вводятся понятия тензорного и псевдотензорного элемента объема (площади) M -ячейки.
- (5) Обобщенная псевдотензорная формулировка интегральной теоремы Стокса уточняется для класса специальных координатных систем, характеризующихся условием $e^2 = 1$.^[2]

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [2] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. – 456 с. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [3] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.
- [4] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p.
- [5] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020.Т. 24, No 3. С. 424–444.
- [6] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids //Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164.
- [7] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // Известия РАН: Механика твердого тела. 2022. № 2. (В печати)
- [8] Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностранной литературы, 1948. 139 с.
- [9] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с.
- [10] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.
- [11] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона–Кэли // Известия РАН: Механика твердого тела. 2021. № 6. С. 130–138.
- [12] Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 104–114.
- [13] Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127.
- [14] Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. ГИТТЛ, 1956. 340с.
- [15] Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
- [16] Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев, “Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах”, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 25:3 (2021), 457–474
- [17] Koppf A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 pp.
- [18] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

THE GENERALIZED STOKES INTEGRAL THEOREM FOR A COVARIANT PSEUDOTENSOR FIELD

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Oriented continua play an important role in the micropolar theory of elasticity, all realizations of which are possible only within the framework of the pseudotensor formalism and the orientable manifold concept. This especially concerns the theory of micropolar hemitropic elastic media. In this paper, we consider various formulations of the Stokes integral theorem for an asymmetric covariant pseudotensor field of a given weight. This extends the well-known Stokes integral formula to the case of pseudotensors. The latter circumstance makes it possible to use the manifested generalization for micropolar continua. The study relies heavily on the class of special coordinate systems.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, micropolar hemitropic continuum, M -cell, frame, Stokes theorem

REFERENCES

- [1] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.
- [2] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics. 2020, T. 24, No 3.P. 424–444.
- [3] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of Samara State Technical University, Series “ Physics and Mathematics.” 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761.
- [4] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On one differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing bodies // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Rigid Body Mechanics. 2019. No. 6. P. 38–46.
- [5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin / New York Berlin, New York, 1865.
- [6] Erdmann G. Ueber un stetige L "o sungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
- [7] Rankine W. J. M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
- [8] Hugoniot P.H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et sp 'e cialement dans les gaz parfaits, 2e Part // Journal de l' 'E cole Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3–97.
- [9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
- [10] Bykovtsev G.I., Myasnyankin Yu.M. Sliding surfaces in three-dimensional rigid-plastic bodies // DAN SSSR 1966. Vol. 167. No. 6. pp. 1260-1262.
- [11] Bykovtsev G.I., Kretova L.D. On waves of accelerations in ideal elastoplastic bodies // Inzh. magazine MTT. 1967. No. 1. P.102-110.
- [12] Bykovtsev G.I., Vlasova I.A. Properties of the equations of the spatial problem of the theory of ideal plasticity // Mekh. deformed. solid, solid, Vol. 2. Kuibyshev, 1977. S. 33-68.
- [13] Ivlev D.D., Bykovtsev G.I. The theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971.232 p.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [14] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. The theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p.
- [15] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp. 373-377 <https://www.jstor.org/stable/1989146>
- [16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226-902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [17] Gurevich G.B. Foundations of the theory of algebraic invariants. M., L.: OGIZ, GITTL, 1948. 408 p. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
- [18] Schouten Ya. A. Tensor analysis for physicists. M.: Science. 1965. – 456 s. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [19] Sokolnikov I. S. Tensor analysis. Theory and applications in geometry and in continuum mechanics. Moscow: Nauka, 1971. 376 p. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [20] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi + 324 pp.
- [21] Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // Acta Mechanica. 1974. T. 20. No. 1. S. 105-131.
- [22] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
- [23] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.
- [24] Kopf A. Foundations of Einstein's theory of relativity. Moscow: GTTI, 1933. 175 p.
- [25] Radaev Yu. N. A spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samara University, 2006. 340 p.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.

В. Н. Орлов, Л. В. Мустафина

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе приводится доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, правая часть которого представлена полиномом шестой степени, в комплексной области. Расширен класс рассматриваемых уравнений за счет новой замены переменных. Получена априорная оценка аналитического приближенного решения. Представлен вариант численного эксперимента оптимизации априорных оценок с помощью апостериорных.

Ключевые слова: существование и единственность, аналитическое решение, нелинейное дифференциальное уравнение, априорная оценка, апостериорная оценка.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.007

УДК: 539.374

Введение. Следует отметить, что нелинейные дифференциальные уравнения имеют приложения в разных областях: гидродинамике [1]; в задачах устойчивости свободного падения авторотирующего тела в сопротивляющейся среде [2]; в задачах физики при определении времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины [3]; в задачах строительной механики [4–8]; в механике [9, 10]; при расчетах атомных реакторов [11]; в нелинейной диффузии [12]. Авторы работы [13] в качестве основы математической модели волнового процесса в эластичной балке рассматривают неявное дифференциальным уравнением (1) с краевыми условиями (2).

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad (1)$$

$$0 \leq t \leq 1, u(0) = u'(0) = u'(1) = 0. \quad (2)$$

© Орлов В. Н., Мустафина Л. В., 2021

Орлов Виктор Николаевич

e-mail: orlovvn@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия,

Людмила Витальевна Мустафина

e-mail: ludamust76@yandex.ru, магистрант первого курса, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 15.09.2021

В зависимости от структуры указанной функции $f(t, u(t))$ уравнение (1) может иметь линейную структуру относительно искомой функции. В этом случае тогда трудностей в его решении не возникает, можно воспользоваться классическим методом решения. В случае функции $f(t, u(t))$ нелинейной относительно $u(t)$, предлагаемый метод верхних и нижних границ не имеет обоснования. В этом случае препятствием для применяемого метода, являются подвижные особые точки нелинейного уравнения. Вторым недостатком является отсутствие формул для расчета области действия метода. В этой ситуации, в работе [14] предложен вариант решения нелинейного дифференциального уравнения (1) для вещественной области. В данной работе авторы предлагают вариант обобщения этих результатов на комплексную область. При проведении исследования, применяя новую замену переменных, удалось существенно расширить класс, рассматриваемых в работе [14], нелинейных дифференциальных уравнений. Отметим публикации [15–21], в которых применяемый математический аппарат успешно апробирован на других классах нелинейных дифференциальных уравнений, как в вещественной, так и комплексной областях. Предложенный в работе подход позволяет доказать как существование и единственность решения, так и получить формулу для области действия теоремы, а также построить структуру аналитического приближенного решения рассматриваемой задачи.

Результаты исследования и их обсуждение. Представленное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_0(z) \cdot y^6 + a_1(z) \cdot y^5 + a_2(z) \cdot y^4 + a_3(z) \cdot y^3 + a_4(z) \cdot y^2 + a_5(z) \cdot y^1 + a_6(z), \quad (3)$$

приводится заменой переменной

$$y = \sqrt[5]{\frac{1}{a_0}} \cdot g(z) - \frac{a_1(z)}{6 \cdot a_0}, \quad (4)$$

к нормальной форме

$$g''' = g^6 + (r(z)), \quad (5)$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_0(z) = a_0 = \text{const} \neq 0, \\ a_2(z) = \frac{5a_1^2(z)}{4a_0}, \quad a_3(z) = \frac{-55a_1^3(z)}{54a_0^2}, \quad a_4(z) = \frac{145a_1^4(z)}{432a_0^3}, \quad a_5(z) = -\frac{624a_1^5(z) + 870a_0a_1^4(z)}{1296a_0^4}, \\ r(z) = \frac{a_1'''(z)}{6 \cdot a_0} + \frac{4439a_1^6(z)}{46656a_0^5} + \frac{870a_1^5(z)}{7776a_0^4} + a_6(z). \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^6 + r(z), \quad (7)$$

$$y(z_0) = y_0, \quad y'(z_0) = y_1, \quad y''(z_0) = y_2, \quad (8)$$

Теорема 1. Если выполняются условия:

$$\begin{aligned} 1) & r(z) \in C^1 \text{ в области } |z - z_0| < \rho_1, \quad 0 < \rho_1 = \text{const}; \\ 2) & \exists M_n : \frac{|r^n(z_0)|}{n!} \leq M_n, \quad M_n = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

то решение задачи Коши (7)–(8) представимо в виде:

$$y(z) = \sum_0^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (10)$$

где, $\rho_2 = \min\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\}$, $M = \max\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup \frac{|r^n(z_0)|}{n!}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Согласно условию теоремы имеем

$$r(z) = \sum_0^{\infty} B_n \cdot (z - z_0)^n. \quad (11)$$

Подставим (10), (11) в (7) и получим:

$$\sum_0^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (z - z_0)^{n-3} = \sum_0^{\infty} C_n^{***} (z - z_0)^n + \sum_0^{\infty} B_n (z - z_0)^n, \quad (12)$$

$$\sum_0^{\infty} C_n^* = \sum_0^n C_i \cdot C_{n-i}, \quad \sum_0^{\infty} C_n^{**} = \sum_0^n C_i^* \cdot C_{n-i}^*, \quad \sum_0^{\infty} C_n^{***} = \sum_0^{\infty} C_i^* \cdot \sum_0^{\infty} C_{n-i}^{**}, \quad \text{где } n=0,1,2,\dots$$

Из формулы 12 следует рекуррентная формула для однозначного определения коэффициентов C_n :

$$C_n(n(n-1)(n-2)) = C_{n-3}^{***} + B_{n-3}, \quad (13)$$

$$C_3 = \frac{1}{6} \cdot (C_0^6 + B_0), \quad C_4 = \frac{1}{24} \cdot (C_0^6 + B_0), \quad C_5 = \frac{1}{60} (15C_0^4 C_1^2 + 6C_0^5 C_2 + B_2),$$

$$C_6 = \frac{1}{120} (30C_0^4 C_1 C_2 + 18C_0^3 C_1^3 + 6C_0^5 C_3 + B_3) \leq \frac{1}{2} (M+1)^6, \dots,$$

где C_0, C_1, C_2 – определяются начальными условиями.

Коэффициенты C_n получены с помощью программного комплекса Maple. На основе полученных выше выражений выдвигаем гипотезу оценок коэффициентов C_n :

$$|C_{3k}| \leq \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k-1)(3k-2)}, \quad |C_{3k+1}| \leq \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)}, \quad |C_{3k+2}| \leq \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)}.$$

Продemonстрируем технологию доказательства оценок в случае $n = 3k$:

$$|C_{3k+3}| \leq \frac{(M+1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}. \quad (14)$$

Из (13) следует:

$$\begin{aligned} |C_{n+1}| &= \left| \frac{C_{n-2}^{***} + B_{n-2}}{n(n+1)(n-1)} \right| \Rightarrow |C_{3k+3}| = \left| \frac{(C_{3k-2}^{***} + B_{3k-2})}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left(\sum_{i=0}^{3k+1} C_{3k+1-i}^{**} \times C_i^* + B_{3k-2} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} C_{3k+1-i-j}^* \times C_j^* \right) \times C_i^* + B_{3k-2} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} C_{3k+1-i-j-l} \times C_l \right) C_j^* \right) \times C_i^* + B_{3k-2} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \cdot \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} C_{3k+1-i-j-l} \times C_l \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{l-j} C_l \cdot C_{j-l} \right) \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^i C_m \cdot C_{i-m} \right) + B_{3k-2} \right) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} \frac{(M+1)^{5k+1-i-j-l}}{(3k+1)3k(3k-1)} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \cdot \frac{(M+1)^l}{l^*(l-1)^*(l-2)^*} \cdot \frac{(M+1)^j}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \cdot \sum_{m=0}^i C_{i-m} C_m + B_{3m-2} \left. \left. \left. \right) \right) \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\frac{(M+1)^{5k+1-i}}{1} \cdot \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} \frac{1}{(3k+1-i-j-l)^*} \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \cdot \frac{1}{(3k+1-i-j-l)^*(3k+1-i-j-l-2)^* \cdot l^*(l-1)^*(l-2)^*} \left. \left. \left. \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{1}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \sum_{m=0}^i C_{i-m} C_m + B_{3m-2} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \cdot \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\frac{(M+1)^{5k+1-i-j}}{1} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \cdot \frac{1(3k+1-i-j+1)}{(3k+1-i-j)^*(3k+1-i-j-1)^*(3k+1-i-j-2)^* 2} \cdot \frac{(M+1)^j}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \left. \left. \left. \right) \right) \right. \\
&\quad \cdot \sum_{m=0}^i C_{i-m} \cdot C_m + B_{3m-2} \left| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} ((M+1)^{5k+1-i} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \frac{1}{(3k+1-i-j-1)^*(3k+1-i-j-1)^* j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \sum_{k=0}^i C_{i-k} C_k + B_{3k-2} \right| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \cdot \\
&\quad \cdot \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} (M+1)^{5k+1-i} \frac{(3k+1-i+1)}{(3k+1-i)(3k+1-i-2)2} \right) \cdot \sum_{k=0}^i C_{i-k} \cdot C_k + B_{3k-2} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} \frac{(M+1)^{5k+1-i}}{(3k+1-i)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{k=0}^i \frac{(M+1)^k (M+1)^{i-k+1}}{k^*(k-1)^*(k-2)^*(i-k)(i-k-1)(i-k-2)(i-2)^*} \right) \right) + \\
&+ B_{3k-2} \left| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} \frac{(M+1)^{5k+2}}{(3k+1-i-2)^*(i-1)^*(i-2)^*} \right) + B_{3k-2} \right| \leq \\
&\leq \frac{(M+1)^{5k+2}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} + M \leq \frac{(M+1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)},
\end{aligned}$$

где

$$i^* = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ i, & i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}, \quad (i-1)^* = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ (i-1), & i = 0, 2, 3, \dots \end{cases},$$

$$\begin{aligned}
 l^* &= \begin{cases} 1, l = 0 \\ l, l = 1, 2, 3... \end{cases} & (l-1)^* &= \begin{cases} 1, l = 1 \\ (l-1), l = 0, 2, 3... \end{cases} \quad , \\
 k^* &= \begin{cases} 1, k = 0 \\ k, k = 1, 2, 3... \end{cases} & (k-1)^* &= \begin{cases} 1, k = 1 \\ (k-1), k = 0, 2, 3... \end{cases} \quad , \\
 j^* &= \begin{cases} 1, j = 0 \\ j, j = 1, 2, 3... \end{cases} & (j-1)^* &= \begin{cases} 1, j = 1 \\ (j-1), j = 0, 2, 3... \end{cases} \quad , \\
 (3k+1-i-j-l)^* &= \begin{cases} 1, l = 3k+1-i-j \\ 3k+1-i-j-l, l \neq 3k+1-i-j \end{cases} \quad , \\
 (3k+1-i-2)^* &= \begin{cases} 1, i = 3k+1 \\ i \neq 3k+1 \end{cases} \quad , \\
 (3k+1-i-j-l-1)^* &= \begin{cases} 1, l = 3k-i-j \\ 3k+1-i-j-l-1, l \neq 3k-i-j \end{cases} \quad , \\
 (3k+1-i-j-l-2)^* &= \begin{cases} 1, l = 3k+1-i-j \\ 3k+1-i-j-l-2, l \neq 3k+1-i-j \end{cases} \quad , \\
 (3k+1-i-j)^* &= \begin{cases} 1, j = 3k+1-i \\ 3k+1-i-j, j \neq 3k+1-i \end{cases} \quad , \\
 (3k+1-i-j-1)^* &= \begin{cases} 1, j = 3k-i \\ 3k+1-i-j-1, j \neq 3k-i \end{cases} \quad , \\
 (3k+1-i-j-2)^* &= \begin{cases} 1, j = 3k+1-i \\ 3k+1-i-j-2, j \neq 3k+1-i \end{cases} \quad .
 \end{aligned}$$

Оценки для вариантов $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ получаем аналогичным образом.
 Для ряда (13) составляем мажорирующий ряд

$$\sum_0^{\infty} V_n(z - z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} V_{3k}(z - z_0)^{3k} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{3k+1}(z - z_0)^{3k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{3k+2}(z - z_0)^{3k+2} \quad (15)$$

Ряды в правой части (15) является сходящимися в области, определяемой формулой:

$$|z - z_0| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}.$$

В конечном итоге, для решения (10)) получаем область сходимости, при этом

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\right\}.$$

Теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение:

$$y_N(z) = \sum_0^N C_n(z - z_0)^n. \quad (16)$$

Теорема 2. В предположении пунктов 1 и 2 теоремы 1, для аналитического приближенного решения (16) задачи (7)-(8) в области $|z - z_0| < \rho_2$ верна оценка :

$$\Delta y_N(z) \leq \frac{M(M+1)^{\frac{5(N+1)}{3}} |z - z_0|^{N+1}}{1 - M(M+1) |z - z_0|^3}.$$

$$\cdot \left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)} + \frac{|z-z_0|}{N(N+1)(N+2)} + \frac{|z-z_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)} \right),$$

при $N+1=3k$,

$$\Delta y_N(z) \leq \frac{M(M+1)^{\frac{5N}{3}} |z-z_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|z-z_0|^3}.$$

$$\cdot \left(\frac{1}{N(N-1)(N-2)} + \frac{|z-z_0|}{N(N-1)(N+1)} + \frac{|z-z_0|^2}{N(N+1)(N+2)} \right),$$

если $N+1=3k+1$, а для варианта $N+1=3k+2$ будем иметь оценку:

$$\Delta y_N(z) \leq \frac{M(M+1)^{\frac{5(N-1)}{3}} |z-z_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|z-z_0|^3}.$$

$$\cdot \left(\frac{1}{(N-1)(N-2)(N-3)} + \frac{|z-z_0|}{N(N-1)(N-2)} + \frac{|z-z_0|^2}{N(N-1)(N+1)} \right),$$

где

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\right\}, 0 < \rho_2 = \text{const},$$

$$M = \max\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup \frac{|r^{(n)}(z_0)|}{n!}\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Проведем рассуждения случае $N+1=3k$. Классический подход, с учетом оценок для C_n позволяет получить:

$$\begin{aligned} \Delta y_N(z) &= |y(z) - y_N(z)| = \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \right| = \\ &= \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \right| \leq \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_{3k} (z-z_0)^{3k} \right| + \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_{3k+1} (z-z_0)^{3k+1} \right| + \\ &\quad + \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_{3k+2} (z-z_0)^{3k+2} \right| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k-2)} |z-z_0|^{3k} + \\ &+ \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k+1)} |z-z_0|^{3k+1} + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k+1)(3k+2)} |z-z_0|^{3k+2} \leq \\ &\leq \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k-2)} |z-z_0|^{3k} \sum_{k=1}^{\infty} (1+M(M+1)^{5k} |z-z_0|^{3k}) + \\ &+ \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k+1)} |z-z_0|^{3k+1} \sum_{k=1}^{\infty} (1+M(M+1)^{5k} |z-z_0|^{3k}) + \\ &+ \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k+1)(3k+2)} |z-z_0|^{3k+2} \sum_{k=1}^{\infty} (1+M(M+1)^{5k} |z-z_0|^{3k}) = \\ &= \frac{(M+1)^{5k}}{1-M(M+1)|z-z_0|^{3k}} |z-z_0|^{3k}. \\ &\cdot \left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{|z-z_0|}{3k(3k-1)(3k+1)} + \frac{|z-z_0|^2}{3k(3k+1)(3k+2)} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{(M + 1)^{\frac{5(N+1)}{3}} \cdot |z - z_0|^{N+1}}{1 - M(M + 1) \cdot |z - z_0|^3} \cdot \left(\frac{1}{N(N - 1)(N + 1)} + \frac{|z - z_0|}{N(N + 1)(N + 2)} + \frac{|z - z_0|^2}{(N + 1)(N + 2)(N + 3)} \right),$$

в случае $N \geq 3$.

По аналогии доказываем структуру оценки для вариантов $N + 1 = 3k + 1$, $N + 1 = 3k + 2$ в области $|z - z_0| < \rho_2$, где, $\rho_2 = \min\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\}$, $M = \max\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup \frac{|r^n(z_0)|}{n!}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Пример. Для задачи Коши (6)-(7), $z_0 = 0$; $y(z_0) = y_0 = 0, 7 + i$; $y'(z_0) = y_1 = 1 + i$; $y''(z_0) = y_2 = 0, 5i$; $r(z) = 0$.

На основании исходных данных $M = 2^{0,5}$, в приближенном решении (16) $N = 6$, радиус

$$\rho_2 = 0, 230165658; \quad z_1 = 0, 15 + 0, 17i; \quad z_1 \in |z - z_0| < \rho_2.$$

Числовые характеристики аналитического приближенного решения рассматриваемого примера представлены в таблице 1.

z_1	$y_6(z_1)$	$\Delta y_5(z_1)$	Δ_1
0,15+0,17i	0,6506166+1,3223273i	0.00522	0.00007

Таблица 1. Расчеты аналитического приближенного решения

Обозначения: $y_6(z_1)$ - приближенное решение; $\Delta y_5(z_1)$ - апостериорная погрешность; Δ_1 - априорная погрешность. Для $\Delta_1 = 0.00007$ на основании теоремы 2 имеем $N = 17$. Слагаемые с $N = 7$ по 17 в общей сумме, меньше заданной точности $\varepsilon = 7 \cdot 10^{-5}$. Следовательно, приближенное решение $y_5(z_1)$ будет иметь погрешность $\varepsilon = 0.00007$.

Заключение. В статье авторами дано теоретическое обоснование применения разработанного метода аналитического приближенного решения к рассматриваемому классу нелинейных дифференциальных уравнений. Теоретические результаты подтверждены численным экспериментом. Априорная погрешности аналитического приближенного решения оптимизирована с помощью апостериорной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дышко А. Л., Конохова А. И., Б.Суков Н. О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 7. с. 1158–1178.
- [2] Привалов В. А., Самсонов А. В. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. с. 37–48.
- [3] Самодуров А. А. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. № 1. с. 9–10.
- [4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. p. 012122.
- [5] Orlov. V. N., Kovalchuk O. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). 2019. Vol. 97. p. 03031.

- [6] Orlov V. N. Features of mathematical modelling in the analysis of console-type structures // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). Vol. 97. P. 03036,.
- [7] Orlov. V. N., Kovalchuk O. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012127.
- [8] Orlov. V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012129.
- [9] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. 1977. Vol. 13. p. 93–104. ISSN 1998-4812.
- [10] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. by D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. New York: 1978. p. 129–145.
- [11] Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee. 1974. p. 1–14.
- [12] R. R. A. A. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. LA – 4514, UC – 34).
- [13] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.
- [14] Orlov V. N., Разакова Р. В. Приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. Т. 1, № 43. с. 92–99.
- [15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 365.
- [16] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat.Sci. 2018. no. 4. p. 24–35.
- [17] Орлов В. Н., Ив Б. Б. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 4. с. 980–986.
- [18] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3. p. 2050026.
- [19] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 10. с. 1829–1832.
- [20] Орлов В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциальной уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). с. 399–405.
- [21] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вестн. Сам. Гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. с. 1.

V. N. Orlov, L. V. Mustafina

ANALYTICAL SOLUTION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER IN THE COMPLEX AREA

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. The article presents a proof of the theorem of the existence and uniqueness of the analytical solution of the class of nonlinear differential equations of the third order, with a polynomial right-hand side of the sixth degree, in the complex domain. The class of the considered equations has been extended by means of a new change of variables. An a priori estimate of the analytical approximate solution is obtained. A variant of the numerical experiment of optimizing a priori estimates using a posteriori estimates is presented.

Keywords: Existence and uniqueness, analytical solution, nonlinear differential equation, a priori estimation, a posteriori estimation.

REFERENCES

- [1] Dyshko A. L., Konyukhova A. I., N.B.Sukov. About the singular problem for a nonlinear ordinary differential equation of the third order arising in hydrodynamics // Zhurnal vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika Izdatel'stvo. 2007. T. 47, № 7. С. 1158–1178.
- [2] Privalov V. A., Samsonov A. V. Comparison of stability properties of two autorotation modes // Izv. RAN. PMM. 1994. T. 58. Issue 2. с. 37–48.
- [3] Samodurov A. A. An ordinary method for determining the delay time of a supersonic bosonic avalanche // Dokl. AN BSSR. 1985. № 1. С. 9–10.
- [4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. p. 012122.
- [5] Orlov. V. N., Kovalchuk O. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). 2019. Vol. 97. p. 03031.
- [6] Orlov V. N. Features of mathematical modeling in the analysis of console-type structures // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). Vol. 97. P. 03036,.
- [7] Orlov. V. N., Kovalchuk O. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Modeling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012127.
- [8] Orlov. V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // Modeling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012129.
- [9] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. 1977. Vol. 13. p. 93–104. ISSN 1998-4812.
- [10] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. by D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. New York: 1978. P. 129–145.
- [11] Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee. 1974. P. 1–14.

Viktor Nikolaevich Orlov, Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Ludmila Vitaljevna Mustafina, Undergraduate, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

-
- [12] R. R. A. A. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. LA - 4514, UC - 34).
- [13] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.
- [14] Orlov V. N., Razakova R. V. Approximate solution of a class of nonlinear differential equations of the third order in the field of analyticity // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2020. T. 1, № 43. c. 92–99.
- [15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modeling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 365.
- [16] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat.Sci. 2018. no. 4. p. 24–35.
- [17] Orlov V.N., Yves B. B. The existence theorem for the solution of one class of fourth-order nonlinear differential equations with polynomial right-hand side of the second degree in the neighborhood of a movable singular point // Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2018. T. 23, № 4. C. 980–986.
- [18] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3. p. 2050026.
- [19] Orlov V. N., Lukashevich N. A. Investigation of the approximate solution of the second Penleve equation // Differentsialnyye uravneniya. 1989. T. 25, № 10. C. 1829–1832.
- [20] Orlov V. N. Exact boundaries for the approximate solution of the Abel differential equation in the vicinity of the approximate value of a moving singular point in the complex domain // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 2 (8). c. 399–405.
- [21] Orlov V. N., Leontyeva T. Yu. On the expansion of the domain for an approximate analytical solution of a class of second-order nonlinear differential equations in the complex domain // Vestn. Sam. Gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki,. 2020. T. 24. c. 1.

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

³Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются экспериментальные диаграммы деформирования бетонов марок В10, В30, В50. Методом наименьших квадратов приведены аппроксимации диаграмм деформирования полиномами второго и третьего порядка. Указанные расчеты выполнены как для случая одинаковых коэффициентов для зон растяжения и сжатия, так и различных. Приведен алгоритм решения задачи продольно-поперечного изгиба балки в случае использованных данных аппроксимаций диаграмм.

Ключевые слова: балка, диаграмма деформирования бетона, продольно-поперечный изгиб, статическая определимость, изгибающий момент, композиты

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.008

УДК: 539.374

Направим ось OX вдоль оси балки, ось OZ вертикально вверх, начало координат поместим на нижнюю грань балки. Рассмотрим трехслойную бетонную балку, имеющую однотавровое поперечное сечение (рис. 1), которое одинаковое вдоль всей ее длины, причем ось OZ являются осью симметрии для рассматриваемого сечения.

Обозначим через h_1 , h_2 , h_3 – высоты соответственно первого, второго и третьего слоя, номера соответствующий слоев обозначим на рисунке римскими цифрами,

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2021

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiryuy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий Чувашского государственного университета им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 05.11.2021

причем примем $h_0 = 0$. Длины слоев в поперечном сечении для рассматриваемого одноплатного поперечного сечения примем равными $2b_1, 2b_2, 2b_2$ для соответствующих слоев.

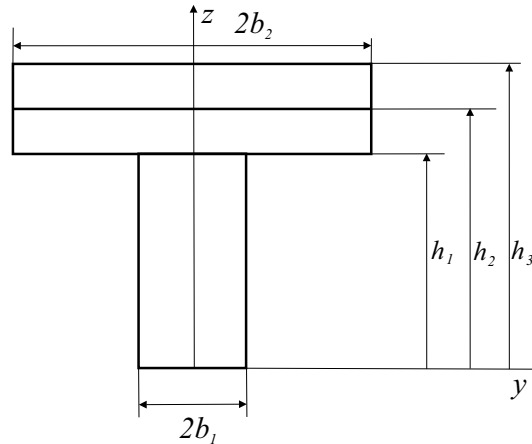


Рис. 1. Поперечное сечение трехслойной балки

Обозначим через σ_*^+, σ_*^- пределы прочности бетона, $\varepsilon_*^+, \varepsilon_*^-$ – предельные деформации предразрушения, E^+, E^- – начальные модули упругости бетона соответственно при растяжении и сжатии.

На диаграмме деформирования бетона отметим характерные точки D^-, C^-, C^+, C^+ . Участки C^-OC^+ будут соответствовать участкам сохранения сплошности, а участки D^-, C^- и C^+, D^+ соответствуют участкам нарушения сплошности сопровождающихся интенсивными процессами трещинообразования.

Значение указанных точек по результатам экспериментов [1, 2] для бетонов марок В10, В30, В50 приведены в таблицах 1, 2. В указанной таблице и дальнейшем во всех расчетах все величины, имеющие размерность напряжения будем относить к пределу прочности σ_*^- бетона В10 при сжатии. Все величины имеющие размерность длины будем относить к длине балки l . Через C обозначим относительную стоимость бетона по отношению к бетону марки В10.

Марка бетона	C	σ_*^-	σ_{**}^-	$\varepsilon_*^-, 10^{-2}$	$\varepsilon_{**}^-, 10^{-2}$	E^-
В10	1	1	0,35	0,2	0,35	2379
В30	1,23	2,91	2,14	0,2	0,3	4304
В50	1,45	4,8	4,38	0,2	0,25	5160

Таблица 1. Значения физических параметров бетонов

Закон деформирования бетона для каждого из слоя будем принимать в виде аппроксимации полиномом второго или третьего порядка [3, 4].

В дальнейших расчетах можно использовать для аппроксимации диаграммы деформирования бетона $\sigma = f(\varepsilon)$ для зон растяжения и сжатия одни и те же функции

Марка бетона	σ_*^+	σ_{**}^+	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_{**}^+, 10^{-2}$	E^+
В10	0,11	0,08	0,015	0,02	2358
В30	0,24	0,19	0,015	0,02	4258
В50	0,3	0,28	0,015	0,02	5109

Таблица 2. Значения физических параметров бетонов

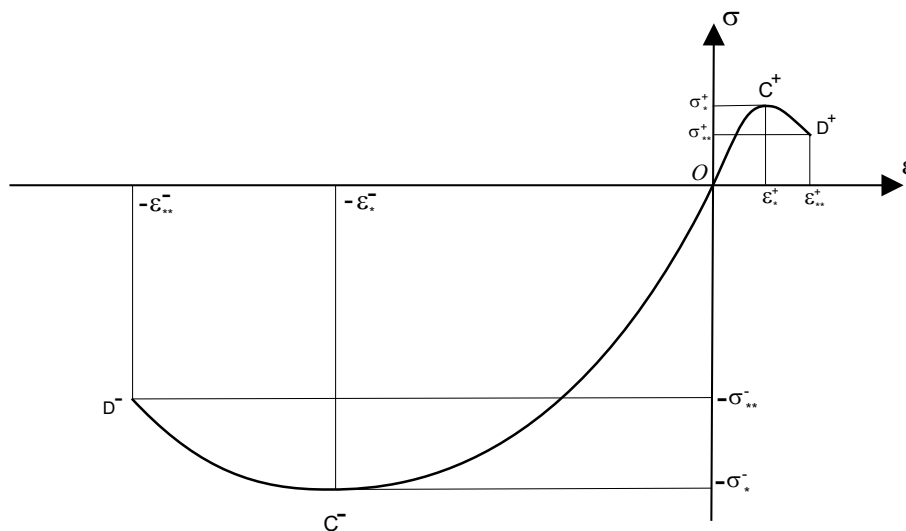


Рис. 2. Диаграмма деформирования бетона

с одними и те же коэффициентами. Тогда для случая полинома второго порядка аппроксимация диаграммы будет иметь вид (1), а в случае полинома третьего порядка (2).

$$\sigma_i = A_{1i}^2 \varepsilon + A_{2i}^2 \varepsilon^2, \quad (1)$$

$$\sigma_i = A_{1i}^3 \varepsilon + A_{2i}^3 \varepsilon^2 + A_{3i}^3 \varepsilon^3, \quad (2)$$

где коэффициенты $A_{1i}^2, A_{2i}^2, A_{1i}^3, A_{2i}^3, A_{3i}^3$ можно определить из реальных диаграмм растяжения-сжатия бетонов.

В случае если использовать для зон растяжения и сжатия одни и те же функции, но с различными коэффициентами, тогда аппроксимации будут иметь вид (3), (4).

$$\sigma_i^\pm = A_{1i}^{2\pm} \varepsilon + A_{2i}^{2\pm} \varepsilon^2, \quad (3)$$

$$\sigma_i^\pm = A_{1i}^{3\pm} \varepsilon + A_{2i}^{3\pm} \varepsilon^2 + A_{3i}^{3\pm} \varepsilon^3, \quad (4)$$

где знаки «+» и «-» соответствуют зонам растяжения и сжатия соответственно.

Примеры расчета указанных коэффициентов, используя результаты экспериментов [1, 2], для аппроксимаций (3), (4) методом наименьших квадратов приведены в таблицах 3, 4.

Марка бетона	A_1^{3+}	A_2^{3+}	A_3^{3+}	A_1^{2+}	A_2^{2+}
В10	3864,57	$-4,4 * 10^7$	$1,57 * 10^{11}$	2379,41	$-1,14 * 10^7$
В30	7770,69	$-8,55 * 10^7$	$2,99 * 10^{11}$	4920,89	$-2,31 * 10^7$
В50	11578,48	$-1,38 * 10^8$	$5,03 * 10^{11}$	6844,36	$-3,44 * 10^7$

Таблица 3. Значения коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования бетонов при растяжении полиномами второго и третьего порядка для соотношений (3), (4)

Марка бетона	A_1^{3-}	A_2^{3-}	A_3^{3-}	A_1^{2-}	A_2^{2-}
В10	2318,2	$1,82 * 10^6$	$4,59 * 10^8$	1532,63	542483,2160
В30	6052,14	$4,62 * 10^6$	$1,17 * 10^9$	4074,12	$1,35 * 10^6$
В50	10793,97	$8,44 * 10^6$	$2,15 * 10^9$	6997,58	$2,4 * 10^6$

Таблица 4. Значения коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования бетонов при сжатии полиномами второго и третьего порядка для соотношений (3), (4)

Аналогичные расчеты коэффициентов для аппроксимаций (1), (2) методом наименьших квадратов приведены в таблице 5.

Марка бетона	A_1^3	A_2^3	A_3^3	A_1^2	A_2^2
В10	1875,87	$1,17 * 10^6$	$2,43 * 10^8$	1493,78	519354,19
В30	4151,89	$1,78 * 10^6$	$2,1 * 10^8$	3840,79	$1,22 * 10^6$
В50	7009,38	$3,01 * 10^6$	$3,36 * 10^8$	6495,96	$2,11 * 10^6$

Таблица 5. Значения коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования бетонов при растяжении полиномами второго и третьего порядка для соотношений (1), (2)

Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) приведены на рисунках 3, 4, 5.

Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (1), (2) приведены на рисунках 6, 7, 8.

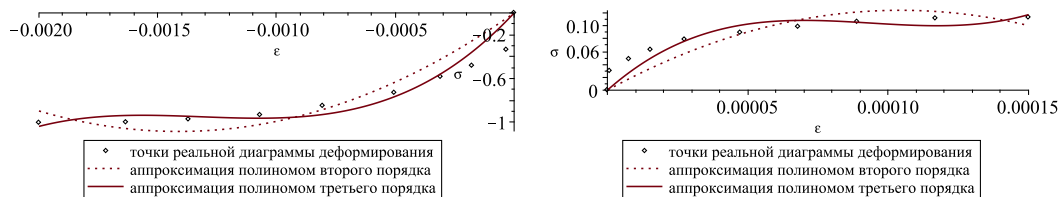


Рис. 3. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) для бетонов марки В10

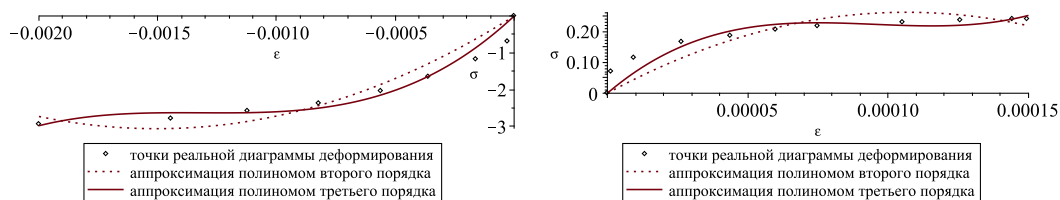


Рис. 4. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) для бетонов марки В30

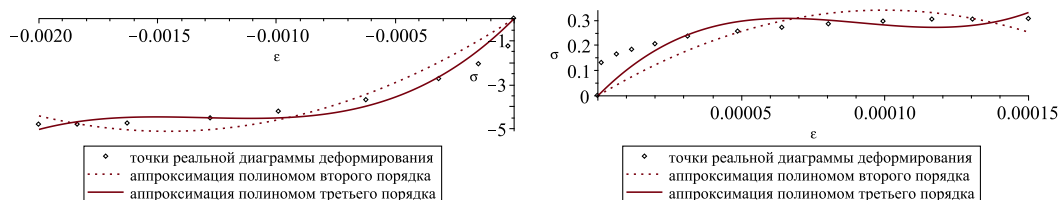


Рис. 5. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) для бетонов марки В50

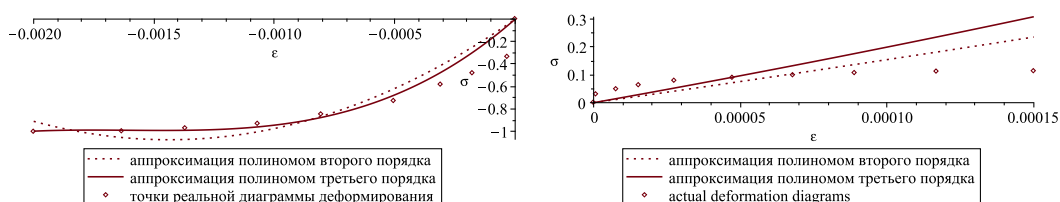


Рис. 6. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (1), (2) для бетонов марки В10

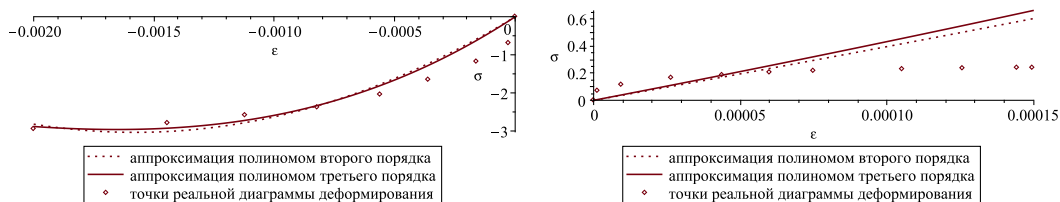


Рис. 7. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (1), (2) для бетонов марки В30

В зависимости от действующих нагрузок и формы поперечного сечения в сечении (рис. 1) будут зоны растяжения и сжатия, которые будут разделены нейтральной линией, положение которой будет определяться координатой z_1 .

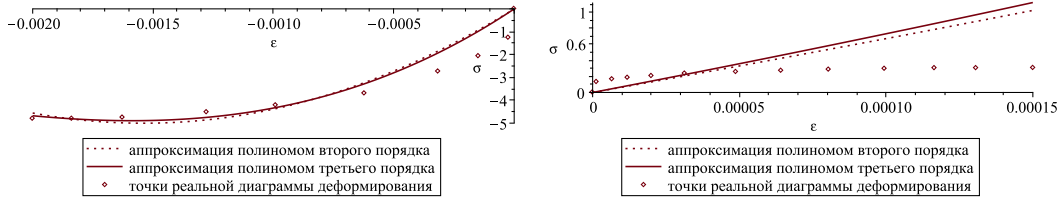


Рис. 8. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (1), (2) для бетонов марки В50

Рассмотрим случай, когда связь напряжений и деформаций описывается зависимостями (1), т.е. будем полагать, что для описания законов деформирования будут использоваться одинаковые кривые как для зон растяжения, так и для зон сжатия.

Будем предполагать справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, z) &= \varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x), \\ \varepsilon_0(x) &= \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y(x) = \frac{d^2w}{dx^2},\end{aligned}\tag{5}$$

где $u_0(x)$ – перемещение вдоль отчетной оси OX балки, $w(x)$ – прогиб балки, $\kappa_y(x)$ – кривизна балки.

При $z = z_1$ деформация отсутствует, т.е. $\varepsilon(x, z) = 0$, тогда для координаты нейтральной линии из (5) получим

$$z_1(x) = \frac{1}{\kappa_y(x)}\varepsilon_0(x) = \frac{1}{\frac{d^2w}{dx^2}} \frac{du_0}{dx}.\tag{6}$$

величины продольного усилия и изгибающего момента будут иметь вид

$$N = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} (A_{1i}^2 \varepsilon + A_{2i}^2 \varepsilon^2) dy,\tag{7}$$

$$M = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} (A_{1i}^2 \varepsilon + A_{2i}^2 \varepsilon^2) z dy.\tag{8}$$

Используя выражение для деформаций через кривизну (5), соотношения (7), (8) примут вид

$$N = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \left(A_{1i}^2 (\varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x)) + A_{2i}^2 (\varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x))^2 \right) dy,$$

$$M = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \left(A_{1i}^2 (\varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x)) + A_{2i}^2 (\varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x))^2 \right) z dy.$$

Указанные соотношения перепишем в виде

$$N = B_1\varepsilon_0(x) + B_2\kappa_y(x) + B_3\varepsilon_0^2(x) + B_4\varepsilon_0(x)\kappa_y(x) + B_5\kappa_y^2(x), \quad (9)$$

где

$$B_1 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{1i}^2 b_i dz, \quad B_2 = -2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{1i}^2 b_i z dz, \quad B_3 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i dz, \\ B_4 = -2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z dz, \quad B_5 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z^2 dz,$$

$$M = C_1\varepsilon_0(x) + C_2\kappa_y(x) + C_3\varepsilon_0^2(x) + C_4\varepsilon_0(x)\kappa_y(x) + C_5\kappa_y^2(x), \quad (10)$$

где

$$C_1 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{1i}^2 b_i z dz, \quad C_2 = -2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{1i}^2 b_i z^2 dz, \quad C_3 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z^2 dz, \\ C_4 = -2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z^2 dz, \quad C_5 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z^3 dz.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{dN}{dx} = -q_1\psi(x), \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q_0\varphi(x), \quad Q = \frac{dM}{dx}, \quad (11)$$

где q_0, q_1 – амплитуды поперечной и продольной нагрузок, $\varphi(x), \psi(x)$ – некоторые функции определяющие распределение нагрузок по длине балки.

Если поставленная задача является статически определимой, тогда величины продольного усилия N и изгибающего момента M являются известными функциями – $N_1(x)$ и $M_1(x)$ соответственно.

Тогда получим систему для определение перемещений $u_0(x), w_0(x)$

$$B_1 \frac{du_0}{dx} + B_2 \frac{d^2w}{dx^2} + B_3 \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 + B_4 \frac{du_0}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} + B_5 \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 = N_1(x), \quad (12) \\ C_1 \frac{du_0}{dx} + C_2 \frac{d^2w}{dx^2} + C_3 \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 + C_4 \frac{du_0}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} + C_5 \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 = M_1(x),$$

где начальные условия определяются из условия закрепления балки.

Найденные решения будут справедливы, если деформация не превышает соответствующих предельных значений $-\varepsilon_*^- < \varepsilon < \varepsilon_*^+$.

В случае статически неопределимой системы выражения (7), (8) необходимо подставить в уравнения равновесия (11). Полученную систему дифференциальных уравнений можно решать каким-нибудь численным методом. Примеры решения указанных задач методом Бубнова-Галеркина в математическом пакете Maple приведены в работах [5–9, 9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иващенко Е. И. Разработка методов расчета железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов с учетом фактического изменения площади их поперечных сечений // дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 2006. 230 с.
- [2] Маилян Л. Р., Иващенко Е. И. Расчет железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовский гос. строит. ун-т, 2006. 222 с.
- [3] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.
- [4] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // *Известия Алтайского государственного университета*. 2021. № 1(117). С. 40–46.
- [6] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2020. № 1. С. 60–73.
- [7] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения многослойного бетонного стержня на несущую способность при продольно-поперечной нагрузке // *Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник тезисов 9-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН*. 2019. С. 185–189.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // *AIP Conference Proceedings*. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [9] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения и силы тяжести на деформирование многослойных бетонных стержней при квазистатических нагрузках // *Моделирование и механика конструкций*. 2020. № 12. С. 11–49.
- [10] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. Vol. 170. P. 447–457.

Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov

LONGITUDINAL-TRANSVERSE BENDING OF PHYSICALLY NONLINEAR REINFORCED CONCRETE BEAMS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The paper considers experimental deformation diagrams of concrete grades B10, B30, B50. The approximation of the deformation diagrams by polynomials of the second and third order is given by the least squares method. The calculations were performed both for the case of the same coefficients for the zones of tension and compression, and different ones. An algorithm for solving the problem of longitudinal-transverse bending of a beam in the case of the used data of approximations of diagrams is given.

Keywords: beam, concrete deformation diagram, longitudinal-transverse bending, static definability, bending moment, composites

REFERENCES

- [1] Ivaschenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual deformation diagrams of materials taking into account the actual change in the area of their cross-sections // dis. ... Cand. tech. sciences. Voronezh, 2006. 230 p.
- [2] Mayilyan L., Ivaschenko E. Calculation of reinforced concrete members based on actual material deformation diagrams. Rostov-on-Don: Publishing house of RSBU, 2006. 222 p.
- [3] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems of the theory of elasticity and plasticity: proceedings of the XIX All-Russian conference, Biysk, 28-31 August 2005. Parallel, 2005. P. 184–188.
- [4] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55 (6). P. 767–775.
- [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel fiber reinforced concrete rods // Bulletin of Altai State University. 2021. no. 1 (117). P. 40–46.
- [6] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Limit state of concrete and reinforced concrete rods in complex and longitudinal-transverse bending // Vestnik PNIPU. Mekhanika. 2020. no. 1. p. 60–73.
- [7] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape of a multilayer concrete bar on the bearing capacity under longitudinal-transverse load // Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Collection of abstracts of the 9th all-Russian scientific conference with international participation named after I.F. Obraztsov and Yu.G. Yanovsky dedicated to the 30th anniversary of IPRIM RAS. 2019.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [9] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete rods under quasi-static loads // Structural Modeling and Mechanics. 2020. no. 12. P. 11–49.
- [10] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.
Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Нгуен Ш. Т., Христич Д. В.</i> Идентификация параметров квадратичной модели упругого анизотропного материала	3
<i>Володин Г. Т., Кочергин Д. С.</i> Импульсная нагрузка на неподвижную преграду при взрыве в воде	12
<i>Буренин А. А., Ткачева А. В.</i> Осевое вращение в качестве причины падения натяга в сборке составного диска, полученной способом горячей посадки	19
<i>Гультяев В. И., Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Саврасов И. А.</i> Экспериментальное исследование стали 45 по некоторой гладкой криволинейной траектории деформирования	33
<i>Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б.</i> К вопросу кручения неоднородных стержней, находящихся под действием внешнего давления	42
<i>Матвеева А. Н., Матвеев С. В.</i> Предельное состояние тел при отрыве в случае общей плоской задачи	47
<i>Ковалев В. А., Мурашкин Е. В.</i> О постановке граничных условий при моделировании процессов производства тканых материалов	56
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Обобщенная интегральная теорема Стокса для ковариантного псевдотензорного поля	66
<i>Орлов В. Н., Мустафина Л. В.</i> Аналитическое решение для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка в комплексной области	75
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Продольно-поперечный изгиб физически-нелинейных железобетонных балок	85
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	94
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	97
СОДЕРЖАНИЕ	99

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2021. № 3 (49)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 22.12.2021. Выход в свет 29.12.2021.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 12,5.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 1979

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38