

ВЕСТНИК

ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

им. И. Я. ЯКОВЛЕВА

СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

№ 2(5) • 2008

ББК 95.4; 22.251

Ч-823

Учредитель

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор Г. Н. Григорьев

Учредители серии

Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,

Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Г. П. Черепанов, Е. И. Шемякин,

А. А. Шуканов.

Редакционная коллегия:

Ивлев Д. Д. – ответственный редактор,

Максимова Л. А., Матченко Н. М., Миронов Б. Г. – зам. ответственного редактора,

Тихонов С. В. – ученый секретарь,

Баженов В. Г., Буренин А. А., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М.,

Ковалев В. А., Ломакин Е. В., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В.,

Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радаев Ю. Н., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И.,

Спoryхин А. Н., Трещев А. А., Хромов А. И., Шашкин А. И., Шемякин Е. И.

Международный совет

Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан),

Тамуж В. П. (Латвия), Черепанов Г. П. (США), Чигарев А. В. (Белоруссия).

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19, e-mail: predel21@mail.ru.

Электронный адрес: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2008

СЕРДЕЧНО ПОЗДРАВЛЯЕМ

Буренина

Анатолия Александровича,

Ломакина

Евгения Викторовича

с избранием членами-корреспондентами

Российской Академии Наук

редколлегия, редакция

Амензаде Р. Ю., Киясбейли Э. Т., Фатуллаева Л. Ф.

ПРЕДЕЛЬНОЕ ВРЕМЯ СЖАТОГО МНОГОСЛОЙНОГО ВЯЗКО-УПРУГОГО КОЛЬЦА

(Институт прикладной математики бакинского государственного университета)

Целью настоящей статьи является исследование потери устойчивости многослойного линейно вязко-упругого кольца, составленного из различных материалов и находящегося под действием равномерно распределенного внешнего давления заданной интенсивности.

Ключевые слова: многослойное вязко-упругое кольцо, модуль упругости, коэффициент ползучести материала, пакет, критическое время, вариационный метод, метод Релея-Ритца, аппроксимирующая функция, сжимающая нагрузка, мгновенная деформация, напряжение.

В настоящей статье излагается способ построения приближенных решений краевых задач ударного деформирования лучевым разложением за фронтами разрывов деформаций. Показана методика включения полученных прифронтовых разложений решений в конечно-разностную схему расчетов с целью выделения на каждом временном шаге положения поверхности разрывов деформаций и определения интенсивности разрывов на ней.

Актуальность и важность таких задач связаны с изысканием резервов экономии материала с одновременным повышением несущей способности конструкции. При решении такого класса задач необходим учет геометрической нелинейности. Получение здесь эффективных аналитических решений весьма затруднительно, а порою невозможно. Это связано с необходимостью интегрирования нелинейных краевых задач с разрывными коэффициентами. Поэтому, чтобы обойти возникающие при этом математические трудности, решение задачи осуществляется посредством вариационного метода смешанного типа.

Для трехслойного кольца при его симметричной структуре относительно срединной поверхности численно выявлено влияние различных геометрически нелинейных теорий на критическое время устойчивости.

1. Вывод вариационного уравнения. Зададим полярную систему координат (z, j) и введем в рассмотрение кольцо радиуса R и толщины $2h$. Предположим, что оно составлено из s чередующихся соединенных между собой по всем окружностям, разных по толщине концентрических слоев с разными значениями модуля упругости E_{k+1} и функциями ползучести $D_{k+1}\{(t-t)S(t)\}$ [$k = 0, 1, \mathbf{K}(s-1)$]. Далее будем их считать линейными относительно напряжения S

$$D_{k+1} \{(t-t)s(t)\} = F'_{k+1}(t-t)s(t),$$

где $F'_{k+1}(t-t)$ – разностное ядро ползучести, а штрих означает дифференцирование по параметру $(t-t)$ [5]. Толщину каждого слоя обозначим через d_k . Таким образом, $d_1 + d_2 + \mathbf{K} + d_s = 2h$ есть полная толщина кольца.

В работе [1] аналогичная задача решена при использовании теории, в которой учитывается нелинейность только прогиба w и при этом считается выполненным неравенство $w/R \ll 1$.

В основе используемой здесь геометрически нелинейной теории ставятся следующие предположения:

- а) в процессе деформирования учитывается одновременно нелинейность и по прогибу и по касательному перемещению v (полная нелинейность);
- б) пренебрегая касательным перемещением, ограничимся нелинейностью только прогиба;
- в) условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком сцеплении, из чего следует равенство на них перемещений и отсутствие взаимного давления слоев;
- г) процесс устойчивости происходит в плоскости кольца;
- д) в силу тонкостенности окружное напряжение S меняется по толщине по линейному закону.

Применимость и точность последнего допущения обоснована в [3]. В дальнейшем будем руководствоваться гипотезой плоских сечений Кирхгофа-Лява, при которых допущения в) выполняются автоматически.

При принятых предположениях, выпишем физическое соотношение для пакета в целом в виде одного равенства [5]

$$e^\Phi = \frac{S}{E_{k+1}} + \int_0^t F'_{k+1}(t-t)s(t)dt, \quad a_k \leq z \leq a_{k+1}, \quad (1.1)$$

где

$$a_k = -h + \sum_{i=0}^s d_j, \quad (d_0 = 0). \quad (1.2)$$

Для дальнейших целей конкретизируем функцию $F'_{k+1}(t-t)$, задав её в экспоненциальном виде

$$F'_{k+1}(t-t) = \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-a(t-t)}. \quad (1.3)$$

Здесь A_{k+1} – коэффициенты ползучести материалов слоев, а показатель a принимается одинаковым для всего пакета.

Рассмотрим теперь устойчивость выбранного кольца, сжатого равномерно распределенной по внешней поверхности сжимающей нагрузкой $q = const$.

Вследствие гипотезы плоских сечений запишем

$$e = e_0 + kz.$$

Учитывая допущение а) величину e_0 и кривизну k определим по формулам нелинейной теории тонких оболочек [6]

$$e_0 = \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial j} \right) + \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial j} + w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial j} - v \right)^2 \right\}, \quad k = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial j^2} - \frac{\partial v}{\partial j} \right). \quad (1.4)$$

Для случая б) соответствующие формулы приводятся к виду

$$e_0 = \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left\{ w^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial j} \right)^2 \right\}, \quad k = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial j^2} - \frac{\partial v}{\partial j} \right). \quad (1.5)$$

Решение задачи проведем посредством вариационного принципа [4], при котором значения функционалов для случаев а) и б) принимают, соответственно, следующие выражения

$$\begin{aligned} K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \mathfrak{L} + \frac{S}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} - \mathfrak{L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} + \mathfrak{L} \right)^2 \right] \right\} dj dz - \\ - R \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathfrak{L}^\Phi dz dj + \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\mathfrak{L}^2}{E_{k+1}} dz dj \end{aligned} \quad (1.6)$$

и

$$\begin{aligned} K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \mathfrak{L} + \frac{S}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} \right)^2 + \mathfrak{L}^2 \right] \right\} dj dz - \\ - R \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathfrak{L}^\Phi dz dj + \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\mathfrak{L}^2}{E_{k+1}} dz dj . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Под точкой здесь и далее будем понимать дифференцирование по физическому времени t . Из (1.3) имеем

$$F''(t-t) = -a \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-a(t-t)}$$

и для \mathfrak{L}^Φ запишем

$$\mathfrak{L}^\Phi = \frac{1}{E_{k+1}} \left\{ \mathfrak{L} + A_{k+1} \left[s - a \int_0^t e^{-a(t-t)} s(t) dt \right] \right\}. \quad (1.8)$$

Учитывая в (1.6) и (1.7) зависимость (1.8), значения функционалов оказываются следующими:

для случая а)

$$\begin{aligned} K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \mathfrak{L} + \frac{S}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} - \mathfrak{L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} + \mathfrak{L} \right)^2 \right] \right\} dj dz - \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathfrak{L}^2 dz dj - \\ - R \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} s \mathfrak{L} dz dj + aR \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left\{ \int_0^t e^{-a(t-t)} s(t) dt \right\} dz dj , \end{aligned} \quad (1.9)$$

для случая б)

$$K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \mathfrak{L} + \frac{S}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} \right)^2 + \mathfrak{L}^2 \right] \right\} dj dz - \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathfrak{L}^2 dz dj -$$

$$-R \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} s \mathcal{S} dz dj + aR \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathcal{S} \left[\int_0^t e^{-a(t-t)} s(t) dt \right] dz dj . \quad (1.10)$$

Для получения окончательного вида функционала, воспользуемся методом Релея-Ритца. С этой целью, в качестве аппроксимирующих функций положим

$$w = w_0(t) + w_1(t) \cos lj , \quad v = v_0(t) \sin lj , \quad M = m(t) \cos lj \quad (1.11)$$

или после дифференцирования по t в скоростях будем иметь:

$$\dot{w} = \dot{w}_0 + \dot{w}_1 \cos lj , \quad \dot{v} = \dot{v}_0 \sin lj , \quad \dot{M} = \dot{m} \cos lj , \quad (1.12)$$

где величина l принимает четные значения (2, 4, 6) и характеризует число волн в окружном направлении, а w_0 , w_1 , v_0 и m – независимые варьируемые параметры. Следуя допущению д), в дальнейших рассуждениях примем

$$s = -\frac{qR}{2h} + \frac{3z}{2h^3} M \quad \text{или} \quad \mathcal{S} = \frac{3z}{2h^3} M \mathcal{M} . \quad (1.13)$$

2. Случай полной нелинейности. Последующий ход вычислений заключается в том, что соотношения (1.11) – (1.13) подставляются в выражение функционала (1.9) и после интегрирования по z и j находим его как функцию w_0 , w_1 , v_0 , m и их производных по t . Проведя соответствующие выкладки, получим

$$\begin{aligned} K = & \frac{pl^2}{R} w_1 \dot{w}_1 + \frac{pl}{R} \dot{w}_0 \dot{m} - \frac{pl^2}{2} q v_1^2 - \frac{pq}{2} v_0^2 - \frac{pl^2}{2} q v_0^2 - pq v_0^2 - \frac{p}{2} q v_1^2 - \\ & - 2plq v_1 v_0 - \frac{9pR}{8h^6} h_2 m^2 - \frac{9pR}{4h^6} g_2 m \dot{m} + a \frac{9pR}{4h^6} g_2 \mathcal{M} \int_0^t e^{-a(t-t)} m(t) dt . \end{aligned} \quad (2.1)$$

В (2.1), для краткости записи, введены следующие обозначения

$$h_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz , \quad g_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz . \quad (2.2)$$

Условие стационарности построенного функционала (2.1)

$$dK = 0 ,$$

соответствующее равенству нулю выражений

$$\frac{\partial K}{\partial w_0} = 0 , \quad \frac{\partial K}{\partial w_1} = 0 , \quad \frac{\partial K}{\partial v_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial K}{\partial m} = 0$$

приводит к следующей системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{m} = \frac{l^2 - 1}{l^2} Rq v_1 \quad \text{или} \quad m = \frac{l^2 - 1}{l^2} Rq w_1 , \quad \text{т.к.} \quad m = 0 \quad \text{при} \quad q = 0 , \\ \dot{v}_0 = -\frac{1}{l} \dot{w}_1 , \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{l^2}{R} \dot{w}_1 + \frac{p}{R} \dot{w}_0 l - \frac{9R}{4h^6} h_2 \dot{m} - \frac{9R}{4h^6} g_2 m + a \frac{9R}{4h^6} g_2 \int_0^t e^{-a(t-t)} m(t) dt = 0 .$$

Отсутствие четвертого уравнения связано с тем, что оно удовлетворяется тождественно. Комбинируя уравнения (2.3), можно записать

$$\begin{aligned}
& w_1 \left(-\frac{l^2 - 1}{R} + \frac{9(l^2 - 1)R^2}{4l^2 h^6} h_2 q \right) + \frac{9(l^2 - 1)R^2}{4l^2 h^6} g_2 q w_1 - \\
& - a \frac{9(l^2 - 1)R^2}{4l^2 h^6} g_2 q \int_0^t e^{-a(t-t)} w_1(t) dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) необходимо дополнить начальным условием

$$w_1(0) = w_1^0.$$

Величина w_1^0 представляет собой значение прогиба немедленно после приложения нагрузки q . Рассмотрение вопроса об устойчивости при вязко-упругости имеет смысл только тогда, когда действующая нагрузка меньше критической. Так как мгновенная деформация линейно упругая, то для определения w_1^0 и q_{kp} естественно применить вариационный принцип [2], задавшись тем же предположительным распределением напряжения, перемещений и момента, что и при анализе вязко-упругости, то есть представив w , v , M и S формулами (1.11) и (1.13). Соответствующий функционал в этом случае принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \frac{S}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial j} - v \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial j} + v \right)^2 \right] \right\} dj dz - \\
- \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} S^2 dz dj + R \int_0^{2p} w dj.
\end{aligned}$$

Однако здесь под точкой следует понимать дифференцирование по q . Вычисляя этот функционал и варьируя его по w_0 , w_1 , v_0 и v_1 , окончательно приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно w_1

$$w_1 = w_1^0 \left\{ \frac{3R^2(l^2 - 1)}{2l^2 h^4} h_2 \right\} \left\{ \frac{2h^2(l^2 - 1)}{3R} - \frac{3R^2(l^2 - 1)}{2l^2 h^4} q h_2 \right\}^{-1}. \tag{2.5}$$

Для определения критической нагрузки надо приравнять нулю знаменатель уравнения (2.5). Отсюда

$$q_{kp} = \frac{4l^2 h^6}{9R^3} h_2^{-1}, \tag{2.6}$$

а величина мгновенного прогиба находится по формуле, которую легко установить из интегрирования уравнения (2.5) методом разделения переменных

$$w_1^0 = w_1^y \frac{1}{1 - \frac{9R^3 q}{4l^2 h^6} h_2}. \tag{2.7}$$

Здесь величина w_1^y – задаваемая амплитуда начального несовершенства кольца.

Введем следующие безразмерные соотношения, позволяющие значительно сократить последующие записи

$$y = \frac{w_1}{h}, \quad w = \frac{q}{q_{kp}} = \frac{w_1}{l^2},$$

где

$$w_1 = q \left\{ \frac{4h^6}{9R^3} h_2^{-1} \right\}^{-1},$$

а $q_{кр}$ определяется по формуле (2.6).

Такое обезразмеривание w преследует цель записать далее задачу в виде, явным образом зависящим от l . Что касается w , то, как уже отмечалось выше, для неё имеем неравенство $w < 1$, откуда следует, что $w_1 < l^2$. Теперь, уравнение (2.4) и начальное условие (2.7) будут выглядеть следующим образом

$$\left\{ y - a \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\} = 0, \quad (2.8)$$

$$y_0 = y^\vee \frac{1}{1 - \frac{w_1}{l^2}}, \quad (2.9)$$

где

$$y^\vee = \frac{w_1^\vee}{h}.$$

Учитывая формулу дифференцирования под знаком интеграла, имеем равенство

$$\left\{ \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\}^\bullet = y - a \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt,$$

которое приводит уравнение (2.8) к виду

$$\left\{ y(t) - \frac{w_1}{l^2 - w_1} \frac{g_2}{h_2} \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\}^\bullet = 0.$$

Проинтегрировав выражение в фигурных скобках, получим

$$y(t) - \frac{w_1}{l^2 - w_1} \frac{g_2}{h_2} \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt = C. \quad (2.10)$$

Постоянную C определим, используя условие (2.9). При $t = 0$

$$C = y(0) = y_0,$$

а именно

$$C = y^\vee \frac{1}{1 - \frac{w_1}{l^2}}.$$

Тогда, если обозначить через b комбинацию

$$b = \frac{w_1}{l^2 - w_1} \frac{g_2}{h_2},$$

из (2.10) будем иметь

$$y(t) - b \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt = y_0. \quad (2.11)$$

Отсюда, используя замену

$$-l = b - a,$$

уравнение (2.11) приведем к виду

$$y(t) - b \int_0^t e^{-(l+b)(t-t)} y(t) dt = y_0. \quad (2.12)$$

Теперь можно сразу написать решение интегрального уравнения (2.12) [8, 25]

$$y = y_0 \left\{ 1 + b \int_0^t e^{-l(t-t)} dt \right\}. \quad (2.13)$$

Вычисляя интеграл, фигурирующий в (2.13), получим

$$y(t) = y_0 \left\{ \left(1 - \frac{a}{l} \right) e^{-lt} + \frac{a}{l} \right\}. \quad (2.14)$$

Согласно формуле (2.14) следует, что в зависимости от знака l возможны различные варианты решения. Если $l \leq 0$, то осуществляется неограниченный рост прогиба во времени. При $l < 0$ он имеет экспоненциальный характер, а для $l = 0$ – линейный, причем

$$y = y_0(1 + at),$$

в чем можно легко убедиться, применив к формуле (2.14) правило Лопиталья. Если же $l > 0$, то наблюдается ограниченный рост прогиба. Его предельное значение определяется величиной $y_* = y_0 \frac{a}{l}$, где, по определению, $a/l > 1$.

3. Случай нелинейности только прогиба. Оставляя в основном прежние обозначения, будем пренебрегать касательным перемещением и ограничимся учетом нелинейности только прогиба. Соответствующие соотношения (1.11) – (1.13) подставляются в выражение функционала (1.10) и после известной процедуры имеем

$$\begin{aligned} K = & \frac{pl^2}{R} w_1^2 - \frac{pl^2}{2} q w_1^2 - p q w_0^2 - \frac{p}{2} q w_1^2 - \frac{9pR}{8h^6} h_2 w_1^2 - \frac{9pR}{4h^6} g_2 m w_1^2 + \\ & + a \frac{9pR}{4h^6} g_2 m \int_0^t e^{-a(t-t)} m(t) dt. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь h_2 и g_2 определяются по формуле (2.2).

В результате вычислений, выполненных аналогично предыдущим, получим:

$$\begin{aligned} & w_1 \left(-\frac{l^2}{R} + \frac{9(l^2+1)R^2}{4l^2h^6} h_2 q \right) + \frac{9(l^2+1)R^2}{4l^2h^6} g_2 q w_1 - \\ & - a \frac{9(l^2+1)R^2}{4l^2h^6} g_2 q \int_0^t e^{-a(t-t)} w_1(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь в качестве $q_{кр}$ принимается значение критической силы для случая нелинейности только прогиба, которое определяется по формуле

$$q_{кр} = \frac{16l^2h^6}{45R^3} h_2^{-1}, \quad (3.3)$$

а величина мгновенного прогиба находится из равенства

$$w_1^0 = w_1^\vee \frac{1}{1 - \frac{45R^3 q}{16l^2 h^6} h_2}. \quad (3.4)$$

Заметим, что соотношения (3.3) и (3.4) получены таким же образом, что и в пункте 2 для принятой здесь нелинейной теории.

Задавая прежние безразмерные соотношения

$$y = \frac{w_1}{h}, \quad w = \frac{q}{q_{кр}} = \frac{w_1}{l^2},$$

в которых

$$w_1 = q \left\{ \frac{16h^6}{45R^3} h_2^{-1} \right\}^{-1},$$

а $q_{кр}$ определяется по формуле (3.3), уравнение (3.2) и начальное условие (3.4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{w_1}{5l^4} \frac{g_2}{h_2} \left\{ y - a \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\} = 0, \quad (3.5)$$

$$y_0 = y^\vee \frac{1}{1 - \frac{w_1}{l^2}}, \quad (3.6)$$

где

$$y^\vee = \frac{w_1^\vee}{h}.$$

Теперь не представляет труда записать решение (3.5), которое имеет вид

$$y(t) = y_0 \left\{ \left(1 - \frac{a}{l} \right) e^{-lt} + \frac{a}{l} \right\}. \quad (3.7)$$

Здесь

$$-l = b - a,$$

а b определяется из равенства

$$b = \frac{w_1}{5l^4} \frac{g_2}{h_2} \frac{1}{4(l^2 + 1) - w_1}.$$

Чисто визуальная идентичность полученных решений (2.14) и (3.7) вполне объяснима проведенным обезразмериванием, так как в обоих случаях критическая сила выбирается из решения соответствующей линейно-упругой задачи. Поэтому здесь вопрос необходимо формулировать следующим образом: задавать такие величины w , которые соответствуют одному и тому же значению q . Очевидно, что тогда численное значение мгновенных прогибов будут различными.

Принимая $w_1 = 3$, что заимствовано из работы [1], где исследован случай простой геометрической нелинейности, из предыдущих рассуждений имеем следующую цепочку равенств

$$3q_{кр}^{(1)} = w_2 q_{кр}^{(2)} = w_3 q_{кр}^{(3)},$$

в которых

$$q_{кр}^{(1)} = \frac{l^2 h^6}{9R^3} h_2^{-1}, \quad q_{кр}^{(2)} = \frac{16l^2 h^6}{45R^3} h_2^{-1}, \quad q_{кр}^{(3)} = \frac{4l^2 h^6}{9R^3} h_2^{-1}.$$

Здесь верхние и нижние индексы соответствуют различным теориям нелинейности, а именно: (1) – простая нелинейность, (2) – нелинейность только прогиба, (3) – полная нелинейность. Отсюда имеем

$$w_2 \approx 0,94, \quad w_3 \approx 0,75.$$

4. Численный расчет и выводы. Полученные выше решения (2.14) и (3.7) в принципе применимы для любых значений t . Однако очень большие прогибы в кольцах, являющихся элементами конструкций, недопустимы сами по себе. Поэтому весьма разумно ограничить время эксплуатации кольца условием достижения прогибом некоторой величины, фиксированной из тех или иных физически обоснованных соображений и тем самым определить критическое время устойчивости $t_{кр}$. Примем $\tilde{y} = 1$, что соответствует безразмерному прогибу, равному половине толщины. Согласно отмеченному, запишем

$$1 = y_0 \left\{ \left(1 - \frac{a}{l} \right) e^{-l t_{кр}} + \frac{a}{l} \right\},$$

откуда находим

$$t_{кр} = -\frac{1}{l} \ln \left| \frac{l - a y_0}{l y_0 \left(1 - \frac{a}{l} \right)} \right|. \quad (4.1)$$

Далее ограничимся случаем $l < 0$ и приведем некоторые результаты вычислений, соответствующих различным значениям физических и геометрических параметров, характеризующих кольцо. Примем

$$A_1 = 0,8 \text{ сек}^{-1}, \quad y_0^\vee = 10^{-1}.$$

В таблице 1 приведены численные значения мгновенного прогиба, соответствующие одной и той же сжимающей силе q .

Таблица 1

w	$w_1 = 3$	$w_2 = 0,94$	$w_3 = 0,75$
y_0	0,4	0,13	0,12

Такой выбор значений w всегда обеспечивает условие выполнения неравенства $w/l^2 < 1$, и пригоден при любом числе волнообразования l . Кольцо представим трехслойным ($s = 3$) и обладающим следующей периодической структурой

$$E_1 = E_3, \quad A_1 = A_3, \quad d_1 = d_2.$$

Введем дополнительные безразмерные обозначения

$$E = \frac{E_1}{E_2}, \quad A = \frac{A_2}{A_1} \quad \text{и} \quad x = \frac{d_2}{d_1}.$$

Исходя из этого, по формуле (1.2), для a_k имеем

$$a_0 = -h, \quad a_1 = -\frac{d_2}{2}, \quad a_2 = \frac{d_2}{2}, \quad a_3 = h.$$

Отмеченное выше позволяет определить отношение g_2/h_2 , которое записывается в виде

$$\frac{g_2}{h_2} = A_1 \frac{1 + 1,5x + 0,75x^2 + 0,125EAx^3}{1 + 1,5x + 0,75x^2 + 0,125Ex^3}.$$

Случай однородного кольца автоматически вытекает из формулы (4.1), при $E = A = x = 1$.

Теперь мы готовы представить результаты вычислений, выполненных исходя из полученной выше зависимости (4.1).

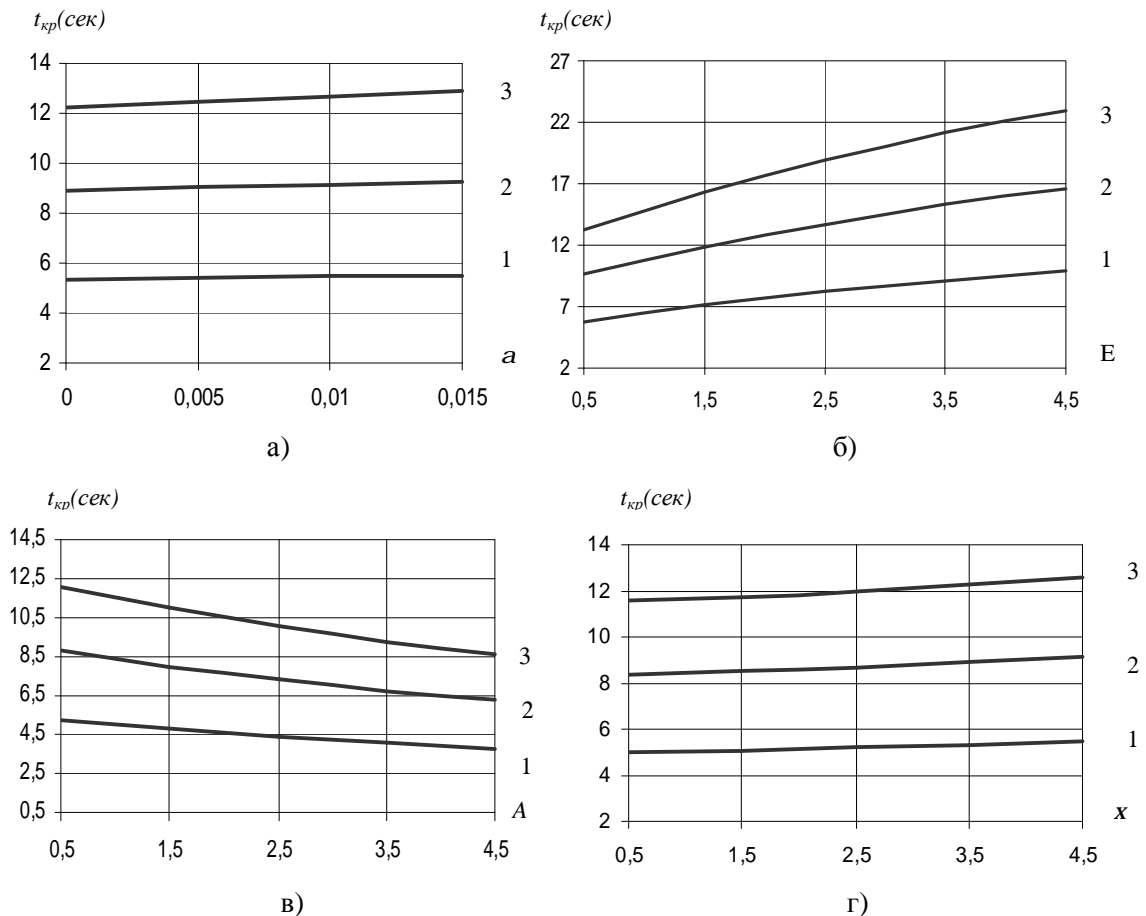


Рис. 1. Зависимости критического времени устойчивости $t_{кр}$ от параметров a (a , $E = 0,25$; $x = 4$, $A = 0,25$); E ($б$, $a = 0,005$, $A = 0,25$, $x = 4$); A ($в$, $a = 0,005$, $E = 0,25$, $x = 4$); x ($г$, $a = 0,005$, $E = 0,25$, $A = 0,25$). Цифры у кривых соответствуют разным теориям нелинейности: (1) – простая нелинейность, (2) – нелинейность только прогиба, (3) – полная нелинейность.

На рисунке 1 приведены зависимости критического времени $t_{кр}$ от величин a , E , A и x , которые вычислялись для $l = 2$, что соответствует выпучиванию кольца в виде «восьмерки». Здесь важно указать, что при расчетах параметры кольца выбирались таким

образом, чтобы всегда сохранялось условие $I < 0$. Что касается значений a , E и A , то они заимствованы из [7].

Таким образом, проведенный численный расчет позволяет заключить: учет полной нелинейности приводит к существенному увеличению критического времени, откуда следует, что при прочих равных условиях это приводит к возможности более рационально использовать несущую способность кольца.

Небезынтересно заметить, что для однородного случая $t_{кр}^{(1)} = 5,01 \text{ сек}$, $t_{кр}^{(2)} = 8,38 \text{ сек}$ и $t_{кр}^{(3)} = 11,53 \text{ сек}$ при $a = 0,005$.

В заключении отметим, что конструированием неоднородности можно увеличить (уменьшить) критическое время устойчивости и тем самым в определенном смысле оптимизировать конструкцию.

г. Баку

Поступила: 14 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде, Р. Ю. Критическое время многослойной вязко-упругой длинной оболочки / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли // Журнал «Механика композитных материалов». – 2007. – № 5. – С. 617-628.
2. Амензаде, Р. Ю. Применение вариационного принципа к задаче выпучивания неоднородного по толщине нелинейно-упругого кольца / Р. Ю. Амензаде, Р. А. Гурбанов, Х. Т. Гусиев // Журнал «Механика композитных материалов». – 1995. – № 2. – С. 262-268.
3. Амензаде, Р. Ю. О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли // Докл. АН Азербайджана. – 2000. – № 4–6. – С. 72-77.
4. Амензаде, Р. Ю. Вариационный метод механики гетерогенных нелинейно вязко-упругих твердых тел / Р. Ю. Амензаде, М. Б. Ахундов // Докл. РАН. – 2006. – т. 410. – № 1. – С. 45-48.
5. Бугаков, Н. Н. Ползучесть полимерных материалов / Н.Н.Бугаков.– М. : 1973. – 287 с.
6. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С.Вольмир.– М. : 1967. – 484 с.
7. Колтунов, М. А. Ползучесть и релаксация / М. А. Колтунов.– М. : «Высшая школа», 1976.– 277 с.
8. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов.– М. : 1977. – 383 с.

Amenzadeh R. Y., Kiyasbeyli E. T., Fatullayeva L. F.

LIMITING TIME COMPRESSED MULTILAYERED VISCOELASTIC RING

(Institute of Applied Mathematics of the Baku State University)

The purpose of present article is research of loss of stability of the multilayered linearly viscoelastic ring which are made of various materials and taking place under action of in regular intervals distributed external pressure of set intensity. The decision of a problem is carried out by means of a variational method of the mixed type. For a three-layer ring at its symmetric structure concerning a median surface influence of various vectorially nonlinear theories on critical time of stability is numerically revealed.

Keywords: *a multilayered viscoelastic ring, the module of elasticity, factor of creep of a material, a package, critical time, a variational method, method Rayleigh-Ritz, the approximating function, compressing loading, instant deformation, a pressure.*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ТОНКОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ
ДИЛАТАНСИИ**

(Тулский государственный университет)

Исследуется напряжено–деформированное состояние тонких пологих оболочек положительной гауссовой кривизны выполненных из дилатирующих материалов за пределом упругости. Получены дифференциальные уравнения, определяющие работу оболочки за пределом упругости. Представлены результаты решения полученных дифференциальных уравнений. Приведены результаты развития зон пластичности при разных нагрузках.

Ключевые слова: *пластичность, дилатация, разнсопротивляемость, формоизменение, текучесть, деформации, условие пластичности, нелинейность, напряженно-деформированное состояние оболочки, дилатансия.*

В настоящее время среди множества конструкционных материалов выделяется достаточно обширный класс материалов, чьи механические характеристики зависят от вида напряженного состояния [2; 4]. К таким материалам относится большинство композиционных и полимерных материалов.

Первой, по всей видимости, теорией, сформулировавшей условия предельного состояния разнсопротивляющихся материалов, была теория Кулона-Мора. Затем, уже в 20 веке, были предложены иные критерии предельного состояния, которые по своей сути являются модификациями гипотезы Мизеса-Генки, с применением различных форм учета влияния шарового тензора. Условия предельных состояний, построенные на основе ранее указанных теорий, содержат три константы материала, преимущественно, определяемые из простейших опытов на растяжение, сжатие и сдвиг. И естественно, что подобный подход не может претендовать на универсальное описание работы широкого класса материалов. Экспериментальные исследования указывают на то, что каждая гипотеза применима лишь для определенного узкого класса материалов при некоторых напряженных состояниях. Гораздо более эффективными оказываются теории, которые предполагают введение в условие прочности материалов функции вида напряженного состояния, определяемой обработкой экспериментальных диаграмм предельных состояний при различных видах напряженного состояния.

Для обобщения подхода к описанию напряженно-деформированного состояния разнсопротивляющихся дилатирующих материалов условие пластичности, можно сформулировать в достаточно общем виде [3]

$$F(\mathbf{s}_{ij}) = t \cdot f(x) = k_t, \quad (1)$$

где $f(x)$ – функция вида напряженного состояния; $x = s/S_0$ – октаэдрическое нормальное нормированное напряжение; $s = s_{ij} \cdot d_{ij}/3$ – среднее напряжение; $S_{ij} = s_{ij} - d_{ij} \cdot s$ – девиатор напряжений; $t = \sqrt{S_{ij} \cdot S_{ij}/3}$ – касательное напряжение на октаэдрической площадке; $S_0 = \sqrt{s^2 + t^2}$ – модуль вектора полного напряжения на октаэдрической площадке; d_{ij} – символ Кронекера; $k_t = \sqrt{2/3} \cdot t_s$, где t_s – предел текучести при чистом сдвиге.

Выражение для функции, характеризующий вид напряженного состояния $f(x)$, входящей в условие (1), определяется индивидуально для каждого материала при обработке экспериментальных диаграмм его предельных состояний при различных видах напряженного состояния. Используя указанный подход в работе [9] для чугуна МСЧ38-60, полиметилметакрилата, фенопласта АГ-4В, графитов ВПП и МПГ-6 предложены линейная, экспоненциальная, кусочно-линейная и кусочно-экспоненциальная аппроксимации функции $f(x)$ соответственно. В частности для полиметилметакрилата эту функцию можно представить следующим математическим выражением

$$f(x) = e^{0,424x}. \quad (2)$$

Величина константы k_t для полиметилметакрилата, входящая в условие (1) равна 58,9МПа.

Следует заметить, что используемый в выражении (1) качественный параметр x изменяется в интервале $[-1;1]$, что позволяет описать широкий спектр напряженных состояний.

Решение задачи изгиба оболочки проводится на основе теории малых упруго-пластических деформаций. При решении поставленной задачи принимаются следующие предпосылки: 1) используются обычные положения технической теории изгиба оболочек – гипотеза плоских нормальных сечений и гипотеза плоского напряженного состояния; 2) диаграмма деформирования материала обладает ярко выраженной площадкой текучести, что позволяет применить модель идеального упруго-пластического тела; 3) нагружение считается простым.

Задача по исследованию напряженно-деформированного состояния оболочек в конечном счете сводится к решению системы двух нелинейных дифференциальных уравнений [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 j}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 j}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 j}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = & \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - K_2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - K_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = & - \left(q + \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 j}{\partial x_1 \partial x_2} + K_2 \cdot \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2} + K_1 \cdot \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где q – интенсивность нагрузки, E – модель упругости материала, K_1 и K_2 – главные кривизны оболочки.

Первое выражение в системе (3) является уравнением совместности или неразрывности деформаций, записанное через функции напряжений $j(x_1, x_2)$ и прогибов $w(x_1, x_2)$, второе – является уравнением равновесия, записанное через изгибающие

моменты M_{ij} , а также функции напряжений и прогибов оболочки. Причем функция напряжений непосредственно связана с продольными усилиями N_{ij} следующими зависимостями

$$N_{11} = h \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2}; N_{22} = h \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2}; N_{12} = -h \frac{\partial^2 j}{\partial x_1 \partial x_2},$$

где h – толщина оболочки.

Введение в условие пластичности функции вида напряженного состояния обуславливает разницу между напряжениями, вызывающими пластичность в растянутой и сжатой зонах сечения (рис. 1). A_{ij} – напряжения вызывающие текучесть в нижней зоне, B_{ij} – напряжения вызывающие текучесть в верхней зоне. A_{ij} и B_{ij} определяются через условие пластичности (1). Работу материала за пределом упругости следует разделить на две стадии: состояние односторонней текучести и состояние двусторонней текучести (рис. 1). На начальном этапе развития пластических деформаций, зоны пластичности появляются на одной поверхности оболочки, а затем, при дальнейшем нагружении, появляется двусторонняя пластичность.

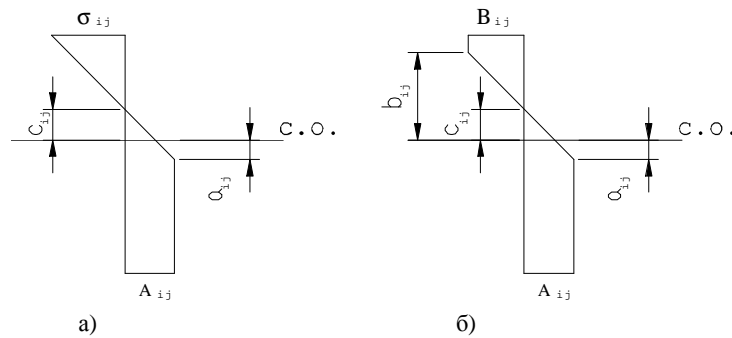


Рис. 1

а) – односторонняя пластичность, б) – двусторонняя пластичность.

В срединной плоскости, в отличие от классической схемы работы материала, возникают деформации e_{ij} , обусловленные не только наличием продольных сил в сечении, но и вызываемые смещением нейтральной поверхности оболочки при изгибе от её срединной плоскости, вследствие разницы значений напряжений, вызывающих пластичность в верхней и нижней зонах сечения. Поэтому выражение для деформаций произвольной точки сечения, не принадлежащей срединной плоскости представляется в виде

$$e_{11} = e_{11} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; e_{22} = e_{22} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; e_{12} = e_{12} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (4)$$

где w – прогиб срединной плоскости; e_{ij} – деформации в срединной плоскости.

$$e_{11} = \frac{du}{dx_1} - k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_1} \right)^2, e_{22} = \frac{dv}{dx_2} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_2} \right)^2, e_{12} = \frac{dv}{dx_1} + \frac{du}{dx_2} + \frac{dw}{dx_1} \cdot \frac{dw}{dx_2}.$$

Выражения для напряжений можно записать в следующем виде

$$S_{ij} = k_{ij}(r_{ij} - z \cdot \Delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2 \quad (5)$$

где

$$k_{11} = k_{22} = E/(1 - m^2); \quad k_{12} = E/(1 + m); \quad r_{11} = e_{11} + m \cdot e_{22}; \quad r_{22} = e_{22} + m \cdot e_{11}; \quad r_{12} = e_{12};$$

$$\Delta_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad \Delta_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad \Delta_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$c_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad c_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad c_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Положение нейтральной плоскости определяем из условия, что при $z = c_{ij}$, $S_{ij} = 0$.

Отсюда

$$c_{ij} = r_{ij} / \Delta_{ij}. \quad (6)$$

Координату начала зон a_{ij}, b_{ij} , в которых возникают напряжения, вызывающие пластичность, определяют из условий, что при $z = a_{ij}$, $S_{ij} = A_{ij}$, а при $z = b_{ij}$, $S_{ij} = B_{ij}$.

Отсюда

$$a_{ij} = \frac{k_{ij} \cdot r_{ij} - A_{ij}}{k_{ij} \cdot \Delta_{ij}}, \quad b_{ij} = \frac{k_{ij} \cdot r_{ij} - B_{ij}}{k_{ij} \cdot \Delta_{ij}}. \quad (7)$$

Значения r_{ij} определяем из условия равенства суммарной площади эпюры напряжений в сечении соответствующему значению продольного усилия, действующего в этом же сечении:

для односторонней пластичности –

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{a_{ij}} S_{ij} dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} dz, \quad (8)$$

для двусторонней пластичности –

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{b_{ij}} B_{ij} dz + \int_{b_{ij}}^{a_{ij}} S_{ij} dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} dz. \quad (9)$$

Значения моментов вычисляются путем интегрирования напряжений по толщине оболочки:

для односторонней пластичности –

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{a_{ij}} S_{ij} z dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} z dz, \quad (10)$$

для двусторонней пластичности –

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{b_{ij}} B_{ij} z dz + \int_{b_{ij}}^{a_{ij}} S_{ij} z dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} z dz. \quad (11)$$

Рассматривая зависимости (5), (10), (11) совместно и проведя несложные преобразования, получим выражения для моментов в виде

$$M_{ij} = R_{ij} + S_{ij} \cdot \Delta_{ij}, \quad (12)$$

где $R_{ij} = B_{ij}(b_{ij}^2 - h^2/4)/2 - A_{ij}(h^2/4 - a_{ij}^2)/2 + k_{ij} \cdot r_{ij}(a_{ij}^2 - b_{ij}^2)/2$, $S_{ij} = -k_{ij}(a_{ij}^3 - b_{ij}^3)/3$.

Для описания напряженно-деформированного состояния оболочки необходимо выражение (12) подставить во второе уравнение системы (3). Следует отметить, что составляющие R_{ij} при дифференцировании обращаются в нуль, а зоны распространения пластичности по толщине оболочки a_{ij} , b_{ij} одинаковы для каждого определенного сечения, поскольку они формируются комплексным соотношением напряжений S_{ij} , а не каждым отдельно взятым напряжением. Вследствие этого будет удобно опустить в дальнейших математических выкладках индексы для указанных величин, приняв для них общие обозначения a , b . Следует заметить, что коэффициенты k_{11} и k_{22} равны между собой, а с коэффициентом k_{12} их связывает следующая зависимость в соответствии с обозначениями, принятыми в формуле (5)

$$k_{11} = k_{22} = k_{12}(1 - m) = E/(1 - m^2). \quad (13)$$

С учетом последних замечаний и формулы (13) запишем в развернутом виде коэффициенты S_{ij} , входящие в уравнение (12)

$$S_{11} = \frac{E(a^3 - b^3)}{3(1 - m^2)}, \quad S_{22} = \frac{E(a^3 - b^3)}{3(1 - m^2)}, \quad S_{12} = \frac{E(a^3 - b^3)}{3(1 - m^2)}(1 - m). \quad (14)$$

Для удобства записи выделим общий множитель $-S$ в выражениях (14) для величин S_{11} , S_{22} , S_{12} и перепишем указанные выражения с учетом последнего обозначения

$$S_{11} = S; \quad S_{22} = S; \quad S_{12} = S(1 - m), \quad (15)$$

где $S = \frac{E(a^3 - b^3)}{3(1 - m^2)}$.

По своей физической сути величина S в выражениях (15) является цилиндрической жесткостью сечения оболочки, ослабленного в результате вступления материала в пластическую стадию деформирования.

Система двух нелинейных дифференциальных уравнений (3), с учетом сделанных замечаний и обозначений, принятых в формулах (15), и выражения (12), после несложных преобразований запишется в следующей форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 j}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 j}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 j}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - K_2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - K_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \\ S \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) &= - \left(q + \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 j}{\partial x_1 \partial x_2} + K_2 \cdot \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2} + K_1 \cdot \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Система уравнений (16) определяет работу оболочки из дилатирующего материала как в упругой, так и в пластической стадиях.

Линеаризация системы двух нелинейных дифференциальных уравнений (16), при решении изгиба оболочек проводилось методом последовательных нагружений, как рекомендовано в работе [5]. Линеаризованная система уравнений (16) будет иметь следующую форму записи:

$$\nabla^4 dj + \nabla_{K+c}^2 dw = 0, \quad \nabla_{K+c}^2 dj + S \cdot \nabla^4 dw - \nabla_q^2 dw = -dq, \quad (17)$$

где

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \nabla_{K-c}^2 = (K_2 - c_{22}) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (K_1 - c_{11}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$
$$\nabla_q^2 = N_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + N_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

dj , dw – приращения функции напряжений и прогибов, соответствующих малому увеличению внешней нагрузки dq ; S , N_{11} , N_{22} , N_{12} , c_{11} , c_{22} , c_{12} – начальные характеристики системы, соответствующие определенному уровню внешней нагрузки.

Решение системы линеаризованных уравнений (17) проводилось численным методом конечных разностей.

Расчет проводился по двум вариантам: в первом варианте в качестве условия предельного состояния использовалось уравнение (1), а аппроксимация функции вида напряженного состояния принималась по выражению (2); во втором варианте расчета в качестве условия предельного состояния применялась классическое уравнение Мизеса [6], не учитывающее зависимость характеристик пластичности от вида напряженного состояния.

Тип поверхности оболочки соответствовал поверхности переноса в виде эллиптического параболоида. Стрела подъема в центре составляла $f = 2$ см. Значения кривизн определены для указанного типа поверхности следующим выражением: $K_1 = K_2 = 4f/l^2$, где l – длина стороны оболочки. Ввиду пологости оболочки геометрия ее поверхности отождествлялась с геометрией на плоскости ее проекции.

Во всех случаях расчета толщина оболочек принималась равной 1 см. Геометрические размеры в плане составляли 20x20 см, модуль упругости – 3,23 МПа, коэффициент поперечной деформации – 0,35. Поверхность оболочки была покрыта сеткой 20x20. В силу симметрии рассчитывалась четвертая часть оболочки. В расчетной схеме было принято подвижное защемление контура оболочки.

На рис.2 представлена полученная картина развития текучести по поверхности оболочки при принятом опирании для первого варианта расчета (на рис. 2.а. – развитие текучести по нижней поверхности оболочки, на рис. 2.б. – развитие текучести по верхней поверхности оболочки). На рис. 2 поверхности, вступившие в состояние текучести, заштрихованы.

Пластичность, при расчете оболочки для первого варианта расчета возникает впервые в верхней зоне оболочки в точке X (рис. 2). Нагрузка, соответствующая появлению пластичности составила 0,95 МПа. Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, составила 10,9 МПа.

Пластичность, при расчете оболочки для второго варианта расчета возникает в верхней зоне оболочки в точке X (рис.2). Нагрузка, соответствующая появлению текучести составила 2,25 МПа. Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, составила 28,9 МПа.

Таким образом, завышение предельной нагрузки, которое дает классическое условие пластичности Губера-Мизеса [6] для полиметилметакрилата составляет 165%.

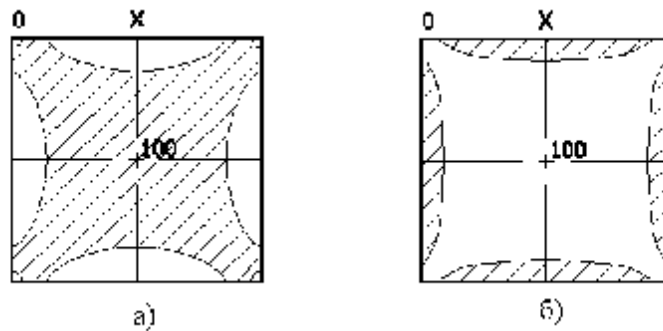


Рис. 2

Полученные результаты очевидно подтверждают тот факт, что описание пластического изгиба оболочек из дилатирующих разнотупоупругих материалов не укладывается в рамки классической теории механики оболочек.

г. Тула

Поступила: 31 марта 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айнбиндер, С. Б.* Влияние гидростатического давления на механические свойства полимерных материалов / С. Б. Айнбиндер, М. Г. Лака, И. Ю. Майорс // *Механика полимеров*. – 1965. – № 1. – С. 65-75.
2. *Березин, А. В.* Сопротивление деформированию и разрушению изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния / А. В. Березин, Е. В. Ломакин, В. И. Строков, В. Н. Барабанов // *Проблемы прочности*. – 1979. – № 2. – С. 60-65.
3. *Божанов, П. В.* Исследование пластического изгиба пластин из дилатирующего материала / П. В. Божанов, А. А. Трещёв // *Изв. Вузов. – Строительство*. – 2003. – №3. – С. 18-23.
4. *Елсуфьев, С. А.* Изучение деформирования фторопласта в условиях плоского напряженного состояния / С. А. Елсуфьев, В. М. Чебанов // *Исследования по упругости и пластичности*. – Л.: ЛГУ, 1971. – Вып. 8. – С. 209-213.
5. *Петров, В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек / В. В. Петров – Саратов: СГУ, 1975. – 119 с.
6. *Писаренко, Г. С.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. – Киев, 1976. – 416 с.
7. *Потапова, Л. Б.* Как прогнозируют предельные напряжения? / Л. Б. Потапова, В. П. Ярцев // *Механика материалов при сложном напряженном состоянии*. – М.: Издательство машиностроение – 1, 2005. – 244 с.
8. *Тимошенко, С. П.* Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский – Кригер – М.: Физматгиз, 1963. – 647 с.
9. *Трещёв, А. А.* Зависимость предельных состояний конструкционных материалов от вида напряженного состояния / А. А. Трещёв // *Изв. Вузов. – Строительство*. – №10. – 1999. – С. 13-18.

DEFINITION OF TENSELY DEFORMED CONDITION OF THE THIN FLAT COVER TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC DILATANCY

(Tula state university)

The is strained-deformed condition of thin flat environments positive Gaussian curvature executed of dilatentive materials behind a limit of elasticity is investigated. The differential equations defining work of an environment behind a limit of elasticity are received. Results of the decision of the received differential equations are presented. Results of development of zones of plasticity are resulted at different loadings.

Key words: *plasticity, dilation, different resistibility, form change, fluidity, deformations, a plasticity condition, the nonlinearity, the is intense-deformed condition of a cover, dilatancy.*

Быкова М. И., Вервейко Н. Д., Шашкина С. А.

ВЛИЯНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА СТЕРЖНЯ НА ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

(Воронежский государственный университет)

Построено модифицированное уравнение Эйлера для изогнутой линии сжатого упругого стержня с учётом микроструктуры материала. Показано, что учёт микроструктуры материала стержня ведёт к уменьшению критической силы и к более ранней потере его устойчивости по сравнению с идеальным случаем однородного сплошного материала.

Список ключевых слов: микроструктура, стержень, тензор деформации.

Классическая модель устойчивости жатого упругого стержня [1] построена в предположении сплошности, однородности материала и сохранения его свойств до сколь угодно малых материальных размеров. [4].

Рассмотрим классический подход [2-3] к построению математической модели изгиба стержня под действием продольной нагрузки P (рис. 1)

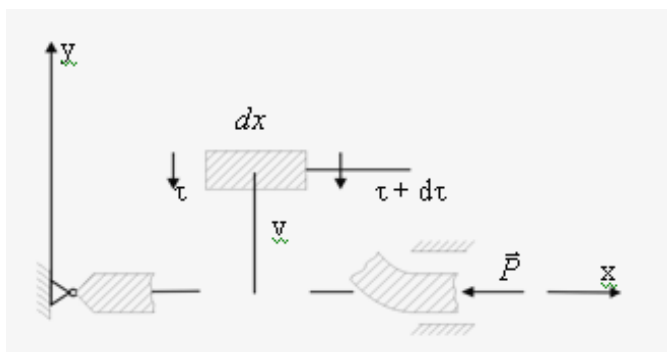


Рис. 1. Принципиальная схема плоского изгиба стержня под действием продольного усилия P .

Уравнение баланса момента сил, приложенных к элементу стержня, включая в себя приращение момента сил от касательных напряжений t , момент продольной сжимающей силы P и имеет вид

$$-I \cdot \frac{d}{dx}(t) = M_{om} = P \cdot v. \quad (1)$$

Для линейного упругого материала касательные напряжения t определяются законом Гука

$$t = E \cdot g, \quad (2)$$

здесь I – момент инерции площади поперечного сечения стержня; v – прогиб стержня; E – модуль упругости материала; P – усилие продольного сжатия; $\frac{dv}{dx} = g$ – деформация сдвига.

Классическая линейная модель устойчивости стержней, которая следует из (1), (2) при использовании тензора деформаций Коши для сплошной среды

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

принимает вид [1-3]

$$v'' + k^2 v = 0; \quad k^2 = \frac{P}{EI}. \quad (3)$$

Для случая шарнирного опирания стержня при $x = 0$, $v(0) = 0$ и отсутствия поперечных перемещений на конце $x = l$, $v(l) = 0$ известно собственное значение k ($kl = p$), откуда находится критическая нагрузка Эйлера

$$P_{кр} = \frac{p^2 EI}{l^2}. \quad (4)$$

Для случая исследования на устойчивость стержня такой длины l , которая больше характерного размера h представительного элемента микроструктурного материала, необходимо использовать уточнение [4] тензора деформаций, который имеет вид [4]

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i} \right), \quad g = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}. \quad (5)$$

С таким изменением (5) деформации изгиба стержня дифференциальное уравнение, аналогичное (3), для прогибов v примет вид

$$\frac{h^2}{6} v'''' + v'' + k^2 v = 0. \quad (6)$$

Вводя безразмерный параметр $e = \frac{h}{l} < 1$, безразмерное перемещение $u = \frac{v}{l}$ и безразмерную координату $x = \frac{x}{l}$ преобразуем уравнение (6)

$$e^2 u'''' + u'' + k^2 u = 0. \quad (7)$$

Здесь $\dot{u} = \frac{du}{dx}$, $k^2 = \frac{P}{EI}$.

Исследуем собственные значения характеристического уравнения для дифференциального уравнения (7)

$$e^2 I^4 + I^2 + k^2 = 0. \quad (8)$$

Биквадратное уравнение (8) имеет точное решение

$$I_i = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 e^2}}{2e^2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Как видно из (9) все собственные значения I_i являются мнимыми, так что решение уравнения (7) для прогибов можно представить следующим образом

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 A_i \cdot \sin I_i l x. \quad (10)$$

Для случая однородных нулевых граничных условий на концах закрепления стержня $u(0) = u(1) = \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$, полагая что не все $A_i \equiv 0$, можно найти наименьшую критическую силу, дающую поперечное перемещение стержня в виде половины гармоники $u = \sin(px)$ при $|I_i| = \frac{p}{l}$.

$$\left(\frac{p}{l}\right)^2 = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k^2 e^2}}{2e^2}}. \quad (11)$$

Уравнение для первого критического значения $k_{кр}^2 = \frac{P_{кр}}{EI}$ (11) позволяет найти первую критическую силу сжатия $P_{кр}^*$

$$P_{кр}^* = \left(\frac{p}{l}\right)^2 EI (1 - (ep)^2) < P_{кр} = \left(\frac{p}{l}\right)^2 EI. \quad (12)$$

Выражение (12) для критической силы, приводящей сжатый стержень в смежное состояние равновесия, позволяет сделать вполне определённый вывод: микроструктура материала, определяемая безразмерным параметром $e = \frac{h}{l}$, ведёт к уменьшению значения критической силы и к более ранней, по сравнению с идеальным материалом при $e \rightarrow 0$, потере устойчивости.

г. Воронеж

Поступила: 29 марта 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер, И. А. Прочность, устойчивость, колебания / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. – Т. 3. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.
2. Тимошенко, С. П. Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. – М. : Мир, 1976.
3. Сияговский, И. С. Сопrotивление материалов / И. С. Сияговский. – М. : Колос, 1968. – 456 с.

4. *Вервейко Н. Д.* Влияние однородной микроструктуры материала на его деформирование и течение / Н. Д. Вервейко, А. А. Воронков, М. И. Быкова // Вестник Воронежского гос. университета. Сер. Физика, математика, 2005. – № 2. – С. 111-118.

Bykova M. I., Verveyko N. D., Shashkina S. A.

MICROSTRUCTURE DEPENDENCE OF PIVOT STABILITY

(Voronezh state university)

The Euler modified equation of curved line of compressed elastic pivot has been constructed with taking into account of microstructure material. The influence of microstructure of pivot material promotes to decrease of critical force and reduces to earlier loss of stability as compared with ideal case of homogeneous continuous material.

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОГО
ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА
ВБЛИЗИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ**

(Чувашиский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

В работе [1] исследовано напряженное состояние изотропного идеальнопластического пространства вблизи сферической полости. В данной работе результаты, полученные в [1], обобщаются на случай анизотропной идеальнопластической среды. Малый параметр δ характеризует возмущение поверхности полости, а также связан с анизотропией среды. Задача статически определяемая. Используется условие полной пластичности [2], переменный предел текучести на одноосное растяжение определяется из условия пластичности Хилла [4]. Рассмотрены три случая возможного исходного невозмущенного напряженного состояния.

1. Рассмотрим напряженное состояние анизотропного пространства вблизи сферической полости. Пространство растягивается на бесконечности равномерными усилиями q . Поверхность полости свободна от усилий. Введем сферическую систему координат r, q, f . Уравнение поверхности полости представим в виде

$$r = r_0 + dr_1(q, f), \quad d \ll 1. \quad (1.1)$$

Условия предельного состояния для главных компонент напряжений запишем в виде

$$s_1 = s_2, \quad s_3 - s_1 = 2k, \quad (1.2)$$

где $2k$ – предел текучести при растяжении.

Условие пластичности Хилла для анизотропной среды имеет вид [4]

$$A(s_r - s_q)^2 + B(s_q - s_f)^2 + C(s_f - s_r)^2 + 6(Ft_{rq}^2 + Gt_{qf}^2 + Ht_{rf}^2) = 6k_0^2, \quad (1.3)$$

где $k_0 - const$, A, B, C, F, G, H – безразмерные константы анизотропии.

Имеют место уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial t_{rf}}{\partial f} + \frac{1}{r} (2s_r - s_q - s_f + t_{rq} \operatorname{ctg} q) &= 0, \\ \frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial t_{qf}}{\partial f} + \frac{1}{r} ((s_q - s_f) \operatorname{ctg} q + 3t_{rq}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial t_{rf}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{qf}}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial s_f}{\partial f} + \frac{1}{r} (3t_{rf} + 2t_{qf} \operatorname{ctg} q) = 0.$$

Предположим, что взаимная ориентация осей ρ , θ , f и главных направлений $1, 2, 3$ определяется табл. 1 направляющих косинусов, тогда, используя известные условия связи между компонентами напряжений в сферической системе координат и главными напряжениями s_1, s_2, s_3 , из (1.2) получим [2] выражения для компонент напряжений, учитывающие условия полной пластичности

Таблица 1

	1	2	3
ρ	l_1	m_1	n_1
θ	l_2	m_2	n_2
φ	l_3	m_3	n_3

$$\begin{aligned} s_r &= s - \frac{2}{3}k + 2kn_1^2, & t_{rq} &= 2kn_1n_2, \\ s_q &= s - \frac{2}{3}k + 2kn_2^2, & t_{qf} &= 2kn_2n_3, \\ s_f &= s - \frac{2}{3}k + 2kn_3^2, & t_{rf} &= 2kn_1n_3, & s &= \frac{1}{3}(s_r + s_q + s_f), \\ & & & & n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения σ_3 в системе ρ, θ, f .

Подставляя (1.5) в (1.3), определим предел текучести k в соотношениях (1.2), (1.5)

$$k = \sqrt{\frac{3}{2}} k_0 \left[A(n_1^2 - n_2^2)^2 + B(n_2^2 - n_3^2)^2 + C(n_3^2 - n_1^2)^2 + 6(Fn_1^2n_2^2 + Gn_2^2n_3^2 + Hn_1^2n_3^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.7)$$

Граничные условия в предположении, что поверхность полости свободна от усилий, записываются в виде

$$\begin{aligned} s_r \cos \vec{n}r + t_{rq} \cos \vec{n}q + t_{rf} \cos \vec{n}f &= 0, \\ t_{rq} \cos \vec{n}r + s_q \cos \vec{n}q + t_{qf} \cos \vec{n}f &= 0, \\ t_{rf} \cos \vec{n}r + t_{qf} \cos \vec{n}q + s_f \cos \vec{n}f &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности полости.

Положим

$$\begin{aligned} a &= 1 + d_1 \bar{a}, & A &= 1 + d_2 \bar{A}, & F &= 1 + d_2 \bar{F}, \\ b &= 1 + d_1 \bar{b}, & B &= 1 + d_2 \bar{B}, & G &= 1 + d_2 \bar{G}, \\ c &= 1 + d_1 \bar{c}, & C &= 1 + d_2 \bar{C}, & H &= 1 + d_2 \bar{H}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$ – const, параметры $\delta_1 \ll 1, \delta_2 \ll 1$.

Пусть $d_2 = cd_1 = cd$, $c \geq 0$, $d \ll 1$, тогда из (1.9) следует

$$d = \frac{a-1}{a} = \frac{b-1}{b} = \frac{c-1}{c} = \frac{A-1}{cA} = \frac{B-1}{cB} = \frac{C-1}{cC} = \frac{F-1}{cF} = \frac{G-1}{cG} = \frac{H-1}{cH}. \quad (1.10)$$

При $\delta = 0$ получаем изотропное пространство с сферической полостью, имеющей невозмущенную поверхность.

Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned}
s_{ij} &= s_{ij}^0 + ds_{ij}', & n_i &= n_i^0 + d n_i', & k &= k^0 + d k', \\
A &= 1 + cd \bar{A}, & F &= 1 + cd \bar{F}, & a &= 1 + d \bar{a}, \\
B &= 1 + cd \bar{B}, & G &= 1 + cd \bar{G}, & b &= 1 + d \bar{b}, \\
C &= 1 + cd \bar{C}, & H &= 1 + cd \bar{H}, & c &= 1 + d \bar{c}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Линеаризируя соотношения (1.3), (1.5), (1.6), получим в нулевом приближении

$$\begin{aligned}
s_r^0 &= s^0 - \frac{2}{3}k^0 + 2k^0 n_1^0{}^2, & t_{rq}^0 &= 2k^0 n_1^0 n_2^0, & (rqf,123) \\
n_1^0{}^2 + n_2^0{}^2 + n_3^0{}^2 &= 1, & & & (1.12)
\end{aligned}$$

$$(s_r^0 - s_q^0)^2 + (s_q^0 - s_f^0)^2 + (s_f^0 - s_r^0)^2 + 6(t_{rq}^0{}^2 + t_{qf}^0{}^2 + t_{rf}^0{}^2) = 6k_0^2,$$

где (rqf,123) означают круговую перестановку индексов.

В первом приближении

$$\begin{aligned}
s_r' &= s' - \frac{2}{3}k' + 4k^0 n_1^0 n_1' + 2k' n_1^0{}^2, & t_{rq}' &= 2k' n_1^0 n_2^0 + 2k^0 (n_1^0 n_2' + n_1' n_2^0), & (rqf,123) \\
n_1^0 n_1' + n_2^0 n_2' + n_3^0 n_3' &= 0, & & & (1.13) \\
\frac{1}{2}c \left[\bar{A}(s_r^0 - s_q^0)^2 + \bar{B}(s_q^0 - s_f^0)^2 + \bar{C}(s_f^0 - s_r^0)^2 \right] + \\
&+ (s_r^0 - s_q^0)(s_r' - s_q') + (s_q^0 - s_f^0)(s_q' - s_f') + \\
&+ (s_f^0 - s_r^0)(s_f' - s_r') + 6 \left[\frac{c}{2}(\bar{F}t_{rq}^0{}^2 + \bar{G}t_{qf}^0{}^2 + \bar{H}t_{rf}^0{}^2) + t_{rq}^0 t_{rq}' + t_{qf}^0 t_{qf}' + t_{rf}^0 t_{rf}' \right] = 0.
\end{aligned}$$

В исходном невозмущенном состоянии ($\delta = 0$) положим

$$s_r^0, s_q^0, s_f^0 \neq 0, \quad t_{rq}^0 = t_{qf}^0 = t_{rf}^0 = 0.$$

Рассмотрим следующие случаи исходного невозмущенного напряженного состояния ($\delta = 0$), соответствующего изотропному пространству со сферической полостью

$$1) s_f^0 \neq 0, \quad s_r^0 = s_q^0 \neq 0, \quad t_{rq}^0 = t_{qf}^0 = t_{rf}^0 = 0, \tag{1.14}$$

$$2) s_r^0 \neq 0, \quad s_q^0 = s_f^0 \neq 0, \quad t_{rq}^0 = t_{qf}^0 = t_{rf}^0 = 0, \tag{1.15}$$

$$3) s_q^0 \neq 0, \quad s_f^0 = s_r^0 \neq 0, \quad t_{rq}^0 = t_{qf}^0 = t_{rf}^0 = 0. \tag{1.16}$$

2. Рассмотрим случай (1.14). Из (1.12), (1.14) получим в нулевом приближении

$$\begin{aligned}
n_1^0 &= n_2^0 = 0, & n_3^0 &= 1, \\
s_f^0 &= s_r^0 + 2k^0, & s_r^0 &= s_q^0, & (2.1)
\end{aligned}$$

$$t_{rq}^0 = t_{qf}^0 = t_{rf}^0 = 0, \quad \text{где } k^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} k_0.$$

Согласно (1.13), (1.14), (2.1) в первом приближении будем иметь

$$n_3' = 0,$$

$$s'_f = s'_r + 2k' = s' + \frac{4}{3}k', \quad s'_r = s'_q = s' - \frac{2}{3}k', \quad (2.2)$$

$$t'_{rq} = 0, \quad t'_{qf} = 2k^0 n'_2, \quad t'_{rf} = 2k^0 n'_1,$$

где

$$k' = -\frac{c}{4} k^0 (\bar{B} + \bar{C}), \quad s' = \frac{1}{3}(s'_r + s'_q + s'_f). \quad (2.3)$$

Из уравнений равновесия (1.4) в нулевом приближении согласно (1.14), (2.1) получим

$$\frac{\partial s'_r}{\partial r} - \frac{2k^0}{r} = 0, \quad \frac{\partial s'_q}{\partial q} - 2k^0 \operatorname{ctg} q = 0, \quad \frac{\partial s'_f}{\partial f} = 0. \quad (2.4)$$

В первом приближении уравнения равновесия с учетом (2.2) примут вид

$$\frac{\partial s'}{\partial r} + \frac{2k^0}{r \sin q} \frac{\partial n'_1}{\partial f} - \frac{2k'}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial s'}{\partial q} + \frac{2k^0}{\sin q} \frac{\partial n'_2}{\partial f} - 2k' \operatorname{ctg} q = 0, \quad (2.5)$$

$$2k^0 \frac{\partial n'_1}{\partial r} + \frac{2k^0}{r} \frac{\partial n'_2}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial s'}{\partial f} + \frac{2k^0}{r} (3n'_1 + 2n'_2 \operatorname{ctg} q) = 0.$$

Удовлетворим первому и второму уравнениям (2.5) с помощью замены

$$s' = 2k' \ln|\sin q| + 2k' \ln|r| \left| \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial f} \right|,$$

$$n'_1 = -\frac{r \sin q}{2k^0} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial r}, \quad n'_2 = -\frac{\sin q}{2k^0} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial q}, \quad (2.6)$$

тогда из третьего уравнения (2.5) получим линейное однородное уравнение

$$r^2 \Psi''_{rr} + \Psi''_{qq} - \frac{1}{\sin^2 q} \Psi''_{ff} + 4r \Psi'_r + 3 \operatorname{ctg} q \Psi'_q = 0. \quad (2.7)$$

Положим $\Psi = R(r)Y(q, f)$, тогда, разделяя переменные в (2.7), для функций $R(r)$ и $Y(q, f)$ получим уравнения

$$r^2 R'' + 4r R' - lR = 0, \quad (2.8)$$

$$Y''_{qq} - \frac{1}{\sin^2 q} Y''_{ff} + 3 \operatorname{ctg} q Y'_q + lY = 0, \quad l - \text{const}. \quad (2.9)$$

Полагая $Y(q, f) = \Theta(q)\Phi(f)$, для функций $\Phi(f)$ и $\Theta(q)$ получим соответственно уравнения

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0, \quad m - \text{целые числа},$$

$$\sin^2 q \Theta'' + 3 \sin q \cos q \Theta' + (\sin^2 q l + m^2) \Theta = 0.$$

Ограниченным решением последнего при $l = (n + 1/2)^2 - 9/4$, $n = 0, 1, 2, \dots$ является функция

$$\Theta(q) = \frac{1}{\sin q} P_n^{m_1}(\cos q), \quad m_1 = \sqrt{1 - m^2}, \quad m_1, n = 0, 1, 2, \dots$$

где $P_n^{m_1}(\cos q)$ – присоединенный полином Лежандра 1-го рода.

Следовательно, решение уравнения (2.7) будет следующим

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) \frac{1}{\sin q} (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) P_n^{\sqrt{1-m^2}}(\cos q), \quad (2.10)$$

$$b = \sqrt{I + \frac{9}{4}}, \quad I = (n+1/2)^2 - \frac{9}{4},$$

где C_1, C_2 – константы, определяемые из граничных условий, в предположении [1], что D_{mn}, E_{mn} совпадают с коэффициентами разложения функции $r_1(q, f)$ в ряд по сферическим функциям.

Порядок присоединенного полинома Лежандра m_1 принимает целые значения при $m = 0$ или $m = 1$. При $m = 1$ функция (2.10) запишется в виде

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) \frac{1}{\sin q} (D_n \cos f + E_n \sin f) P_n^0(\cos q), \quad (2.11)$$

где $b = n + \frac{1}{2}$, $D_n, E_n - const.$

Из (2.2), (2.6), (2.11) определим выражения для компонент напряжений

$$\begin{aligned} s'_r = s'_q &= -\frac{2}{3}k' + 2k' \ln|r \sin q| + \\ &+ \frac{1}{\sin q} \sum_{n=0}^{\infty} (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) (-D_n \sin f + E_n \cos f) P_n^0(\cos q), \\ s'_f &= \frac{4}{3}k' + 2k' \ln|r \sin q| + \\ &+ \frac{1}{\sin q} \sum_{n=0}^{\infty} (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) (-D_n \sin f + E_n \cos f) P_n^0(\cos q), \\ t'_{rq} &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} t'_{qf} &= \sum_{n=0}^{\infty} (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) (D_n \cos f + E_n \sin f) \left(\operatorname{ctg} q P_n^0(\cos q) - \frac{\partial P_n^0(\cos q)}{\partial q} \right) \\ t'_{rf} &= -\sum_{n=0}^{\infty} [(-3/2 + b)C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + (-3/2 - b)C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}] (D_n \cos f + E_n \sin f) P_n^0(\cos q). \end{aligned}$$

3. Рассмотрим случай (1.15). Из (1.12), (1.15) получим в нулевом приближении

$$\begin{aligned} n_2^0 = n_3^0 &= 0, & n_1^0 &= 1, \\ s_r^0 = s_q^0 + 2k^0, & & s_q^0 = s_f^0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$t_{rq}^0 = t_{qf}^0 = t_{rf}^0 = 0, \quad \text{где } k^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} k_0.$$

Согласно (1.13), (1.15), (3.1) в первом приближении будем иметь

$$n_1^1 = 0,$$

$$\begin{aligned} s'_r = s'_q + 2k' = s' + \frac{4}{3}k', \quad s'_q = s'_f = s' - \frac{2}{3}k', \\ t'_{rq} = 2k^0 n'_2, \quad t'_{qf} = 0, \quad t'_{rf} = 2k^0 n'_3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$k' = -\frac{c}{4} k^0 (\bar{A} + \bar{C}), \quad s' = \frac{1}{3}(s'_r + s'_q + s'_f). \quad (3.3)$$

Из уравнений равновесия (1.4) в нулевом приближении согласно (1.15), (3.1) получим

$$\frac{\partial s_r^0}{\partial r} + \frac{2}{r}(s_r^0 - s_q^0) = 0, \quad \frac{\partial s_q^0}{\partial q} = \frac{\partial s_f^0}{\partial f} = 0. \quad (3.4)$$

В первом приближении уравнения равновесия с учетом (3.2) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s'}{\partial r} + \frac{2k^0}{r} \frac{\partial n'_2}{\partial q} + \frac{2k^0}{r \sin q} \frac{\partial n'_3}{\partial f} + \frac{1}{r}(4k' + 2k^0 n'_2 \operatorname{ctg} q) = 0, \\ 2k^0 \frac{\partial n'_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s'}{\partial q} + \frac{1}{r}(6k^0 n'_2) = 0, \\ 2k^0 \frac{\partial n'_3}{\partial r} + \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial s'}{\partial f} + \frac{1}{r}(6k^0 n'_3) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Удовлетворим второму и третьему уравнениям (3.5) с помощью замены

$$s' = \frac{2k^0}{r^2} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial r}, \quad n'_2 = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial q}, \quad n'_3 = -\frac{1}{r^3 \sin q} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial f}, \quad (3.6)$$

тогда из первого уравнения (3.5) получим линейное неоднородное уравнение

$$r^2 \Psi''_{rr} - \Psi''_{qq} - \frac{1}{\sin^2 q} \Psi''_{ff} - 2r \Psi'_r - \operatorname{ctg} q \Psi'_q = Dr^3, \quad (3.7)$$

где

$$D = -\frac{2k'}{k^0} = \frac{c}{2} (\bar{A} + \bar{C}). \quad (3.8)$$

В случае $k' = 0$, т.е. если среда изотропная ($c \bar{A} = c \bar{B} = \dots = c \bar{H} = 0$), или $\bar{A} = -\bar{C}$, или при $\bar{A} = \bar{C} = 0$ уравнение (3.7) становится однородным ($D = 0$) и совпадает с уравнением, приведенным в [3].

Общее решение Ψ линейного неоднородного уравнения (3.7) представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения Ψ_1 и частного решения неоднородного Ψ_2 , т.е. $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Функция Ψ_1 находится методом разделения переменных в соответствующем однородном уравнении. Для этого положим $\Psi_1 = R(r)Y(q, f)$, тогда, разделяя переменные, для функции $R(r)$ получим уравнение Эйлера

$$r^2 R'' - 2rR' - 1R = 0, \quad 1 - \operatorname{const}. \quad (3.9)$$

Полагая $Y(q, f) = \Theta(q)\Phi(f)$, для функций $\Phi(f)$ и $\Theta(q)$ получим соответственно уравнения

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0, \quad (3.10)$$

$$\sin^2 q \Theta'' + \sin q \cos q \Theta' + (-\sin^2 q l - m^2) \Theta = 0. \quad (3.11)$$

Ограниченным решением последнего при $l = -n(n+1)$; $n, m = 0, 1, 2, \dots$ является присоединенный полином Лежандра 1-го рода $P_n^m(\cos q)$. Для функции $Y(q, f)$ получим выражение

$$Y(q, f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) P_n^m(\cos q), \quad D_{mn}, E_{mn} - \text{const.}$$

Решением уравнения (3.9) является функция $R(r) = C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b}$, где $b = \sqrt{\frac{9}{4} - n(n+1)}$. Для действительных значений b получим следующее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (3.7)

$$\Psi_1 = (C_1 r^2 + C_2 r)(D_1 \cos f + E_1 \sin f) P_1^1(\cos q), \quad C_1, C_2, D_1, E_1 - \text{const.} \quad (3.12)$$

Частным решением неоднородного уравнения (3.7) является функция

$$\Psi_2 = \frac{D}{3} \left(r^3 \ln r - \frac{r^3}{3} \right) + C_3 \frac{r^3}{3}, \quad C_3 - \text{const.} \quad (3.13)$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.7) будет следующим

$$\Psi = \left[(C_1 r^2 + C_2 r)(D_1 \cos f + E_1 \sin f) \right] + \frac{D}{3} \left(r^3 \ln r - \frac{r^3}{3} \right) + C_3 \frac{r^3}{3}, \quad (3.14)$$

где C_1, C_2, C_3, D_1, E_1 – константы, определяемые из граничных условий, D – согласно (3.8).

Из (3.2), (3.6), (3.14) получим выражения для компонент напряжений

$$\begin{aligned} s_r' &= \frac{4}{3} k' + \frac{2k^0}{r^2} \left[(2C_1 r + C_2)(D_1 \cos f + E_1 \sin f) P_1^1(\cos q) + D r^2 \ln r + C_3 r^2 \right], \\ s_q' = s_f' &= -\frac{2}{3} k' + \frac{2k^0}{r^2} \left[(2C_1 r + C_2)(D_1 \cos f + E_1 \sin f) P_1^1(\cos q) + D r^2 \ln r + C_3 r^2 \right], \\ t_{rq}' &= -\frac{2k^0}{r^3} (C_1 r^2 + C_2 r)(D_1 \cos q + E_1 \sin f) \frac{\partial(P_1^1(\cos q))}{\partial q}, \\ t_{qf}' &= 0, \\ t_{rf}' &= -\frac{2k^0}{r^3 \sin q} (C_1 r^2 + C_2 r)(-D_1 \sin f + E_1 \cos f) P_1^1(\cos q). \end{aligned} \quad (3.15)$$

4. Рассмотрим случай (1.16). Из (1.12), (1.16) получим в нулевом приближении

$$\begin{aligned} n_1^0 = n_3^0 &= 0, & n_2^0 &= 1, \\ s_q^0 = s_f^0 + 2k^0, & & s_r^0 &= s_f^0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$t_{rq}^0 = t_{qf}^0 = t_{rf}^0 = 0, \quad \text{где } k^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} k_0.$$

Согласно (1.13), (1.16), (4.1) в первом приближении будем иметь

$$\begin{aligned}
n_2' &= 0, \\
s_q' &= s_r' + 2k' = s' + \frac{4}{3}k', \quad s_r' = s_f' = s' - \frac{2}{3}k', \\
t_{rq}' &= 2k^0 n_1', \quad t_{qf}' = 2k^0 n_3', \quad t_{rf}' = 0,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$k' = -\frac{c}{4} k^0 (\bar{A} + \bar{B}), \quad s' = \frac{1}{3}(s_r' + s_q' + s_f'). \tag{4.3}$$

Из уравнений равновесия (1.4) в нулевом приближении согласно (1.16), (4.1) получим

$$\frac{\partial s_r^0}{\partial r} - \frac{2k^0}{r} = 0, \quad \frac{\partial s_q^0}{\partial q} + 2k^0 \operatorname{ctg} q = 0, \quad \frac{\partial s_f^0}{\partial f} = 0. \tag{4.4}$$

В первом приближении уравнения равновесия с учетом (4.2) примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s'}{\partial r} + \frac{2k^0}{r} \frac{\partial n_1'}{\partial q} + \frac{1}{r} (-2k' + 2k^0 n_1' \operatorname{ctg} q) &= 0, \\
2k^0 \frac{\partial n_1'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s'}{\partial q} + \frac{2k^0}{r \sin q} \frac{\partial n_3'}{\partial f} + \frac{1}{r} (2k' \operatorname{ctg} q + 6k^0 n_1') &= 0, \\
2k^0 \frac{\partial n_3'}{\partial q} + \frac{1}{\sin q} \frac{\partial s'}{\partial f} + 4k^0 n_3' \operatorname{ctg} q &= 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Удовлетворим первому и третьему уравнениям (4.5) с помощью замены

$$\begin{aligned}
s' &= -\frac{2k^0}{\sin q} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial q} + 2k' \ln r, \\
n_1' &= \frac{r}{\sin q} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial r}, \quad n_3' = \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\partial \Psi(r, q, f)}{\partial f},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

тогда из второго уравнения (4.5) получим линейное неоднородное уравнение

$$r^2 \Psi_{rr}'' - \Psi_{qq}'' + \frac{1}{\sin^2 q} \Psi_{ff}'' + 4r \Psi_r' + \operatorname{ctg} q \Psi_q' = D_1 \cos q, \tag{4.7}$$

где

$$D_1 = -\frac{k'}{k^0} = \frac{c}{4} (\bar{A} + \bar{B}). \tag{4.8}$$

Общее решение Ψ линейного неоднородного уравнения (4.7) представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения Ψ_1 и частного решения неоднородного Ψ_2 , т.е. $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Функция Ψ_1 находится методом разделения переменных в соответствующем однородном уравнении. Для этого положим $\Psi_1 = R(r)Y(q, f)$, тогда, разделяя переменные, для функции $R(r)$ и $Y(q, f)$ получим уравнения

$$r^2 R'' + 4r R' - 1R = 0, \quad 1 - \text{const}, \tag{4.9}$$

$$Y_{qq}'' - \frac{1}{\sin^2 q} Y_{ff}'' - \operatorname{ctg} q Y_q' - 1Y = 0. \tag{4.10}$$

Полагая $Y(q, f) = \Theta(q)\Phi(f)$, для функций $\Phi(f)$ и $\Theta(q)$ получим соответственно уравнения

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0, \quad (4.11)$$

$$\sin^2 q \Theta'' - \sin q \cos q \Theta' + (-\sin^2 q I + m^2)\Theta = 0. \quad (4.12)$$

Ограниченным решением последнего при $I = 1/4 - (n+1/2)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ является функция

$$\Theta(q) = \sin q P_n^{m_2}(\cos q), \quad m_2 = \sqrt{1-m^2}, \quad m_2, n = 0, 1, 2, \dots$$

где $P_n^{m_2}(\cos q)$ – присоединенный полином Лежандра 1-го рода.

Из (4.9) – (4.12) получим решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (4.7)

$$\Psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) \sin q (D_{mn} \cos mf + E_{mn} \sin mf) P_n^{\sqrt{1-m^2}}(\cos q), \quad (4.13)$$

$$b = \sqrt{\frac{9}{4} + I}, \quad I = \frac{1}{4} - (n+1/2)^2, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Частным решением неоднородного уравнения (4.7) является функция

$$\Psi_2 = \bar{D}_1 \int \sin q \ln|\sin q| dq - C_3 \cos q, \quad C_3 - const \quad (4.14)$$

Параметры b и m_2 принимают действительные значения при условии $m=1$, $n = 0, 1$, тогда общее решение уравнения (4.7) будет следующим

$$\Psi = (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) \sin q (D_n \cos f + E_n \sin f) P_n^0(\cos q) + \bar{D}_1 \int \sin q \ln|\sin q| dq - C_3 \cos q, \quad n = 0, 1, \quad b = \sqrt{5/2 - (n+1/2)^2}. \quad (4.15)$$

где C_1, C_2, C_3, D_n, E_n – константы, определяемые из граничных условий, \bar{D}_1 – согласно (4.8).

Из (4.2), (4.6), (4.15) получим выражения для компонент напряжений

$$\begin{aligned} s_r' &= s_f' = -\frac{2}{3}k' + 2k' \ln r - \\ &- 2k^0 (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) (D_n \cos f + E_n \sin f) \left(\operatorname{ctg} q P_n^0(\cos q) + \frac{\partial P_n^0(\cos q)}{\partial q} \right) + \\ &+ \bar{D}_1 \sin q \ln|\sin q| + C_3 \sin q, \\ s_q' &= \frac{4}{3}k' + 2k' \ln r - \\ &- 2k^0 (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) (D_n \cos f + E_n \sin f) \left(\operatorname{ctg} q P_n^0(\cos q) + \frac{\partial P_n^0(\cos q)}{\partial q} \right), \\ t_{rf}' &= 0, \\ t_{rq}' &= 2k^0 [(-3/2 + b)C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + (-3/2 - b)C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}] (D_n \cos f + E_n \sin f) P_n^0(\cos q), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$t'_{qr} = \frac{2k^0}{\sin q} (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}) (-D_n \sin f + E_n \cos f) P_n^0(\cos q), \text{ при } n = 0, 1.$$

Отметим, что при $k' = 0$ полученные результаты совпадают с результатами, приведенными в [1] для изотропной среды.

г. Чебоксары

Поступила: 19 февраля 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ефремов, В. Г.* Идеальнопластическое напряженное состояние тел вблизи сферической полости / В. Г. Ефремов // Изв. РАН, МТТ. – 1999. – №3. – С. 70-75.
2. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 1. – 448 с.; 2002. – Т. 2. – 448 с.
3. *Семькина, Т. Д.* О трехосном растяжении упруго-пластического пространства, ослабленного сферической полостью / Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – №1. – С. 173-177.
4. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1956. – 407 с.

Герасименко Е. А., Завертан А. А., Рагозина В. Е.

**ЛУЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННО-
АНАЛИТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ ЗАДАЧ УДАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

(Институт автоматизи и процессов управления ДВО РАН)

В настоящей статье излагается способ построения приближенных решений краевых задач ударного деформирования лучевым разложением за фронтами разрывов деформаций. Показана методика включения полученных прифронтовых разложений решений в конечно-разностную схему расчетов с целью выделения на каждом временном шаге положения поверхности разрывов деформаций и определения интенсивности разрывов на ней.

Ключевые слова: ударные волны, методы с выделением разрывов, лучевой метод, нелинейная теория упругости.

Введение. Настоящая статья посвящена построению аналитических и численно-аналитических решений задач ударного деформирования с помощью лучевого метода. Как известно лучевой метод широко применяется при исследовании распространения объемных или поверхностных волн в средах различных по своим свойствам. Детальный обзор работ этого направления можно найти в [21]. На практике используют лучевые разложения различного вида [1,2,17]. Основой метода, развиваемого в настоящей статье, стал подход, разработанный воронежским коллективом исследователей под руководством Г. И. Быковцева. В нем точное решение в окрестности поверхности разрыва заменяется рядом типа ряда Тейлора, коэффициентами которого являются разрывы производных от искомым функций. Определяющая система уравнений для них может быть получена с помощью условий совместности разрывов на движущихся поверхностях. Теория условий совместности связана с именами Дж. Адамара [20], Т. Томаса [15] и Г. И. Быковцева [11]. Но только Г. И. Быковцеву вместе с учениками удалось получить условия совместности произвольного порядка в рекуррентной форме, что и стало основой метода [2]. С его помощью были построены приближенные решения целого ряда краевых задач идеальной пластичности [10], гиперболической теории теплообмена [16], динамики линейной [22] и нелинейной [3] упругой среды. Позднее была предложена модификация метода для краевых задач ударного деформирования.

Все же существующая теория условий совместности применима лишь в прямоугольной декартовой системе координат. В случае, когда решение конкретной краевой задачи эффективнее провести в криволинейной системе координат, удобно, если и необходимые для лучевого метода соотношения записаны в тех же координатах. Это избавляет от дополнительных математических трудностей. В [13] приводятся такие условия 1-го и 2-го порядка. Ранее нами были получены [12] рекуррентные соотношения, аналогичные

[11] в произвольной пространственной системе координат. Настоящей статьей показываем использование этих соотношений для получения прифронтных лучевых рядов в задачах с криволинейными поверхностями разрывов деформаций. В качестве примера остановимся на задачах об одномерном и двумерном антиплоском движении нелинейно-упругой среды.

Включение построенных таким образом прифронтных разложений в конечно-разностные схемы позволяет отслеживать положение волновых фронтов в процессе численного решения краевых задач ударного деформирования. Такой алгоритм был реализован в задачах о распространении плоских ударных волн в [6,7]. Особенности обобщения этой методики на более сложные многомерные задачи с криволинейными и расходящимися лучами обсуждаются в последнем параграфе настоящей статьи.

Модельные соотношения. Условия на разрывах. Движение нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды в криволинейных координатах Эйлера x^i описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} v^i &= \mathfrak{v}^i + u^i_{,j} v^j, \quad s^{ij}_{,j} = r(\mathfrak{s}^i + v^i_{,j} v^j), \quad 2a_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u^k_{,j}, \\ W &= W(I_1, I_2), \quad I_1 = a^i_i, \quad I_2 = a^i_j a^j_i, \quad \mathfrak{s}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \\ u^i_{,j} &= \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} u^k, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} u_k, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u^i и v^i – компоненты векторов перемещения и скорости; a_{ij} – ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси; s^i_j – смешанные компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши; $r = const$ – плотность среды; p_0 – добавочное гидростатическое давление; W – функцию упругого потенциала зададим ее разложением в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния

$$W = (a - m)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - kI_1I_2 - qI_1^3 + lI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2I_2 + \mathbf{L}, \quad (1.2)$$

где m, a, b, k, q, l, d, k – упругие модули среды, многоточием обозначены слагаемые более высокого порядка малости. Далее рассматриваем быстро протекающие процессы, что позволяет считать их адиабатическими. Уравнения (1.1) как локальные следствия общих законов сохранения предполагают непрерывное изменение входящих в них функций. На поверхностях сильного разрыва, о которых пойдет речь в статье, законы сохранения нельзя записать в дифференциальной форме (1.1), но из них следуют динамические условия совместности

$$\begin{aligned} [r(v^i n_i - G)] &= 0, \\ [s^{ij} h_j] &= r^+ (v^{i+} n_i - G) [v^i], \\ s^{ij+} [v^j] h_j &= r^+ (v^{i+} n_i - G) \left(\frac{[v^i] [v_i]}{2} - [e] \right) - [q_j] h^j. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь n_i – компоненты единичной нормали поверхности разрывов Σ , направленной в сторону движения Σ ; q^i – компоненты вектора теплового потока, e – удельная плотность внутренней энергии, индексами “+” и “-” обозначены значения величин перед

волной и за ней соответственно; G – скорость движения Σ в направлении нормали, квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины на Σ .

Помимо (1.3) разрывы функций на движущихся поверхностях связаны с разрывами их производных геометрическими и кинематическими условиями совместности. Если движение поверхности разрывов задано в прямоугольной декартовой системе координат, то эти формулы хорошо известны из литературы [11]. Пересчет условий совместности разрывов на произвольную криволинейную систему координат в евклидовом пространстве E^3 – задача сама по себе нетривиальная, поэтому остановимся на этом несколько подробнее.

Движение поверхности $\Sigma(t)$ с течением времени представим зависимостью $x^i = f_i(y^1, y^2, t)$, причем f_i обладают требуемой гладкостью. Пусть траектория каждой точки Σ такова, что касательный вектор к ней в любой момент времени направлен по нормали $n^i(y^a, t)$, а поверхностные координаты остаются постоянными $y^a|_{\Sigma(t)} = y^a|_{\Sigma(0)}$. Эта линия называется лучом, а расстояние s вдоль нее от выбранной точки на Σ в момент $t=0$ до этой же точки в текущий момент времени – лучевой координатой. Такой выбор системы координат означает, что

$$\dot{x}^i(y^a, t) = Gn^i. \quad (1.4)$$

Греческие индексы в (1.4) и далее принимают значения 1, 2. Для того, чтобы отследить изменение со временем интересующих величин на Σ , а это могут быть скалярные или тензорные поля различного типа, необходимо ввести правила дифференцирования на Σ или d -производную. В декартовой системе координат d -производная определяется согласно формулам, представленным в [11]. Для криволинейной системы координат x^i необходимо уточнение операции d -дифференцирования как в [13], но с учетом введенных предположений относительно выбора внутренних координат на Σ

$$\begin{aligned} \frac{dA_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}(x^k(y^a, t), t)}{dt} &= \frac{d\tilde{A}_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}(y^a, t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{A}_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}}{\partial t} + \tilde{A}_{j_1 K_{j_r}, l}^{i_1 K_{i_s}} Gn^l, \\ \frac{dA_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}(y^a, t)}{dt} &= \frac{\partial A_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}}{\partial t} + \left\{ \Gamma_{mk}^{i_1} A_{j_1 K_{j_r}}^{m K_{i_s}} + \mathbf{L} + \Gamma_{mk}^{i_s} A_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_m} - \right. \\ &\left. - \Gamma_{j_1 k}^m A_{m K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}} - \mathbf{L} - \Gamma_{j_r k}^m A_{j_1 K_m}^{i_1 K_{i_s}} \right\} Gn^k, \\ \frac{dA_{b_1 K_{b_n}}^{a_1 K_{a_m}}(y^a, t)}{dt} &= A_{b_1 K_{b_n}}^{a_1 K_{a_m}}, \\ \frac{dA_{j_1 K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{i_1 K_{i_s}, a_1 K_{a_m}}(y^a, t)}{dt} &= \frac{\partial A_{j_1 K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{i_1 K_{i_s}, a_1 K_{a_m}}(y^a, t)}{\partial t} + \left\{ \Gamma_{lk}^{i_1} A_{j_1 K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{l K_{i_s}, a_1 K_{a_m}} + \mathbf{L} + \right. \\ &\left. + \Gamma_{lk}^{i_s} A_{j_1 K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{i_1 K_{l a_1}, K_{a_m}} - \Gamma_{j_1 k}^l A_{l K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{i_1 K_{i_s}, a_1 K_{a_m}} - \mathbf{L} - \Gamma_{j_r k}^l A_{j_1 K_{l b_1}, K_{b_n}}^{i_1 K_{i_s}, a_1 K_{a_m}} \right\} Gn^k. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Перечислим некоторые важные свойства операции, определенной в (1.5). Их доказательства, так же как и d -производные геометрических характеристик поверхности Σ можно найти в [12]. Во-первых, d -производная является тензором того же порядка и типа, что и исходный. Во-вторых, для нее выполняется правило Лейбница дифференцирования произведения. В-третьих, в E^3 вычисление d -производной перестановочно по от-

ношению к операции тензорного дифференцирования по y^a и операции свертывания по латинским и греческим индексам.

Рассмотрим теперь функцию $f(x^i, t)$, под которой будем подразумевать компоненты некоторого тензорного поля, непрерывного и непрерывно дифференцируемого требуемое число раз в окрестности Σ . На Σ f , а также ее производные, начиная с некоторого порядка, могут иметь разрывы первого рода. Обозначим через f^+ и f^- предельные значения функции f , взятые по разные стороны от поверхности Σ , для которых, как следствие леммы Адамара [20,15], выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} f_{,i}^{\pm} &= \frac{\partial f^{\pm}}{\partial n} n_i + a^{ab} x_{i,b}^j f_{,j}^{\pm} x_{i,a}, \quad \mathcal{J}^{\pm} = \frac{df^{\pm}}{dt} - f_{,j}^{\pm} G n^j, \\ \frac{\partial f^{\pm}}{\partial n} &= f_{,j}^{\pm} n^j, \quad x_{i,a} = g_{ik} x_a^k, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где a^{ab} и g_{ij} – компоненты поверхностной и пространственной метрики, соответственно. Вычитая формулы с разными знаками получим величины, определенные на Σ – разрывы функции f и ее производных

$$[f_{,i}] = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] n_i + a^{ab} [f]_{,b} x_{i,a}, \quad [\mathcal{J}] = \frac{d[f]}{dt} - \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] G, \quad [f] = f^+ - f^-. \quad (1.7)$$

Соотношения (1.7) называют геометрическими и кинематическими условиями совместности 1-го порядка. Как будет видно из дальнейшего, для получения определяющих соотношений лучевого метода необходимы условия совместности сколь угодно высокого порядка. Такие условия в рекуррентной форме были получены в [11] для случая декартовой системы координат. В [12] было показано, что в криволинейной пространственной системе координат их обобщением будут соотношения

$$\begin{aligned} [f_{,in\mathbf{K}n}] &= [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k)}] n_i + a^{ab} x_{i,b} \left\{ [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-1)}]_{,a} - \sum_{s=3}^k \sum_{p=0}^{s-3} C_{k-1}^{k-s} (s-1)! [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-s)}]_{,a} k_1^{s-2-p} k_2^{p+1} \right\} + \\ &+ b^{ab} x_{i,b} \sum_{s=2}^k \sum_{p=0}^{s-2} C_{k-1}^{k-s} (s-1)! [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-s)}]_{,a} k_1^{s-2-p} k_2^p, \\ [f_{,in\mathbf{K}n}^{(k)}] &= \frac{d[f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-1)}]}{dt} - G [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k)}] + (k-1) a^{ab} G_{,b} [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-2)}]_{,a} - \\ &- \sum_{s=3}^{k-1} \sum_{p=0}^{s-3} C_{k-2}^{k-s-1} (s-1)! [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-s-1)}]_{,a} k_1^{s-2-p} k_2^{p+1} \left\{ + \right. \\ &+ (k-1) b^{ab} G_{,b} \sum_{s=2}^{k-1} \sum_{p=0}^{s-2} C_{k-2}^{k-s-1} (s-1)! [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-s-1)}]_{,a} k_1^{s-2-p} k_2^p, \\ f_{,in\mathbf{K}n}^{(k)} &= f_{,ij\mathbf{K}n} n^j \mathbf{K}n^m, \quad f_{,in\mathbf{K}n}^{(k)} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{,j\mathbf{K}m} n^j \mathbf{K}n^m, \quad f_{,n\mathbf{K}n}^{(k)} = f_{,ij\mathbf{K}n} n^i n^j \mathbf{K}n^m, \end{aligned} \quad (1.8)$$

причем в формулах для $f_{,in\mathbf{K}n}^{(k)}$ и $f_{,m\mathbf{K}n}^{(k)}$ свертка с компонентами $n^j \mathbf{K}n^m$ проводится $(k-1)$ -раз, $f_{,ij\mathbf{K}m}$ – k -я ковариантная производная, b^{ab} – компоненты второй квадратичной формы поверхности. Обозначениям k_1 и k_2 соответствуют главные кривизны Σ . Полученные соотношения могут быть полезны также при исследовании слабых волн или же стационарных поверхностей разрывов.

2. Лучевой метод решения одномерной задачи антиплоского деформирования.

Изложение особенностей использования лучевых разложений за криволинейными поверхностями разрывов деформаций начнем с более простой одномерной задачи. Рассматривается ударное воздействие на границе цилиндрической полости радиуса r_0 в несжимаемом пространстве без предварительных деформаций. Последнее условие принято только с целью избежать громоздких формул. Динамическое воздействие на границе r_0

$$u_z|_{r_0} = g(t), \quad g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k g}{\partial t^k} \Big|_0 t^k \approx v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} + \mathbf{L}, \quad (2.1)$$

$$v_0 \neq 0, \quad t \geq 0$$

создает в пространстве поле перемещений вида $u_r = u_j = 0, u_z = u(r, t)$, где r, j, z – цилиндрическая система координат.

Следствием неравенства $v_0 \neq 0$ будет появление поперечной ударной волны $\Sigma(t)$ с начального момента времени. Свойства таких волн изучались, например, в [8,18-19]. Из (1.3) следует формула для вычисления скорости $\Sigma(t)$

$$G = C \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{w_1}{C} \right)^{2k} \right) = C \left(1 + g_1 \frac{w_1^2}{C^2} + \mathbf{L} \right) \quad (2.2)$$

$$C = \sqrt{\frac{m}{r}}, \quad g_1 = \frac{a+b+k+d}{2m}, \quad w_1 = [\mathbf{g}]$$

и условие на добавочное гидростатическое давление

$$p = p^+ - \frac{b w_1^2}{2G^2}, \quad b = \frac{2a+2m+2b+k}{m}, \quad p = \frac{p_0 - a - m}{m}, \quad (2.3)$$

где p^+ – известное давление в недеформированной области. Поскольку перемещения на Σ непрерывны, то $u|_{r_\Sigma} = 0$, где $r_\Sigma(t)$, определяющее положение волнового фронта имеет вид

$$r_\Sigma(t) = r_0 + \int_0^t G(x) dx \approx r_0 + \int_0^t C \left(1 + g_1 \frac{w_1^2}{C^2} + \mathbf{L} \right) dx. \quad (2.4)$$

На Σ внутренние координаты удобно выбрать так, что $y^1 = j$, $y^2 = z$. В области деформирования, исключая Σ , движение среды описывается системой уравнений, следующей из (1.1)

$$\begin{aligned}
u_{,rr}(1+3au_{,r}^2) + \frac{u_{,r}}{r}(1+au_{,r}^2) + \mathbf{L} &= \frac{\mathbf{K}}{C^2}, \\
p_{,r} + bu_{,r}u_{,rr} + (1+g)\frac{u_{,r}^2}{r} + \mathbf{L} &= 0, \quad a = 2g_1, \quad g = \frac{a}{m}.
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

В (2.5) основным считаем первое уравнение, решение которого может быть найдено независимо от второго. Его решение за фронтом ударной волны Σ представим в виде лучевого ряда

$$\begin{aligned}
u^I(r,t) &\approx u^0(r,t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} w_k(t_{\Sigma})(t-t_{\Sigma})^k, \quad t \geq t_{\Sigma}, \\
u(r,t) &= u^0(r,t), \quad t \leq t_{\Sigma}, \quad t_{\Sigma}(r) = \int_{r_0}^r \frac{dx}{G(x)},
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

где индексами “0” и “I” обозначено решение в области перед Σ и за ней, соответственно. В одномерной задаче геометрия лучей исходно известна, в данном случае это радиальные направления. Для определения коэффициентов w_k в (2.6) необходимо k -раз продифференцировать уравнение движения, всякий раз записывая результат в разрывах на Σ с учетом условий совместности (1.8). В линеаризованном случае или же в задачах со слабыми волнами такая процедура приводит к системе рекуррентных уравнений (уравнений затухания), последовательное интегрирование которой завершает решение.

Особенностью ударных волн оказывается зависимость каждого разрыва искомой функции от разрыва более высокого порядка, что исключает возможность непосредственного интегрирования

$$\frac{dw_k}{dt} = F_k(w_1, w_2, \mathbf{K}, w_{k+1}), \quad k = 1, 2, \mathbf{K}
\tag{2.7}$$

Записывая само уравнение движения в разрывах, получим первое из уравнений (2.7)

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{2aw_2w_1^2C^{-2}}{2+5aw_1^2C^{-2}+\mathbf{L}} - \frac{w_1C\left(1+\frac{3}{2}aw_1^2C^{-2}\right)}{r_{\Sigma}(2+5aw_1^2C^{-2}+\mathbf{L})} + \mathbf{L}
\tag{2.8}$$

Из (2.8) видно, что изменение интенсивности волны происходит в основном за счет линейного вклада $-\frac{w_1C}{2r_{\Sigma}}$, куда в отличие от плоской задачи входит величина r_{Σ}^{-1} , определяющая изменение кривизны волнового фронта. Это означает, что влияние геометрического расхождения на изменение w_1 превалирует над нелинейными эффектами. Последнее полностью согласуется с данными вычислительных экспериментов в упругих диэлектриках [20].

Адаптировать традиционный лучевой метод для задач ударного деформирования удалось благодаря включению в (2.7) дополнительных разложений w_k в ряды по их d -производным в окрестности нуля [4-5]

$$w_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n w_{k0}}{dt^n}, \quad \frac{d^n w_{k0}}{dt^n} = \left. \frac{d^n w_k}{dt^n} \right|_{t=0}. \quad (2.9)$$

Такой подход предполагает, что решение строится для малых послеударных времен. Уравнения (2.7) справедливы и при $t=0$ и совместно с граничным условием (2.1) составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно искомых функций. Например, если оборвать ряд (2.1) на квадратичном слагаемом, то достаточно определить только w_{10} , w_{20} и $\frac{dw_{10}}{dt}$. Совместно с полем перемещений лучевой метод позволяет определить функциональную зависимость $r_{\Sigma} = r_{\Sigma}(t)$ или $t_{\Sigma} = t_{\Sigma}(r)$, связывающую r и t на переднем фронте волны

$$u = - \left(w_{10} + \frac{dw_{10}}{dt} t_{\Sigma} + \mathbf{L} \right) (t - t_{\Sigma}) - \frac{1}{2} (w_{20} + \mathbf{L}) (t - t_{\Sigma})^2 + \mathbf{L}, \quad (2.10)$$

$$t_{\Sigma} = \frac{r - r_0}{C(1 + g_1 w_{10}^2 C^{-2})} - \frac{g_1 w_{10} C^{-1} \frac{dw_{10}}{dt} (r - r_0)^2}{C^3 (1 + g_1 w_{10}^2 C^{-2})^3} + \mathbf{L},$$

где $\frac{dw_{10}}{dt}$ определяется соотношением (2.8) при $t=0$. Сопоставляя ряд (2.10) с краевым условием (2.1), получим $w_{10} = -v_0$, $w_{20} = -a_0$. Решение может быть продолжено дальше с требуемой степенью точности в зависимости от краевых условий на r_0 . Определение функции добавочного гидростатического давления $p(r, t)$ по известному полю перемещений не представляет сложностей, кроме вычислительных, поэтому не будем на этом останавливаться ни здесь, ни в следующем параграфе, чтобы не перегружать текст формулами. Далее покажем, как рассмотренный алгоритм решения можно перенести на неоднородные задачи, когда геометрия лучей заранее неизвестна, лучи становятся криволинейными и расходящимися.

3. Лучевой метод решения двумерной задачи антиплоского деформирования.

Предположим, что в несжимаемой недеформированной среде имеется цилиндрическая полость с направляющей L_0 в форме эллипса

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1, \quad (3.1)$$

где z_i – декартовы координаты.

Начиная с момента $t=0$ в среде осуществляется антиплоское движение $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = u(z_1, z_2, t)$, вызванное ударным воздействием на L_0 , которое приводит к граничным перемещениям

$$u|_{L_0} = g(y, t), \quad g(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k g}{\partial t^k} \right|_0 t^k \approx v_0(y)t + \frac{a_0(y)t^2}{2} + \mathbf{L}, \quad (3.2)$$

где $y = z_1$ – явная параметризация на L_0 . Будем считать, что (3.2) задано симметрично относительно осей координат, поэтому рассмотрим решение только в первом квадранте $0 \leq y \leq a$, $z_2 \geq 0$. Система уравнений движения для этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_{,11} \{1 + 3au_{,1}^2 + au_{,2}^2\} + u_{,22} \{1 + au_{,1}^2 + 3au_{,2}^2\} + 4au_{,12}u_{,1}u_{,2} + \mathbf{L} &= \frac{\mathbf{K}}{C^2} + \mathbf{L}, \\ -p_{,1} - 2j_1 u_{,11}u_{,1} - 2j_2 u_{,12}u_{,2} - (1+g)(u_{,12}u_{,2} + u_{,22}u_{,1}) + \mathbf{L} &= 0, \\ -p_{,2} - 2j_1 u_{,22}u_{,2} - 2j_2 u_{,12}u_{,1} - (1+g)(u_{,11}u_{,2} + u_{,12}u_{,1}) + \mathbf{L} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$j_1 = \frac{b}{2}, \quad j_2 = \frac{b + \frac{k}{2}}{m}, \quad u_{,t} = \frac{\partial u}{\partial z_t}, \quad t = 1, 2.$$

Отметим, что система трех уравнений (3.3) содержит только две неизвестные функции u и p , поэтому упругий потенциал должен быть задан специальным образом [9,14]

$$W = -2ml_1 - ml_2 + bI_1^2 + (b-m)I_1I_2 - qI_1^3 + lI_1^4 + \frac{b-m}{4}I_2^2 + \left(b-m - \frac{3}{2}q\right)I_1^2I_2 + \mathbf{L}, \quad (3.4)$$

при котором два последних уравнения тождественно равны. В (3.4) m , b , q , l – независимые константы среды, через которые выражены остальные. Скорость индуцированной поперечной ударной волны определяется той же формулой (2.2). Следствием непрерывности поля перемещений на фронте волны $\Sigma(t)$ будет условие

$$u|_{\bar{r}_\Sigma} = 0, \quad \bar{r}_\Sigma(y, t) = \bar{r}_0(y) + \int_0^t G(y, x) \bar{n}(y, x) dz, \quad (3.5)$$

где $\bar{r}_0(y)$ и $\bar{r}_\Sigma(y, t)$ – радиус-векторы некоторой точки Σ с постоянным значением параметра y в начальный и текущий моменты времени, соответственно. Отметим, что для двумерной задачи компоненты вектора нормали $\bar{n}(y, t)$ – неизвестные величины, которые подлежат определению наряду с полем перемещений и геометрией $\Sigma(t)$ в процессе решения задачи. Перемещения за фронтом Σ представим рядом, аналогичным (2.6)

$$\begin{aligned} u^l(s, y, t) &\approx u^0(s, y, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} w_k(y, t_\Sigma) (t - t_\Sigma)^k, \quad t \geq t_\Sigma, \\ u(s, y, t) &= u^0(s, y, t), \quad t < t_\Sigma, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$t_\Sigma(y, s) = \int_0^s G^{-1}(y, x) dx,$$

в которой отличаем от предыдущей задачи является зависимость от криволинейных координат s и y – координаты эйконала. Следуя обычной схеме лучевого метода, запишем уравнение затухания интенсивности волны, сразу полагая в нем $t = 0$

$$\frac{dw_{10}}{dt} = \frac{2aC^{-2}w_{10}^2w_{20} + 3H_0Cw_{10}\left(1 + \frac{3}{2}a\frac{w_{10}^2}{C^2}\right)}{2 + 5aw_{10}^2C^{-2} + \mathbf{L}} + \mathbf{L}, \quad (3.7)$$

$$H_0 = \frac{-ab}{2(a^2 - e^2y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где H_0 – средняя кривизна $\Sigma(0)$, e – эксцентриситет эллипса. Отметим, что при $H_0 = -\frac{1}{2r_0}$ – средняя кривизна кругового цилиндра – уравнение (3.7) переходит в аналогичное для одномерной задачи.

С учетом разложений (2.9) расстояние вдоль луча определяется зависимостью

$$s = \int_0^t G(y, x) dx = C \left(1 + \frac{a}{2}w_{10}^2C^{-2}\right)t + aC^{-1}w_{10}\frac{dw_{10}}{dt}\frac{t^2}{2} + \mathbf{L}, \quad (3.8)$$

обращение которой позволяет вычислить время прихода волны в данную точку пространства

$$t_{\Sigma}(s, y) = \left(1 - \frac{a}{2}\frac{w_{10}^2}{C^2} + \mathbf{L}\right)\frac{s}{C} - \frac{a}{2}C^{-2}w_{10}\frac{dw_{10}}{dt}\left(\frac{s}{C}\right)^2 + \mathbf{L} \quad (3.9)$$

Лучевое разложение (3.6) для перемещений можно представить той же формулой (2.10), заменив входящие в нее функции на (3.7), (3.9).

Геометрия лучей задается соотношениями, следующими из (3.5)

$$z_1 = f_i(y, t) = z_{i0}(y) + \int_0^t G(y, t) n_i(y, t) dt, \quad (3.10)$$

$$z_{10} = y, \quad z_{20} = f(y) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2},$$

причем компоненты вектора нормали n_i зависят от текущего положения волнового фронта, что не позволяет проинтегрировать (3.10). Аппроксимируя n_i рядами, аналогичными (2.9), и вычисляя их d -производные согласно правилам, определенным в [11], получим

$$n_i(y, t) = n_{i0} + \frac{dn_{i0}}{dt}t + \mathbf{L},$$

$$n_{10} = \frac{by}{a\sqrt{a^2 - e^2y^2}}, \quad n_{20} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - e^2y^2}}, \quad (3.11)$$

$$\left.\frac{dn_i}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{a}{c}a^{11}z_{i,y}w_1w_{1,y}\Big|_{t=0} = -\frac{a}{c}a_0^{11}z_{i0,t}w_{10}w_{10,y}.$$

Подставляя (3.11), (2.9) и (3.7) в (3.10), получим параметрическое представление поверхности $\Sigma(t)$

$$\begin{aligned}
z_1 = f_1(y,t) &= y + \frac{Cby}{a\sqrt{a^2 - e^2y^2}} \left(1 + \frac{a}{2} w_{10}^2 C^{-2}\right) t + \left[-\frac{a(a^2 - y^2)w_{10}w_{10,y}}{a^2 - e^2y^2} \times \right. \\
&\times \left. \left(1 + \frac{a}{2} w_{10}^2 C^{-2}\right) + \frac{aby}{Ca\sqrt{a^2 - e^2y^2}} w_{10} \frac{dw_{10}}{dt} \right] \frac{t^2}{2} + \mathbf{L}, \\
z_2 = f_2(y,t) &= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{C\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - e^2y^2}} \left(1 + \frac{a}{2} w_{10}^2 C^{-2}\right) t + \\
&+ \left[-\frac{aby\sqrt{a^2 - y^2}w_{10}w_{10,y}}{a(a^2 - e^2y^2)} \left(1 + \frac{a}{2} w_{10}^2 C^{-2}\right) + \frac{a\sqrt{a^2 - y^2}}{C\sqrt{a^2 - e^2y^2}} w_{10} \frac{dw_{10}}{dt} \right] \frac{t^2}{2} + \mathbf{L},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Как уже отмечалось, полученное аналитическое решение пригодно лишь на не-большом удалении от нагружаемой поверхности. С целью расширить рассматриваемый временной диапазон перейдем к численному расчету процесса деформирования, используя прифронтное лучевое разложение в качестве начальных и краевых данных для численной схемы.

4. Численная схема расчетов. Полагаем, что до момента $t = t_0$ (рис. 1) справедливо аналитическое решение. Начиная с момента $t = t_0$ будем искать численное решение задачи в узлах регулярной прямоугольной сетки с шагами Δx_1 , Δx_2 и Δt по пространству и времени, соответственно. Для этого уравнения движения (3.3) относительно функции перемещения заменим системой нелинейных алгебраических уравнений, связывающих перемещения в соседних узлах сетки. Входящие в (3.3) частные производные заменим конечно-разностными аппроксимациями согласно шаблону, изображенному на рис. 2.

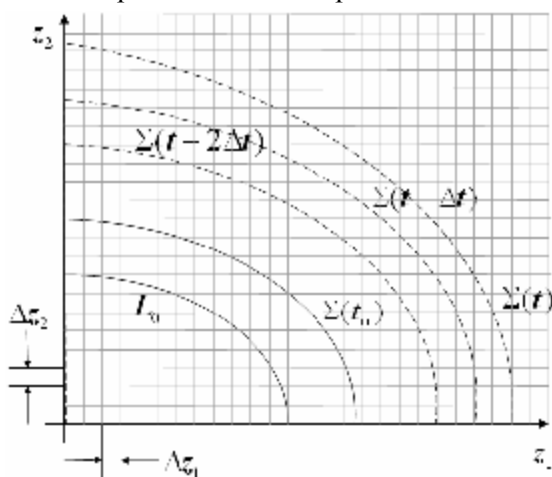


Рис. 1

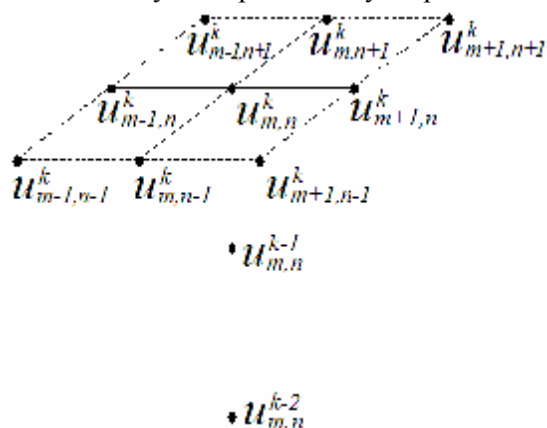


Рис. 2. Шаблон численной схемы

Положение фронта ударной волны (функции $f_i(y, t)$) на каждом временном слое, границу L_0 , а также заданные на них функции $w_1(y, t)$ и $w_2(y, t)$ будем интерполировать

кубическими сплайнами, причем узлы сплайнов, соответствующие функциям, заданным на одной границе, совпадают. Также учтем, что при движении $\Sigma(t)$ значение параметра у любого узла сплайна остается неизменным.

Для замыкания системы необходимы уравнения, связывающие перемещения точек среды в прифронтной области от $\Sigma(t-2\Delta t)$ до $\Sigma(t)$, где нельзя записать конечно-разностное выражение для второй производной по времени, т.к. соответствующие узлы с предыдущих временных слоев не попадают в деформированную область (см. рис. 1). В этих точках можно записать лучевое разложение, при условии, что входящие в него параметры w_{n0} неизвестны.

Например, вычислив перемещения в точках среды, соответствующих отдельным узлам сплайнов $f_i(y, t-2\Delta t)$, можно получить систему уравнений относительно параметров лучевого разложения для данного узла. Положим, для удобства, на последнем временном слое $t=0$, тогда $t_\Sigma = -2\Delta t$ и из (2.10) следует

$$\begin{aligned} w_{10} &= -\frac{u(z_1, z_2, t) - u(z_1, z_2, t - \Delta t)}{\Delta t} - 2\Delta t \frac{dw_{10}}{dt} + 2\Delta t w_{20}, \\ w_{20} &= -\frac{u(z_1, z_2, t) - 2u(z_1, z_2, t - \Delta t) + u(z_1, z_2, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для вычисления d -производной в (4.1) используем конечно-разностное выражение

$$\frac{dw_1}{dt}(y, t) \approx \frac{w_1(y, t) - w_1(y, t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Система нелинейных алгебраических уравнений, включающая конечно-разностные уравнения для внутренних узлов деформированной области, лучевые разложения для точек, совпадающих с узлами поверхности разрыва на позапрошлом временном слое и граничные условия, решается методом простой итерации. Также с помощью лучевого разложения вычисляются поля перемещений на первых двух временных слоях, необходимые для инициализации схемы, и начальное приближение для очередного слоя.

Получаемые в ходе решения константы лучевого разложения используются для определения на каждой итерации положения фронта ударной волны и его геометрических параметров, входящих в лучевой ряд.

Таким образом, построена неявная вычислительная схема, на каждой итерации которой сначала пересчитываются внутренние узлы области, а затем сплайны, описывающие заданные на волновом фронте функции, и положение самого фронта. Каждая итерация завершается вычислением перемещений в узлах сетки в прифронтной области, входящих в конечно-разностные уравнения.

По описанному алгоритму была разработана и отлажена программа, позволяющая вычислить на каждом временном шаге перемещения за фронтом ударной волны, положение фронта и константы лучевого разложения. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 3-5. Параметры задачи выбраны следующим образом: $a = 10$, $C = 10^3$ м/с, $v_0 = 1$ м/с, $a_0 = 1$ м/с², $a = 1,5$ м, $b = 1$ м. Шаги расчетной сетки составляют $\Delta t = 10^{-4}$ с, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,05$ м.

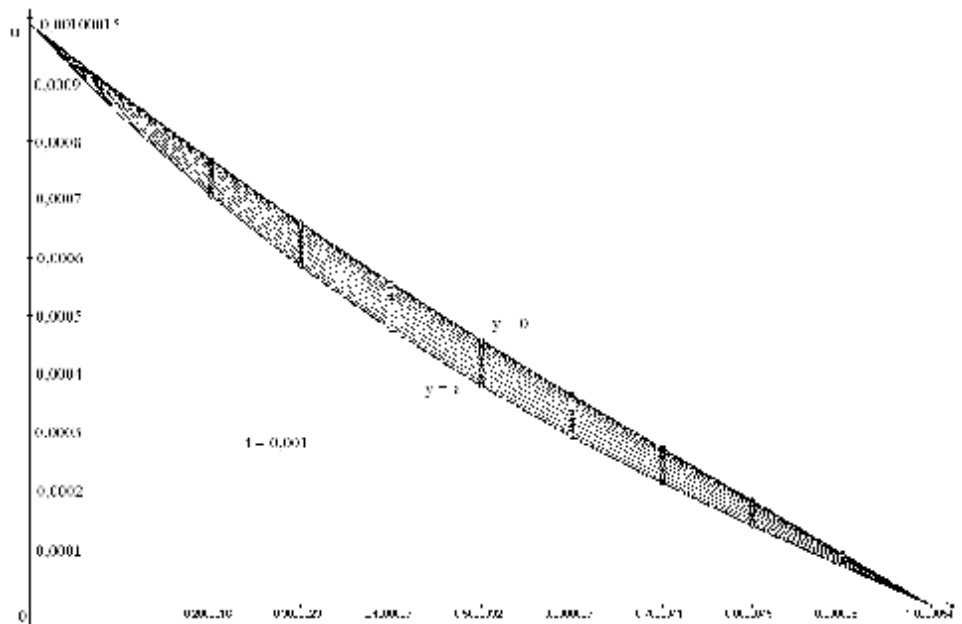


Рис. 3. Значения перемещений вдоль фиксированных лучей в момент времени $t = 0,001$ с .
 $t = 0,0017$

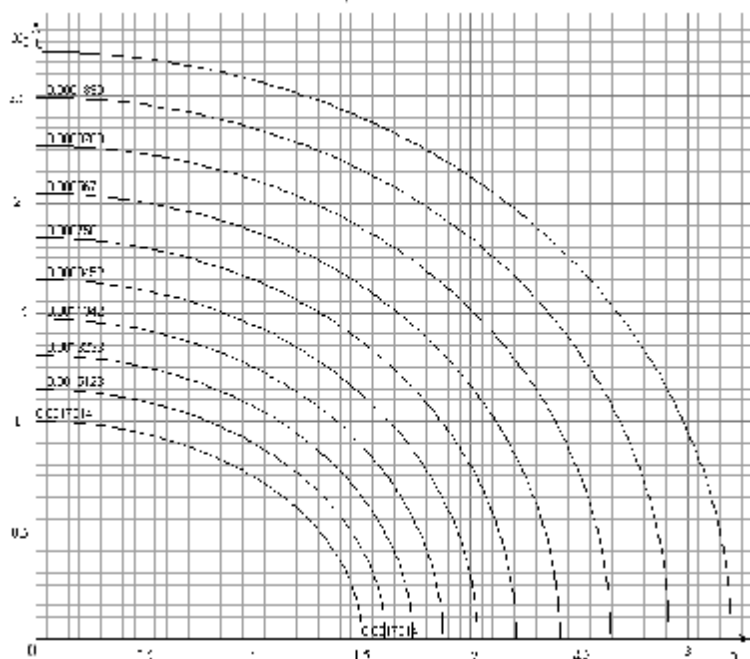


Рис. 4. Изолинии функции перемещения $u(x_1, x_2, t)$ в момент времени $t = 0,0017$ с .

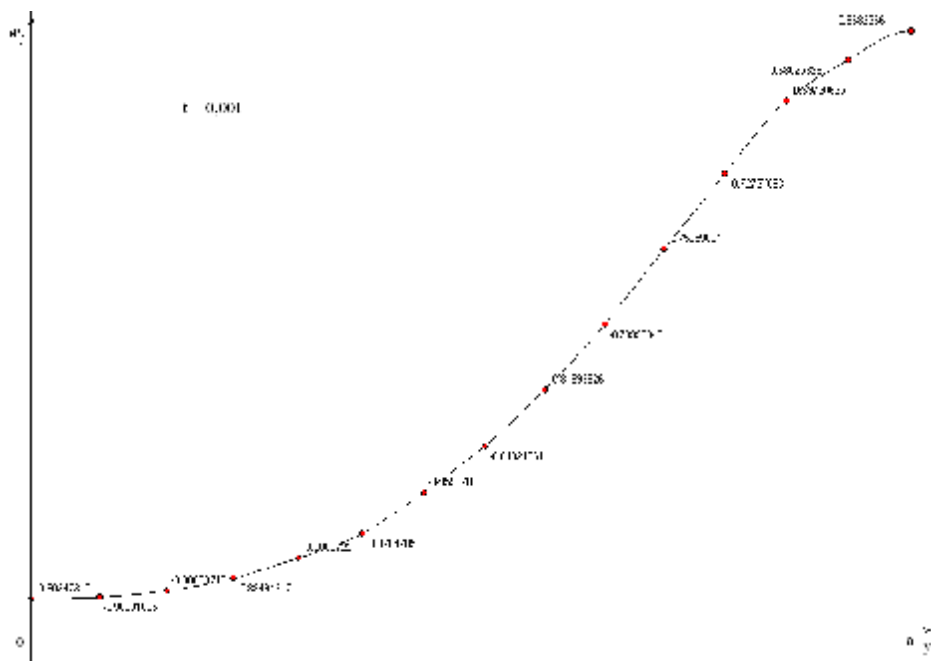


Рис. 5. Изменение интенсивности волны вдоль волнового фронта в момент времени $t = 0,001$ с.

Из представленных рисунков видно, что более пологие участки фронта движутся быстрее, так что контур $\Sigma(t)$ стремится принять форму окружности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-96005) и ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-009).

г. Владивосток

Поступила: 21 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич, В. М.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В. М. Бабич, В. С. Булдырев. – М.: Наука, 1972. – 456 с.
2. *Бабичева, Л. А.* Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязко-пластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // ПММ. – 1973. – Т.37. – №1. – С.145-155.
3. *Бестужева, Н. П.* К исследованию нестационарных поверхностных волн в нелинейно-упругих средах / Н. П. Бестужева, Г. И. Быковцев, В. Н. Дурова // Прикладная механика. – 1981. – Т.17. – №12. – С.27-33.
4. *Буренин, А. А.* Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. – Владивосток : Изд-во ДВО АН СССР, 1991. – С.129-137.
5. *Буренин, А. А.* Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях / А. А. Буренин // Дальневосточный математический журнал. – 1999. – Вып.8. – С.49-72.
6. *Буренин, А. А.* Выделение поверхностей разрывов лучевым методом в задачах динамики упругих сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев, В. Е. Рагозина // Фундаментальные и прикладные вопросы

- механики : сб. докладов международной научной конференции (Хабаровск, 8-11 октября 2003 г.). – Хабаровск : Изд-во ХГТУ, 2003. – С.64-66.
7. Буренин, А. А. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев // Проблемы механики: сб. статей к 90-летию А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С.146-155.
 8. Буренин, А. А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства / А. А. Буренин // Прикладная механика. – 1985. – Т.ХХI. – №5. – С.3-8.
 9. Буренин, А. А. К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования / А. А. Буренин, В. Е. Рагозина // Изв. РАН. МДТТ. – 2007. – №6. (извещение редакции)
 10. Быковцев, Г. И. Особые линии и поверхности в пространственных течениях идеальных жестко-пластических сред / Г. И. Быковцев, И. А. Власова // Механика деформируемого твердого тела (динамика сплошной среды). – Новосибирск: Изд-во Института гидродинамики СО АН СССР, 1979. – Вып.41. – С.31-43.
 11. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Изд-во «Дальнаука», 1998. – 528 с.
 12. Герасименко, Е. А. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях / Е. А. Герасименко, В. Е. Рагозина // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т.5. – №1. – С.100-109.
 13. Гринфельд, М. А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений / М. А. Гринфельд. – М. : Наука, 1990. – 312 с.
 14. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
 15. Россихин Ю. А. О равномерной пригодности лучевых разложений в задачах, связанных с распространением ударных волн в слабо анизотропной среде / Ю. А. Россихин // Изв. АН СССР – 1989. – №.6. – С.131-138.
 16. Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.
 17. Шаталов, А. Г. Разрывные решения в связанной задаче термоупругости / А. Г. Шаталов // Механика деформируемых сред. – Куйбышев: Изд-во Куйбышевский ун-т, 1979. – Вып.6. – С.85-90.
 18. Achenbach, J. D. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media / J. D. Achenbach, D. R. Reddy // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus. – 1967. – N.18. – S.141-144.
 19. Boa-The, Chy Finite amplitude waves in incompressible pefetly elastic materials / Chy Boa-The // J. Mech. Phys. Solids. – 1964. – V.12. – N.1. – P. 45-57.
 20. Fu, Y. B. Transverse cylindrical simple waves and shock waves in elastic non-conductors / Y. B. Fu, N. H. Scott // International Journal of Solids and Structures. – 1991. – V.27. – P.547-563.
 21. Hadamard, J. Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de Vhydrodynamique / J. Hadamard. – Paris. – Librairie Scientifique A Hermann, 1903.
 22. Rossikhin, Yu. A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. mech. rev. – 1995. – V.48. – N.1. – P.1-39.

Гаврилкина М. В., Глаголев В. В.

ВАРИАНТ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ РАЗРУШЕНИЯ ТИПА НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

(Тульский государственный университет)

Предлагается подход к решению задач механики разрушения на масштабном уровне механики сплошной среды. Для элементарного элемента объема в рамках данного подхода рассмотрено наступление момента образования новых материальных поверхностей. Предложена постановка и метод решения частной задачи механики разрушения.

Ключевые слова: *характерный размер, граничное интегральное уравнение, линейная упругость.*

1. Подходы к описанию процесса разрушения. В процессе внешних, монотонных до некоторого момента воздействий на твердое тело, его материал проходит стадии обратимого (упругого), необратимого равновесного (упругопластического) деформирования и, наконец, стадию разрушения. Наименее изученной, но и наиболее важной с прикладной точки зрения является стадия разрушения. Существенное отличие этой стадии от предыдущих заключается в том, что если упругое и неупругое деформирование может охватывать весь материал тела, в частности, деформированное состояние может быть однородным, то процесс разрушения, как правило, локализуется в тонких слоях. Сложность описания таких процессов связана с неопределенностью самого понятия “разрушение”.

Исторически сложились два направления описания разрушения. Первое рассматривает наступление предельного состояния в окрестности точки континуума для тел без начальных вырезов [1,7,10]. В этом случае определяется момент наступления критического состояния в окрестности материальной точки и не рассматривается дальнейшая эволюция разрушения, в частности, процесс формирования новых материальных поверхностей. Второе направление – определение условий начала движения имеющегося в теле разреза, который полагается либо математическим (теория трещин) [11–15,17], либо физическим, имеющим некоторый характерный размер [6,9,16]. Для математического разреза процесс образования поверхностей не связывается с разрушением материала в смысле использования критериев прочности. В качестве условия начала продвижения поверхности разрыва принимается критерий Гриффитса в энергетическом или силовом вариантах. В рабо-

тах [2-5] предлагается рассматривать разрушение как термомеханический процесс, и даны оценки соответствующего масштабного уровня через известные механические характеристики среды.

2. Постановка частной задачи механики разделения. В качестве примера решения задачи разделения на масштабном уровне выполнения гипотез механики сплошной среды рассмотрим условия начала продвижения физического разреза (слоя взаимодействия) [2] в линейно упругой плоскости согласно схеме, показанной на рис.1, соответствующей разрушению типа нормального отрыва.

В отличие от постановки задачи [2], наряду с напряжением $\sigma_{11}(x_2)$ учитываем напряжение $\sigma_{22}(x_2)$, обусловленное наличием касательных напряжений $\sigma_{21}(x_2)$ вдоль границы со слоем. Подчеркнем, что в слое постулируется однородность напряженно-деформированного (НДС) состояния в направлении ортогональном поверхности разделения (плоскости Ox_2x_3).

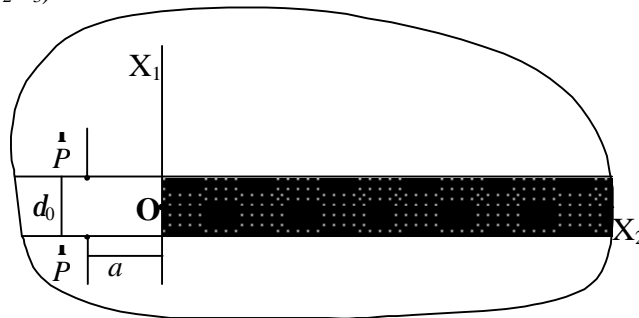


Рис.1. Схема разделения плоскости

Полагаем, что связь между напряжениями и деформациями вне слоя взаимодействия описывается соотношениями линейной теории упругости для случая плоского деформирования. В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю полуплоскость ($x_1 \geq \delta_0/2$) (рис.2), а действие слоя эквивалентно нагрузке на полуплоскость $\mathbf{q}(x) = -(\tilde{\sigma}_{11}\mathbf{e}_1 + \tilde{\sigma}_{21}\mathbf{e}_2)$ (здесь и далее $x \equiv x_2/d_0$ – безразмерная координата; $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \cdot \beta$, $i, j = 1, 2$ – безразмерные напряжения; $\beta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$ – параметр материала, E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона).

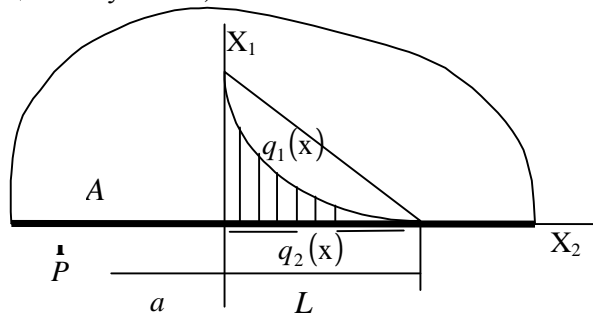


Рис.2. Схема нагружения плоскости

Связь между напряжением $\tilde{\sigma}_{22}$ в слое взаимодействия и напряжением $\tilde{\sigma}_{21}$ по границе слоя получим из условия равновесия элемента слоя в виде

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\tilde{\sigma}_{21}. \quad (1)$$

На основании решения задачи Фламана распределение перемещений точек границы полуплоскости под действием нагрузок, показанных на рис.2, имеет вид

$$\tilde{u}_1(x) = -\tilde{P} \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L \tilde{\sigma}_{11}(\xi) \cdot \ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi, \quad (2)$$

$$\tilde{u}_2(x) = \int_0^L \tilde{\sigma}_{21}(\xi) \cdot \ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi, \quad (3)$$

где $\tilde{u}_i = u_i/\delta_0$, $i, j = 1, 2$ – безразмерные перемещения; $\tilde{P} = P\beta/\delta_0$ – безразмерная сила на единицу толщины; L – удаленная точка с нулевым перемещением; L – расстояние от начала координат до L .

Запишем перемещения в левых частях (2) и (3) через соответствующие главные деформации слоя взаимодействия с учетом гипотезы однородности напряженно-деформированного состояния по толщине слоя

$$\tilde{u}_1(x) = \varepsilon_{11}(x)/2, \quad (4)$$

$$\tilde{u}_2(x) = \int_L^x \frac{\varepsilon_{22}(x)}{2} dx. \quad (5)$$

Выражение главных деформаций найдем через соответствующие напряжения из закона Гука

$$\varepsilon_{11} = \tilde{A}\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{22}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{22} = \tilde{A}\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{11}, \quad (7)$$

где $\tilde{A} = \frac{\pi}{2}$, $\tilde{B} = \frac{\nu\pi}{2(1-\nu)}$ – безразмерные постоянные.

Таким образом, с учетом (4), (6), представим граничное интегральное уравнение (2) в следующей форме

$$\frac{1}{2}(\tilde{A}\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{22}) = -\tilde{P} \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L \tilde{\sigma}_{11}(\xi) \cdot \ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi. \quad (8)$$

Продифференцируем по x выражение (3)

$$\varepsilon_{22} = \frac{d\tilde{u}_2}{dx} = \int_0^L \tilde{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi. \quad (9)$$

Подставим в формулу (9) выражение (7) в результате получим

$$\tilde{A}\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{11} = \int_0^L \tilde{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi. \quad (10)$$

Отсутствие напряжений $\tilde{\sigma}_{22}$ в точке О и условие затухания напряжений на бесконечности приводит к следующему граничному условию

$$\tilde{\sigma}_{22}|_{x=0} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, имеем систему интегральных уравнений (8), (10), дополняемую связью (1). Перепишем полученную систему интегро-дифференциальных уравнений в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\tilde{A}\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{22}) = -\tilde{P} \cdot \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L \tilde{\sigma}_{11}(\xi) \cdot \ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi, \\ \tilde{A}\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{11} = \int_0^L \tilde{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\tilde{\sigma}_{21}. \end{cases} \quad (12)$$

Результатом решения системы (12) является нахождение поля напряжений $\tilde{\sigma}_{11}$ и $\tilde{\sigma}_{22}$, а также касательных напряжений по границе со слоем – $\tilde{\sigma}_{21}$ при условии затухания напряжений на бесконечности: $\tilde{\sigma}_{11}|_{x=L} = \tilde{\sigma}_{21}|_{x=L} = \tilde{\sigma}_{22}|_{x=L} = 0$.

3. Результаты решения. Для решения задачи в рамках дискретной модели разобьем границу полуплоскости OL на N граничных элементов [8]. Считаем, что каждый граничный элемент характеризуется постоянным (средним по элементу) значением напряжения $\tilde{\sigma}_{ii}^{(k)}$, где $k=1 \dots N, i=1,2$.

Построим дискретные выражения интегральных операторов в уравнениях системы (12)

$$\int_0^L \tilde{\sigma}_{11}(\xi) \cdot \ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi = \sum_{k=1}^N \tilde{\sigma}_{11}^{(k)} \cdot \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln\left(\frac{|x_j-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi, \quad (13)$$

$$\int_0^L \tilde{\sigma}_{21}(\xi) \cdot \frac{1}{x-\xi} d\xi = \sum_{k=1}^N \tilde{\sigma}_{21}^{(k)} \cdot \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j-\xi} d\xi. \quad (14)$$

Используя условие постоянства напряжения $\tilde{\sigma}_{21}^{(j)}$ и производной $\frac{d\tilde{\sigma}_{22}^j}{dx}$, соотношение (1) примет следующий вид

$$\tilde{s}_{21}^{(j)} = -\frac{\tilde{s}_{22}^{(j)} - \tilde{s}_{22}^{(j-1)}}{2}. \quad (15)$$

Таким образом, система (12) сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}$, $\tilde{\sigma}_{21}^{(k)}$ и $\tilde{\sigma}_{22}^{(k)}$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{A_0}{2} \sigma_{11}^{(j)} - \frac{B_0}{2} \sigma_{22}^{(j)} &= -A_0^{(j)} \cdot \ln \left(\frac{x_j + a}{L + a} \right) + \sum_{k=1}^N \sigma_{11}^{(j)} \cdot \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln \left(\frac{x_j - \xi}{L - x} \right) d\xi, \\ \frac{A_0}{2} \sigma_{22}^{(j)} - \frac{B_0}{2} \sigma_{11}^{(j)} &= \sum_{k=1}^N \sigma_{21}^{(j)} \cdot \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j - \xi} d\xi, \\ \sigma_{22}^{(j)} &= -\frac{\sigma_{22}^{(j)} - \sigma_{22}^{(j-1)}}{2}. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

На рис.3 построены эпюры распределения напряжений в слое взаимодействия на первых 7 элементах при следующих расчетных характеристиках: $N = 1000$; $a = 10$ для двух значений коэффициента Пуассона: $\nu = 0,15$, $\nu = 0,35$. Непрерывные линии соответствуют $\nu = 0,35$, а штриховые – $\nu = 0,15$. Кривые 1 и 3 определяют напряжение σ_{11} , а 2 и 4 – σ_{22} .

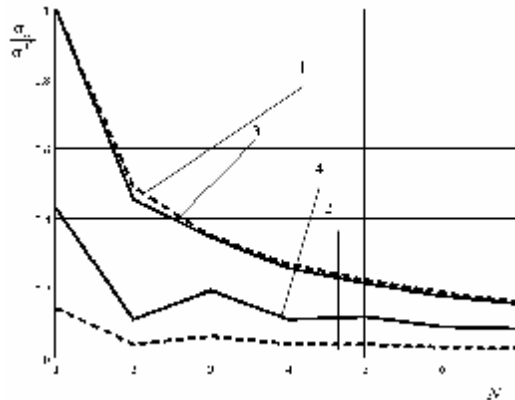


Рис.3. Распределение напряжений на границе слоя

Из рисунка видно, что коэффициент Пуассона практически не влияет на распределение напряжений σ_{11} , но оказывает существенное влияние на напряжение σ_{22} . Полученная зависимость показывает, что напряжение σ_{22} для физического разреза соответствует напряжению σ_{11} и может играть существенную роль при формировании пластической зоны, предшествующей началу разделения. Кроме того, отношение $\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}$ для дискретной рассматриваемой модели существенно зависит от коэффициента Пуассона.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 06-01-00047 и № 07-01-96402).

г. Тула

Поступила: 18 января 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бриджмен, П. Исследование больших пластических деформаций и разрыва /П. Бриджмен – М. : ИЛ, 1955. – 444 с.
2. Глаголев, В. В. Модель процесса разделения деформируемого тела / В. В. Глаголев, К. А. Кузнецов, А. А. Маркин // Известия РАН. МТТ. – 2003. – № 6. – С. 61-68.
3. Глаголев, В. В. Модель установившегося разделения материального слоя / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. МТТ. – 2004. – № 5. – С. 121-129.
4. Глаголев, В. В. Об одном способе определения связей между критическими значениями характеристик процесса установившегося разделения материала / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Проблемы прочно-сти. – 2006. – №2. – С. 47-58.
5. Глаголев, В. В. Оценка толщины слоя взаимодействия как универсального параметра материала / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. МТТ. – 2006. – №5. – С. 177-186.
6. Ентов, В. М. К модели хрупкого разрушения Прандтля / В. М. Ентов, Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. – 1968. – № 6. – С. 87-99.
7. Качанов, Л. М. Основы механики разрушения /Л. М. Качанов – М. : Наука, 1974. – 312 с.
8. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд : Пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
9. Новожилов, В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности /В. В. Новожилов // ПММ. – 1969. – № 2. – С. 212-222.
10. Фридман, Я. Б. Механические свойства металлов. – Ч. 1. Деформация и разрушение / Я. Б. Фридман – М. : Машиностроение, 1974. – 472 с.
11. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов– М. : Наука, 1974.– 640 с.
12. Griffith, A. A. The theory of rupture / A. A. Griffith // In: Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech. – Delft. – 1924. – P. 55-63.
13. Irwin, G. R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate / G. R. Irwin // J. Appl. Mech. 1958. – V. 24. –¹ 3. – P. 361-364. (Discussion // J. Appl. Mech. / 1958. – V. 25. –¹ 2. – P. 299-303).
14. Matvienko, Yu. G. Some problems in linear and non-linear fracture mechanics / Yu. G. Matvienko, E. M. Morozov // Engineering Fracture Mechanics. – 1987. – V.62. – P. 127-138.
15. Orowan, E. O. Proc. Symposium on internal stresses in metals and alloys / E. O. Orowan – London : Institut of Metals, 1948 – p.451.
16. Prandtl, L. Ein Gedankenmodell für den Zerreibvorgang spröder Körper / L. Prandtl ZAMM Bd. 13. – 1933. – S. 129-133.
17. Rice J. R. The elastic-plastic mechanics of crack extension / J. R. Rice // Int. J. Fracture Mech. – 1968. – V. 4. –¹ 1. – P. 41-47

Гоцев Д. В., Спорыхин А. Н., Стасюк А. Н.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ВЫРАБОТОК НЕКРУГОВОЙ ФОРМЫ ПРИ СОВМЕСТНОМ РАСЧЕТЕ КРЕПИ И МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

(Воронежский государственный университет)

Известно, что решение задач горной механики, относящихся к процессам проведения и охраны подземных выработок, бурения нефтяных и газовых скважин, сводится к постановке и решению задач устойчивости массива и крепи при неупругих деформациях [2-6, 8, 10]. Эта задача разделяется на два этапа: первый – заключается в совместном определении напряженно-деформированного состояния (НДС) горного массива в приконтурной области и крепи выработки, имеющей в поперечном сечении форму эллипса или правильного многоугольника, второй – в решении самой линеаризированной задачи устойчивости, т. е. в определении критической величины давления, равномерно распределенного по внутреннему контуру крепи. В отличие от [4, 5] в настоящей работе на основе точных трехмерных уравнений [6] исследуется локальная неустойчивость пород приствольной зоны вертикальной выработки и крепи с учетом ее многослойности и некруговой формы поперечного сечения.

Исследуем потерю устойчивости вертикальной выработки и ее многослойной крепи, i -ый слой которой в поперечном сечении имеет форму эллипса или правильного многоугольника. Материал массива и слоев крепи предполагается различным и моделируется упруго-вязко-пластической средой [10] с трансляционным упрочнением [1,7].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = \left(S_s^j - c_i e_s^{jP} - h_i e_s^{jP} \right) \left(S_j^s - c_i e_j^{sP} - h_i e_j^{sP} \right) - k_i^2, \quad (1)$$

а соотношения ассоциированного закона течения –

$$de_i^{jP} = dl \frac{\partial F}{\partial S_i^j}. \quad (2)$$

Здесь c_i – коэффициент упрочнения; k_i – предел текучести, h_i – коэффициент вязкости; $S_s^j = S_s^j - s d_s^j$ – девиатор тензора напряжений; $s = s_k^k / 3$; d_s^j – символ Кронекера; e_s^j – компоненты тензора деформаций; e_s^j – компоненты тензора скоростей деформаций; dl – скалярный положительный множитель. Индексы s, j принимают значения от 1 до 3. Индекс i принимает значения 0, 1, 2, ..., N. Равенство нулю индекса i у величин c, k, h в (1), (2) и далее, подчеркивает принадлежность этих величин к массиву, при $i \neq 0$ – принадлежность к i -му слою. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Здесь

и далее верхние индексы «р» или «е» обозначают величины, относящиеся к пластической или упругой областям соответственно.

Определение НДС массива и многослойной крепи горной выработки сводится к решению двух взаимосвязанных задач о концентрации напряжений. Первая задача сводится к определению НДС в i -ом слое крепи, вторая – к определению НДС в массиве горных пород.

При определении НДС все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра d , характеризующего отклонение от исходного невозмущенного состояния, то есть отклонение окружности радиуса a_i от правильного многоугольника радиуса [7]

$$r_{mi} = a_i \left(1 + d d_i \cos m_i q - \frac{2m_i - 1}{4} d^2 d_i^2 (1 - \cos 2m_i q) + o(d^3) \right), \quad (3)$$

где $d d_i$ – параметр, определяющийся полуосями эллипса ($m_i=2$): $a_i(1+\partial d)$, $a_i(1-\partial d)$) или параметрами гипоциклоиды в случае $m_i \neq 2$. Здесь и далее $0 \leq q \leq 2\pi$. В качестве нулевого приближения выбирается решение осесимметричной задачи о распределении полей напряжений и перемещений в массиве около подкрепленной круговой вертикальной выработки и в многослойной круговой крепи.

1. Рассмотрим горный массив с круговой вертикальной выработкой радиуса a_0 , подкрепленной с некоторым натягом круговой N -слойной крепью (каждый последующий слой крепи с некоторым натягом помещается в предыдущий, a_i – внутренний радиус i -ого слоя, b_i – внешний радиус i -ого слоя). К внутреннему контуру N -ого слоя крепи радиуса a_N приложена равномерно распределенная нагрузка q_N . На линиях сопряжения слоев крепи и массива возникают сжимающие усилия q_0, q_1, \dots, q_{N-1} . На бесконечности напряжения в массиве стремятся в величине gh (g – объемный вес породы, h – глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим. Величины q_i ($i=0,1,2,\dots, N$) и gh таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры слоев крепи и контур выработки. Решение проведем в рамках плоской задачи теории течения используя цилиндрическую систему координат r, q, z для случая установившегося течения. Граничные условия и условия сопряжения для i -го слоя крепи и массива горных пород имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} s_{ri} \Big|_{r=a_i} &= s_{ri} \Big|_{r=b_{i+1}} = -q_i & (i=0,1,2,\dots, N-1), \\ s_{r0} \Big|_{r \rightarrow \infty} &= -gh, \quad s_{rN} \Big|_{r=a_N} = -q_N, \\ [s_{ri}] \Big|_{r=g_i} &= 0, [s_{qi}] \Big|_{r=g_i} = 0 & (i=0,1,2,\dots, N), \end{aligned} \quad (4)$$

где квадратные скобки обозначают разрыв значений выражения, в данном случае – на границе g_i раздела сред упругого и пластического деформирования.

НДС, соответствующее i -ому слою круговой крепи ($i=1,2,\dots, N$) при установившемся движении, определено в виде:

– в пластической области ($a_i < r < g_i$) распределение напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} s_{ri} &= -q_i + \frac{4m_i c_i k_i}{c_i + 2m_i} \left(\ln \frac{r}{a_i} + \frac{c_i D_i}{2c_i k_i} \left(\frac{1}{a_i^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right), \\ s_{qi} &= -q_i + \frac{4m_i c_i k_i}{c_i + 2m_i} \left(\ln \frac{r}{a_i} + 1 + \frac{c_i D_i}{2c_i k_i} \left(\frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right); \end{aligned} \quad (5)$$

– в упругой области ($g_i < r < b_i$) поле напряжений имеет вид

$$s_{ri} = -q_{i-1} + 2m_i D_i \left(\frac{1}{b_i^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad s_{qi} = -q_{i-1} + 2m_i D_i \left(\frac{1}{b_i^2} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (6)$$

где m_i – модуль сдвига для i -ого слоя крепи, $D_i = \frac{c_i k_i}{2m_i} g_i^2$, $c_i = \text{sign}(q_{i-1} - q_i)$.

Перемещения (u – вдоль радиального направления) и полные деформации в упругой и пластической областях определяются формулам и

$$u_i = \frac{D_i}{r}, \quad e_{ri} = -e_{\theta i} = -\frac{D_i}{r^2}. \quad (7)$$

Пластические деформации определяются соотношением

$$e_{ri}^p = -e_{\theta i}^p = \frac{c_i k_i}{c_i + 2m_i} \left(1 - \frac{g_i^2}{r^2} \right). \quad (8)$$

НДС горного массива возле круговой выработки определено в виде:

– в пластической области ($1 < r < g_0$) распределение напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} s_{r0} &= -q_0 + \frac{4m_0 c_0 k_0}{c_0 + 2m_0} \left(\ln \frac{r}{a_0} + \frac{c_0 D_0}{2c_0 k_0} \left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right), \\ s_{q0} &= -q_0 + \frac{4m_0 c_0 k_0}{c_0 + 2m_0} \left(\ln \frac{r}{a_0} + 1 + \frac{c_0 D_0}{2c_0 k_0} \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right); \end{aligned} \quad (9)$$

– в упругой области ($g_0 < r < \infty$) поле напряжений согласно [11] имеет вид

$$s_{r0} = -gh - \frac{2m_0 D_0}{r^2}, \quad s_{q0} = -gh + \frac{2m_0 D_0}{r^2}, \quad (10)$$

где m_0 – модуль сдвига для материала массива, $D_0 = \frac{c_0 k_0}{2m_0} g_0^2$, $c_0 = \text{sign}(q_0 - gh)$.

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях, а так же пластические деформации определяются по формулам (7), (8), где надо положить $i=0$. Для поиска неизвестных констант интегрирования D_i ($i=0, 1, \dots, N$), контактных нагрузок q_i ($i=0, 1, \dots, N-1$) и радиусов упруго-пластических границ g_i ($i=0, 1, \dots, N$) используются условия совместного деформирования слоев крепи и массива

$$\frac{1}{a_i} D_i - \frac{1}{b_{i+1}} D_{i+1} = b_{i+1} - a_i, \quad (11)$$

($i=0, 1, 2, \dots, N-1$), которые рассматриваются в совокупности с условиями (4).

В (5) – (10) все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу текучести для материала горного массива – k_0 , а имеющие размерность длины – к радиусу выработки a_0 , т.е. $k_0=1$, $a_0=1$.

Полученные решения для массива и крепи принимаются в качестве нулевого приближения для исследуемых далее задач.

2. Далее рассмотрим задачу об определении полей напряжений и перемещений для области: а) массива около вертикальной подкрепленной выработки с поперечным сечением близким к правильному многоугольнику (или эллипсу) и б) многослойной крепи, состоящей из N слоев, поперечные сечения которых имеют форму колец (внешний и внутренний контур близки по форме к правильному m -угольнику или эллипсу). Ограничимся случаем первого приближения первой итерации.

Граничные условия на нормальные S_{n_i} и касательные S_{τ_i} напряжения для i -го слоя крепи ($r_{m(i-1)}$ – внутренний радиус i -ого слоя, r_{mi} – внешний радиус) согласно [7] имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} S_{r_i}^{(1)} \Big|_{r=a_i} &= -2A_i d_i \cos m_i q, \\ t_{r q i}^{(1)} \Big|_{r=a_i} &= -2m_i A_i d_i \sin m_i q, \end{aligned} \quad (12)$$

где $A_i = \frac{2m_i c_i k_i}{c_i + 2m_i} \left(1 + \frac{c_i D_i}{c_i k_i} \frac{1}{a_i^2}\right)$.

Тогда напряжения в пластической зоне с учетом (12) будут иметь вид

$$\begin{aligned} S_{r_i}^{(1)}(r, q) &= \frac{2A_i a_i d_i}{r} (\sqrt{m_i^2 - 1} \cdot \sin b_i(r) - \cos b_i(r)) \cos m_i q - \frac{F_i}{2} \left(g_i^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a_i^2}\right) + 2 \ln \frac{r}{a_i}\right), \\ S_{q_i}^{(1)}(r, q) &= \frac{2A_i a_i d_i}{r} (\sqrt{m_i^2 - 1} \cdot \sin b_i(r) - \cos b_i(r)) \cos m_i q - \frac{F_i}{2} \left(-g_i^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a_i^2}\right) + 2 \ln \frac{r}{a_i} + 2\right), \\ t_{r q i}^{(1)}(r, q) &= -\frac{2m_i A_i a_i d_i}{r} \cos b_i(r) \sin m_i q. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $b_i(r) = \sqrt{m_i^2 - 1} \cdot \ln \frac{r}{a_i}$, $F_i = \frac{2c_i k_i c_i}{c_i + 2m_i}$.

Эти соотношения будут справедливы и для пластической области массива, если в них положить $i=0$.

По условию сопряжения напряжений на упругопластической границе g_i , следуя [11] получим граничные условия для напряжений в упругой зоне i -ого слоя крепи на ее внутренней границе

$$S_{r_i}^{(1)} \Big|_{r=g_i} = a_{o_i} F_i - a_{1i} d_i \cos m_i q, \quad t_{r q i}^{(1)} \Big|_{r=g_i} = -a_{2i} d_i \sin m_i q,$$

где

$$b_{0i} = \sqrt{m_i^2 - 1} \cdot \ln \frac{g_i}{a_i}, \quad a_{o_i} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{g_i}{a_i^2} + 2 \ln \frac{g_i}{a_i}\right), \quad (14)$$

$$a_{1i} = -\frac{2A_i a_i}{g_i} (\sqrt{m_i^2 - 1} \cdot \sin b_{0i} - \cos b_{0i}), \quad a_{2i} = \frac{2m_i A_i a_i}{g_i} \cos b_{0i}.$$

На внешней границе области упругого деформирования i -ого слоя будут иметь место следующие граничные условия

$$s_{ri}^{(1)} \Big|_{r=b_i} = -2B_i d_i \cos m_i q, \quad t_{rqi}^{(1)} \Big|_{r=b_i} = -2B_i m_i d_i \sin m_i q, \quad (15)$$

где $B_i = \frac{2m_i D_i}{b_i^2}$.

Используя (14) и (15), согласно [8] определим первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области, разделив их на 2 части – найденные по условиям на внутренней границе (верхний индекс (g)) и на внешней границе (верхний индекс (b))

$$s_{ri}^{(1)} = s_{ri}^{(g)} + s_{ri}^{(b)}, \quad s_{qi}^{(1)} = s_{qi}^{(g)} + s_{qi}^{(b)}, \quad t_{rqi}^{(1)} = t_{rqi}^{(g)} + t_{rqi}^{(b)}, \\ u_{ri}^{(1)} = u_{ri}^{(g)} + u_{ri}^{(b)}, \quad u_{qi}^{(1)} = u_{qi}^{(g)} + u_{qi}^{(b)}, \quad (16)$$

– внутренние составляющие напряжений

$$s_{ri}^{(g)} = \frac{g_i^2}{b_i^2 - g_i^2} (-a_{oi} F_i + a_o F_i \frac{b_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N_i} \{ \{ m_i [(m_i - 1) - m_i (\frac{b_i}{g_i})^2 + (\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{m_i - 2} + \\ + m_i [(m_i + 1) - m_i (\frac{b_i}{g_i})^2 - (\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{-(m_i + 2)} + (m_i - 2) [(m_i + 1) - m_i (\frac{b_i}{g_i})^2 - (\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{m_i} + \\ + (m_i + 2) [(m_i - 1) - m_i (\frac{b_i}{g_i})^{-2} + (\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{-m_i} \} a_{1i} + \\ + \{ [-(m_i - 1)(m_i + 2) + m_i^2 (\frac{b_i}{g_i})^2 + (m_i - 2) (\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{m_i - 2} + \\ + [(m_i - 2)(m_i + 1) - m_i^2 (\frac{b_i}{g_i})^2 + (m_i + 2) (\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{-(m_i + 2)} + [-(m_i - 2)(m_i + 1) + \\ + (m_i^2 - 4) (\frac{b_i}{g_i})^{-2} - (m_i - 2) (\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{m_i} + [(m_i - 1)(m_i + 2) - (m_i^2 - 4) (\frac{b_i}{g_i})^{-2} - \\ - (m_i + 2) (\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{-m_i} \} a_{2i} \} d_i \cos m_i q, \\ s_{qi}^{(g)} = \frac{g_i^2}{b_i^2 - g_i^2} (-a_{oi} F_i - a_o F_i \frac{b_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N_i} \{ \{ m_i [-(m_i - 1) + m_i (\frac{b_i}{g_i})^2 - (\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{m_i - 2} + \\ + m_i [-(m_i + 1) + m_i (\frac{b_i}{g_i})^2 + (\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{-(m_i + 2)} + (m_i + 2) [-(m_i + 1) + m_i (\frac{b_i}{g_i})^{-2} + (\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{m_i} + \\ + (m_i - 2) [-(m_i - 1) + m_i (\frac{b_i}{g_i})^{-2} - (\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{-m_i} \} a_{1i} + \{ [(m_i - 1)(m_i + 2) - m_i^2 (\frac{b_i}{g_i})^2 - \\ - (m_i - 2) (\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{m_i - 2} + [-(m_i - 2)(m_i + 1) + m_i^2 (\frac{b_i}{g_i})^2 - (m_i + 2) (\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{-(m_i + 2)} + \\ + [(m_i - 1)(m_i + 2) - (m_i^2 - 4) (\frac{b_i}{g_i})^{-2} - (m_i - 2) (\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{m_i} + [(m_i - 1)(m_i + 2) - (m_i^2 - 4) (\frac{b_i}{g_i})^{-2} - \\ - (m_i + 2) (\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}] (\frac{r}{g_i})^{-m_i} \} a_{2i} \} d_i \sin m_i q, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& + [(m_i + 1)(m_i + 2) - (m_i + 2)^2 \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + (m_i + 2) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}] \left(\frac{r}{g_i}\right)^{m_i} + [-(m_i - 1)(m_i - 2) + (m_i - 2)^2 \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + \\
& + (m_i - 2) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}] \left(\frac{r}{g_i}\right)^{-m_i} \} a_{2i} \} d_i \cos m_i q, \\
t_{rqi}^{(g)} = & -\frac{1}{2N_i} \{ [m_i(-m_i - 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 - \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}] \left(\frac{r}{g_i}\right)^{m_i-2} + m_i((m_i + 1) - m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 - \\
& - \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}) \left(\frac{r}{g_i}\right)^{-(m_i+2)} + m_i(-m_i + 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}] \left(\frac{r}{g_i}\right)^{m_i} + m_i((m_i - 1) - \\
& - m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}) \left(\frac{r}{g_i}\right)^{-m_i} \} a_{1i} + [((m_i - 1)(m_i + 2) - m_i^2 \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 - \\
& - (m_i - 2) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}) \left(\frac{r}{g_i}\right)^{m_i-2} + ((m_i - 2)(m_i + 1) - m_i^2 \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 + (m_i + 2) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}) \left(\frac{r}{g_i}\right)^{-(m_i+2)} + \\
& + (m_i(m_i + 1) - m_i(m_i + 2) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}) \left(\frac{r}{g_i}\right)^{m_i} + (m_i(m_i - 1) - m_i(m_i - 2) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} - \\
& - m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}) \left(\frac{r}{g_i}\right)^{-m_i} \} a_{2i} \} d_i \sin m_i q;
\end{aligned}$$

– внешние составляющие напряжений

$$\begin{aligned}
S_{ri}^{(b)} = & -\frac{1}{N_i} \{ m_i [-(m_i - 1)(m_i + 1) + m_i(m_i - 1) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + (m_i - 1) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{m_i-2} + \\
& + m_i [(m_i + 1)(m_i - 1) - m_i(m_i + 1) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + (m_i + 1) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{-(m_i+2)} + \\
& + (m_i - 2) [-(m_i - 1)(m_i + 1) + m_i(m_i + 1) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 - (m_i + 1) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{m_i} + \\
& + (m_i + 2) [(m_i - 1)(m_i + 1) - m_i(m_i - 1) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 - (m_i - 1) \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{-m_i} \} B_i d_i \cos m_i q, \\
S_{qi}^{(b)} = & -\frac{1}{N_i} \{ m_i(m_i - 1) [(m_i + 1) - m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{m_i-2} + m_i(m_i + 1) [-(m_i - 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} - \\
& - \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{-(m_i+2)} + (m_i + 1)(m_i + 2) [(m_i - 1) - m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{m_i} + \\
& + (m_i - 2)(m_i - 1) [-(m_i + 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{-m_i} \} B_i d_i \cos m_i q, \\
t_{rqi}^{(b)} = & -\frac{m_i}{N_i} \{ (m_i - 1) [(m_i + 1) - m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{m_i-2} + (m_i + 1) [(m_i - 1) - m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + \\
& + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{-(m_i+2)} + (m_i + 1) [(m_i - 1) - m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}] \left(\frac{r}{b_i}\right)^{m_i} + (m_i - 1) [(m_i + 1) -
\end{aligned} \tag{18}$$

$$-m_i \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^2 - \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-2m_i} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{-m_i} \} B_i d_i \sin m_i q ,$$

здесь $N_i = 2(m_i^2 - 1) - m_i^2 \frac{b_i^4 + g_i^4}{b_i^2 g_i^2} + \frac{b_i^{4m_i} + g_i^{4m_i}}{b_i^{2m_i} g_i^{2m_i}}$;

– внутренние составляющие перемещений

$$u_{ri}^{(g)} = \frac{-g_i^2}{6m_i(b_i^2 - g_i^2)} [a_{0i} F_i + 3a_{0i} F_i \frac{b_i^2}{r^2}] r - \frac{1}{3m_i} \left[-\frac{3}{2} m_i C_{1i}^{(g)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{m_i-1} + \frac{3}{2} m_i C_{2i}^{(g)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{-(m_i+1)} - \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{2} m_i - 1 \right) C_{3i}^{(g)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{m_i+1} + \left(\frac{3}{2} m_i + 1 \right) C_{4i}^{(g)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{-(m_i-1)} \right] b_i d_i \cos m_i q , \quad (19)$$

$$u_{qi}^{(g)} = -\frac{1}{3m_i} \left[\frac{3}{2} m_i C_{1i}^{(g)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{m_i-1} + \frac{3}{2} m_i C_{2i}^{(g)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{-(m_i+1)} + \left(\frac{3}{2} m_i + 4 \right) C_{3i}^{(g)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{m_i+1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} m_i - 4 \right) C_{4i}^{(g)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{-(m_i-1)} \right] b_i d_i \sin m_i q ;$$

– внешние составляющие перемещений

$$u_{ri}^{(b)} = -\frac{1}{3m_i} \left[-\frac{3}{2} m_i C_{1i}^{(b)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{m_i-1} + \frac{3}{2} m_i C_{2i}^{(b)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{-(m_i+1)} - \left(\frac{3}{2} m_i - 1 \right) C_{3i}^{(b)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{m_i+1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} m_i + 1 \right) C_{4i}^{(b)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{-(m_i-1)} \right] b_i d_i \cos m_i q , \quad (20)$$

$$u_{qi}^{(b)} = -\frac{1}{3m_i} \left[\frac{3}{2} m_i C_{1i}^{(b)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{m_i-1} + \frac{3}{2} m_i C_{2i}^{(b)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{-(m_i+1)} + \left(\frac{3}{2} m_i + 4 \right) C_{3i}^{(b)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{m_i+1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} m_i - 4 \right) C_{4i}^{(b)} \left(\frac{r}{b_i} \right)^{-(m_i-1)} \right] b_i d_i \sin m_i q ;$$

здесь

$$C_{1i}^{(g)} = \frac{-(m_i - 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^2 - \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-2m_i}}{2(m_i - 1)N_i} \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-(m_i-2)} a_{1i} + \frac{(m_i - 1)(m_i + 2) - m_i^2 \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^2 - (m_i - 2) \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-2m_i}}{2m_i(m_i - 1)N_i} \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{m_i-2} a_{2i} ,$$

$$C_{2i}^{(g)} = \frac{-(m_i + 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^2 + \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{2m_i}}{2(m_i + 1)N_i} \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-(m_i+2)} a_{1i} + \frac{-(m_i - 2)(m_i + 1) + m_i^2 \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^2 - (m_i + 2) \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{2m_i}}{2m_i(m_i + 1)N_i} \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-(m_i+2)} a_{2i} ,$$

$$C_{3i}^{(g)} = \frac{-(m_i + 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-2} + \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-2m_i}}{2(m_i + 1)N_i} \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{m_i} a_{1i} + \frac{(m_i + 1) - (m_i + 2) \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-2} + \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-2m_i}}{2m_i(m_i + 1)N_i} \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{m_i} a_{2i} ,$$

$$C_{4i}^{(g)} = \frac{-(m_i - 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-2} - \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{2m_i}}{2(m_i - 1)N_i} \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-m_i} a_{1i} + \frac{-(m_i - 1) + (m_i - 2) \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-2} + \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{2m_i}}{2(m_i - 1)N_i} \left(\frac{b_i}{g_i} \right)^{-m_i} a_{2i} ,$$

$$\begin{aligned}
C_{1i}^{(b)} &= \frac{-(m_i - 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}}{2(m_i - 1)N_i} 2B_i + \frac{(m_i - 1)(m_i + 2) - m_i^2 \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} - (m_i - 2)\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}}{2m_i(m_i - 1)N_i} 2m_i B_i, \\
C_{2i}^{(b)} &= \frac{-(m_i + 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}}{2(m_i + 1)N_i} 2B_i + \frac{-(m_i - 2)(m_i + 1) + m_i^2 \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} - (m_i + 2)\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}}{2m_i(m_i - 1)N_i} 2m_i B_i, \\
C_{3i}^{(b)} &= \frac{-(m_i + 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}}{2(m_i + 1)N_i} 2B_i + \frac{(m_i + 1) - (m_i + 2)\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}}{2(m_i - 1)N_i} 2m_i B_i, \\
C_{4i}^{(b)} &= \frac{-(m_i - 1) + m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 - \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}}{2(m_i - 1)N_i} 2B_i + \frac{-(m_i - 1) + (m_i - 2)\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}}{2(m_i - 1)N_i} 2m_i B_i.
\end{aligned}$$

Граница раздела упругой и пластической областей, согласно [11] определяется в виде

$$g_i^{(1)} = - \frac{[S_{qi}^{(1)}]_{r=g_i}}{\left[\frac{dS_{qi}}{dr}\right]_{r=g_i}}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\text{где } \left[\frac{dS_{qi}}{dr}\right]_{r=g_i} &= \frac{4m_i c_i k_i}{c_i + 2m_i g_i} \frac{1}{g_i} \left(1 + \frac{2m_i D_i}{c_i k_i} \frac{1}{g_i^2}\right), \\
[S_{qi}^{(1)}]_{r=g_i} &= \frac{2A_i a_i d_i}{g_i} (\sqrt{m_i^2 - 1} \cdot \sin b_i(g_i) - \cos b_i(g_i)) \cos m_i q - \frac{F_i}{2} \left(-\frac{g_i^2}{a_i^2} + 2 \ln \frac{g_i}{a_i} + 1\right) - \\
&+ \frac{b_i^2 + g_i^2}{b_i^2 - g_i^2} a_{oi} F_i + \frac{1}{2N_i} \left\{ \{-4m_i^2 - 4 + 2m_i^2 \left(\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2}\right) + 2\left(\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i} + \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i}\right)\} a_{1i} + \right. \\
&+ \{8m_i - 8m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2} + 4\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-2m_i} - 4\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{2m_i}\} a_{2i} \left. \right\} d_i \cos m_i q + \\
&+ \frac{1}{N_i} \left\{ -4(m_i + 1)m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-m_i+2} + 4m_i(m_i - 1)\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{-m_i} + 2(m_i + 1)(m_i + 2)\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{m_i} - \right. \\
&\left. - 2(m_i - 1)m_i \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{m_i+2} \right\} B_i d_i \cos m_i q.
\end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, соотношения (13), (16) – (22) определяют НДС и положение упруго-пластической границы и в i -ом слое крепи ($i=1, 2, \dots, N$), правильной многоугольной формы поперечного сечения.

НДС массива в окрестности вертикальной выработки многоугольного поперечного сечения будем определять так же в рамках [7].

Граничные условия для напряжений в упругой зоне массива на ее внутренней границе будут иметь вид (14), если в них положить $i=0$. На внешней границе области упру-

того деформирования массива при $r \rightarrow \infty$ будут иметь место следующие граничные условия

$$s_r^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, t_{rq}^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (23)$$

Первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области массива представимы в виде (16) (надо положить $i=0$) и согласно [9] определяются соотношениями

$$\begin{aligned} s_r^{(g)} &= a_{00} B_0 \frac{g_0^2}{r^2} - \frac{1}{2} \{ [-m_0 (\frac{g_0}{r})^{m_0+2} + (m_0+2) (\frac{g_0}{r})^{m_0}] a_{10} + [(m_0+2) (\frac{g_0}{r})^{m_0+2} - (m_0+2) (\frac{g_0}{r})^{m_0}] a_{20} \} \cos m_0 q, \\ \sigma_q^{(g)} &= -a_{00} B_0 \frac{g_0^2}{r^2} - \frac{1}{2} \{ [m_0 (\frac{g_0}{r})^{m_0+2} - (m_0-2) (\frac{g_0}{r})^{m_0}] a_{10} + [-(m_0+2) (\frac{g_0}{r})^{m_0+2} + (m_0-2) (\frac{g_0}{r})^{m_0}] a_{20} \} \cos m_0 q, \\ t_{rq}^{(g)} &= -\frac{1}{2} \{ [-m_0 (\frac{g_0}{r})^{m_0+2} + m_0 (\frac{g_0}{r})^{m_0}] a_{10} + [(m_0+2) (\frac{g_0}{r})^{m_0+2} - m_0 (\frac{g_0}{r})^{m_0}] a_{20} \} \sin m_0 q, \\ s_r^{(b)} &= 0, s_q^{(b)} = 0, t_{rq}^{(b)} = 0, \\ u_r^{(g)} &= -\frac{a_{00} B_0 g_0^2}{2m_0 r} - \frac{1}{3m_0} [(\frac{g_0}{r})^3 (\frac{1}{2} a_{10} - a_{20}) - 2 \frac{g_0}{r} (a_{10} - a_{20})] g_0 d_0 \cos m_0 q, \\ u_q^{(g)} &= -\frac{1}{3m_0} [(\frac{g_0}{r})^3 (\frac{1}{2} a_{10} - a_{20}) + \frac{1}{2} \frac{g_0}{r} (a_{10} - a_{20})] g_0 d_0 \sin m_0 q, \\ u_r^{(b)} &= 0, u_q^{(b)} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Радиус упругопластической границы находится по формуле (21), где надо положить $i=0$ и

$$\begin{aligned} \left[\frac{ds_{q0}}{dr} \right] \Big|_{r=g_0} &= \frac{4m_0 c_0 k_0}{c_0 + 2m_0 g_0} \frac{1}{g_0} \left(1 + \frac{2m_0 D_0}{c_0 k_0} \frac{1}{g_0^2} \right), \\ [s_{q0}^{(1)}] \Big|_{r=g_0} &= \frac{2A_0 a_0 d_0}{g_0} (\sqrt{m_0^2 - 1} \cdot \sin b_0(g_0) - \cos b_0(g_0)) \cos m_0 q - \\ &- \frac{F_0}{2} \left(-\frac{g_0^2}{a_0^2} + 2 \ln \frac{g_0}{a_0} + 1 \right) + a_0 F_0 + \{ a_{10} - 2a_{20} \} d_0 \cos m_0 q. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом соотношения (13), (16), (21) (в них надо положить $i=0$), (24) – (26) определяют НДС в массиве горных пород около вертикальной выработки с поперечным сечением близким по форме к правильному m_0 – угольнику.

3. Исследование устойчивости основного состояния (5) – (26) вертикальной выработки с многослойной некруговой крепью при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения [6] и в предположении, что слои работают совместно без проскальзывания и отставания, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [10].

Уравнения равновесия для областей пластического V_i^p и упругого V_i^e деформирования массива и крепи имеют вид

$$\nabla_b (s_{ji}^b + s_{ai}^{0b} \nabla^a u_{ji}) - r s^2 u_{ji} = 0, \quad s = iw \quad (27)$$

Здесь и далее по индексу i суммирования нет (если особо не оговорено) $i=0, 1, 2, \dots$, ∇ – символ ковариантного дифференцирования, кружок вверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния (5) – (26).

Граничные условия на внутренней поверхности крепи и условия затухания возмущений на внешней поверхности массива запишем в виде

$$N_b (s_{jn}^b + s_{an}^{0b} \nabla^a u_{jn}) = 0, \quad u_{j0} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (28)$$

Условия непрерывности на упругопластических границах g_i имеют вид

$$\left[N_b (s_{ji}^b + s_{ai}^{0b} \nabla^a u_{ji}) \right] = 0, \quad \left[u_{ji} \right] = 0. \quad (29)$$

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений для несжимаемой упруговязкопластической модели в пластической и упругой областях представима в форме

$$s_{ji}^b = p_i d_j^b + 2m_i e_{ji}^b - a_i b_i f_{ji}^b, \quad (30)$$

где p_i – множитель Лагранжа, $a_i = \frac{4m_i^2}{k_i^2(2m_i + c_i + h_i s)}$, $f_{ji}^b = s_{ji}^{0b} - c_i e_{ji}^{p0b}$, $b_i = f_{li}^k e_{li}^k$

В упругих областях надо положить $a_i = 0$. В случае однородного докритического состояния эти соотношения совпадают с полученными в [10].

Уравнения (27) – (30) с учетом условий несжимаемости в пластических областях $V_i^p, (i=0, 1, 2, \dots, N)$ горного массива и крепи представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости вертикальной выработки с многослойной крепью, когда имеются границы раздела областей упругого и пластического поведения материала при нагружении в горном массиве и крепи. Система уравнений (24), (27) – система $4(N+1)$ дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитудных значений векторов перемещений u_i, v_i, w_i и гидростатических давлений p_i соответствующих пластической и упругой зонам массива и крепи. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений задачи перемещения и гидростатические давления в зонах упругого и пластического деформирования для горного массива и крепи аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_n \sum_m A_i^{nm}(r) \cos(mq) \cos(nz), & v_i &= \sum_n \sum_m B_i^{nm}(r) \sin(mq) \cos(nz), \\ w_i &= \sum_n \sum_m C_i^{nm}(r) \cos(mq) \sin(nz), & p_i &= \sum_n \sum_m D_i^{nm}(r) \cos(mq) \cos(nz). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь n, m – параметры волнообразования. Выбор решений в форме (31) допускает локальную потерю устойчивости массива и крепи по одинаковой форме.

Подставляя функции u_i, v_i, w_i, p_i в условие несжимаемости и линеаризованные уравнения устойчивости (27) и учитывая (30) после ряда преобразований получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $A_i^{nm}, B_i^{nm}, C_i^{nm}, D_i^{nm}$

$$\begin{aligned}
& A_i + A'_i r + B_i m + C_i n r = 0, \\
& A_i \left(-\frac{1}{r} a_{5i} + a_{2i,r} + \frac{1}{r} a_{8i,q} + \frac{1}{r} (r^2 r w^2 - S_{qi}^0) \right) \cos m q - (a_{9i} + \frac{1}{r} S_{qi}^0) m^2 \cos m q - \\
& - (m_i r + r S_{zi}^0) n^2 \cos m q - (a_{3i} - a_{6i} + \frac{1}{r} a_{8i} + r a_{3i,r} + a_{9i,q} + \frac{1}{r} (r t_{rqi,r}^0 + S_{qi,q}^0)) m \sin m q + \\
& + A'_i \left((a_{1i} + a_{2i} - a_{4i} + r a_{1i,r} + a_{7i,q} + r S_{ri,r}^0 + t_{rqi,q}^0 + S_{ri}^0) \cos m q - \right. \\
& \left. - (r a_{3i} + a_{7i} + 2 t_{rqi}^0) m \sin m q \right) + A_i'' (r a_{1i} + r S_{ri}^0) \cos m q + \\
& + B_i \left(\left(-\frac{1}{r} a_{5i} - a_{9i} + a_{2i,r} + \frac{1}{r} a_{8i,q} - \frac{2}{r} S_{qi}^0 \right) m \cos m q + \right. \\
& + (-a_{3i} + a_{6i} - r a_{3i,r} - a_{9i,q} - \frac{1}{r} (r t_{rqi,r}^0 + S_{qi,q}^0)) \sin m q - \frac{1}{r} a_8 m^2 \sin m q + \\
& + B_i' \left((a_{2i} + r a_{9i}) m \cos m q + (r a_{3i} - r a_{6i} + r^2 a_{3i,r} + r a_{9i,q} - 2 t_{rqi}^0) \sin m q \right) + \\
& + B_i'' r^2 a_{3i} \sin m q + C_i' r m_i n \cos m q + D_i' r \cos m q = 0, \\
& A_i \left(\left(\frac{1}{r} a_{8i} + a_{8i,r} + \frac{1}{r} a_{5i,q} + \frac{1}{r} (r t_{rqi,r}^0 + S_{qi,q}^0) \right) \cos m q - a_{6i} m^2 \cos m q - \right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{r} a_{5i} + 2 a_{9i} + r a_{9i,r} + a_{6i,q} + \frac{2}{r} S_{qi}^0 \right) m \sin m q \right) + \\
& + A_i' \left((2 a_{7i} + a_{8i} + r a_{7i,r} + a_{4i,q} + 2 t_{rqi}^0) \cos m q - (a_{4i} + r a_{9i}) m \sin m q \right) + \\
& + A_i'' r a_{7i} \cos m q + B_i \left((-a_{6i} + \frac{1}{r} a_{8i} + a_{8i,r} + \frac{1}{r} a_{5i,q} + \frac{1}{r} (r t_{rqi,r}^0 + S_{qi,q}^0)) m \cos m q + \right. \quad (32) \\
& + (-2 a_{9i} - r a_{9i,r} - a_{6i,q} + \frac{1}{r} (r^2 r w^2 - S_{qi}^0)) \sin m q - \left(\frac{1}{r} a_{5i} + \frac{1}{r} S_{qi}^0 \right) m^2 \sin m q - \\
& - (r m_i + r S_{zi}^0) n^2 \sin m q + B_i' \left((r a_{6i} + a_{8i} + 2 t_{rqi}^0) m \cos m q + \right. \\
& + (2 r a_{9i} + r^2 a_{9i,r} + r a_{6i,q} + r S_{ri,r}^0 + t_{rqi,q}^0 + S_{ri}^0) \sin m q + \\
& + B_i'' (r^2 a_{9i} + r S_{ri}^0) \sin m q + C_i m_i m n \sin m q + m D_i \sin m q = 0, \\
& A_i (-m_i) n \cos m q + A_i' (-r m_i) n \cos m q + B_i (-m_i) n m \cos m q + \\
& + C_i (r r w^2 \cos m q - \frac{1}{r} (m_i + S_{qi}^0) m^2 \cos m q - r (2 m_i + S_{zi}^0) n^2 \cos m q - \\
& - \frac{1}{r} (r t_{rqi,r}^0 + S_{qi,q}^0) m \sin m q) + C_i' ((m_i + r S_{ri,r}^0 + t_{rqi,q}^0 + S_{ri}^0) \cos m q - \\
& - 2 t_{rqi}^0 m \sin m q) + C_i'' r (m_i + S_{ri}^0) \cos m q + D_i (-r) n \cos m q = 0,
\end{aligned}$$

где

$$a_{1i} = -a_i f_{ri}^2 + 2 m_i, \quad a_{2i} = -a_i f_{ri} f_{qi}, \quad a_{3i} = -(r^2 + \frac{1}{r^2}) a_i f_{ri} f_{rqi} \frac{1}{2r}, \quad a_{4i} = -a_i f_{ri} f_{qi},$$

$$a_{5i} = -(a_i f_{qi}^2 - 2m_i), \quad a_{6i} = -(r^2 + \frac{1}{r^2})a_i f_{qi} f_{rqi} \frac{1}{2r}, \quad a_7 = -a_i f_{ri} f_{rqi}, \quad a_{8i} = -a_i f_{qi} f_{rqi}, \quad (33)$$

$$a_{9i} = -((r^2 + \frac{1}{r^2})a_i f_{rqi}^2 - 2m_i) \frac{1}{2r}.$$

При этом докритическое НДС в составной конструкции массив-крепь в пластических V_i^p и упругих V_i^e областях находится совместно из системы (5) – (26). Для упрощения записи здесь в (32) и далее индексы n, m у величин A, B, C, D опущены.

Граничные условия на внутреннем контуре крепи при $r = a_N (1 + dd_N \cos(m_N q))$ (m_N – количество углов многоугольника), с учетом (30), (31) принимают вид

$$A_N \left\{ \frac{1}{r} a_{2N} \cos mq - m(a_{3N} + \frac{1}{r} t_{rqN}^0) \sin mq \right\} + A'_N (a_{1N} + S_{rN}^0) \cos mq +$$

$$+ B_N \left\{ (-a_{3N} - \frac{1}{r} t_{rqN}^0) \sin mq + m \frac{1}{r} a_{2N} \cos mq \right\} + B'_N r a_{3N} \sin mq + D_N \cos mq = 0,$$

$$A_N \left\{ (\frac{1}{r} a_{8N} + \frac{t_{rqN}^0}{r}) \cos mq - m a_{9N} \sin mq \right\} + a_{7N} A'_N \cos mq +$$

$$+ B_N \left\{ -a_{9N} \sin mq + m (\frac{1}{r} a_{8N} + \frac{t_{rqN}^0}{r}) \cos mq \right\} + B'_N (r a_{9N} + S_{rN}^0) \sin mq = 0,$$

$$A_N (-n m_N \cos mq) + C_N (-m \frac{t_{rqN}^0}{r} \sin mq) + C'_N (m_N + S_{rN}^0) \cos mq = 0.$$

Из условий сопряжения (29) на упругопластических границах при $r = g_i + dd_i g_i^{(1)}$ ($i=0, 1, \dots, N$) при учете (30), (31) получаем

$$[A_i \left\{ \frac{1}{r} a_{2i} \cos mq - m(a_{3i} + \frac{1}{r} t_{rqi}^0) \sin mq \right\} + A'_i (a_{1i} + S_{ri}^0) \cos mq +$$

$$+ B_i \left\{ (-a_{3i} - \frac{1}{r} t_{ri}^0) \sin mq + m \frac{1}{r} a_{2i} \cos mq \right\} + B'_i r a_{3i} \sin mq + D_i \cos mq] = 0,$$

$$[A_i \left\{ (\frac{1}{r} a_{8i} + \frac{t_{rqi}^0}{r}) \cos mq - m a_{9i} \sin mq \right\} + a_{7i} A'_i \cos mq +$$

$$+ B_i \left\{ -a_{9i} \sin mq + m (\frac{1}{r} a_{8i} + \frac{t_{rqi}^0}{r}) \cos mq \right\} + B'_i (r a_{9i} + S_{ri}^0) \sin mq] = 0,$$

$$[A_i (-n m_i \cos mq) + C_i (-m \frac{t_{rqi}^0}{r} \sin mq) + C'_i (m_i + S_{ri}^0) \cos mq] = 0,$$

$$[A_i] = 0, [A'_i] = 0, [B_i] = 0, [B'_i] = 0, [C_i] = 0, [C'_i] = 0.$$

Из условий непрерывности напряжений и перемещений на линиях контакта слоев крепи и массива с учетом (30) и (31) получим

$$A_i \left\{ \frac{1}{r} a_{2i} \cos mq - m(a_{3i} + \frac{1}{r} t_{rqi}^0) \sin mq \right\} + A'_i (a_{1i} + S_{ri}^0) \cos mq +$$

$$\begin{aligned}
& +B_i\{(-a_{3i}-\frac{1}{r}t^0_{rqi})\sin mq+B_im\frac{1}{r}a_{2i}\cos mq\}+B'_i r a_{3i}\sin mq+D_i\cos mq= \\
& =A_{(i+1)}\{\frac{1}{r}a_{2(i+1)}\cos mq-m(a_{3(i+1)}+\frac{1}{r}t^0_{rq(i+1)})\sin mq\}+A'_{(i+1)}(a_{1(i+1)}+S^0_{r(i+1)})\cos mq+ \\
& +B_{(i+1)}\{(-a_{3(i+1)}-\frac{1}{r}t^0_{rq(i+1)})\sin mq+m\frac{1}{r}a_{2(i+1)}\cos mq\}+B'_{(i+1)} r a_{3(i+1)}\sin mq+D_{i+1}\cos mq), \\
& \quad (A_i\{\frac{1}{r}a_{8i}+\frac{t^0_{rqi}}{r}\}\cos mq-ma_{9i}\sin mq)+a_{7i}A'_i\cos mq+ \tag{36} \\
& +B_i\{-a_{9i}\sin mq+m(\frac{1}{r}a_{8i}+\frac{t^0_{rqi}}{r})\cos mq\}+B'_i(ra_{9i}+S^0_{ri})\sin mq)= \\
& (A_{(i+1)}\{\frac{1}{r}a_{8(i+1)}+\frac{t^0_{rq(i+1)}}{r}\}\cos mq-ma_{9(i+1)}\sin mq)+a_{7(i+1)}A'_{(i+1)}\cos mq+ \\
& +B_{(i+1)}\{-a_{9(i+1)}\sin mq+m(\frac{1}{r}a_{8(i+1)}+\frac{t^0_{rq(i+1)}}{r})\cos mq\}+B'_{(i+1)}(ra_{9(i+1)}+S^0_{r(i+1)})\sin mq), \\
& \quad (A_i(-nm_i\cos mq)+C_i(-m\frac{t^0_{rqi}}{r}\sin mq)+C'_i(m_i+S^0_{ri})\cos mq)= \\
& = (A_{(i+1)}(-nm_{(i+1)}\cos mq)+C_{(i+1)}(-m\frac{t^0_{rq(i+1)}}{r}\sin mq)+C'_{(i+1)}(m_{(i+1)}+S^0_{r(i+1)})\cos mq) \\
& \quad A_i=A_{i+1}, B_i=B_{i+1}, C_i=C_{i+1}.
\end{aligned}$$

В соотношениях (36) левые части вычисляются при $r = a_i(1 + dd_i \cos(m_i q))$, правые при $r = b_{i+1}(1 + dd_{i+1} \cos(m_{i+1} q))$.

Из условия затухания (28) возмущений перемещений на внешней поверхности массива при $r \rightarrow \infty$ с учетом (31) получим

$$A'_0 = 0, A''_0 = 0, B'_0 = 0, B''_0 = 0, C'_0 = 0, C''_0 = 0. \tag{37}$$

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (32)–(37) не представляется возможным. Будем искать приближенное решение методом конечных разностей. В результате получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров A_i^{nm} , B_i^{nm} , C_i^{nm} , D_i^{nm} . Отсюда следует, что определение величины критической нагрузки q_N , равномерно распределенной по внутреннему контуру крепи и соответствующей локальной потере устойчивости вертикальной выработки с многослойной некруговой крепью, сводится к разрешимости матричного уравнения. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру m и образующей n , параметрам материала и конструкции I_j . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины q_N в зависимости от m , n при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы: $\det(q_N, m, n, \lambda_j) = 0$.

г. Воронеж

Поступила: 13 ноября 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток. : Дальнаука. – 1998. – 320 с.
2. *Гоцев, Д. В.* Исследование устойчивости состояния равновесия многослойной крепи вертикальной горной выработки в массивах с упругопластическими свойствами / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Международный научный журнал Прикладная Механика. – Киев. – Е39 – № 3. – 2003г. – С. 45-51.
3. *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок с многослойной крепью в упруго-пластических массивах / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин // Механика твердого тела. – 2004. – №1. – С. 158 – 166.
4. *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Прикл. механика и техн. физика. – 2005. – Т. 46. – N 2. – С. 141-150.
5. *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок эллиптической формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Механика твердого тела. – 2007. – №2. – С. 183-192.
6. *Гузь, А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь Киев. : Наукова думка, 1977. – 202 с.
7. *Ершов, Л. В.* О проявлении горного давления в горизонтальных выработках / Л. В. Ершов – Докл. АН СССР. – 1962. – т. 145. – № 2. – с. 298-300.
8. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев М. : Физматлит. – 2001. – 701 с.
9. *Ершов, Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев М. : Наука, 1978. – 208 с.
10. *Спорыхин, А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. – 359 с.
11. *Спорыхин, А. Н.* Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова – Воронеж : ВГУ, 2004.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ

(Азербайджанский государственный педагогический университет)

Рассматривается задача о растяжении и сдвиге тонкой изотропной пластины, ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных трещин с концевыми зонами. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений вне трещин. Основное сингулярное интегральное уравнение задачи сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений. Из-за неизвестного размера концевой зоны система уравнений оказалась нелинейной даже при линейном законе деформирования связей.

Пусть в неограниченной изотропной пластине, ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных трещин, действуют средние напряжения N_1 , N_2 и N_{12} . Будем считать, что на берегах трещин вне концевых зон заданы одинаковые в конгруэнтных точках, самоуравновешенные нагрузки $F^\pm(x)$.

Выделим части трещины длиной d_1 и d_2 (концевые области), примыкающие к ее вершинам ($-1 \leq x \leq -1 + d_1$ и $1 - d_2 \leq x \leq 1$, $y = 0$). Полагаем, что их размеры, заранее неизвестные, могут быть сравнимы с размером трещины. Взаимодействие берегов трещины в концевой области моделируется путем введения между берегами трещины связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Под действием внешних нагрузок в связях между берегами трещины будут возникать нормальные $q_y(x)$ и касательные усилия $q_{xy}(x)$. Величины этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи механики разрушения.

Обозначим основные периоды w_1 и w_2 ($\text{Im } w_1 = 0$, $\text{Im } w_2/w_1 > 0$), область, занятую материалом пластины, через D ; начала и концы трещин поместим соответственно в точках

$$-1 + mw_1 + nw_2, \quad 1 + mw_1 + nw_2, \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm \dots; \quad 0 \leq 1 < w_1/2).$$

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , напряжения в D являются двоякопериодическими функциями с основными периодами w_1 и w_2 .

Решение задачи ищем в виде [4]

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{2p} \int_{-1}^1 p(x) z(x-z) dx + A, \\ \bar{\Omega}(z) &= \frac{1}{2p} \int_{-1}^1 \{F(x) - \overline{p(x)}\} z(x-z) dx + \\ &+ \frac{1}{2p} \int_{-1}^1 p(x) \{r_1(x-z) - (x-z)r(x-z) + z(x-z)\} dx + B.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $F(x) = F^+(x) - F^-(x)$; $r(z)$ и $z(z)$ – функции Вейерштрасса, $r_1(z)$ – специальная мероморфная функция; $F(x)$ – скачок выражения $s_y(x) + it_{xy}(x)$ на берегах трещин $[-1+d_1, 1-d_2]$; A и B – постоянные, определяемые статическими условиями, $p(x)$ – искомая функция на $(-1, 1)$.

К основным представлениям (1) необходимо добавить дополнительное равенство, выражающее условие однозначности смещений в D :

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = 0. \quad (2)$$

Из условий двоякопериодичности и существования в D заданных средних напряжений N_1, N_2 и N_{12} , находим постоянные A и B в следующем виде

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} A &= \frac{1}{4}(s_1 + s_2) - \frac{p}{2S} f - \frac{1}{w_1} R(ad_1), \quad S = w_1 \cdot \operatorname{Im} w_2, \\ B - A &= \frac{1}{2}(s_2 - s_1) + it - \frac{p - d_1 \cdot \operatorname{Im} w_2}{S} f - \frac{ag_1}{w_1} - \frac{\bar{a}d_1}{w_1}.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь $s_2 = N_2 \sin a$, $t = N_{12} + N_2 \cos a$, $s_1 \sin a = N_1 + 2N_{12} \cos a + N_2 \cos^2 a$, s_1, s_2, t – средние напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям Ox и Oy .

$$a = \frac{1}{2pi} \int_{-1}^1 xp(x) dx; \quad f = \frac{1}{2pi} \int_{-1}^1 xF(x) dx. \quad (4)$$

Условия двоякопериодичности напряжений будут выполняться за счет выбора искомого функций (1), поэтому достаточно удовлетворить граничным условиям лишь на берегах основной трещины.

Эти граничные условия имеют вид [6]:

$$\bar{\Omega}(x) + \bar{\Phi}(x) = \begin{cases} F^+(x_0) & x = x_0 + 0i \\ F^-(x_0) & x = x_0 - 0i \end{cases}, \quad x_0 \in [-1+d_1, 1-d_2], \quad (5)$$

$$\bar{\Omega}(x) + \bar{\Phi}(x) = q_y + iq_{xy} \text{ на концевых зонах } (-1, -1+d_1) \text{ и } (1-d_2, 1).$$

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытия берегов трещины и усилия в связях.

Это уравнение в рассматриваемой задаче можно представить, согласно [1, 2], в виде

$$(u^+ - u^-) - i(u^+ - u^-) = C(x, s) [q_y(x) - iq_{xy}(x)], \quad (6)$$

$$s = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}.$$

Функцию $C(x, s)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения; s – модуль вектора усилий в связях; $(u^+ - u^-)$ – нормальная, $(u^+ - u^-)$ – касательная составляющая раскрытия берегов трещины в концевой зоне.

Подставляя предельные значения функций $\overline{\Phi(x)}$ и $\overline{\Omega(z)}$ в граничное условие (5), получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $p(x)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \overline{p(x)} \{z(x-x_0) + \overline{z(x-x_0)}\} dx - \quad (7)$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 p(x) \{r_1(x-x_0) - (x-x_0)r(x-x_0) + z(x-x_0)\} dx - B - \bar{A} = G(x_0),$$

где при $x_0 \in [-1+d_1, 1-d_2]$

$$G(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 F(x)z(x-x_0)dx - \frac{F^+(x) + F^-(x)}{2},$$

при $-1 \leq x_0 \leq 1+d_1$ и $1-d_2 \leq x_0 \leq 1$ $G(x_0) = q_y + iq_{xy}$.

Воспользовавшись разложениями $z(z)$, $r(z)$ и $r_1(z)$ в основном параллелограмме периодов [5]

$$z(z) = \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{j+1} z^{2j+1}}{w_1^{2j+2}}, \quad g_k = \sum_{m,n} \frac{1}{T^{2k}},$$

$$r(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1)g_{j+1}}{w_1^{2j+2}} z^{2j}, \quad r_k^* = \sum_{m,n} \frac{\bar{T}}{T^{2k+1}},$$

$$r_1(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+2)r_{2j+1}^*}{w_1^{2j+2}} z^{2j+1},$$

$$T = m + n \frac{w_2}{w_1}, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k = 2, 3, \dots$$

Уравнение (7) после некоторых простых преобразований приведем к виду

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{x-x_0} dx - \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 g(x)K(x-x_0)dx - \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \overline{g(x)}K_*(x-x_0)dx = G_1(x_0), \quad (8)$$

где

$$g(x) = p(x), \quad x = \frac{x}{1}, \quad x_0 = \frac{x_0}{1}, \quad l = \frac{2l}{w_1}, \quad -1 < x_0 < 1,$$

$$K(x) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} x^{2j+1}, \quad K_0 = w_1 \operatorname{Re} d_1,$$

$$K_*(x) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j^* \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} x^{2j+1}, \quad 0 \leq l < 1,$$

$$K_j = \operatorname{Re} g_{j+1}, \quad K_0^* = -\frac{w_1}{2}(g_1 + \bar{d}_1),$$

$$K_j^* = (j+1)(\bar{r}_{j+1}^* - \bar{g}_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$G_1(x_0) = it - s_2 + iq_{xy} - q_y \text{ при } -1 \leq x_0 \leq -1 + \frac{d_1}{1} \text{ и } 1 - \frac{d_2}{1} \leq x_0 \leq 1,$$

$$G_1(x_0) = it - s_2 + \frac{1}{2}\{F^+(x_0) + F^-(x_0)\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \overline{F(x)} \left\{ \overline{z(x-x_0)} - \frac{x\bar{d}_1}{w_1} \right\} dx,$$

$$F(x) = F^+(x) - F^-(x).$$

К сингулярному уравнению (8) необходимо добавить дополнительное равенство (2) в следующей форме

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0. \quad (9)$$

Если пластинка и внешняя нагрузка симметричны относительно координатных осей, то уравнение (8) вырождается в одно сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$, принимающей чисто мнимые значения. В общем случае, уравнение (8) представляет собой систему двух сингулярных интегральных уравнений относительно комплексной функции $g(x)$.

Сингулярное интегральное уравнение можно свести к бесконечной системе алгебраических уравнений.

Примем, что согласно [5]:

$$g(x) = \frac{g_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (10)$$

где $g_0(x)$ – непрерывная по Гельдеру на $[-1, 1]$ функция.

Будем разыскивать $g_0(x)$ в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода.

Имеем

$$g_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_k(x), \quad T_k(x) = \cos(k \arccos x). \quad (11)$$

Подставляя (10), (11) в сингулярное интегральное уравнение (8), а также используя соотношения для полиномов Чебышева первого и второго рода $T_k(x)$ и $U_k(x)$ и ортогональность функций $U_k(x)$ на $[-1, 1]$, получаем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_k :

$$A_{k+1} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{nk} A_n - \sum_{n=1}^{\infty} C_{nk}^* \bar{A}_n = iD_k, \quad k = 0, 1, \quad (12)$$

где

$$C_{nk} = \frac{2}{p^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) U_k(x_0) \sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}} K(x-x_0) dx dx_0,$$

$$C_{nk}^* = \frac{2}{p^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) U_k(x_0) \sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}} K_*(x-x_0) dx dx_0,$$

$$D_k = \frac{2}{p} \int_{-1}^1 G_1(x_0) U_k(x_0) \sqrt{1-x_0^2} dx_0.$$

Коэффициенты C_{nk} , C_{nk}^* можно представить в явном виде.

Используя (7) и соотношения для полиномов Чебышева первого и второго ряда $T_k(x)$ и $U_k(x)$, находим

$$C_{nk} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j+2} \cdot K_j a_{jnk}, \quad C_{nk}^* = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j+2} \cdot K_j^* a_{jnk}^*, \quad (13)$$

$$a_{jnk} = 2 \sum_{s=0}^{2j+1} (-1)^s \frac{(2j+1)!}{s!(2j+1-s)!} a_{k,s} b_{n,2j-s+1}.$$

Величина d , характеризующая длину концевых зон, входит в решение системы (12) как неизвестный параметр, подлежащий определению. Так как напряжения в материале пластины ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения (8) следовало бы искать в классе всюду ограниченных функций (напряжений). Условие ограниченности напряжений в концах $x = \pm 1$ служит для определения параметров d_1 и d_2 , зная которые можно найти длины концевых зон. В общем случае, размеры концевых зон на левом и правом концах трещины будут различны.

Для обеспечения конечности напряжений на левом и правом концах трещин необходимо к системе (12) добавить следующие условия

$$\sqrt{pl} g_0(1) = \sqrt{pl} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k = 0, \quad (14)$$

$$\sqrt{pl} g_0(-1) = \sqrt{pl} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \bar{A}_k = 0.$$

В систему (12) входят неизвестные значения усилий q_y и q_{xy} в узловых точках, принадлежащих концевым зонам трещин.

На основании соотношения

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2m}{1+\kappa_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) \right]$$

и формулы (1), получим уравнение относительно неизвестной функции $q_y + iq_{xy}$:

$$p(x) = \frac{2m}{1+\kappa_0} \frac{d}{dx} [C(x,s)(q_y + iq_{xy})]. \quad (15)$$

Для построения недостающих уравнений потребуем выполнения условий (15) в узловых точках, содержащихся в концевых зонах трещины. В результате получим алгебраическую систему из M_1 уравнений для определения приближенных значений $q_y(t_m) + iq_{xy}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M_1$).

Полученные алгебраические системы (12), (14), (15) оказались связанными и решаются совместно. Из-за неизвестных размеров концевых зон система уравнений (12), (14), (15) даже при линейных связях является нелинейной.

Для ее решения использовали метод последовательных приближений [5], суть которого состоит в следующем.

Решаем алгебраическую систему (12), (15) при некоторых определенных значениях d_{1*} и d_{2*} относительно неизвестных A_k ($k = 1, 2, \dots, M$) и $q_y + iq_{xy}$. Неизвестные A_k , $q_y + iq_{xy}$ входят в систему линейным образом. Это обстоятельство оправдывает использование предлагаемого способа. Значения d_{1*} и d_{2*} и найденные значения коэффициентов A_k подставляются в неиспользованные уравнения (14). Взятые значения параметров d_{1*} и d_{2*} и соответствующие им значения коэффициентов A_k не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (14). Поэтому, подбирая значения параметров d_1 и d_2 , будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока последние уравнения системы (14) не будут удовлетворяться с заданной точностью.

Расчетами были получены зависимости размеров концевых зон в зависимости от относительного размера области $I = 2l/w_1$ ($w_2 = w_1 e^{ip/3}$ и $w_2 = w_1 e^{ip/2}$) и растягивающих напряжений. Берега трещин считались свободными от нагрузок. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в концевых зонах использовался также алгоритм, подобный методу упругих решений [3].

Для определения предельно-равновесного состояния используем условие критического раскрытия трещины.

г. Баку

Поступила: 11.12.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаджиев, В. Д. Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами / В. Д. Гаджиев, В. М. Мирсалимов // Оптимальное проектирование механических систем. – Баку : Элм. – 1999. – С. 50-63.
2. Гольдштейн, Р. В. Рост трещин по границе соединения материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Проблемы механики : Сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 221-238.
3. Ильюшин, А. А. Пластичность. / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
4. Мирсалимов, В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Эл, 1984. – 124 с.
5. Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
6. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

Корнеев А. В., Трещев А. А.

**МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ГАЗОНАСЫЩЕНИЯ НА НАПРЯЖЕННО-
ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ
ТИТАНОВЫХ СПЛАВОВ**

(Тульский государственный университет)

Предложена математическая модель влияния процесса наводороживания на деформационные характеристики титановых сплавов, используемых для элементов современных конструкций. Внесены коррективы в обработку экспериментальных диаграмм деформирования титановых сплавов ВТ1-0 и ТС5.

В ходе термической обработки и горячей обработки давлением в атмосфере воздуха титановые сплавы загрязняются газами (кислородом, воздухом), в результате чего их свойства изменяются [3; 4]. В случае неравномерного распределения газов по толщине, например, при поверхностном газонасыщении, проявляется неоднородность механических свойств. Накапливаясь в объеме конструкций с течением времени, водород снижает упруго-пластические характеристики металлов, приводя к охрупчиванию и резкой потере несущей способности. При этом для напряженных состояний, связанных с растяжением, охрупчивающее влияние более заметно, то есть процесс газонасыщения титановых сплавов приводит к возникновению наведенной разностойчивости изначально нечувствительного к виду напряженного состояния материала. С другой стороны, сопротивление многих конструкционных материалов деформированию изначально зависит от вида напряженного состояния и эта зависимость проявляется в отсутствии процесса газонасыщения. Построению зависимостей между напряжениями и деформациями для таких материалов посвящен ряд работ, в которых предлагаются как квазилинейные, так и нелинейные уравнения. Недостатки указанных моделей проанализированы в работе [5].

В представленной работе на базе известных экспериментальных сведений [1] исследовано влияние наводороживания на деформирование титановых сплавов, которое моделируется как наведенная чувствительность механических характеристик к виду напряженного состояния. При этом в основу математической модели наводороживания положены определяющие соотношения, принятые в работе [5].

Так, согласно работе [5], напряженное состояние в точке изотропного деформируемого тела определяется в двух пространствах. В пространстве главных осей напряженное состояние задается модулем вектора полного напряжения $S = (\sigma_k \sigma_k)^{1/2}$ и его направляющими косинусами $\alpha_k = \sigma_k / S$ (здесь σ_k – главные напряжения). В пространстве, связан-

ном с октаэдрической площадкой, напряженное состояние определяется модулем вектора полного напряжения на этой площадке $S_0 = (\sigma^2 + \tau^2)^{1/2}$, углом ψ , который образует вектор S_0 с нормалью к этой площадке, и углом φ – фазой напряжений. Здесь $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$, $\tau = (S_{ij} S_{ij} / 3)^{1/2}$, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$ ($i, j = 1, 2, 3$), $\xi = \cos \psi = \sigma / S_0$, $\eta = \sin \psi = \tau / S_0$, $\cos 3\varphi = 2^{1/2} \chi S_{III} / \tau^3$, $S_{III} = S_{ik} S_{kj} S_{ij}$.

В работе [5] были получены две нелинейные формы потенциала деформаций для изначально разнородного материала:

$$W = (A_e + B_e \alpha_1) \sigma_1^2 + (A_e + B_e \alpha_2) \sigma_2^2 + (A_e + B_e \alpha_3) \sigma_3^2 + [C_e + D_e (\alpha_1 + \alpha_2)] \sigma_1 \sigma_2 + [C_e + D_e (\alpha_2 + \alpha_3)] \sigma_2 \sigma_3 + [C_e + D_e (\alpha_3 + \alpha_1)] \sigma_3 \sigma_1 + + \{ (A_p + B_p \alpha_1) \sigma_1^2 + (A_p + B_p \alpha_2) \sigma_2^2 + (A_p + B_p \alpha_3) \sigma_3^2 + [C_p + D_p (\alpha_1 + \alpha_2)] \sigma_1 \sigma_2 + + [C_p + D_p (\alpha_2 + \alpha_3)] \sigma_2 \sigma_3 + [C_p + D_p (\alpha_3 + \alpha_1)] \sigma_3 \sigma_1 \}^n, \quad (1)$$

$$W = (Y_{e1} + Y_{e3} \xi) \sigma^2 + (Y_{e2} + Y_{e4} \xi + Y_{e5} \eta \cos 3\varphi) \tau^2 + + \left[(Y_{p1} + Y_{p3} \xi) \sigma^2 + (Y_{p2} + Y_{p4} \xi + Y_{p5} \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^n, \quad (2)$$

где $A_e, B_e, C_e, D_e, A_p, B_p, C_p, D_p$ – константы квазилинейной и нелинейной частей потенциала, определяемые в результате обработки стандартных опытов; n – показатель степени, определяющий нелинейность материала.

$$Y_{e1} = 3(A_e + C_e), \quad Y_{e2} = 3(A_e - C_e / 2), \quad Y_{e3} = \sqrt{3}(B_e + 2D_e), \quad Y_{e4} = \sqrt{27}B_e, \\ Y_{e5} = \sqrt{1,5}(B_e - D_e), \quad Y_{p1} = 3(A_p + C_p), \quad Y_{p2} = 3(A_p - C_p / 2), \quad (3) \\ Y_{p3} = 3(B_p + 2D_p), \quad Y_{p4} = \sqrt{27}B_p, \quad Y_{p5} = \sqrt{1,5}(B_p - D_p).$$

Следствием принятых форм потенциала W (1), (2) являются зависимости между деформациями и напряжениями, имеющие дилатационный характер:

$$e_{ij} = \{R\} [W_{ij}], \quad (4)$$

где

$$R_m = Y_{em} + n \left[(Y_{p1} + Y_{p3} \xi) \sigma^2 + (Y_{p2} + Y_{p4} \xi + Y_{p5} \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^{n-1} Y_{pm}, \quad (m = 1, 2, \dots, 5), \\ [W_{kk}] = \partial[W_1] / \partial \sigma_{kk} \quad (k = 1, 2, 3), \quad 2[W_{ij}] = \partial[W_1] / \partial \tau_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j),$$

$$[W_1] = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \tau^2 \\ \xi \sigma^2 \\ \xi \tau^2 \\ \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{bmatrix}.$$

Для определения констант потенциала используется методика, приведенная в работе [5] для опытов на осевое растяжение и осевое сжатие при простом нагружении. Для формы (1) при одноосном растяжении и одноосном сжатии зависимости между главными деформациями и напряжениями представляются в виде

$$e_k^\pm = P_k^\pm \sigma_1^\pm + T_k^\pm (\sigma_1^\pm)^m, \quad k=1,2, \quad (5)$$

где $m=2n-1$, P_k , T_k – коэффициенты, вычисляемые соответственно через константы потенциала $\{A_e B_e C_e D_e\}$ и $\{A_p B_p C_p D_p\}$ с учетом значений $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\alpha_3=0$ – при одноосном растяжении и $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=\alpha_3=0$ – при одноосном сжатии; верхние индексы “плюс” относятся к характеристикам растяжения, а “минус” – к характеристикам сжатия;

$$\begin{aligned} A_e &= (P_1^+ - P_1^-)/4, & B_e &= (P_1^+ + P_1^-)/4, & C_e &= (P_2^+ - P_2^-)/2, \\ D_e &= (P_2^+ + P_2^-)/2, & A_p &= [(T_1^+ / 2n)^{1/n} + (-T_1^- / 2n)^{1/n}] / 2, \\ B_p &= [(T_1^+ / 2n)^{1/n} - (-T_1^- / 2n)^{1/n}] / 2, & & & & (6) \\ C_p &= [T_2^+ / (T_1^+ / 2n)^{(n-1)/n} - T_2^- / (-T_1^- / 2n)^{(n-1)/n}] / 2n, \\ D_p &= [T_2^+ / (T_1^+ / 2n)^{(n-1)/n} + T_2^- / (-T_1^- / 2n)^{(n-1)/n}] / 2n. \end{aligned}$$

Методика вычисления восьми констант потенциала деформаций W представлена в работе [5].

Для полной корректности рассмотренных соотношений (1), (2) с учетом полученных констант необходимо проверить устойчивость потенциала в малом:

$$\delta\sigma_{ij} \delta e_{ij} \geq 0. \quad (7)$$

Воспользуемся моделью определяющих соотношений (1), (2) для построения уравнений связи деформаций с напряжениями с учетом наведенной разнородности титановых сплавов, проявляющейся под воздействием насыщения водородом. Для этой цели константы $A_e, B_e, C_e, D_e, A_p, B_p, C_p, D_p$ представим в виде функций от уровня наводороживания λ , где λ – концентрация водородосодержащей среды в теле материала. Кроме того, показатель степени n так же запишем в виде функции от λ . Функциональную зависимость констант материала необходимо вводить на этапе обработки экспериментальных диаграмм деформирования. То есть параметры P_k^\pm , T_k^\pm и n необходимо заменить функциями $P_k^\pm = P_k^\pm(\lambda)$, $T_k^\pm = T_k^\pm(\lambda)$ и $n = n(\lambda)$. Вид этих функций устанавливается в результате аппроксимации экспериментальных диаграмм деформирования образцов при одноосном растяжении и сжатии, испытанных на различных уровнях насыщения водородом.

В работе Трещева А. А., Сергеевой С. Б., Сычевой А. В. [7] обработка экспериментальных диаграмм деформирования титановых сплавов имела некоторые неточности. В настоящей работе с целью более точного учета влияния наводороживания на напряженно-деформированное состояние элементов конструкций, описываемого с помощью определяющих соотношений, принятых в работе [5], внесены коррективы в обработку экспериментальных диаграмм. Рассматривались элементы конструкций, выполненные из титанового сплава ВТ1–0 и из титанового сплава ТС5. По результатам обработки экспериментальных диаграмм деформирования этих сплавов, насыщенных водородом до определенного уровня λ (0,01; 0,03 и 0,05 %), были получены новые значения коэффициентов P_k^\pm , T_k^\pm , благодаря которым, кривые одноосного сжатия образцов в исходном и наводороженных состояниях совпали с кривыми одноосного растяжения тех же образцов при насыщенности 0%. Значения коэффициентов P_k^\pm , T_k^\pm и параметра n приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов P_k^\pm, T_k^\pm

Коэффициенты	Материалы						
	BT1-0			TC5			
	$\lambda=0\%$	$\lambda=0,01\%$	$\lambda=0,03\%$	$\lambda=0\%$	$\lambda=0,01\%$	$\lambda=0,03\%$	$\lambda=0,05\%$
$P_1^+ [МПа]^{-1}$	$7,282 \cdot 10^{-6}$	$6,391 \cdot 10^{-6}$	$9,465 \cdot 10^{-6}$	$7,195 \cdot 10^{-6}$	$7,504 \cdot 10^{-6}$	$7,495 \cdot 10^{-6}$	$8,334 \cdot 10^{-6}$
$P_2^+ [МПа]^{-1}$	$-2,930 \cdot 10^{-6}$	$-2,015 \cdot 10^{-6}$	$-3,339 \cdot 10^{-6}$	$-3,597 \cdot 10^{-6}$	$-3,752 \cdot 10^{-6}$	$-3,748 \cdot 10^{-6}$	$-4,167 \cdot 10^{-6}$
$P_1^- [МПа]^{-1}$	$-7,282 \cdot 10^{-6}$	$-7,282 \cdot 10^{-6}$	$-7,282 \cdot 10^{-6}$	$-7,282 \cdot 10^{-6}$	$-7,282 \cdot 10^{-6}$	$-7,282 \cdot 10^{-6}$	$-7,282 \cdot 10^{-6}$
$P_2^- [МПа]^{-1}$	$2,930 \cdot 10^{-6}$	$2,930 \cdot 10^{-6}$	$2,930 \cdot 10^{-6}$	$2,930 \cdot 10^{-6}$	$2,930 \cdot 10^{-6}$	$2,930 \cdot 10^{-6}$	$2,930 \cdot 10^{-6}$
$T_1^+ [МПа]^{1-2n}$	$1,521 \cdot 10^{-14}$	$2,581 \cdot 10^{-17}$	$8,855 \cdot 10^{-20}$	$3,151 \cdot 10^{-50}$	$3,952 \cdot 10^{-49}$	$7,810 \cdot 10^{-44}$	$3,942 \cdot 10^{-36}$
$T_2^+ [МПа]^{1-2n}$	$-7,557 \cdot 10^{-15}$	$-7,236 \cdot 10^{-17}$	$-4,490 \cdot 10^{-20}$	$-1,576 \cdot 10^{-50}$	$-1,976 \cdot 10^{-49}$	$-9,052 \cdot 10^{-45}$	$-1,971 \cdot 10^{-36}$
$T_1^- [МПа]^{1-2n}$	$-1,521 \cdot 10^{-14}$	$-1,521 \cdot 10^{-14}$	$-1,521 \cdot 10^{-14}$	$-1,521 \cdot 10^{-14}$	$-1,521 \cdot 10^{-14}$	$-1,521 \cdot 10^{-14}$	$-1,521 \cdot 10^{-14}$
$T_2^- [МПа]^{1-2n}$	$7,557 \cdot 10^{-15}$	$7,557 \cdot 10^{-15}$	$7,557 \cdot 10^{-15}$	$7,557 \cdot 10^{-15}$	$7,557 \cdot 10^{-15}$	$7,557 \cdot 10^{-15}$	$7,557 \cdot 10^{-15}$
n	2,7	3,35	3,9	8,45	8,3	7,6	6,25

Обработка экспериментальных данных выполнялась методом наименьших квадратов при помощи прикладной программы "ORIGIN". В результате были получены зависимости материальных функций от параметра λ , которые рекомендуется представить следующим образом:

а) для сплава BT1-0

$$\begin{aligned}
 P_k^+(\lambda) &= a_{0k}^+ + a_{1k}^+ \lambda + a_{2k}^+ \lambda^2, P_k^-(\lambda) = a_{0k}^-, \\
 T_k^+(\lambda) &= b_{0k}^+ + b_{1k}^+ \exp(-\lambda/q_k^+), T_k^-(\lambda) = b_{0k}^-, \\
 n(\lambda) &= \Delta_0 + \Delta_1 \lambda.
 \end{aligned} \quad (8)$$

б) для сплава TC5

$$\begin{aligned}
 P_k^+(\lambda) &= a_{0k}^+ + a_{1k}^+ \lambda + a_{2k}^+ \lambda^2 + a_{3k}^+ \lambda^3, P_k^-(\lambda) = a_{0k}^-, \\
 T_k^+(\lambda) &= b_{0k}^+ - (b_{0k}^+ - b_{1k}^+) / \{1 + \exp[(\lambda - q_k^+) / v_k^+]\}, \\
 T_k^-(\lambda) &= b_{0k}^-, n(\lambda) = \Delta_0 + \Delta_1 \lambda + \Delta_2 \lambda^2.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь параметры P_k^\pm принимаются в $[МПа]^{-1}$, а T_k^\pm – в $[МПа]^{(1-2n)}$.

Коэффициенты функций (8), (9) приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

Константы	Растяжение		Константы	Растяжение	
	BT1-0	TC5		BT1-0	TC5
a_{01}^+	$8,072 \cdot 10^{-6}$	$7,216 \cdot 10^{-6}$	b_{12}^+	$3,306 \cdot 10^{-17}$	$-5,12 \cdot 10^{-39}$
a_{11}^+	$-2,523 \cdot 10^{-41}$	$4,614 \cdot 10^{-5}$	q_1^+	$4,72 \cdot 10^{-3}$	$4,617 \cdot 10^{-3}$
a_{21}^+	$1,006 \cdot 10^{-2}$	$-2,39 \cdot 10^{-3}$	q_2^+	$4,58 \cdot 10^{-3}$	$4,96 \cdot 10^{-2}$
a_{31}^+	-	$3,86 \cdot 10^{-2}$	v_1^+	-	$3,23 \cdot 10^{-3}$
a_{02}^+	$1,225 \cdot 10^{-6}$	$3,598 \cdot 10^{-6}$	v_2^+	-	$3,658 \cdot 10^{-3}$

a_{12}^+	$-5,844 \cdot 10^{-51}$	$2,639 \cdot 10^{-5}$	Сжатие		
a_{22}^+	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$-1,34 \cdot 10^{-3}$	a_{01}^-	$-7,282 \cdot 10^{-6}$	$-7,282 \cdot 10^{-6}$
a_{32}^+	-	$2,08 \cdot 10^{-2}$	a_{02}^-	$2,930 \cdot 10^{-6}$	$2,930 \cdot 10^{-6}$
b_{01}^+	0	$5,149 \cdot 10^{-36}$	b_{01}^-	$-1,521 \cdot 10^{-14}$	$-1,521 \cdot 10^{-14}$
b_{11}^+	$6,824 \cdot 10^{-17}$	$-1,021 \cdot 10^{-38}$	b_{02}^-	$7,557 \cdot 10^{-15}$	$7,557 \cdot 10^{-15}$
b_{02}^+	0	$3,736 \cdot 10^{-36}$			

Таблица 3

Сплав	Коэффициенты		
	Δ_0	Δ_1	Δ_2
BT1-0	3,157	28,214	-
TC5	8,443	-5,270	-770,729

Графики зависимостей функций (8) и (9) от параметра λ представлены на рис. 1. После идентификации функций (8), (9) их необходимо внести в зависимости (6), а последние – в потенциал (1), или с учетом формул перехода (3) – в потенциал (2).

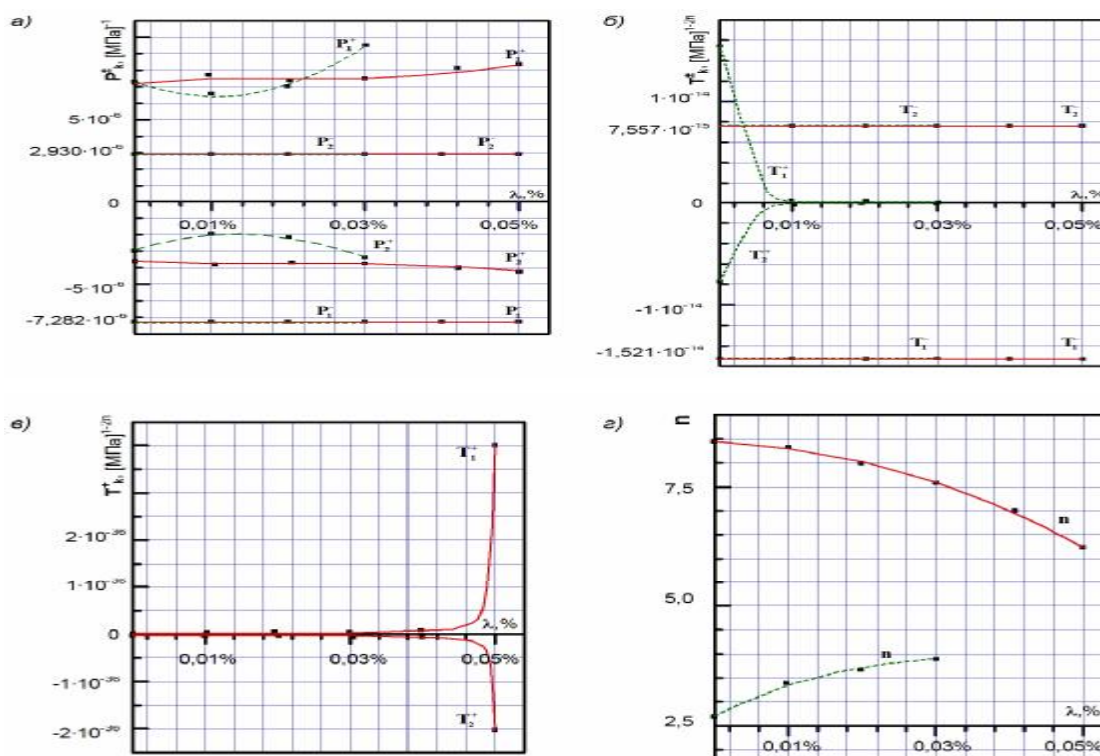


Рис. 1. Графическое представление зависимостей функций P_k^{\pm} , T_k^{\pm} и n от параметра λ для титановых сплавов BT1-0 и TC5 – сплав BT1-0; а – графики функций P_k^{\pm} для сплавов T1-0 и TC5; б – графики функций T_k^{\pm} для сплава BT1-0 и T_k^- для сплава TC5; в – графики функций T_k^+ для сплава TC5; г – графики функции n для сплавов BT1-0 и TC5

Точность описания напряженно-деформированного состояния титановых сплавов ВТ1-0 и ТС5 при растяжении и различном содержании водорода иллюстрируют рис. 2а и рис. 2б, соответственно. Здесь разносимвольными точками обозначены экспериментальные данные [1], а сплошными линиями – результаты теоретического расчета, полученные на основе определяющих соотношений (1), (2) с учетом функций (8) и (9). Представленные зависимости показывают снижение сопротивления деформированию с повышением содержания водорода. При этом погрешность теоретически рассчитанных диаграмм деформирования титановых сплавов на разных уровнях насыщения водородом по сравнению с экспериментальными не превышает 0,5 %.

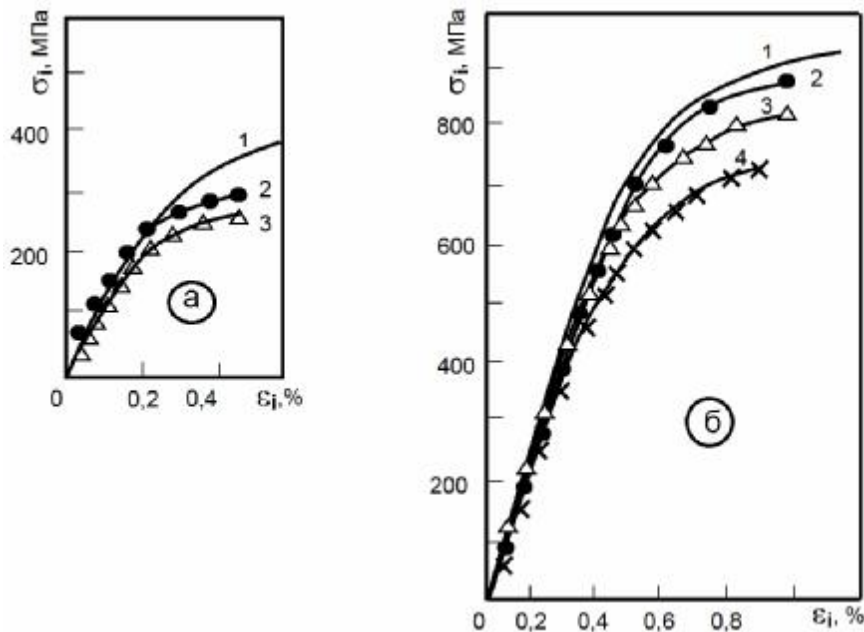


Рис. 2. Диаграммы одноосного растяжения сплавов ВТ1-0 (а), ТС5 (б) при различном содержании водорода

1 – исходное состояние при насыщенности 0%; 2 – при насыщенности 0,01%;
3 – при насыщенности 0,03%; 4 – при насыщенности 0,05%

Для того чтобы модель деформирования титановых сплавов, подвергающихся наводороживанию, была замкнута к уравнениям состояния (1), (2) с учетом функциональных зависимостей (8), (9) следует добавить дифференциальное уравнение, описывающее закон активной диффузии водорода. В случае, когда напряженное состояние не оказывает влияния на характер распределения водорода по объему образца и процесс диффузии водорода можно считать одномерным, этот закон определяется уравнением Фика:

$$\lambda_{,t} / D = \lambda_{,zz}, \quad (10)$$

где D – коэффициент диффузии; t – время; z – координата в направлении наводороживания.

Отличительной особенностью выполненного построения является независимость коэффициентов P_k^- , T_k^- от концентрации среды вследствие неизменности свойств мате-

риала в сжатой зоне, что приводит к более точному учету влияния наводороживания на напряженно-деформированное состояние элементов конструкций.

Построение определяющих соотношений, учитывающих влияние водородосодержащей среды на механические характеристики титановых сплавов, ранее было рассмотрено в ряде работ Овчинникова И. Г. и его учеников [2, 6]. Однако, как показано в работе [5], потенциальные соотношения (1) и (2) изначально обладают более совершенным аппаратом учета влияния вида напряженного состояния на механические характеристики материалов, в самом широком спектре их изменения, по сравнению с другими моделями. По этому, очевидно, что предложенная модель наведенной разнотрещиноватости титановых сплавов, находящихся под воздействием водородосодержащей среды, более предпочтительна в случае расчета конструкций, работающих при сложных напряженных состояниях.

г. Тула

Поступила: 31 марта 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гервиц, Т. Я. Влияние газонасыщения на статическую прочность титановых сплавов / Т. Я. Гервиц // ФХММ. – 1981. – № 2. – С. 45-48.
2. Кириллова, Л. А. Напряженно-деформированное состояние гибкой круглой пластины в водородосодержащей среде с учетом наведенной неоднородности / Л. А. Кириллова – Дисс. ... к.т.н. – Саратов, 1990. – 163 с.
3. Колачев, Б. А., Механические свойства титана и его сплавов / Б. А. Колачев, В. А. Ливанов, А. А. Буханова. – М. : Металлургия, 1974. – 543 с.
4. Крылов, Б. С. Влияние водорода на механические свойства сплава ВТ15 и о механизме водородного охрупчивания / Б. С. Крылов // Изв. АН СССР. Металлы. – 1967. – № 4. – С. 147-155.
5. Матченко, Н. М. Определяющие соотношения изотропных разнотрещиноватых сред. Нелинейные соотношения / Н. М. Матченко, Л. А. Толоконников, А. А. Трещев // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 4. – С. 87-95.
6. Овчинников, И. Г. Математическое моделирование процесса взаимодействия элементов конструкций с агрессивными средами / И. Г. Овчинников, В. В. Петров // Деформирование материалов и элементов конструкций в агрессивных средах: Межвуз. научн. сб. Сарат. политехн. ин-т. – Саратов, 1983. – С. 3-11.
7. Сергеева, С. Б. Модель влияния газонасыщения на напряженно – деформированное состояние материалов / С. Б. Сергеева, А. В. Сычева, А. А. Трещев // Изв. вузов. Строительство. – 1999. – №12. – С. 14-20.

Korneev A. B., Treshev A. A.

MODEL OF INFLUENCE OF GASING ON STRAIN-STRESS CONDITION OF MATERIALS ON THE BASIS OF TITANIC ALLOYS

(Tula state university)

The mathematical model of influence of process hydrogen influence on deformation characteristics of the titanic alloys used for elements of modern design. Corrective amendments are brought in processing experimental diagrams of deformation of titanic alloys BT1-0 and TC5.

Левко В. А.

МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ РАБОЧЕЙ СРЕДЫ ПРИ АБРАЗИВНО-ЭКСТРУЗИОННОЙ ОБРАБОТКЕ ТОНКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛОВ БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ

(Сибирский государственный аэрокосмический университет)

В статье рассмотрена проблема равномерности абразивно-экструзионной обработки каналов большой длины. Для этого разработана модель течения вязкоупругой среды, наполненной абразивными частицами. Наблюдаемая экспериментально в линии тока рабочей среды совокупность абразивных зерен представлена в виде цепочки, состоящей из последовательно соединенных одинаковых элементов. Каждый элемент деформируется независимо от остальных, а условие неразрывности цепочки обеспечивается соединением сегментов вязкоупругой среды в шариках, моделирующих абразивные частицы. Условия обработки определяются напряженно-деформированным состоянием рабочей среды. Величина деформации зависит от градиента скорости потока на стенке канала. Выявлено, что при установившемся течении соотношение между нормальными и касательными напряжениями рабочей среды сохраняются по всей длине обрабатываемого канала.

Ключевые слова: *абразивно-экструзионная обработка, вязкоупругая среда, деформация, сдвиговое течение, абразивное зерно, обрабатываемый канал, установившийся режим, цепочка, сегмент.*

Рассматривается задача построения модели течения вязкоупругой среды, наполненной абразивными частицами, в тонком осесимметричном канале большой длины.

Такой вид течения характерен для технологии экструзионного хонингования или абразивно-экструзионной обработки (АЭО). Вязкоупругая среда при АЭО при тчении принимает форму обрабатываемого канала, что позволяет осуществлять финишную обработку внутренних поверхностей различных сложнопольных деталей [6, 7]. Параметры течения наряду с геометрическими характеристиками обрабатываемого канала и свойствами материала определяют вид контактных взаимодействий микронеровностей поверхностного слоя обрабатываемого канала и абразивных зерен, перемещаемых в канале потоком вязкоупругой среды [3].

Существующие расчетные модели для АЭО [8] построены на использовании модели вязкопластичной среды Бингама, реологическое уравнение которой имеет вид

$$t = t_0 + \dot{g} h_B, \quad (1)$$

где t – напряжение сдвига; t_0 – предельное напряжение сдвига; \dot{g} – скорость сдвига; h_B – пластическая вязкость.

При напряжениях $t > t_0$ реализуется вязкое сдвиговое течение среды, а зависимость вязкости от напряжения сдвига линейна. Это положение позволило для оценки распределения скорости и давления потока в канале при АЭО применить различные гидродинамические модели, в частности – уравнение Пуайзеля для круглого канала [8]

$$V_0 = \frac{R^{n+1}}{2^n \cdot h_0^n \cdot (n+1)} \cdot \left(\frac{dP}{dx} \right)^n, \quad (2)$$

где V_0 – скорость потока на центральной оси канала; $\frac{dP}{dx}$ – продольный градиент давлений; n – индекс течения, характеризующий степень отклонения вязкостных свойств данной среды от свойств ньютоновской жидкости; R – радиус канала; h_0 – коэффициент начальной динамической вязкости.

При анализе применимости данного подхода авторы констатируют [8], что расчеты сил резания на основе приведенной модели при $n=1$ приводят к значительным погрешностям. Расчетные значения величин составляющих сил резания на порядок меньше, чем у значений, определенных экспериментально.

Такие значительные расхождения объясняются тем, что в данной модели не учитывается влияние на условие контакта нормальных напряжений, возникающих в потоке среды [4], т.е. при $t > t_0$ в потоке среды при АЭО реализуется не вязкопластическое, а вязкоупругое течение.

Кроме того, из (2) следует, что в каналах большой длины характерно появление неравномерности обработки по длине канала вследствие перепада давления на входе и выходе обрабатываемого канала [5, 7].

Таким образом, в настоящее время существует проблема теоретического расчета зависимости производительности и качества АЭО от регулируемых параметров процесса – состава рабочей среды и величины напряжения сдвига, что существенно сдерживает широкое применение метода АЭО в производстве [8]. Особенно это проявляется при внедрении АЭО для финишной обработки прямоугольных или круглых трубных заготовок большой длины (>1000 мм) и малым поперечным сечением (1,8 x 3,6 мм) или радиусом ($R < 4$ мм).

Для описания напряженно-деформированного состояния потока среды в таких каналах необходимо конкретизировать некоторые неизвестные функции, относящиеся к реологическим определяющим отношениям. Применение феноменологического подхода сопряжено с большими сложностями, т.к. в модели необходимо учитывать большее количество неизвестных функций. Поэтому для оценки предложено применение статистического или микроструктурного подхода.

При визуальных исследованиях потока рабочей среды в каналах разных конфигураций установлено [9], что сдвиговое течение при АЭО имеет доминирующее направление, оказывающее существенное влияние на характер перемещения абразивных частиц.

При этом частицы перемещаются по траекториям, которые, как правило, совпадают с линиями тока. Это наблюдение позволило сделать предположение о том, что при установившемся режиме течения наблюдается появление совокупностей абразивных зерен, перемещающихся по одной траектории, образованных линиями тока вязкоупругой среды.

Для случая потока среды в тонком прямоугольном канале постоянного сечения и большой длины можно сделать следующее предположение. Наблюдаемую в линии тока совокупность можно представить в виде цепочки, состоящей из последовательно соединенных одинаковых элементов – сегментов, каждый из которых деформируется независимо от остальных, а условие неразрывности цепочки обеспечивается соединением сегментов вязкоупругой среды в шариках, моделирующих абразивные частицы, окруженные сольватной оболочкой. Сольватная оболочка представляет собой часть среды, физические свойства которой изменены вследствие возникновения поверхностных сил на границе абразивное зерно – вязкоупругая среда. В целом, в потоке можно выделить ряд цепочек, деформирующихся параллельно и разделенных вязкой средой. Поскольку течение установившееся, предполагаем, что между цепочками при течении не возникает упругих взаимодействий.

Вязкоупругие свойства всех сегментов цепочки принимаются подобными и могут быть описаны при помощи различных моделей. Так полная деформация сегмента g является суммой мгновенно-упругой g_0 , запаздывающей (высокоэластической) g_e и пластической (вязкого течения) g_f деформаций – $g = g_0 + g_e + g_f$. Данный вид деформации можно представить с помощью различных моделей, в частности модели Бургерса – Френкеля (рис. 1).

Смещение каждого элемента моделирует относительную деформацию, а необходимая для данной деформации сила отвечает напряжению. Каждая компонента деформации в данной модели связана с напряжением линейно:

$$g_0 = t/G_0 ; h_1 \dot{g}_e + Gg_e = t ; \dot{g}_f = t/h , \quad (3)$$

где t – касательные напряжения; G_0 – модуль мгновенно-упругой деформации; G – модуль упругости при сдвиге; h – вязкость окружающей среды; h_1 – вязкость цепочки.

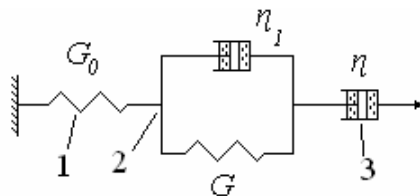


Рис. 1. Модель Бургерса – Френкеля: 1 – пружина, моделирующая мгновенно-упругую деформацию; 2 – элемент из параллельно соединенных пружины и демпфера, моделирующий запаздывающую деформацию; 3 – демпфер, моделирующий вязкое сопротивление деформированию

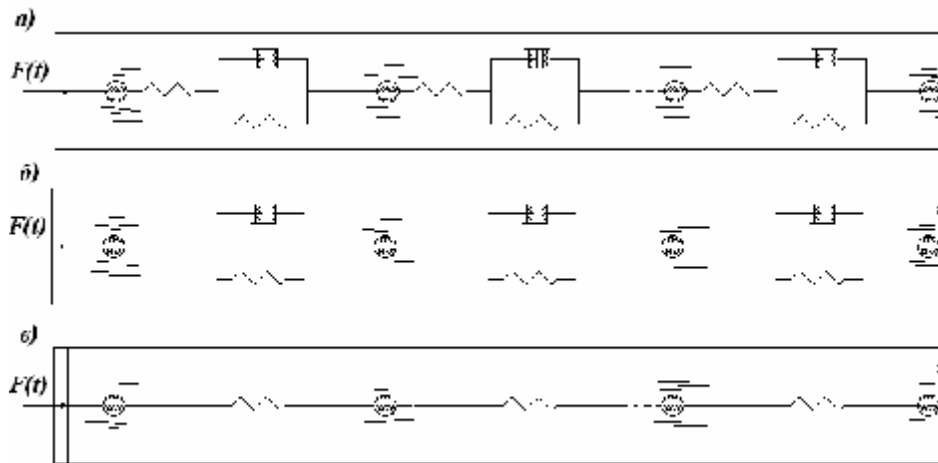


Рис. 2. Преобразованная модель Каргина – Слонимского – Рауза: а) полная модель с учетом мгновенно-упругой деформации и внутренней вязкости; б) модель без учета мгновенной деформации; в) модель без учета внутренней вязкости

Разделение цепочки на сегменты условно и должно в дальнейшем быть подтверждено экспериментальными данными. В связи с этим предположением для описания режимов деформирования среды при АЭО возможно применить некоторые варианты преобразованной модели Каргина – Слонимского – Рауза (КСР), приведенной в [1]. Преобразование модели заключается в изменении схемы нагружения. В модели КСР один конец цепочки закреплен, а ко второму приложена растягивающая внешняя сила $F(t)$. В рассматриваемой модели внешняя сила приложена к одному концу, а второй конец свободно перемещается в некоторой среде (рис. 2).

Вязкое сопротивление перемещению демфера соответствует взаимодействию цепочки с окружающей средой, которая препятствует ее перемещению относительно потока среды и других цепочек. Такое взаимодействие характерно и для случая АЭО и соответствует модели 2, а. Известно, что для всех вязкоупругих систем модуль мгновенно-упругой деформации G_0 гораздо больше, чем модуль G , связанный с высокоэластическими деформациями. Здесь модель КСР для случая АЭО тоже может быть упрощена к виду, показанному на рис. 2, б. Элементы этих двух моделей описывают запаздывающую деформацию, связанную с несовершенной упругостью образовавшейся цепочки. Обусловленная этим диссипация энергии характеризует внутреннюю вязкость самой цепочки.

Для случая АЭО можно пренебречь сопротивлением деформированию, обусловленной внутренней вязкостью цепи по сравнению с эффектом ее взаимодействия с окружающей средой, и получить еще более простую модель (рис. 2, в). Данные модели являются одномерными и могут передать особенность поведения проекции цепочки, расположенной на центральной оси потока, на выбранное направление в пространстве.

Предположим, что к одному из концов цепочки посредством поршня прикладывается внешняя сила $F(t)$. При этом в среде возникает сопротивление движению i -того шарика, равное произведению эффективной вязкости среды h на скорость движения ша-

рика, т.е. $h(du_i/dt)$. Усилие, действующее на пружину с модулем G , можно выразить как произведение G на разность координат концов пружины, которая представляет собой величину относительной деформации (сжатия) пружины. Усилие, действующее на демпфер с вязкостью h_1 , зависит от разности скоростей смещения шариков, окружающих этот демпфер. Коэффициент эффективной вязкости h учитывает потери потока не только на вязкое течение, но и на трение со стенками канала, а также потери вызванные взаимодействием цепочек между собой.

Тогда, условия равновесия первого шарика, находящегося на свободной поверхности среды, можно записать как

$$h \frac{du_1}{dt} + h_1 \left(\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right) - G(u_1 - u_2) = 0. \quad (4)$$

Условия равновесия i -того шарика зависят от окружающей среды и двух пар демпфер – пружина

$$h \frac{du_i}{dt} + h_1 \left[\left(\frac{du_i}{dt} - \frac{du_{i+1}}{dt} \right) - \left(\frac{du_{i-1}}{dt} - \frac{du_i}{dt} \right) \right] - G[(u_i - u_{i+1}) - (u_{i-1} - u_i)] = 0. \quad (5)$$

Последний $(n+1)$ -й шарик испытывает влияние окружающей среды, одной пары демпфер – пружина и внешней силы

$$h \frac{du_{n+1}}{dt} + h_1 \left(\frac{du_{n+1}}{dt} - \frac{du_n}{dt} \right) - G(u_{n+1} - u_n) = F(t). \quad (6)$$

Система уравнений (4) – (6) определяет зависимость движения цепочки на оси канала под действием заданной силы. В упрощенном варианте модели $h_1 = 0$. Из модели КСР известна форма записи i -того уравнения данной системы.

В нормальных координатах $y_i = u_i - u_{i+1}$ система (4) – (6) принимает вид:

$$\begin{cases} h \frac{y_1}{dt} + h_1 \left(2 \frac{y_1}{dt} - \frac{y_2}{dt} \right) - G(2y_1 - y_2) = 0, \\ h \frac{y_i}{dt} + h_1 \left(2 \frac{y_i}{dt} - \frac{y_{i+1}}{dt} - \frac{y_{i-1}}{dt} \right) - G(2y_i - y_{i+1} - y_{i-1}) = 0, \\ h \frac{y_n}{dt} + h_1 \left(2 \frac{y_n}{dt} - \frac{y_{n-1}}{dt} \right) - G(2y_n - y_{n-1}) = F(t). \end{cases} \quad (7)$$

Записанные n линейных дифференциальных уравнений первого порядка образуют систему относительно n неизвестных функций y_i . Решение такой однородной системы (без правой части) известно:

$$y_i = \sum_{m=1}^n C_m e^{-S_m t}, \quad (8)$$

где C_m и S_m – подлежащие определению константы.

Значения S_m записаны для двух случаев [9]:

при $h_1 \neq 0$

$$S_m = \frac{4G \left[\sin \frac{mp}{2(n+1)} \right]^2}{h + 4h_1 \left[\sin \frac{mp}{2(n+1)} \right]^2}, \quad (9)$$

при $h_1 = 0$

$$S_m = \frac{4G}{h} \left[\sin \frac{mp}{2(n+1)} \right]^2. \quad (10)$$

Для рассматриваемого случая установившегося движения по центральной оси потока при АЭО представляет интерес временная зависимость смещения начала цепочки, т.е. $(n+1)$ -го шарика при постоянной действующей силе $F(t) = F_0 = const$:

$$u_{n+1}(t) = \frac{F_0 t}{h(n+1)} - F_0 \sum_{m=1}^n B_m (1 - e^{-t/I_m}). \quad (11)$$

Для упрощенного варианта модели (рис. 2, в) структура величин $I_m = s_v^{-1}$ и B_m выражаются через уравнения (12) и (13) соответственно:

$$I_m = \frac{h}{4G} \left[\sin \frac{mp}{2(n+1)} \right]^{-2}, \quad (12)$$

$$B_m = \frac{1}{2G(n+1)} \left[\operatorname{ctg} \frac{mp}{2(n+1)} \right]^2. \quad (13)$$

Полное смещение складывается из линейно зависящего от времени первого члена формулы (11) и суммы членов, зависящих от времени экспоненциально. Необратимое течение соответствует вязкопластическому деформированию среды и смещению центра тяжести цепочки. При установившемся режиме необратимые деформации неограниченно увеличиваются во времени, т.е. реализуется сдвиговое течение.

Движение конца цепи относительно центра тяжести соответствует упругой деформации, а константы I_m являются временами запаздывания системы. Упругие деформации также увеличиваются, но, приближаясь к некоторому асимптотическому значению $u_e(\infty)$.

Основной задачей по выбору состава рабочей среды является обеспечение такого сочетания ее вязкоупругих свойств, которое бы позволило создать с одной стороны, требуемые расходно-напорные характеристики потока в обрабатываемом канале, а с другой стороны – максимально возможные усилия по взаимодействию абразивного зерна к обрабатываемой поверхности.

Из четырех констант материала, характеризующих упругие свойства рабочей среды, на основе стандартных методик определены величины модуля Юнга E и коэффициента Пуассона μ , через которые установлена величина модуля упругости при сдвиге

$$G = \frac{E}{2(1+m)}. \quad (14)$$

Количество шариков n в цепочке и длина сегмента цепочки зависят от степени наполнения среды абразивными частицами и длины рабочего тела в обрабатываемом канале. Величина эффективной вязкости рабочей среды определена по методике [3].

В силу размеров шарика 1 (рис. 3), моделирующего абразивное зерно с сольватной оболочкой, модель цепочки должна учитывать градиент скорости сдвига потока на ее верхней 2 и нижней границах 3. Величина сольватной оболочки формирует поперечные размеры линии тока.

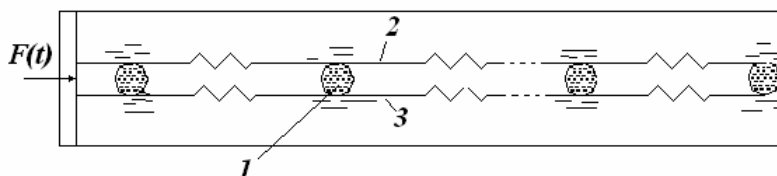


Рис. 3. Модель плоской вязкоупругой цепочки при АЭО, учитывающей ее размеры и разность скоростей потока рабочей среды

Для расчета цепочки, деформирующейся вдоль центральной оси потока, где отсутствует градиент скорости сдвига, достаточно применения уравнений (4) – (13). Для расчета цепочек, деформирующихся в зоне с существенным градиентом скорости сдвига, необходимо учитывать пространственные эффекты, возникающие при простом сдвиге в упругом теле (рис. 4).

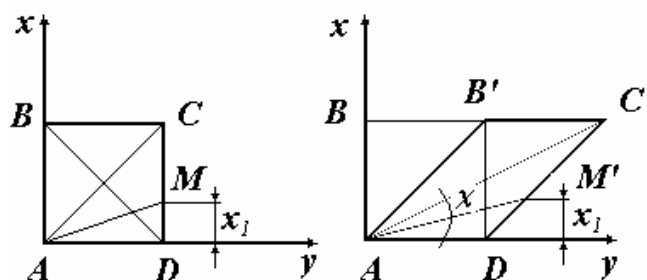


Рис. 4. Схема простого сдвига в сегменте цепочки

Выделим некоторый объем среды, заключенный в единичном сегменте цепочки между двумя соседними шариками. При установившемся течении размеры линии тока не изменяются. Принимаем, что и расстояние между центрами шариков остается постоянным u_i . Тогда вследствие деформации, вызванной градиентом скорости сдвига, диагональ AC удлинится до AC' , а отрезок AM , отстоящий от оси y на расстоянии x' , удлинится до отрезка AM' . Величина сдвига $g = BB'$ равна градиенту скорости сдвига потока. Тогда относительная деформация e произвольного отрезка AM

$$e = \frac{AM'}{AM} = \left[\frac{(1+gx_1)^2 + x_1^2}{1+x_1^2} \right]^{0,5}. \quad (15)$$

Максимальное значение относительной деформации e соответствует удлинению диагонали AC до AC' , при котором возникает главное напряжение S_1 . В перпендикулярном ей направлении возникает главное напряжение S_2 , вызванное изменением BD до BD' . Угол c находится между линией действия главного напряжения S_1 и направлением сдвига. Касательные напряжения на площадках, ориентированных к направлению сдвига под углом c равны нулю, что позволяет для выделенного объема записать все компоненты действующих напряжений

$$\begin{aligned} s_{11} &= s_1 \cos^2 c + s_2 \sin^2 c, \\ s_{22} &= s_1 \sin^2 c + s_2 \cos^2 c, \\ t = s_{12} &= -\frac{1}{2}(s_1 - s_2) \sin 2c, \\ s &= s_{11} - s_{22} = (s_1 - s_2) \cos 2c. \end{aligned} \quad (16)$$

где S_{ij} – компоненты тензора напряжений.

Из соотношений (16) видно, что в случае $s_1 - s_2 \neq 0$ всегда возникают нормальные напряжения. Соотношение между касательными и нормальными напряжениями выражается через угол c как $s/2t = ctg 2c$, а тангенс угла c при ориентации главных напряжений вдоль и перпендикулярно диагонали AC' (рис. 4), находится как $tg c = (1+g)^{-1}$. Тогда на основании вышеназванного соотношения между напряжениями и схемы простого сдвига в сегменте можно записать

$$s/2t = ctg 2c = (2+g)g/2(1+g). \quad (17)$$

В данных расчетах не учитывается влияние вращения абразивной частицы и ее сольватной оболочки на напряженно-деформированное состояние среды. Из рассмотрения модели статистического макромолекулярного клубка в гидродинамическом поле (модель Бики и модель Кирквуда – Райзмана – Зимма), можно принять, что в сдвиговом потоке с градиентом скорости g' абразивное зерно и сольватная оболочка будут вращаться с угловой скоростью, в среднем равной $g'/2$.

При известных значениях коэффициента эффективной вязкости среды h , градиента скорости сдвига потока, модуля упругости при сдвиге G , длины сегмента цепочки и размера сольватной оболочки на основании предложенной модели возможен приближенный расчет напряженно-деформированного состояния потока наполненной вязкоупругой среды при установившемся течении на стенке в тонком осесимметричном канале большой длины. В таких каналах влиянием формы поперечного сечения на поток можно пренебречь и свести картину течения от объемного к плоскому состоянию.

В первоначальный момент приложения нагрузки $F(t)$ при $h_1 = 0$ в цепочке происходит последовательная упругая деформация сегментов и условия равновесия первого шарика, i -того шарика и $(n+1)$ -го шарика различны и $y_1 < y_i < y_n$. По цепочке проходит волновой процесс сжатия сегментов до величины, зависящей от длины и диаметра

сегмента, а также от модуля упругости при сдвиге G . При этом увеличивается диаметр сегмента цепочки, что ведет к возникновению упругих взаимодействий между соседними цепочками, которые начинают препятствовать процессу сжатия сегмента. Этот процесс также носит волновой характер и будет рассмотрен в дальнейших работах.

При установившемся режиме сдвигового течения скорости движения всех шариков (du_i/dt) одинаковы, времена запаздывания системы I_m достигают своих максимальных значений, упругие деформации приближаются к асимптотическому значению $u_e(\infty)$. Тогда и условия равновесия для всех сегментов цепочки подобны и $y_1 = y_i = y_n$, т.е. не зависят от длины цепочки (обрабатываемого канала). Величина сжатия e сегментов цепочки на оси канала в данном случае перестает быть зависимой от длины канала, т.е. от режима вязкоупругого течения. На центральной оси канала поток движется подобно сжатому упругому стрежню.

Основное влияние на процесс АЭО оказывает напряженно-деформированное состояние потока возле стенки обрабатываемого канала, вызванная градиентом скорости потока. Рассмотрим цепочку, деформирующуюся на стенке канала. Для такой цепочки характерна разная скорость вязкого течения верхней и нижней границы с проявлением пространственных эффектов, описываемых уравнениями (15) – (17).

Для проверочного расчета по предложенной модели по методикам [3] определены величины эффективной вязкости $\eta = 30000$ Па·с, модуля Юнга $E = 130200$ кг/м² и модуля упругости при сдвиге $G = 46500$ рабочей среды, состав которой выбран по проведенным исследованиям [6]: каучук СКТ – 30 %, мелкодисперсный фторопласт Ф-4 – 4 %, абразивная паста 23АМ50 – 66 %. Величина зерна с сольватной оболочкой ≈ 100 мкм. Расстояние между соседними зёрнами (шариками) в цепочке при установившемся течении ≈ 300 мкм. Число шариков n в цепочке, образовавшейся в канале длиной 4 м, составляет ≈ 13000 . Экспериментально определена максимальная скорость потока – 0,0054 м/с и градиент скорости сдвига установившегося течения в длинном канале – $g' = 3,0$ с⁻¹. Для рассматриваемого случая $e \approx 0,36$.

Величина сдвигающей силы $F(t) = 160$ Н найдена из произведения значения давления среды $P_{ex} = 12,0$ МПа, измеренного на входе в канал, на площадь поперечного сечения канала $2,6 \times 5,2$ мм. Из (15) с учетом геометрических размеров сегмента $0,1 \times 0,3$ мм и градиента скорости сдвига найдены относительные деформации $e_1 = 1,924$ и $e_2 = 0,316$. Из (17) величина угла $c \approx 14^\circ$. Тогда из отношений $s_1 = e_1 E$ и $s_2 = e_2 E$ следует, что $s_1 \approx 250500$ и $s_2 \approx 41140$. Из (16) $s_{11} \approx 45060$, $s_{22} \approx 246600$, $t \approx 28360$. Такие соотношения между величинами напряжений сохраняются по всей длине обрабатываемого канала и позволяют осуществлять АЭО каналов большой длины.

В более точных моделях необходимо будет учитывать осцилляцию величин напряжений, вызванную волновым характером деформации цепочки и возникающих упругих взаимодействий между цепочками.

г. Красноярск

Поступила: 23 ноября 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виноградов, Г. В.* Реология полимеров / Г. В. Виноградов, А. Я. Малкин. – М. : Химия, 1977. – 440 с.
2. *Левко, В. А.* Абразивно-экструзионная обработка. Современный уровень, проблемы и направления развития. / В. А. Левко // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 6, – С. 125 - 129.
3. *Левко, В. А.* Влияние состава рабочей среды на технологические режимы абразивно-экструзионной обработки сложнопрофильных деталей / В. А. Левко, Е. Б. Пшенко // Вестник СибГАУ. – 2006. Выпуск 11. – С. 64 – 68.
4. *Левко, В. А.* Интенсификация процессов абразивно-экструзионной обработки деталей летательных аппаратов: автореферат на соискание ученой степени кандидата технических наук // Красноярск, САА, 1998. – 18 с.
5. *Левко, В. А.* Особенности реологии рабочей среды при абразивно-экструзионной обработке / В. А. Левко // Вестник СибГАУ. – 2005. Выпуск 7. – С. 96-100.
6. *Сысоев, С. К.* Абразивно-экструзионная обработка прямоугольных каналов волноводов миллиметрового диапазона / С. К. Сысоев, В. А. Левко, А. А. Левко // Повышение качества изготовления деталей машин методами отделочно-упрочняющей обработки: материалы Всесоюзной конференции, Пенза. – 1991. – С. 84-85.
7. *Сысоев, С. К.* Обеспечение точности расхода компонентов топлива через каналы деталей, обработанных экструзионным хонингованием / С. К. Сысоев, М. А. Лубнин, В. А. Левко и др. // Технология машиностроения. – 2007. – №6. – С. 48-52.
8. *Сысоев, С. К.* Технология отделки РК-профильных отверстий абразивно-экструзионной обработкой / С. К. Сысоев, А. Н. Тимченко, В. А. Левко // Вестник машиностроения. – 1991. – №1. – С. 65-67.
9. *Сысоев, С. К.* Экструзионное хонингование деталей летательных аппаратов: теория, исследования, практика: монография / С. К. Сысоев, А. С. Сысоев. – Красноярск : Изд-во СибГАУ, 2005. – 220 с.

Манцыбора А. А., Семенов К. Т.

ЗАДАЧА О СОУДАРЕНИИ ДВУХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

(Институт автоматизации процессов управления ДВО РАН)

Рассмотрена плоская автомоделная задача об ударном деформировании упругопластического полупространства жестким телом с плоской границей. Изучается случай, когда необратимые деформации накапливаются внутри простых волн Римана. Приведено решение с возможной волновой картиной, когда возмущение в среде распространяется посредством двух упругих ударных волн и одной пластической централизованной волны.

Ключевые слова: упругость, пластичность, высокоскоростное соударение. Проведена постановка авт. деформирование осуществляется после прохождения по среде поперечной ударной волны.

Введение.

Первой публикацией, посвященной постановке и исследованию решения плоской автомоделной задачи динамики упругопластической среды является, по-видимому, статья [3]. Несомненно в любом случае, что именно данная работа инициировала целый ряд [1,2,4-10] следующих публикаций на данную тему. В этом ряду заметны результаты исследований Г. И. Быковцева и его учеников (В. А. Баскаков, П. Н. Сыгуров, Н. М. Зиновьев, А. В. Колокольчиков и др.) Настоящая публикация относится к этому же ряду, с той отличительной особенностью, что материал считается пластически сжимаемым, что обеспечивается выбором поверхности нагружения в форме пирамиды Кулона-Мора, основанием которой в плоскости параллельной девиаторной является шестиугольник Ишлинского-Ивлева.

Постановка задачи.

Полагаем, что полупространство $x_2 > 0$ (на $L_1: x_2 = 0$) (рис. 1) занято упругопластической средой. Ударник будем считать абсолютно твердым и имеющим также плоскую границу L_2 . Считаем, что ударник движется с некоторой скоростью $u(u_1, u_2)$ и плоскость ударника L_2 с плоскостью упругопластического полупространства образуют малый угол j_0 . В результате соударения тел образуется общая граница OL

(рис. 2), причем точка O – точка соприкосновения тел движется вдоль границы первого тела с некоторой скоростью s .

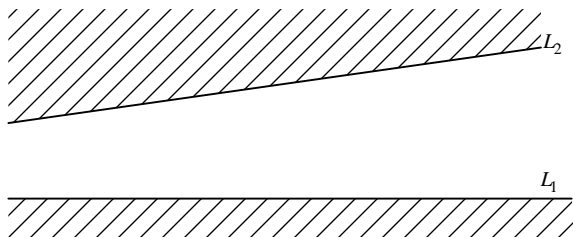


Рис. 1

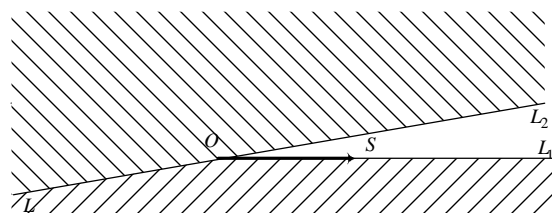


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда $s = v_2 + \frac{v_1}{\sin j}$ больше скорости распространения возмущений в среде (больше скорости звука). Это достигается либо малостью угла соударения φ , либо высокой скоростью соударения v .

1. Решение упругой автомодельной задачи.

Пусть первоначально параметры задачи (v, φ) таковы, что в полупространстве не возникают необратимые деформации.

Систему уравнений динамического деформирования линейной упругой среды запишем в прямоугольной декартовой системе координат в следующем виде:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= l d_{ij} e_{kk}^e + 2m e_{ij}^e, \\ e_{ij}^e &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ s_{ij,j} - r u_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь s_{ij}, e_{ij}^e, u_i – компоненты тензора напряжений, тензора малых упругих деформаций и вектора перемещений соответственно.

Введем автомодельную переменную:

$$x = \frac{x_1}{st - x_2} \quad (1.2)$$

и представим компоненты вектора перемещения в виде:

$$u_1 = (st - x_2) f(x), \quad u_2 = (st - x_2) g(x). \quad (1.3)$$

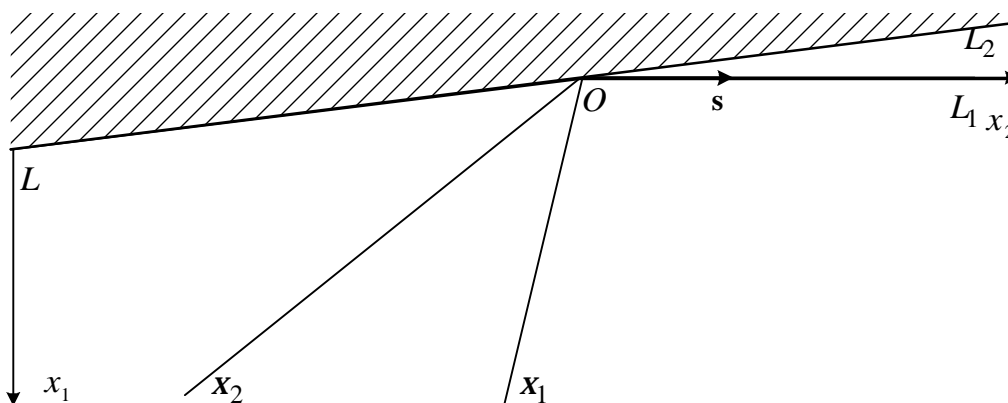


Рис. 3

Подставляя соотношения (1.3) в систему уравнений (1.1) можно получить систему из двух однородных квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Af'' + Bg'' = 0, \\ Cf'' + Dg'' = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где A, B, C, D – функции от $f(x), g(x), x$, их производных и упругих постоянных материала.

Система (1.4) допускает тривиальное решение:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax - b, \\ g(x) &= cx - d, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где a, b, c, d – постоянные.

Из соотношений (1.1), (1.2) и (1.5) находим:

$$e_{11} = a, \quad e_{22} = d, \quad e_{12} = e_{21} = \frac{b+c}{2}, \quad u_1 = -sb, \quad u_2 = -sd. \quad (1.6)$$

Компоненты тензора напряжений выражаются через постоянные a, b, c, d по закону Гука. Таким образом соотношения (6) определяют решение задачи в областях где S_{ij}, e_{ij}^e, u_i постоянны. Эти области разделены ударными волнами при переходе через которые эти величины изменяются скачком. На ударных волнах выполняются динамические и кинематические условия совместности разрывов:

$$\begin{aligned} [s_{ij} n_j] &= -rG[u_i], \\ [u_i] &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где n_j – компоненты единичной нормали к ударной волне, $[F] = F^+ - F^-$ – разрыв некоторой функции и индексами плюс и минус обозначены значения величины F перед и за ударной волной соответственно.

Вектор единичной нормали к плоскости волны \bar{n} имеет компоненты:

$$n_1^{(m)} = \cos(q_m), \quad n_2^{(m)} = \sin(q_m), \quad m = 1, 2. \quad (1.8)$$

В случае автомодельности задачи для сохранения конфигурации на рис.3 в любой момент времени, скорость распространения волны $\bar{G}^{(m)}$ и скорость движения нагрузки на границе полупространства \bar{s} необходимо связать соотношениями:

$$G^{(m)} = s \cdot \sin(q_m), \quad s = const. \quad (1.9)$$

Подставляя соотношения (1.3), (1.5), (1.6), (1.8), (1.9) в выражение (1.7), а также учитывая, что $x_m = tg(q_m)$, получим:

$$\begin{aligned} (I + 2m)[a] + I[d] + mx_m([b] + [c]) - rs^2 x_m [b] &= 0, \\ ((I + 2m)[d] + I[a])x_m + m([b] + [c]) - rs^2 x_m [d] &= 0, \\ [a]x_m - [b] &= 0, \\ [c]x_m - [d] &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Рассматривая систему (1.10) относительно разрывов переменных a, b, c, d , с учетом соотношения (1.9), и приравняв определитель системы к нулю окончательно получим соотношения для скоростей распространения ударных волн:

$$G_1 = \sqrt{\frac{l+2m}{r}}, \quad G_2 = \sqrt{\frac{m}{r}}. \quad (1.11)$$

2. Решение пластической автомодельной задачи.

Рассмотрим идеальную упругопластическую среду, полные деформации которой считаются малыми и складываются из двух частей: упругой и пластической:

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.1)$$

Компоненты тензора напряжения выражаются через упругие деформации согласно закону Гука:

$$s_{ij} = l d_{ij} e_{kk}^e + 2m e_{ij}^e. \quad (2.2)$$

Также выполняются уравнения движения:

$$s_{ij,j} - r u_i = 0. \quad (2.3)$$

Скорости пластических деформаций связаны с напряжениями посредством ассоциированного закона пластического течения:

$$e_{ij}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}, \quad (2.4)$$

где f – это условие пластичности.

В данной работе в качестве условия пластичности выбирается пирамида Ишлинского-Ивлева:

$$\max |s_i - s_j| + q s = \frac{2}{3} k, \quad s = \frac{1}{3} s_{ii}. \quad (2.5)$$

При численном решении данной задачи в силу выбранных значений начальных условий и параметров материала рассматривается одна из граней пирамиды Ишлинского-Ивлева:

$$s_1 + (q-1)s = \frac{2}{3} k. \quad (2.6)$$

Для плоской задачи главные напряжения выражаются через компоненты тензора напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{s_{11} + s_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}^2}, \\ s_2 &= \frac{s_{11} + s_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}^2}, \\ s_3 &= s_{33}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Условию (2.6) можно удовлетворить тождественно (при соблюдении условия (2.7)), положив:

$$\begin{aligned}
s_{11} &= \frac{1}{2}r \cdot \cos(q) + \frac{2k}{2q+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r+p}{2q+1}, \\
s_{22} &= -\frac{1}{2}r \cdot \cos(q) + \frac{2k}{2q+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r+p}{2q+1}, \\
s_{33} &= \frac{3}{2(q+1)}p.
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

Из соотношений (2.4) и (2.8) получим:

$$\begin{aligned}
e_{11}^p &= y \left(\frac{2q+1}{4} + \frac{3}{4} \cos(q) \right), \\
e_{22}^p &= y \left(\frac{2q+1}{4} - \frac{3}{4} \cos(q) \right), \\
e_{33}^p &= y \frac{q-1}{2}, \\
e_{12}^p &= y \frac{3}{2} \sin(q).
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

Из соотношений (2.1), (2.2), (2.3) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
s_{ij} &= l d_{ij} (u_{k,k} - e_{kk}^p) + m (u_{i,j} + u_{j,i}) - 2m e_{ij}^p, \\
s_{ij,j} - r u_{i,j} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

Введем автомодельную переменную (1.2), при этом выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\Phi_{,1} &= -\Phi' \frac{sX}{st - x_2}, \\
\Phi_{,1} &= \Phi' \frac{1}{st - x_2}, \\
\Phi_{,2} &= \Phi' \frac{X}{st - x_2},
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

где Φ – произвольная функция от x .

Из соотношений (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) окончательно запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
A_{11}p' + A_{12}r' + A_{13}q' + A_{14}u' + A_{15}u_2' &= 0, \\
\text{.....} & \\
A_{51}p' + A_{52}r' + A_{53}q' + A_{54}u' + A_{55}u_2' &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

Величины A_{ij} являются функциями от r, p, q, u_1, u_2 и констант материала.

Система (2.12) является однородной. Таким образом, пластическое течение связано с нетривиальным решением данной системы. Равенство нулю определителя этой системы на отрезке $[x^-, x^+]$ означает, что необратимые деформации приобретаются материалом в простой центрированной волне Римана, передний фронт которой определяется

значением x^+ , а задний x^- . Согласно проводимым численным экспериментам возможны две центрированные волны, первая из них располагается между безвихревой ($x = x_1$ на рис. 4) и эквиволюмиальной ($x = x_2$ на рис. 4) упругими волнами, вторая в области между эквиволюмиальной волной и деформированной границей OL (рис. 4) среды. Возможен так же случай, когда одна из центрированных волн отсутствует. Так на рис. 4 иллюстрируется случай, когда центрированная волна присутствует только между x_2 и OL и задается параметрами x_2^+ (передний фронт) и x_2^- (задний фронт центрированной волны). Данная ситуация возникла при следующих значениях для параметров задачи: $l = 1,155 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $m = 7,7 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $r = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $k = 285 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $q = 0,05$, $u_1 = 11 \text{ м/с}$, $u_2 = 13 \text{ м/с}$, $j_0 \approx 3^\circ$.

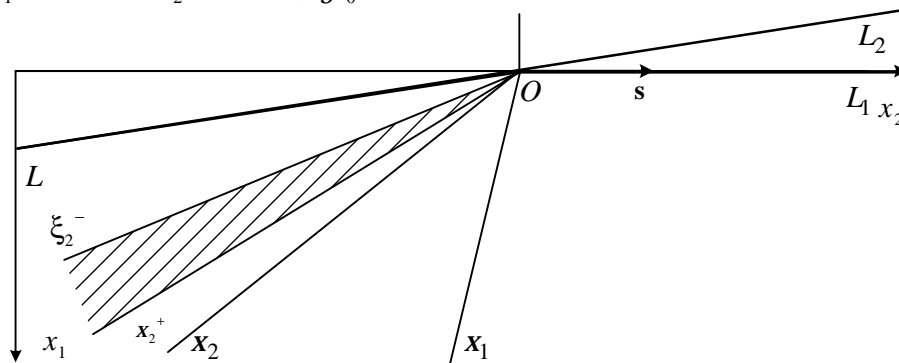


Рис. 4

Далее (рис. 5-8) показан характер изменения компонент тензора напряжения измеряемый в МПа, в зависимости от автомодельной переменной x в области пластической волны ($x^- ; x^+$):

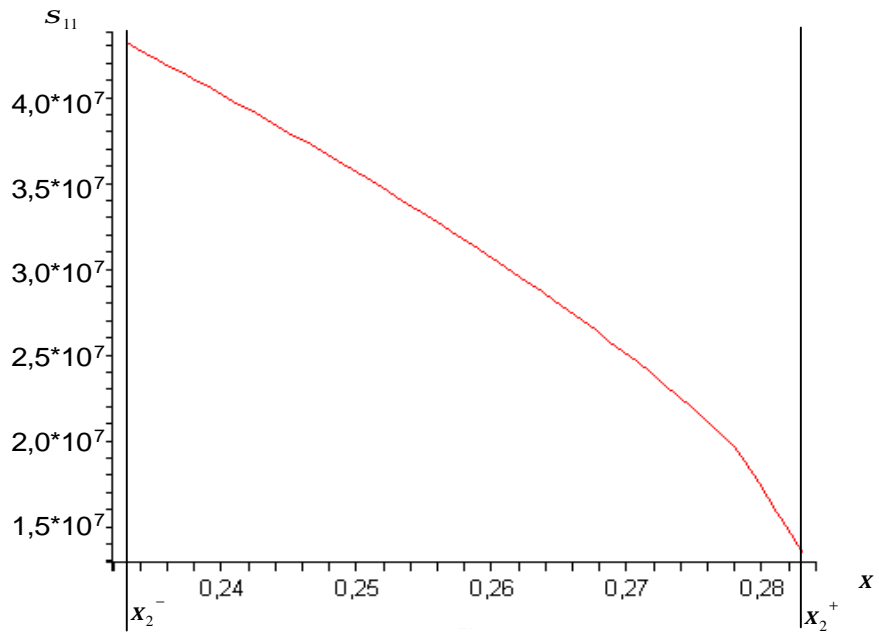


Рис. 5

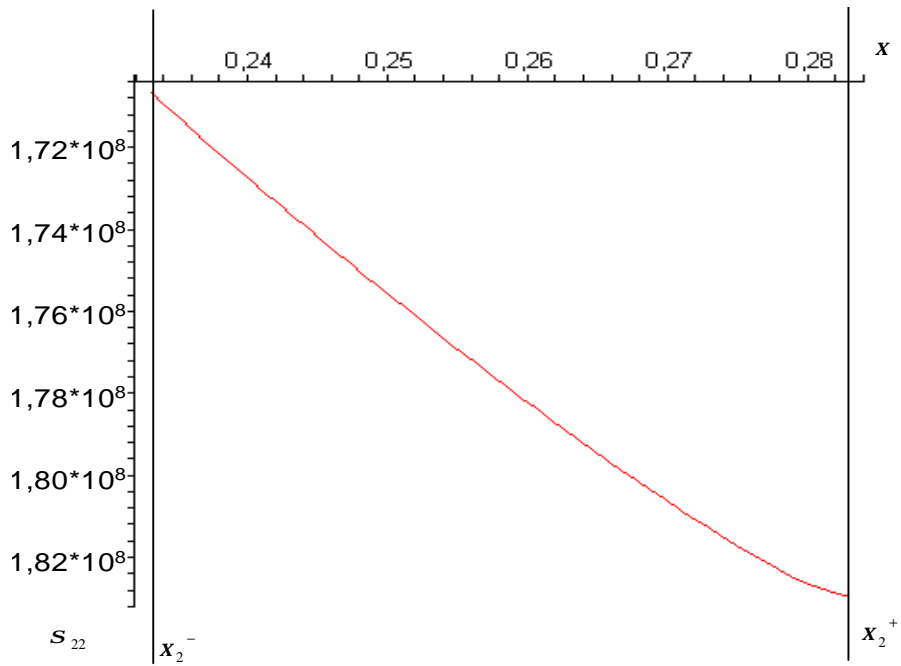


Рис. 6

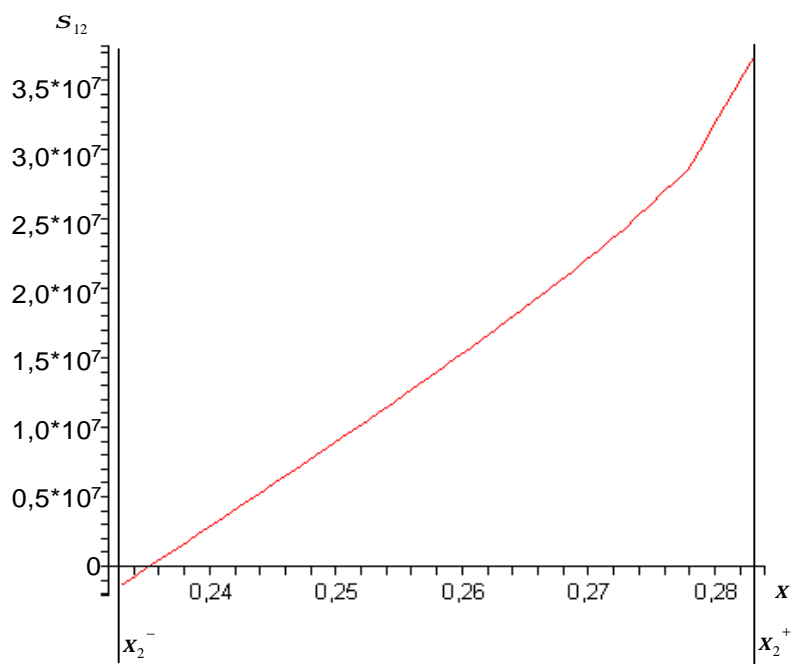


Рис. 7

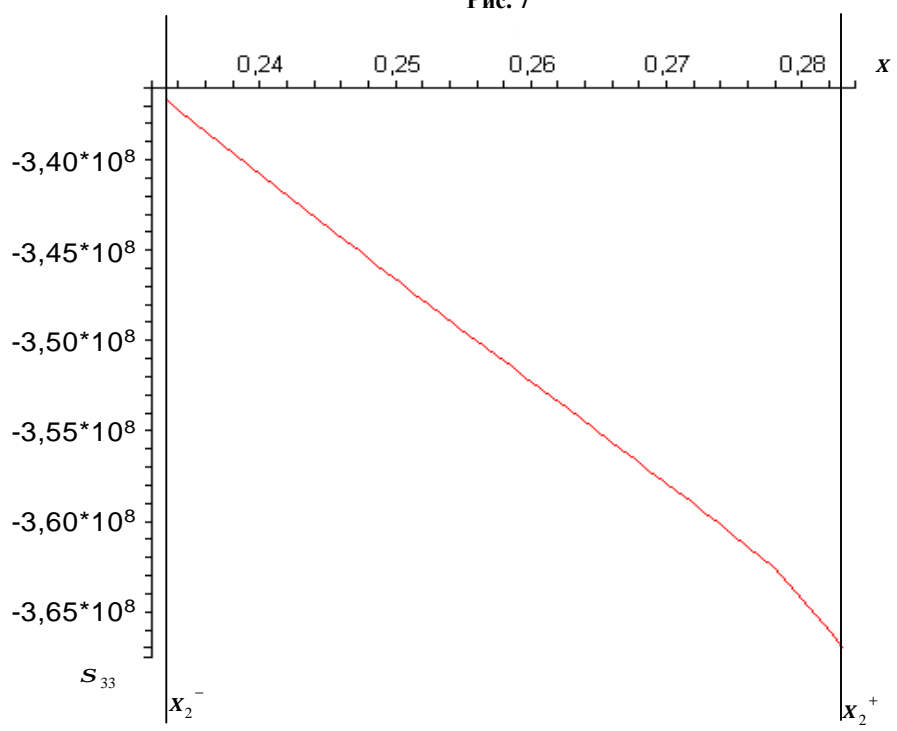


Рис. 8

Следует отметить, что кроме рассмотренного здесь случая (рис. 4) с волновой картиной – когда пластическая волна идет за поперечной упругой волной, при задании других краевых условий возможны еще случаи с другими волновыми картинами. А именно: когда волны несущие необратимые деформации существуют одновременно и за продольной и за поперечной упругими ударными волнами, либо случай с одной пластической волной между двумя упругими.

г. Владивосток

Поступила: 19 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков, В. А. Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде / В. А. Баскаков, Г. И. Быковцев // ПММ. М. : Мир, 1971. – 35. – №1. – С.71-72.
2. Баскаков, В. А. Пластическое деформирование среды при взаимодействии сдвиговых ударных волн / В. А. Баскаков // ПМТФ. – 1982. – №2. – С.127-133.
3. Блейх, Г. Г. Плоские волны в упругопластическом полупространстве, вызванные совместным действием нормальной и касательной поверхностных нагрузок / Г. Г. Блейх, Дж. Нельсон // ПММ. М. : Мир, 1966. – №1. – С.145-156.
4. Блейх, Г. Г. Движение со сверх сейсмической скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства / Г. Г. Блейх., А. Т. Мэтьюс // Сб. пер. «Механика». – 1968. – №1. – С.123-155.
5. Быковцев, Г. И. Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска / Г. И. Быковцев, А. В. Колокольчиков, П. Н. Сыгуров // ЖПМТФ. – 1984. – №6. – С.112-120.
6. Быковцев, А. Г. О преломлении ударных волн чистого сдвига в упругопластическое полупространство / А. Г. Быковцев // ПММ. – 1989. – Т.53, вып.2. – С.309-318.
7. Ковшов, А. Н. О преломлении упругой волны в упругопластическое полупространство / А. Н. Ковшов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1972. – №6 – С.82-88.
8. Ковшов, А. Н. Отражение пластической волны, падающей под углом на жесткую стенку / А. Н. Ковшов, А. М. Скобеев // Изв. АН СССР, МТТ. – 1973. – №1. – С. 54-59.
9. Кондауров, В. И. Отражение плоской поперечной волны от свободной границы полупространства / В. И. Кондауров // В кн. Труды научной конф. МФТИ. Сер. Аэромеханика. Процессы управления. Долгопрудный. – 1973. – С. 105-111.
10. Скобеев, А. М. Подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости / А. М. Скобеев, Л. М. Флитман // ПММ. – 1970. – т.34, вып. 1. – С.189-192.

Миронов Д. Н.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОСИЛОВЫХ НАГРУЗОК

(Белорусский национальный технический университет)

В статье смоделирован процесс разрушения и представлена методика диагностики текущего состояния сложной механической системы с помощью метода искусственных нейронных сетей.

Ключевые слова: *разрушение механической системы, диагностика механической системы, метод искусственных нейронных сетей.*

Моделирование процесса оценки состояния сложной механической системы.

Контроль за техническим состоянием осуществляется непосредственно датчиками и аппаратурой, установленными на двигателе и силовых элементах летательного аппарата.

Для непрерывного контроля уровня виброскорости корпуса авиадвигателя, а также для сигнализации о возникновении вибрации с уровнем виброскорости, превышающим допустимый для данного типа авиадвигателя, в настоящее время используют аппаратуру контроля вибрации типа ИВ-200.

Таблица 1

Вариант	Диапазон частот [Гц]	Затухание не менее пяти раз на частотах [Гц]	Погрешность измерения [%]
ИВ-200А	30 - 180	10 и 400	15
ИВ-200АС	30 - 180	10 и 400	15
ИВ-200Б	30 - 150	10 и 300	15
ИВ-200В	45 - 200	15 и 400	15
ИВ-200Г	40 - 195	15 и 400	15
ИВ-200Е	50 - 200	20 и 400	10
ИВ-200К	50 - 200	20 и 400	10

Сигнал от датчика вибрации в виде напряжения, пропорционального виброскорости авиадвигателя, усиливается электронным блоком в требуемой полосе частот.

Усиленный и выпрямленный в электронном блоке сигнал подается на прибор, отградуированный в единицах виброскорости, а также на схему световой сигнализации.

Диапазон частот, контролируемый аппаратурой приведен в таблице 1

Датчик предназначен для преобразования составляющей скорости линейной вибрации, действующей в направлении оси датчика, в электрическое напряжение. Принцип действия основан на законе электромагнитной индукции.

Основной величиной, характеризующей датчик, является его чувствительность K , которая равна:

$$K = \frac{U \cdot 1,41}{V} (\text{мВ} / \text{ммГц}),$$

где U – напряжение на выходе датчика в мВ; V – скорость вибрации, измеряемая датчиком в $\frac{\text{мм}}{\text{с}}$ и равная $2\pi fS$, где f – частота вибрации в Гц; S – амплитуда смещения в мм. Прибор предназначен для отсчета скорости вибрации двигателя. В качестве прибора применен микроамперметр магнитоэлектрической системы. Шкала прибора отградуирована в единицах виброскорости.

В последнее время для контроля деталей двигателя, планера, систем управления, изготовленных из немагнитных материалов все шире начинают применять метод

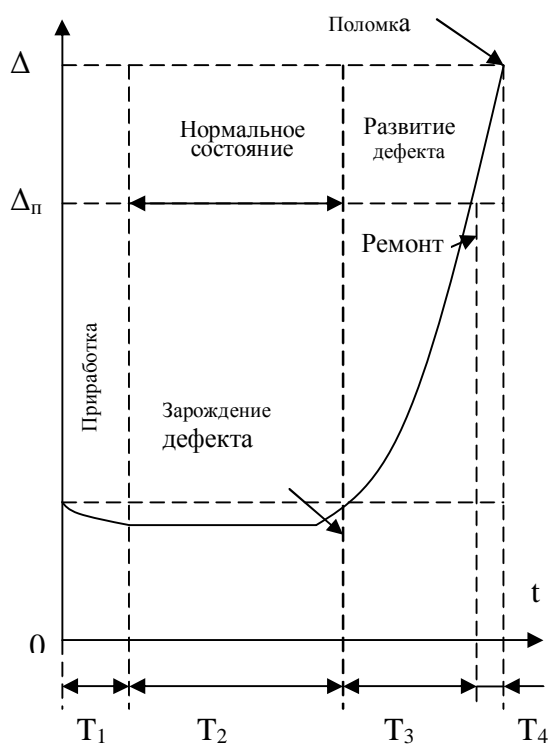


Рис. 1. Этапы жизненного цикла детали

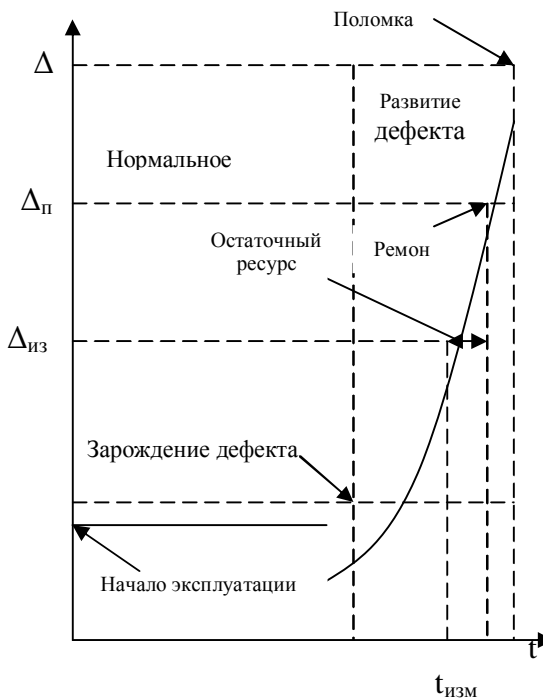


Рис. 2. Прогнозирование жизненного цикла детали

вихревых токов реализованный в дефектоскопах ВДЦ-1М, ВДЦ-2, ВДЦ-3.

Для оценки состояния силовых элементов и деталей авиационного двигателя в процессе эксплуатации, разработан ряд мероприятий позволяющих контролировать их техническое состояние.

Оценка технического состояния и прогнозирование работы оборудования по полученной информации.

Каждый параметр имеет эталонное значение, которое характеризует бездефектное состояние объекта. Для оценки технического состояния необходимо определить фактические величины контролируемых параметров. Разность между фактическим и эталонным значениями диагностических параметров представляет собой диагностический симптом.

Формула для определения диагностического симптома:

$$\Delta = q_{\phi} - q_{\text{эм}}.$$

Таким образом, оценка технического состояния объекта определяется отклонением фактических значений его параметров от их эталонных значений. Следовательно, любая система технической диагностики работает по принципу отклонений (принцип Солсбери).

Кроме оценки состояния оборудования необходимо прогнозировать его работоспособность [1]. Для этого анализируются тренды – зависимость диагностического симптома от времени.

На рисунке 1 представлен тренд, характеризующий четыре этапа изменения характеристик вибрации, что соответствует четырем этапам жизненного цикла детали (модуля). Первый этап T_1 – приработка машины, второй T_2 – нормальная работа, третий T_3 – развитие дефекта, четвертый T_4 – этап деградации (устойчивое развитие цепочки дефектов с момента, когда появляется потребность в обслуживании или ремонте объекта, до момента возникновения аварийной ситуации).

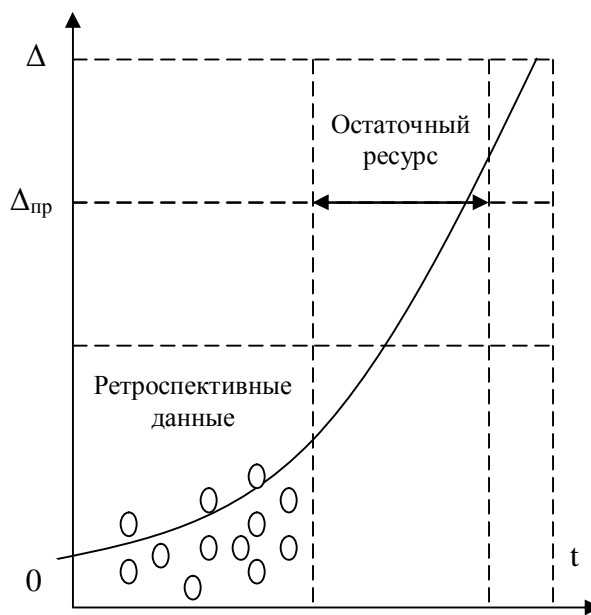


Рис. 3. Диагностический симптом

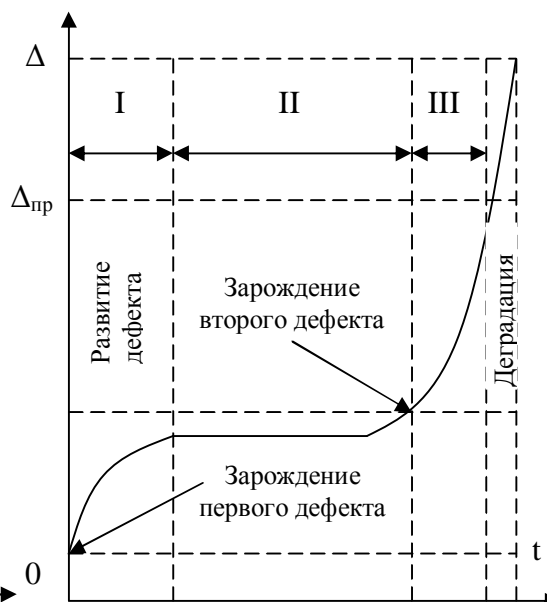


Рис. 4. Тренд подобных механизмов

Наибольшая практическая сложность для решения задач диагноза и прогноза состояния машин возникает на первом этапе. Это обусловлено возможностью появления

специфических дефектов изготовления и монтажа машины, многие из которых после приработки исчезают, что затрудняет дальнейшую оценку ее состояния.

Существует два основных вида прогнозирования состояния объектов диагностики:

первый – по тренду, построенному в результате аппроксимации ретроспективных данных диагностических симптомов с дальнейшей экстраполяцией аппроксимирующей функции. В этом случае прогнозирование требует знания предельного значения диагностического симптома Δ_{np} и фактической кривой тренда, который совсем не обязательно бывает линейным и может характеризоваться большим разбросом точек. При условии монотонности тренда остаточный ресурс может быть оценен в первом приближении как интервал времени с момента последнего измерения диагностического параметра до момента времени, соответствующего точке пересечения тренда с линией, характеризующей предельное значение диагностического симптома Δ_{np} (рис. 3).

второй вид прогнозирования – по заранее известному тренду, построенному с момента начала нормальной работы однотипных машин до полного их выхода из строя, т. е. по всему жизненному циклу подобных механизмов (рис. 2). Тогда остаточный ресурс в первом приближении может быть оценен как разность времени t_{np} , соответствующего предельному значению диагностического симптома Δ_{np} , и времени $t_{изм}$, соответствующего значению диагностического симптома $\Delta_{изм}$ на момент измерения диагностического параметра.

Во многих практических случаях тренды могут быть немонотонны. Так, на рисунке 4 представлен тренд, участок I которого характеризует развитие одного дефекта, на участке II наблюдается стабилизация уровня вибрации и на участке III производная изменения уровня вибрации увеличивается в результате появления еще одного дефекта. В этом случае достоверный прогноз состояния объекта и оценка остаточного ресурса возможны только на последнем участке развития цепочки дефектов.

Методы последовательной детализации, гомогенизации и дискретизации, при совместном применении, позволяют проблемы диагностики сложной механической системы, какой является авиационный двигатель, свести к решению последовательности задач для систем более простых. Причем введение иерархической структуры системы на основе модели искусственной нейронной сети дает возможность моделировать процесс разрушения как процесс передачи сигнала в сети с низшего уровня иерархии системы на более высокий при достижении порогового значения параметром, характеризующим уровень поврежденности. Модель последовательного перехода процесса состояния системы с уровня на уровень не исключает сценариев катастрофического развития процессов разрушения, когда вследствие разрушения детали какого-либо низшего уровня результат ведет сразу к выходу из строя жизненно важной детали высшего уровня иерархии системы. Однако катастрофические явления – события маловероятные и требуют отдельного более тщательного рассмотрения. Предложенная модель исходит из постепенности процессов старения деталей двигателя в процессе их эксплуатации.

Рассматриваемая модель деградации свойств материала и накопления повреждений описывает последовательные процессы перехода с низших уровней состояния на более высокие при достижении определенных пороговых значений. Вертикальная иерархическая структура позволяет создать модель диагностики в виде графа, корень которого оп-

ределяется модулем двигателя верхнего уровня, а листья структуры соответствуют состоянию материалов и структур низшего уровня.

Помимо вертикальной иерархии можно рассмотреть модели горизонтальной иерархии на каждом слое нейронной сети, однако это существенно усложнит рассматриваемую схему и потребует дополнительных исследований. Представление модели диагностики любого из узлов высшего уровня в виде графа позволяет автоматизировать процесс диагностики, поиска наиболее слабого звена, используя методы решения задач оптимизации на графах.

Метод последовательной детализации позволяет структурировать процесс решения сложной задачи в виде последовательности более простых. Это позволяет автоматизировать процесс, но не уменьшает его объем. Упрощение исходной задачи за счет огрубления структуры системы реализуется на основе методов гомогенизации и дискретизации.

Метод гомогенизации позволяет оценить влияние параметров более низкого уровня на макроскопические (эффективные) параметры системы более высокого уровня интегрально. Наиболее эффективно метод применяется для оценки физико-механических свойств материалов, а также структур типа слоистых, армированных, составных. В данной работе этот метод применяется для расчета эффективных модулей упругости (жесткости) деталей двигателя, масс, инерционных характеристик, плотности в зависимости от параметров, характеризующих деградацию, поврежденность материала. Однако, переход от точных систем дифференциальных уравнений в частных производных упрощает задачу, но недостаточно, чтобы применять ее в инженерных расчетах, поэтому следующим шагом является применение метода дискретизации, который в сочетании с тензорно-геометрическим методом дает возможность перейти от системы с распределенными параметрами, описываемой уравнениями в частных производных к эквивалентной системе с сосредоточенными параметрами, описываемой уравнениями с обыкновенными производными.

Связь спектра колебаний эквивалентной системы с параметром деградации, поврежденности материала дает достаточно простые формулы, позволяющие на основании вибродиагностических испытаний получить оценку уровня деградации, поврежденности материала и остаточного ресурса.

Метод последовательной детализации при моделировании сложных механических систем.

Термомеханика сложных механических систем описывается системами дифференциальных (интегродифференциальных) уравнений с частными производными, часто с нечетко известными граничными и начальными условиями. Построение адекватной математической модели реального авиационного двигателя является практически нереальной задачей.

Метод последовательной детализации позволяет структурировать систему на принципе иерархизации уровней разного масштаба. Будем исходить из того, что обычно процесс выхода из строя какого-либо важного компонента двигателя имеет достаточно длительный инкубационный период, в течении которого отсутствуют макроскопические проявления процессов изменения физико-механических параметров деталей двигателя, их геометрических и инерционных характеристик.

Выделим в сложной системе иерархию уровней по следующей схеме. Первый уровень – оболочка (кожух) двигателя, второй уровень: компрессор, камера сгорания,

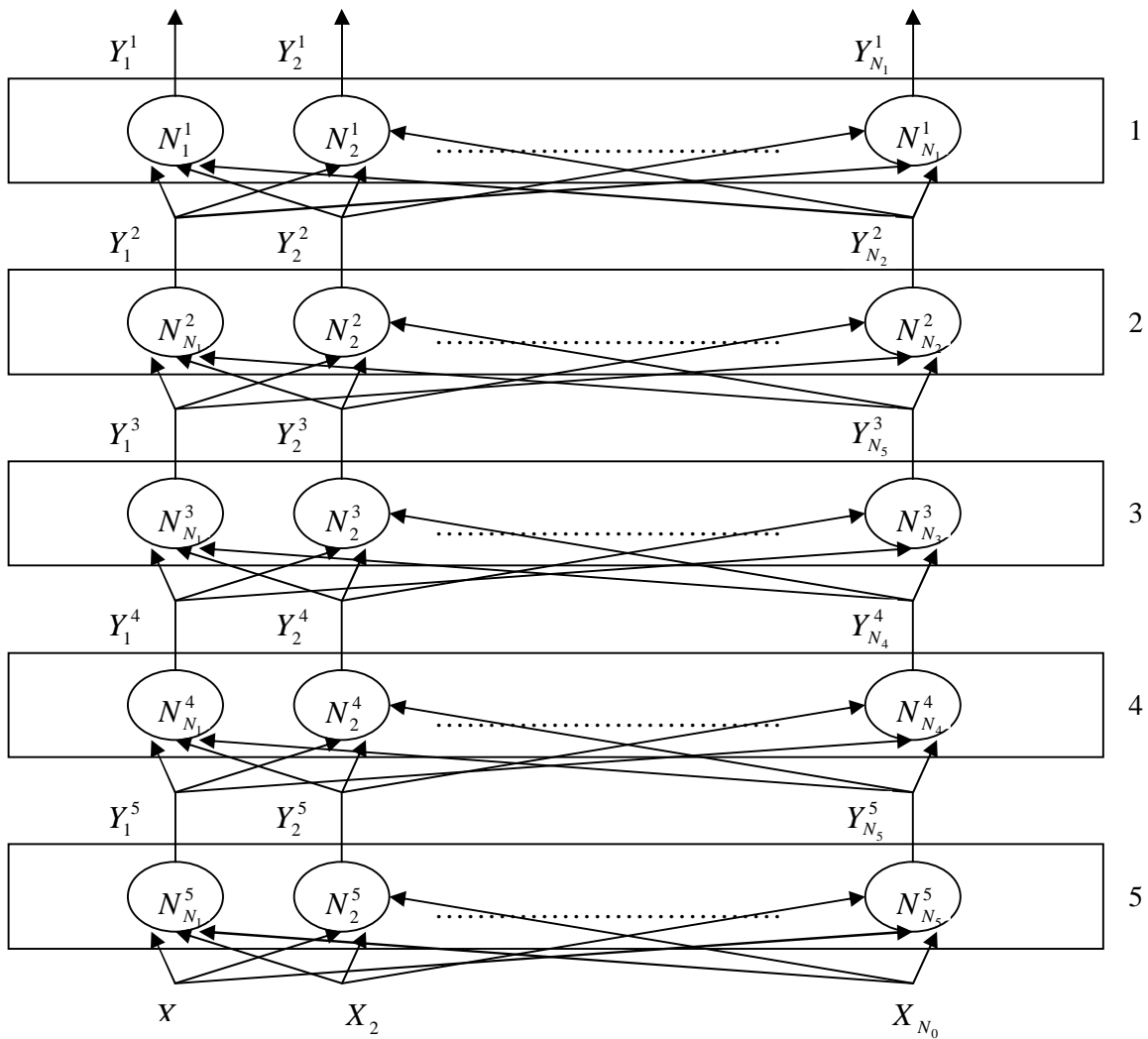


Рис. 5. Схема иерархии сложной механической системы в виде искусственной нейронной сети

турбина, выходное устройство; третий уровень: вал турбины, рабочие лопатки, сопловые аппараты; четвертый уровень: элементы системы охлаждения, крепежа лопаток и валов; пятый уровень: материалы из которых изготовлены детали двигателя.

Система спроектирована так, что двигатель выходит из строя, когда процесс повреждений, начиная с пятого уровня, выходит на второй уровень. В этом случае повреждение носит макроскопический характер, обуславливающий отказ всего двигателя. Исходя из этого будем моделировать процесс выхода из строя крупных деталей как процесс перехода состояния системы с одного иерархического уровня на другой. Применим идеи нейросетевого моделирования для описания процесса. Уровни иерархии представим как слои нейронной сети. Входные переменные X_i – это воздействия напряжений, деформаций, температур, центробежных сил на параметры

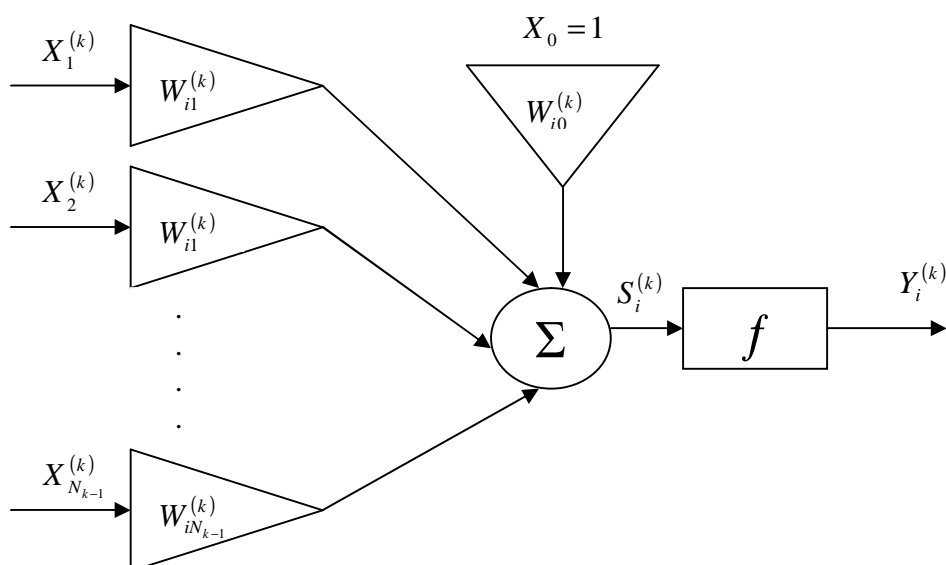


Рис. 6. Схема искусственного нейрона

материалов деталей (уровень 5). По достижении определенного уровня поврежденности он начинает сказываться на состоянии деталей в целом на следующем уровне (рис. 5). Выходные переменные Y_i^1 характеризуют проявление поврежденности деталей на первом уровне. Кружками в слоях обозначены компоненты двигателя данного уровня, каждый из которых имеет определенный предел прочности при каждом цикле термосилового воздействия. Поэтому поведение каждого элемента в слое моделируем искусственным нейроном. Схема нейрона N_i^k представлена на рисунке 6. Модель искусственного нейрона определяется уравнениями

$$Y_i^{(k)}(t) = f(S_i^{(k)}(t)),$$

$$S_i^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{N_{k-1}} W_{ij}^{(k)}(t) X_j^{(k)}(t).$$

Изменение параметров системы $W_{i,j}^{(k)}$ определяется моделями накопления повреждений как алгоритмы последовательного изменения весовых коэффициентов $W_{i,j}^{(k)}(t)$

$$W_{ij}^{(k)}(t+1) = W_{ij}^{(k)}(t) + 2hd_i^{(k)}(t)X_j^{(k)}(t), \quad d_i^{(k)}(t) = e_i^{(k)}(t)f'(S_i^{(k)}(t)),$$

$$e_i^{(k)}(t) = \sum_{m=1}^{N_{k+1}} d_m^{(k+1)}(t)W_{mi}^{(k+1)}(t).$$

Здесь время t удобно рассматривать как целочисленную величину определяющую количество циклов воздействия термосиловых нагрузок.

Согласно концепции слоистой нейронной сети каждый слой содержит процессоры (нейроны), функционирующие по принципу пороговой логики, а именно, когда сумма воздействий на нейрон достигает пороговой величины, он передает сигнал (воздействие) с данного уровня на следующий. Применительно к рассматриваемой проблеме будем

этот процесс связывать с процессом последовательного накопления повреждений на данном масштабном уровне (слое) и переходом этого процесса на более высокий масштабный уровень. Разрушение носит макроскопический характер, когда процесс выходит на второй уровень, далее на первый (разрушение).

В моделях искусственных нейронных сетей (ИНС) достижение некоторого состояния происходит за счет изменения параметров $W_{i,j}$ сети (весовых коэффициентов). Системы такого типа, как правило, описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и называются адаптивными.

В ИНС изменение коэффициентов связывают с обучением (самоорганизацией) на системе тестовых воздействий. В нашем случае изменение параметров системы происходит как результат циклических термосиловых воздействий. Макроскопически это проявляется в изменении материальных коэффициентов среды.

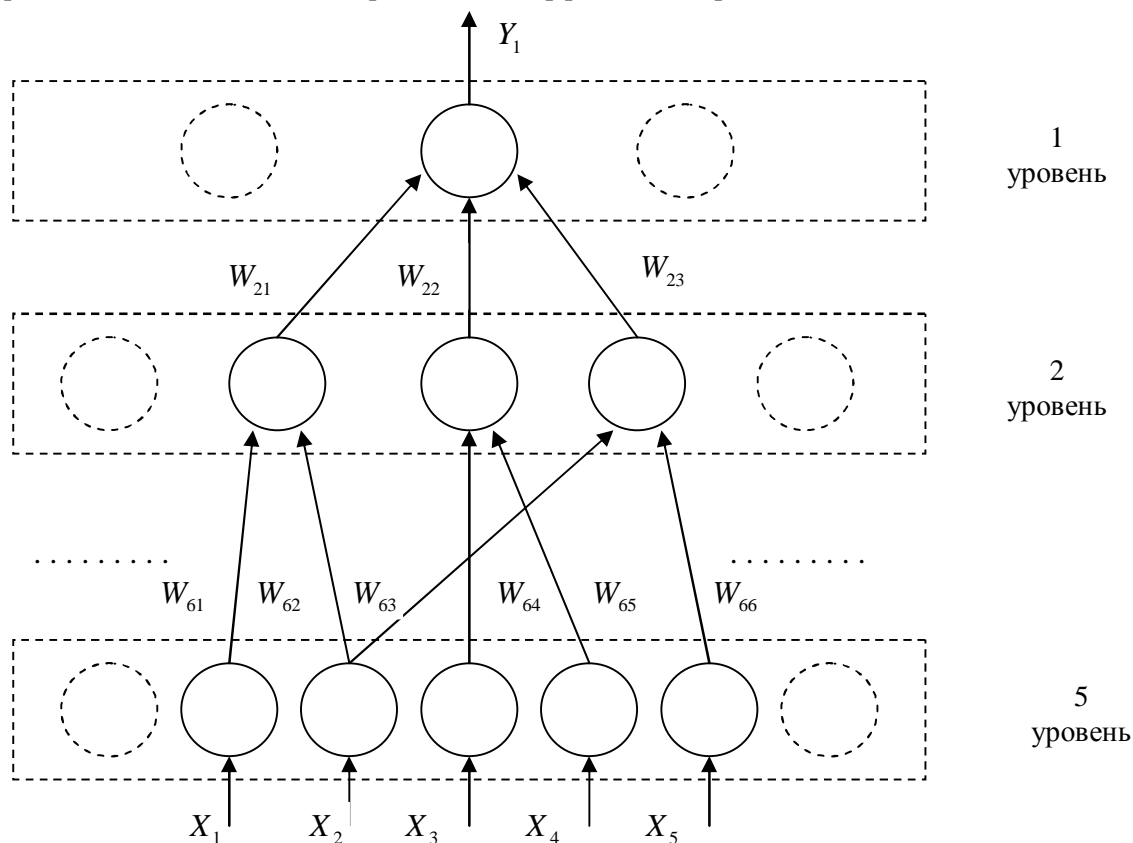


Рис. 7. Нейронная сеть

В настоящее время влияние накопления повреждений на макроскопические свойства материалов описываются с помощью различных моделей накопления повреждений, берущих начало с моделей Работнова и Качанова [1] и исходящих из представлений о том, что в материале появляются микropоры, микротрещины, результатом чего является уменьшение площади (объема) несущей нагрузку. В дальнейшем в результате слияния микротрещин в макротрещину необходимо переходить

в рассмотрении процесса на новый уровень и изучать распространение трещины на основе механики разрушения. Однако, в действительности, процесс накопления повреждений имеет стадию предмикроразрушений, на которой материал меняет свои свойства (деградирует) без образования микропор, микротрещин, т. е. сохраняет сплошность, а его жесткость, плотность могут изменяться.

Введение иерархии компонентов двигателя и последовательной схемы процесса разрушения позволяет разработать методику диагностики текущего состояния подетально. Согласно введенной иерархии, процесс разрушения начинается с нижних уровней, локально и только по достижении некоторых макроскопических (масштабных) значений, характеризующих данный уровень переходит на более высокий. В случае диагностирования состояния целесообразно двигаться в обратном направлении. Сначала оценить макроскопические параметры компонентов высшего уровня, выделить из них наиболее поврежденный, затем в этом компоненте продиагностировать элементы следующего уровня и т. д. Такой подход позволяет автоматизировать процесс обработки данных используя соответствующие алгоритмы. В результате длительность процесса сокращается, а достоверность полученных результатов повышается.

Исходя из предложенной схемы рассмотрим традиционный подход моделирования процессов термосиловых воздействий на детали двигателя, накопления в них повреждений, изменения физико-механических характеристик в компонентах в компонентах первого, второго уровня.

Изобразим зависимость какого-либо модуля (нейрона) 1-го уровня от модулей более низких уровней в виде графа, составляющей часть нейронной сети, изображенной на рисунке 7. Граф позволяет сформулировать задачи связанные с построением алгоритмов поиска деталей двигателя, состояние которых оказывает максимальное влияние на детали 1-го уровня. Вершина графа 1-го уровня соответствуют детали, которая состоит из деталей 2-го уровня (вершине графа) и т. д. Для сложных систем, описываемых сложными графами целесообразна постановка задачи о поиске минимального пути от детали 1-го уровня до деталей 5-го, которые оказали влияние на макроскопическое состояние детали 1-го уровня. Применение графов в диагностике позволяет использовать методы оптимизации на графах, автоматизируя этот процесс.

Построение математической модели многозвенной модели двигателя тензорно-геометрическим методом.

Для анализа свойств податливости (жесткости) сложных механических систем в рамках линейных приближений вводится инвариант в виде работы обобщенных сил на малых перемещениях [3]

$$A_y = (\bar{f} d\bar{q}),$$

где \bar{f} – вектор-столбец ($n \times 1$) обобщенных сил, $d\bar{q}$ – вектор-столбец ($n \times 1$) упругих деформаций в связях, наложенных на деталь двигателя.

Так как A_y – скаляр, то в декартовой системе координат его можно записать в виде

$$I_y = \bar{F}^T d\bar{x} = \bar{f}^T \cdot d\bar{q}.$$

Между вектором силы, приведенным к месту наиболее слабой связи и вектором обобщенных сил имеет место связь

$$\bar{f} = I^T \bar{F},$$

где $\bar{F} = col[F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]$ – вектор-столбец (6×1), объединяющий компоненты главного вектора и главного момента действующих сил, заданный в декартовой системе координат, I^T – транспонированная матрица Якоби размерности ($n \times 6$).

Введем динамический инвариант в виде симметричной квадратичной формы обобщенных скоростей

$$I_d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I_{i,j} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt},$$

где $I_{i,j}$ – элементы тензора инерции $I(n \times n)$ механической системы.

Динамический инвариант в декартовой системе имеет вид

$$I_d = 2T = \bar{u}^T I_3 \bar{u}; \quad \bar{u} = I \frac{d\bar{q}}{dt},$$

где $I_3 = I^{-T} I I^{-1}$ – эквивалентный тензор инерции многосвязного механизма, \bar{u} – вектор скорости в декартовой системе координат,

$$2T = I_d = \left(\frac{d\bar{q}}{dt} \right)^T I \left(\frac{d\bar{q}}{dt} \right), \quad (1)$$

где $\left(\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots, \frac{dq_n}{dt} \right)$ – вектор-столбец ($n \times 1$) обобщенных скоростей деталей двигателя. Выражение (1) позволяет применить формулу Лагранжа для получения уравнений динамической системы. Совокупность выражений для $C_{\text{ЭУЗ}}$, I_3 позволяет построить комплексную математическую модель, которая описывает упругие и инерционные характеристики системы.

Для n -звенной механической системы математическая модель в Лагранжевой форме имеет вид

$$J(\bar{q}) \frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} + h \left(\bar{q}, \frac{d\bar{q}}{dt} \right) = \bar{Q},$$

где n – число связей; \bar{q} , $\frac{d\bar{q}}{dt}$, $\frac{d^2 \bar{q}}{dt^2}$ – векторы ($n \times 1$) соответственно обобщенных координат, скоростей, ускорений, $J(\bar{q})$ – матрица инерции системы, зависящая от его конфигурации, $h \left(\bar{q}, \frac{d\bar{q}}{dt} \right)$ – вектор ($n \times 1$) центробежных и кориолисовых сил, действующих на ротор, \bar{Q} – вектор ($n \times 1$) обобщенных сил.

Согласно методу дискретизации, построим модель реальной механической системы как композицию абсолютно жесткой системы (тела) с идентичной кинематикой и эквивалентного (эффективного) упругого звена (ЭУЗ). ЭУЗ представляет собой условную многомерную пружину, прикрепленную к центру жесткости детали. Математически ЭУЗ будет описываться диагональной матрицей $C_{\text{ЭУЗ}} (6 \times 6)$

$$C_{y_{ЭЗ}} = \text{diag}[C_x, C_y, C_z, C_{ax}, C_{ay}, C_{az}].$$

Элементами матрицы являются коэффициенты жесткости “пружин” ЭУЗ: три пружины сжатия-растяжения (C_x, C_y, C_z) и три пружины кручения (C_{ax}, C_{ay}, C_{az}) .

Матрица $C_{y_{ЭЗ}}$ позволяет установить зависимость между главными векторами сил и моментов, приложенных к данному звену системы и упругой деформацией пружин

$$\bar{F} = C_{y_{ЭЗ}} d\bar{x},$$

где $d\bar{x} = \text{col}[dx, dy, dz, d_{ax}, d_{ay}, d_{az}]$ – вектор-столбец (6×1) малых деформаций пружин эквивалентного упругого звена.

Как известно, в реальных машинах источники упругих деформаций связаны со степенями подвижности (связности). Введем матрицу упругости $C(n \times n)$, которая описывает деформации в контактных зонах механической системы

$$\bar{f} = C d\bar{q},$$

где f – вектор-столбец $(n \times 1)$ обобщенных упругих сил, $d\bar{q}$ – вектор-столбец упругих деформаций системы в областях связей (контакта).

Имеет место зависимость

$$C_{y_{ЭЗ}} = J^{-T} C J^{-1},$$

где J^{-T} – транспонированная обратная матрица Якоби.

Таким образом, если известны экспериментальные данные – компоненты матрицы C , то тогда можно вычислить $C_{y_{ЭЗ}}$.

г. Минск

Поступила: 9 апреля 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голуб, В. П. К задаче построения нелинейных моделей накопления повреждений при ползучести / В. П. Голуб, А. В. Романов. // Проблемы прочности. – 1990, – № 6. – С. 9.
2. Никифоровский, В. А. Вероятностный мир / В. А. Никифоровский. – М. : Наука, 1992. – 174 с.
3. Soderberg, C. R. The interpretation of creep tests for machine design. / C. R. Soderberg // Transactions of the ASME. – 1936. – Vol. 58, № 8. – 789 p.

Mironov D. N.

SIMULATION PROCESSES DEFORMATION OF THE COMPLEX MECHANICAL SYSTEMS UNDER THE INFLUENCE OF THE THERMO POWER LOADING

In the article simulated process of the destruction and presented technique of the diagnostics of the complex mechanical systems in the running time by means of the method artificial neural network.

Мир-Салим-заде М. В.

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, УСИЛЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ СТРИНГЕРОВ

(Институт математики и механики НАН Азербайджана)

Рассмотрена задача механики разрушения о зарождении трещины в упругой изотропной среде с системой инородных поперечных прямолинейных включений. Такая среда может быть интерпретирована как неограниченная пластина, усиленная регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой весьма узкие прямоугольники. Зародышевая трещина моделируется полосой предразрушения со связями между берегами, которая рассматривается как область ослабленных межчастичных связей материала. Краевая задача о равновесии полосы предразрушения в среде, усиленной поперечными стрингерами при действии внешних растягивающих нагрузок сводится к решению нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения с ядром типа Коши. Из решения этого уравнения найдены усилия в полосе зарождения трещины. Условие образования трещины формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала среды. Отдельно рассмотрен случай напряженного состояния, когда в среде имеется периодическая система полос предразрушения.

Введение. Вопросам деформирования неограниченной пластины, усиленной регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой весьма узкие прямоугольники, посвящена обширная литература [3, 5, 14, 15]. Многими исследователями значительное внимание уделялось изучению вопросов разрушения пластины, усиленной регулярной системой стрингеров [2, 7, 13, 16]. Во всех отмеченных работах авторы ограничивались рассмотрением изолированной (одной) трещины. Важное значение имеет исследование зарождения трещины.

Постановки задачи. Рассматривается упругая изотропная среда с системой инородных поперечных прямолинейных включений. Такая среда может быть интерпретирована как неограниченная пластина, усиленная регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой узкие прямоугольники. На бесконечности усиленная пластина подвергается однородному растяжению вдоль стрингера напряжением $S_y^\infty = S_0$. Относительно стрингера принимается гипотеза об одномерном континууме, заключающая в том, что при деформации толщина стрингера считается неизменяемой, а напряженное состояние – одноосным. Стрингеры изгибу не сопротивляются и работают лишь на растяжение.

Принимаются следующие допущения:

а) в тонкостенном листовом элементе конструкции (пластине) реализуется плоское напряженное состояние;

б) подкрепляющая система стрингеров ферменного типа, ослабление их за счет постановки точек крепления не учитывается;

в) листовая элемент и подкрепляющие элементы взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления;

г) все точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами;

д) действие точки крепления моделируем в стрингере – действием в сплошном ребре сосредоточенной силы, приложенной в точке, соответствующей центру точки крепления, в пластине – действием сосредоточенной силы.

Считается, что точки крепления стрингеров расположены в дискретных точках $z = \pm(2m+1)L \pm iny_0$ ($m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$) с постоянным шагом по всей длине стрингера, симметрично относительно поверхности пластины.

Действие стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер со средой. По мере нагружения изотропной среды силовой нагрузкой в среде будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала. Принято, что полоса предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в усиленной среде. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между берегами полосы предразрушения связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеры области предразрушения зависят от вида материала. В общем случае он представляет собой нелинейный закон деформирования [17-19].

Задачу о напряженно-деформированном состоянии твердого деформированного тела, когда в теле имеются прослойки «перенапряженного» материала, можно свести к задаче о напряженно-деформированном состоянии в упругом теле, ослабленном разрезом, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону. При таком подходе к решению задачи о зарождении трещины прежде всего необходимо выяснить зависимость между усилиями и перемещениями в той части деформируемого материала, где имеют место силы межчастичного взаимодействия (притяжения между берегами). В общем случае решение такой задачи наталкивается на большие трудности.

В исследуемом случае возникновение трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. Поскольку зона предразрушения мала по сравнению с остальной частью усиленной среды, ее можно мысленно удалить, заменив разрезом, поверхности которой взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

Исследования [12] возникновения областей с нарушенной структурой материала показывают, что в начальной стадии зоны предразрушения представляют собой узкий вытянутый слой, а затем с ростом нагрузки внезапно появляется вторичная система зон, содержащих материал с частично нарушенными связями.

Рассмотрим полосу предразрушения длиной $2\mathbf{1}$, расположенную на отрезке оси абсцисс $y = 0, |x| \leq \mathbf{1}$ (рис. 1). Берега полосы предразрушения взаимодействуют, так что это взаимодействие (связи между берегами) сдерживает зарождение дефекта (трещины). Для математического описания взаимодействия берегов полосы предразрушения считаем, что между берегами имеются связи (силы сцепления), закон деформирования которых задан. При действии внешних нагрузок на пластину в связях, соединяющих берега полосы предразрушения, будут возникать усилия $q(x)$, имеющие, из-за симметрии задачи относительно оси абсцисс, только нормальную составляющую. Величина этих напряжений $q(x)$ и размер $\mathbf{1}$ полосы предразрушения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

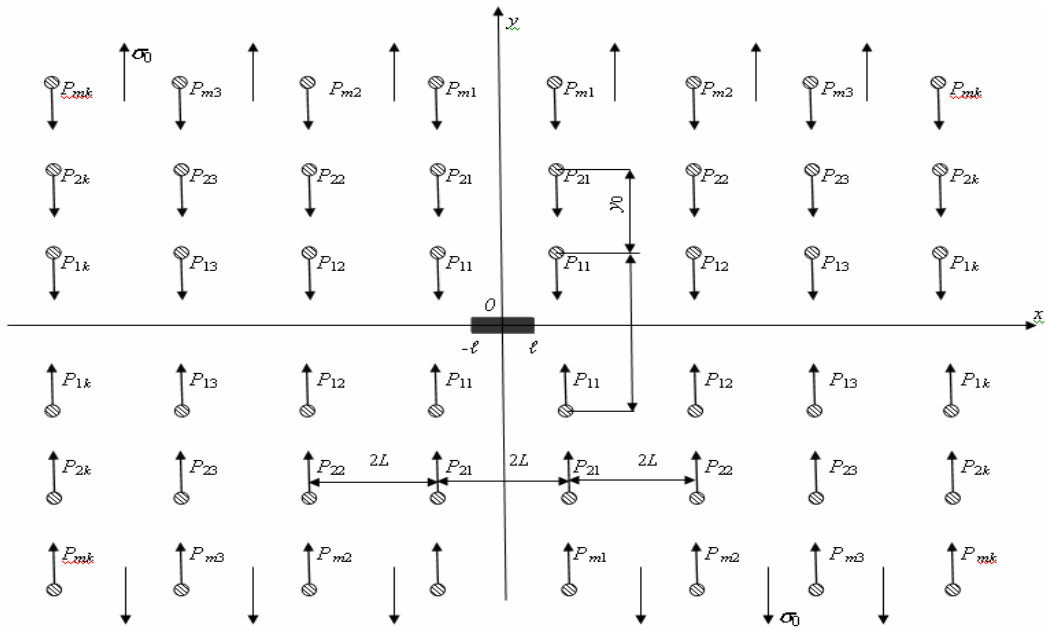


Рис. 1. Расчетная схема задачи механики разрушения о зарождении трещины

Краевые условия на берегах полосы предразрушения в рассматриваемой задаче имеют вид:

$$s_y - it_{xy} = q(x) \text{ при } y = 0, |x| \leq \mathbf{1}. \quad (1)$$

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим перемещения раскрытия берегов полосы предразрушения и усилия в связях.

Это уравнение, без потери общности, в рассматриваемой задаче можно представить [4] в виде

$$u^+(x,0) - u^-(x,0) = C(x,q)q(x), \quad (2)$$

где $(u^+ - u^-)$ – нормальная составляющая раскрытия берегов полосы предразрушения, x – абсциссы точек полосы предразрушения; функцию $C(x, q)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения.

На основании формул Колосова–Мухелишвили [11] и краевых условий на берегах полосы предразрушения задача сводится к определению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из граничных условий

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\Phi'(x) + \Psi(x) = q(x) \text{ при } y = 0, |x| \leq 1. \quad (3)$$

Для определения значений внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия берегов полосы предразрушения:

$$u^+ - u^- = d_c, \quad (4)$$

где d_c – характеристика сопротивления материала трещинообразованию.

Это дополнительное условие позволяет определить параметры среды, при которых происходит появление трещины.

Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (3) ищем в виде

$$j(z) = j_0(z) + j_1(z), \quad y(z) = y_0(z) + y_1(z), \quad (5)$$

где

$$\Phi(z) = j'(z), \quad \Psi(z) = y'(z),$$

функции $j_0(z)$, $y_0(z)$ определяют поле напряжений и деформаций в сплошной усиленной среде без полосы предразрушения.

В рассматриваемом случае, в качестве $j_0(z)$ и $y_0(z)$ следует взять

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{1}{4} S_0 z - \frac{i}{2p(1+\kappa_0)h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n}, \\ y_0(z) &= \frac{1}{2} S_0 z - \frac{i\kappa_0}{2p(1+\kappa_0)h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \\ &\quad - \frac{i}{2p(1+\kappa_0)h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \left(\frac{m_*L - iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \frac{m_*L + iy_0n}{z - m_*L + iy_0n} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс $n = m = 0$, h – толщина пластины; y_0 – шаг точек крепления, L – половина расстояния между стрингерами, κ_0 – упругая постоянная Мухелишвили, $m_* = 2m + 1$, P_{mn} – сосредоточенные силы, подлежат определению.

Комплексные потенциалы $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ ищем в явной форме, соответствующим неизвестным нормальным смещениям вдоль полосы предразрушения

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2p} \int_{-1}^1 \frac{g(t)dt}{t-z}, \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2p} \int_{-1}^1 \left[\frac{g(t)}{t-z} - \frac{tg(t)}{(t-z)^2} \right] dt, \quad (7)$$

где искомая функция $g(x)$ описывает производную раскрытия смещений на берегах полосы предразрушения

$$\frac{1+\kappa_0}{2m} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [u^+(x,0) - u^-(x,0)],$$

m – модуль сдвига материала среды, $\kappa_0 = (3-\nu)(1+\nu)$, ν – коэффициент Пуассона материала.

К соотношениям (5) - (7) следует добавить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0, \quad (8)$$

которое обеспечивает однозначность смещений при обходе полосы предразрушения.

Требую, чтобы функции (5) - (7) удовлетворяли краевому условию (3) на берегах полосы предразрушения, после некоторых преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$:

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g(t) dt}{t-x} = q(x) + f(x), \quad (9)$$

где

$$f(x) = -\left[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\overline{\Phi_0'(x)} + \overline{\Psi_0(x)} \right].$$

С помощью комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ для функции $f(x)$ получим следующее выражение

$$f(x) = -s_0 + \frac{(2+\kappa_0)}{ph(1+\kappa_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) ny_0 - \frac{1}{ph(1+\kappa_0)} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \left[\frac{(x-mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{C_1} + \frac{(x+mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{C_2} \right] ny_0,$$

где $C_1 = (x-mL)^2 + n^2 y_0^2$; $C_2 = (x+mL)^2 + n^2 y_0^2$.

В полученное сингулярное интегральное уравнение (9) входят неизвестные величины сосредоточенных сил P_{mn} ($m = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$) и усилия в связях между берегами полосы предразрушения.

Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы P_{mn} , действующей на каждую точку крепления со стороны m -го ребра жесткости, равна

$$P_{mn} = \frac{E_s F}{2ny_0} \Delta u_{mn}, \quad (m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

где E_s — модуль Юнга материала ребра жесткости; F - площадь поперечного сечения стрингера; $2ny_0$ — расстояние между рассматриваемыми точками крепления; Δu_{mn} - взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через a – радиус точки крепления (площадки сцепления). Примем [9] естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек $z = mL + i(ny_0 - a)$ и $z = mL - i(ny_0 - a)$ в рассматриваемой задаче теории упругости равно отмеченному вы-

ше взаимному смещению точек крепления Δu_{mn} . Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет эффективно отыскать решение поставленной задачи. С помощью комплексных потенциалов (5) – (7) и формул Колосова-Мухелишвили [11], взаимное смещение Δu_{kr} , указанных точек найдем в виде

$$\begin{aligned} \Delta u_{kr} &= \Delta u_{kr}^0 + \Delta u_{kr}^1, \\ \Delta u_{kr}^0 &= \frac{1}{2ph(1+\kappa_0)m} \sum_{m,n} P_{mn} \left[\kappa_0 \ln \frac{C_4}{C_3} + \frac{2(r-n)y_0b(2k(k-m)L^2+ab)}{C_3C_4} \right] + \\ &+ \frac{s_0}{4m}(1+\kappa_0)b_1, \quad \Delta u_{kr}^1 = \frac{1+\kappa_0}{2pm} \int_{-1}^1 w(t)g(t)dt - \frac{b_1}{pm} \int_{-1}^1 \frac{(t-kL)g(t)}{A} dt, \\ C_3 &= (k-m)^2L^2 + b^2, \quad b = (r-n)y_0 - a; \quad C_4 = (k-m)^2L^2 + a^2, \\ b_1 &= (ry_0 - a), \quad A = (t-kL)^2 + b_1^2, \quad w(t) = \arctg \frac{b_1}{t-kL}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомые величины сосредоточенных сил определяются из решения бесконечной системы уравнений (10).

Так как напряжения в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения (9) следует искать в классе всюду ограниченных функций.

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения воспользуемся методом прямого решения сингулярных уравнений [10].

Переходя к безразмерным переменным $t = t/\mathbf{1}$; $h = x/\mathbf{1}$, представим решение в виде

$$g(h) = \sqrt{1-h^2} g_0(h),$$

где $g_0(h)$ – ограниченная функция.

Использование квадратурных формул [10] позволяет интегральное уравнение (9) свести к системе $M+1$ алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{g_0(t_m)}{M+1} \sin^2 \frac{pm}{M+1} \left[\frac{1}{t_m - h_r} \right] = p[q(h_r) + f(h_r)], (r = 1, 2, \dots, M+1), \quad (11)$$

здесь $t_m = \cos \frac{pm}{M+1}$ ($m = 1, 2, \dots, M$), $h_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)}$, ($r = 1, 2, \dots, M+1$).

В рассматриваемом случае, когда решение интегрального уравнения (9) ищется в классе всюду ограниченных функций, оно существует при дополнительном условии [10, 18]. Полученная алгебраическая система из $M+1$ уравнений (11), служащая для определения неизвестных $g_0(t_1), \dots, g_0(t_M)$ и $\mathbf{1}$, обеспечивает удовлетворение дополнительного условия (условия разрешимости краевой задачи).

В правую часть системы (11) входят неизвестные значения напряжений $q(h_r)$ в узловых точках, принадлежащих полосе предразрушения. Условием, служащим для определения неизвестного напряжения в связях, соединяющих берега полосы предразрушения, является соотношение (2), связывающее перемещения раскрытия берегов полосы предразрушения и усилия в связях. Используя полученное решение, соотношение (2) можно записать

$$g(x) = \frac{2m}{1 + \kappa_0} \frac{d}{dx} [C(x, q)q(x)]. \quad (12)$$

Это уравнение служит для определения усилий $q(x)$ в связях.

Для построения недостающих алгебраических уравнений потребуем выполнения условий (12) в узловых точках h_m ($m = 1, 2, \dots, M$), принадлежащих полосе предразрушения. При этом используем метод конечных разностей

$$C(\mathbf{1}h_{i+1}, q(\mathbf{1}h_{i+1}))q(\mathbf{1}h_{i+1}) - C(\mathbf{1}h_{i-1}, q(\mathbf{1}h_{i-1}))q(\mathbf{1}h_{i-1}) = \frac{1 + \kappa_0}{m} h_0 g_0(h_i) \quad (13)$$

$$(i = 1, 2, \dots, M - 1), h_0 = \frac{2}{M}.$$

Для узловой точки h_M имеем алгебраическое уравнение

$$3C(\mathbf{1}h_M, q(\mathbf{1}h_M))q(\mathbf{1}h_M) - 4C(\mathbf{1}h_{M-1}, q(\mathbf{1}h_{M-1}))q(\mathbf{1}h_{M-1}) + C(\mathbf{1}h_{M-2}, q(\mathbf{1}h_{M-2}))q(\mathbf{1}h_{M-2}) = \frac{1 + \kappa_0}{m} h_0 g_0(h_M).$$

Кроме того, следует учесть граничное условие $h_0 = \pm 1$ $q(\mathbf{1}h_0) = 0$ (это соответствует условию $u^+(\pm 1, 0) - u^-(\pm 1, 0) = 0$). В результате получим алгебраическую систему из $M+1$ уравнений для определения приближенных значений $q(h_r)$ ($m = 1, 2, \dots, M+1$).

Алгебраические системы (10), (11), (13) связаны между собой и должны решаться совместно. Решение этой системы (10), (11), (13) позволяет определить значения искомой функции $g(x)$ в узловых точках, значения усилий $q(x)$ в связях, величины сосредоточенных сил, а также размер полосы предразрушения. Даже в частном случае линейно-упругих связей система (10), (11), (13) оказывается нелинейной из-за неизвестного размера полосы предразрушения. В связи с этим для решения полученной системы (10), (11), (13) использовался метод последовательных приближений [8].

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в полосе предразрушения использовался также алгоритм, подобный методу упругих решений [6]. Полагаем, что закон деформирования межчастичных связей (сил сцепления) является линейным при $(u^+ - u^-) \leq u_*$.

Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении системы уравнений (10), (11) и (13) для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только в тех случаях, если на части полосы предразрушения имеет место $(u^+ - u^-) > u_*$. Для таких итераций система решается в каждом приближении для квазиупругих связей с эффективной податливостью, переменной вдоль полосы предразрушения и зависящей от усилий в связях полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [1]. Процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия вдоль полосы предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, мало отличаются друг от друга.

Нелинейная часть кривой деформирования представлялась в форме билинейной зависимости [4], восходящей участок которой соответствовал упругому деформированию связей $(0 < (u^+ - u^-) \leq u_*)$ с их максимальным натяжением. При $(u^+ - u^-) > u_*$ закон де-

формирования описывается нелинейной зависимостью, определяемой точками (u_*, s_*) и (d_c, s_c) (рис. 2). Причем при $s_c \geq s_*$ имеем возрастающую линейную зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

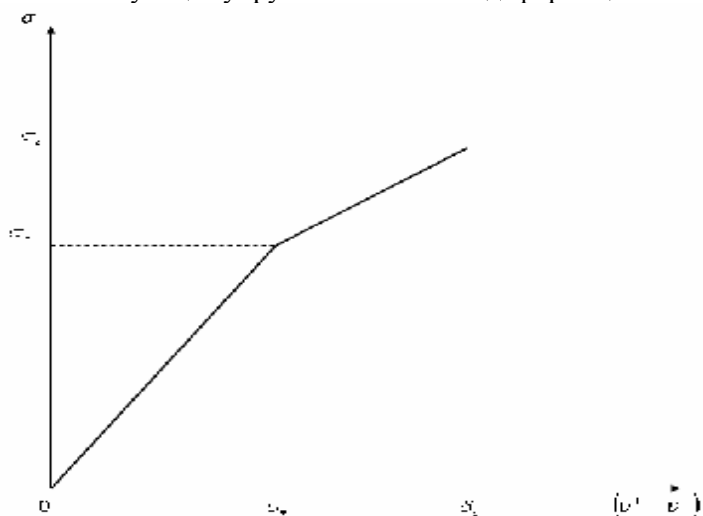


Рис. 2. Зависимость между натяжением связи $S(x)$ и ее вытяжкой $(u^+(x) - u^-(x))$

На рис. 3 представлены графики зависимости длины полосы предразрушения $d = \mathbf{l}/L$ от безразмерного значения внешней нагрузки s_0/q_{\max} для различных значений параметров задачи:

$$e_1 = a/L = 0,01, \quad e = y_0/L = 0,25, \quad \nu = 0,3, \quad E = 7,1 \cdot 10^4 \text{ МПа (сплав В95)},$$

$$E_s = 11,5 \cdot 10^4 \text{ МПа (композит А1-сталь)}, \quad N_1 = N_2 = 14, \quad F/y_0 h = 1, \quad M = 30.$$

$$u_* = 10^{-6} \text{ м}, \quad s_* = 130 \text{ МПа}, \quad s_{cr}/s_* = 2, \quad d_c = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

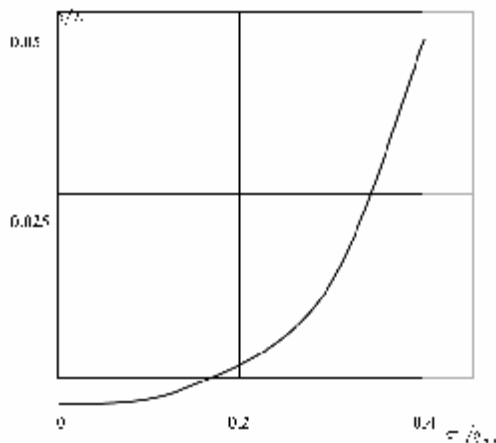


Рис. 3. Зависимость длины полосы предразрушения $d = \mathbf{l}/L$ от безразмерного значения внешней нагрузки s_0/q_{\max}

На рис. 4 представлены графики распределения усилий в связях между берегами полосы предразрушения q/s_0 от безразмерной координаты x/l для тех же значений свободных параметров усиленной пластины.

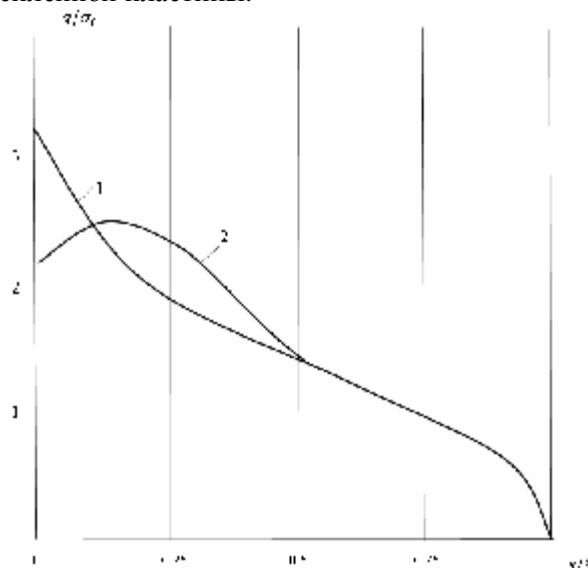


Рис. 4. Зависимость распределения нормальных усилий q/s_0 в связях между берегами полосы предразрушения: кривая 1 соответствует линейной связи, 2 – билинейной зависимости

Для определения предельного состояния, при котором происходит появление трещины, используем критическое условие (4).

Таким образом, условием, определяющим предельное значение внешней нагрузки, будет

$$C(x_0, q)q(x_0) = d_c. \quad (14)$$

В рассматриваемом случае следует ожидать, что разрыв связей будет происходить в середине полосы предразрушения.

Совместное решение алгебраических систем (10), (11), (13) и (14) дает возможность (при заданных характеристиках сопротивления материала трещинообразованию) определить критическую величину внешней нагрузки, размер полосы предразрушения l_c для состояния предельного равновесия, при котором происходит появление трещины.

На рис. 5 представлен график зависимости критической нагрузки s_0^*/s_* от относительного раскрытия d_*/l ($d_* = pd_c m / (1 + \kappa_0) s_*$) в центре полосы предразрушения.

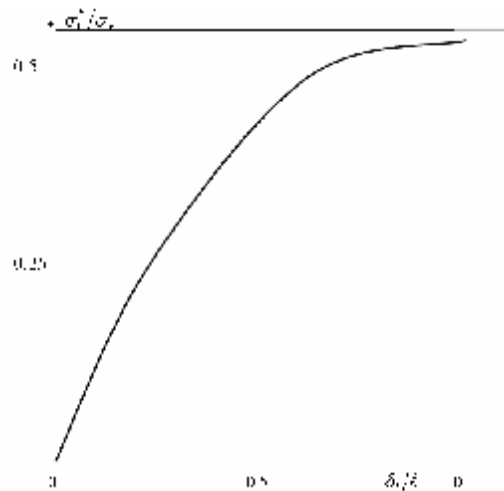


Рис. 5. Зависимость критической нагрузки σ_0^*/σ_* от относительного раскрытия d_*/l в центре полосы предразрушения

Периодическая система полос предразрушения. Пусть теперь в усиленной среде в процессе нагружения имеется периодическая система прямолинейных полос предразрушения длиной 2ℓ с периодом w , расположенных на оси абсцисс (рис. 6). Размер зон предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

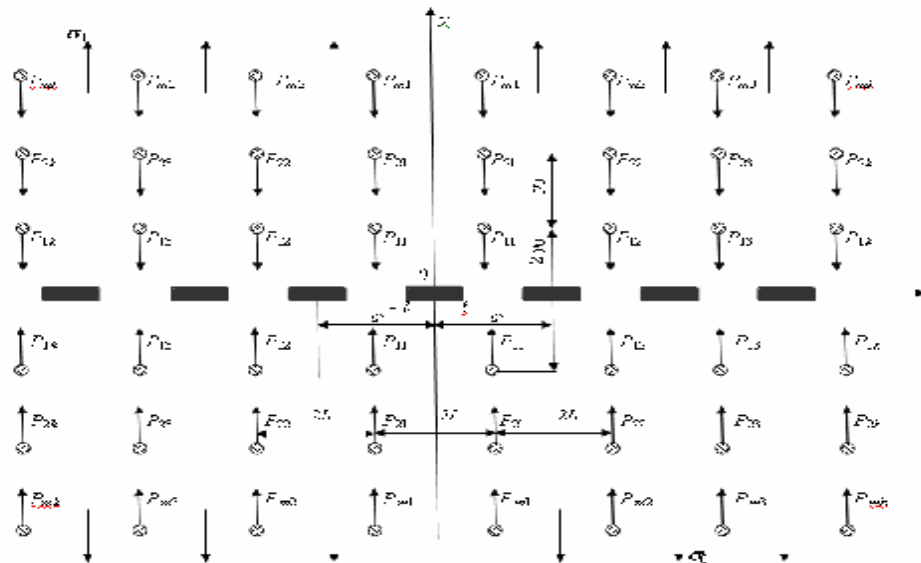


Рис. 6 Расчетная схема задачи механики разрушения для периодической системы полос предразрушения

Краевое условие на берегах периодической системы полос предразрушения имеет вид

$$s_y - it_{xy} = q(x) \text{ при } y = 0, |x - mw| \leq l. \quad (15)$$

Решается задача для этого случая аналогично одной полосе предразрушения. Комплексные потенциалы $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2w} \int_{-1}^1 g(t) \operatorname{ctg} \frac{p}{w}(t-z) dt, \quad \Psi_1(z) = -\frac{pz}{2w^2} \int_{-1}^1 g(t) \sin^{-2} \frac{p}{w}(t-z) dt. \quad (16)$$

Требую, чтобы функции (5), (6), (16) удовлетворяли краевому условию (15), после некоторых преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$:

$$\frac{1}{w} \int_{-1}^1 g(t) \operatorname{ctg} \frac{p}{w}(t-x) dt = q(x) + f(x). \quad (17)$$

Искомые величины сосредоточенных сил определяются из решения бесконечной системы уравнений (10). Из-за периодичности задачи она вырождается в одну бесконечную алгебраическую систему относительно P_{m1} ($m=1, 2, \dots$). Соответственно по этой причине изменяться формулы для Δu_{mm} . Ввиду громоздкости их выражений они не приводятся.

Если воспользоваться разложением

$$\frac{p}{w} \operatorname{tg} \frac{p}{w}(t-x) = \frac{1}{t-x} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{(t-x)^{2j+1}}{w^{2j+2}}$$

уравнение (17) можно привести к обычной форме

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-x} + \frac{1}{p} \int_{-1}^1 g(t) K(t-x) dt = q(x) + f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (18)$$

$$K(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{w^{2j+1}}.$$

Так как напряжения в усиленной среде ограничены, то решение интегрального уравнения ищем в классе всюду ограниченных функций.

С помощью замены переменных $t = \mathbf{1}t$; $x = \mathbf{1}h$ и процедуры алгебраизации [10] сингулярное интегральное уравнение (18) при дополнительном условии (8) сведем к системе M алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_r^0 = g(t_r)$ ($r = 1, 2, \dots, M$)

$$\frac{1}{M} \sum_{r=1}^M g(t_r) \left[\frac{1}{t_r - h_m} + B(t_r, h_m) \right] = q(\mathbf{1}h_m) + f(\mathbf{1}h_m) \quad (m = 1, 2, \dots, M-1), \quad (19)$$

$$\sum_{r=1}^M g(t_r) = 0,$$

где

$$h_m = \cos \frac{pm}{M} \quad (m = 1, 2, \dots, M-1).$$

$$t_r = \cos \frac{2r-1}{2M} p, \quad (r = 1, 2, \dots, M),$$

$$B(t_r, h_m) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{1^{2j+2}}{w^{2j+2}} (t_r - h_m)^{2j+1}.$$

К системе (19) необходимо добавить условие конечности напряжений в окрестности вершин полос предразрушения (условие разрешимости краевой задачи), которое имеет вид

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g(t_m) c t g \frac{2m-1}{4M} p = 0. \quad (20)$$

Это условие служит для определения размера ℓ полос предразрушения.

В правую часть системы (19) входят неизвестные значения напряжений $q(h_m)$ в узловых точках, принадлежащих полосам предразрушения. Для их определения используем соотношение (12). Алгебраизацию уравнения (12) проводим аналогично случаю одной полосы предразрушения. В результате получим алгебраическую систему для определения приближенных значений $q(h_m)$. Дальнейший расчет объединенной нелинейной алгебраической системы (10), (19), (20) и аналога (13) проводится аналогично случаю одной полосы предразрушения.

Условие, определяющее предельное значение внешней нагрузки, при которой происходит появление трещин, будет иметь вид (14).

На рис. 7 представлены графики зависимости длины полосы предразрушения $d = \mathbf{l}/L$ от безразмерного значения внешней нагрузки S_0/q_{\max} для тех значений свободных параметров армированной среды. Здесь кривая 1 соответствует $e = 0,15$, а 2 – при $e = 0,25$.

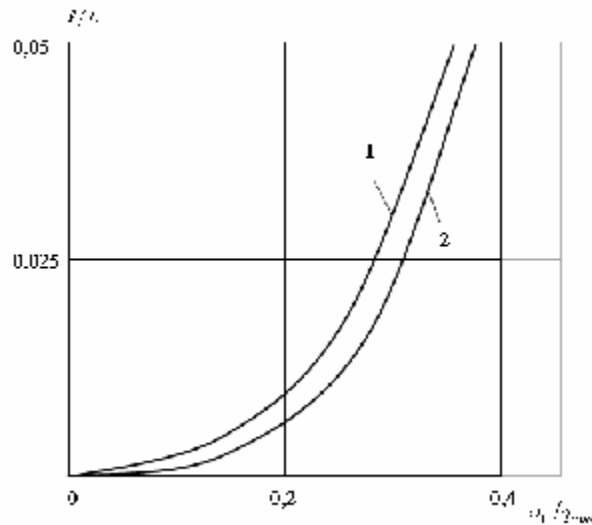


Рис. 7. Зависимости длины полосы предразрушения $d = \mathbf{l}/L$ от безразмерного значения внешней нагрузки S_0/q_{\max} : кривая 1 соответствует $e = 0,15$, 2 – при $e = 0,25$.

На рис. 8 представлены графики распределения усилий в связях между берегами полосы предразрушения q/S_0 от безразмерной координаты x/L : кривая 1 – соответствует линейной связи; 2 – билинейной зависимости.

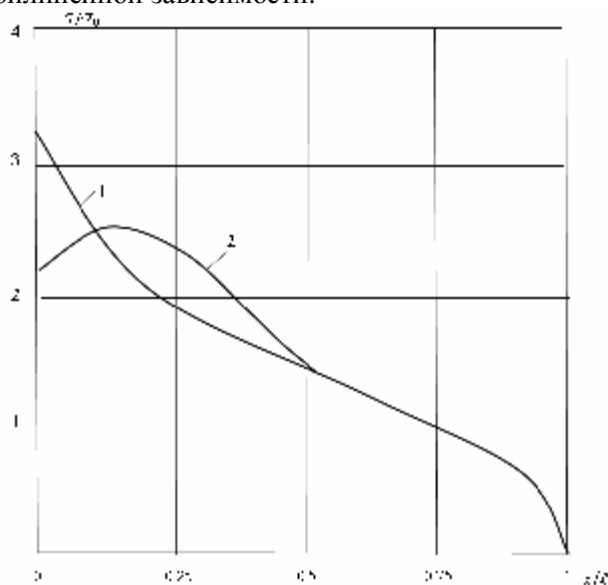


Рис. 8. Зависимость распределения нормальных усилий q/S_0 в связях между берегами полосы предразрушения: кривая 1 соответствует линейной связи, 2 – билинейной зависимости

Взаимодействие полос предразрушения приводит к уменьшению предельных размеров полос предразрушения, допустимых значений внешней нагрузки, при которых не происходит появления трещины в армированной среде.

При достаточно малых значениях y_0/L (часто поставленные точки крепежа) предельная нагрузка, при которой происходит появление трещины, возрастает. В этом случае действие стрингеров сводится также к увеличению предельного размера полосы предразрушения, снижению усилий в связях и раскрытия берегов полосы предразрушения. Степень уменьшения, тем больше, чем выше жесткость подкрепляющего элемента и чем ближе расположены точки крепления между собой. При некоторых значениях геометрических параметров раскрытие берегов полосы предразрушения отсутствуют. Это имеет место, когда полоса предразрушения непосредственно пересекает линию стрингера.

На основе полученных результатов можно считать, что усиление упругой среды регулярной системой стрингеров может служить весьма эффективным средством, задерживающим зарождение трещины и позволяющим значительно продлить срок эксплуатации конструкции.

Закключение. Анализ модели зарождения дефекта типа трещины в усиленной среде в процессе нагружения сводится к параметрическому совместному исследованию разрешающей алгебраической системы (10), (11), (13) и критерия появления трещины (14) при различных значениях свободных параметров усиленной пластины.

Модель полосы предразрушения со связями между берегами позволяет исследовать основные закономерности распределения усилий в связях, раскрытие берегов полосы

предразрушения при разных законах их деформирования, оценить эффекты упрочнения среды усиленной регулярной системой стрингеров, провести анализ предельного равновесия, при котором происходит появление трещины, с помощью деформационного критерия. Такой анализ позволил определить предельный размер полосы предразрушения, допустимую внешнюю нагрузку, при которой не произойдет появление трещины в среде, усиленной регулярной системой стрингеров.

г. Баку

Поступила: 11.02.2008

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биргер, И. А.* Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // *Успехи механики деформируемых сред.* – М. : Наука, 1975. – С. 51-73.
2. *Брок, Д.* Основы механики разрушения / Д. Брок. – М. : Высшая школа, 1980. – 368 с.
3. *Ванин, Г. А.* Микромеханика композиционных материалов / Г. А. Ванин. – Киев : Наук. думка, 1985. – 302 с.
4. *Гольдштейн, Р. В.* Рост трещины по границе соединения материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // *Проблемы механики: Сб. статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского.* – М. : Физматлит, 2003. – С. 221-238.
5. *Долгих, В. Н.* Об одной модели регулярной кусочно-однородной среды / В. Н. Долгих, Л. А. Фильшинский // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1976. – №2. – С. 158-164.
6. *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Л. : ГИТТЛ, 1948. – 376 с.
7. *Максименко, В. Н.* Влияние приклепанных ребер жесткости на развитие трещин возле отверстия / В. Н. Максименко // *Журн. прикл. механики и техн. физики.* – 1988. – №2. – С. 133-140.
8. *Мир-Салим-заде, М. В.* Трещина со связями между берегами в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров / М. В. Мир-Салим-заде // *Механика композитных материалов.* – 2005. – Т.41, №6. – С.773-782.
9. *Мирсалимов, В. М.* Некоторые задачи конструкционного торможения трещины / В. М. Мирсалимов // *ФХММ.* – 1986. – Т.22, №1. – С. 84-88.
10. *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
11. *Мусхелишвили, Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
12. *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наук. думка, 1991. – 416 с.
13. *Партон, В. З.* Механика упругопластического разрушения. / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1985. – 504 с.
14. *Толкачев, В. М.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине / В. М. Толкачев // *Докл. АН СССР.* – 1964, Т.154, №4. – С.86-88.
15. *Черепанов, Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1983. – 296 с.
16. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения. / Г. П. Черепанов – М. : Наука, 1974. – 640 с.
17. *Budiansky, B.* Fiber-matrix de bonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites / B. Budiansky, A. G. Evans, J. W. Hutchinson // *Int. J. Solid Structures.* –1995, Vol.32. №3-4. – P. 315-328.
18. *Goldstein, R. V.* Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints / R. V. Goldstein, V. F. Bakirov, M. N. Perelmuter // *In: Proc. Inst. Phys. Technol. Russian Ac. of Sci. V. 13. Modeling and Simulation of Submicron Technology and Defices.* – 1997. – P. 115-125.
19. *Ji, H.* Adhesion via Connector Molecules: The Many-stitch Problem / H. Ji, P. G. de Gennes // *Macromolecules.* – 1993. Vol. 26. – P. 520-525.

Немировский Ю. В., Янковский А. П.

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ
РУНГЕ–КУТТЫ**

(Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН)

Сформулирована задача вязкопластического динамического деформирования изотропных оболочек переменной толщины. На основе обобщения методов Рунге – Кутты разработан метод интегрирования поставленной начально-краевой задачи. Проведено сравнение результатов расчетов с аналитическим и с апробированным численным решениями; показано, что они хорошо согласуются. Эффективность разработанного метода подтверждена численными расчетами. Показано, что за счет рационального распределения толщин оболочек максимальную величину их остаточных прогибов можно уменьшить в несколько раз.

Ключевые слова: *оболочки, взрывные нагрузки, неупругая динамика, вязкопластическое деформирование, жесткопластическое деформирование, рациональное профилирование*

В обзорах [5; 11; 13; 15; 17; 26] и в ряде других публикаций отмечалась важность учета вязкого пластического сопротивления при расчете конструкций, подвергающихся динамическим воздействиям высокой интенсивности. Общие определяющие соотношения для описания вязкопластического деформирования оболочек и пластин были получены в [3]. Основанные на них решения динамического деформирования тонкостенных конструкций были построены лишь для пластин [1; 18; 25]. В случае цилиндрических оболочек из идеальных жесткопластических материалов задачи динамики рассматривались либо на основе приближенных предельных соотношений [2; 14; 28; 30; 31; 32], либо точных предельных соотношений [20].

Целью настоящего исследования является разработка нового численного метода решения начально-краевой задачи динамического вязкопластического деформирования изотропных цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины с учетом эффекта вязкопластического упрочнения их материала и анализ влияния изменения толщины оболочек и их характерных размеров на величину их остаточных прогибов при действии нагрузок взрывного типа.

Рассмотрим вязкопластическое деформирование тонкой круговой цилиндрической оболочки переменной толщины $2H$ и радиуса R , подчиняющейся гипотезам Кирхгофа – Лява. Свяжем с оболочкой сопряженную ортогональную криволинейную систему координат a_1, a_2, a_3 так, чтобы отсчетная поверхность $a_3 = 0$ совпадала с ее срединной поверхностью до начала деформирования. Координатные линии a_1, a_2 совпадают с продольным и окружным направлениями, переменная a_3 определяет расстояние от некоторой точки оболочки до этой поверхности.

Для формулировки задачи вязкопластической динамики тонких оболочек используем общеизвестные уравнения движения [24]

$$2HRr\mathbf{u}_{,tt} = R\mathbf{q} + \mathbf{L}(\mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{m}), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}, \quad \mathbf{L} = \{L_1, L_2, L_3\}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \{F_{11}, F_{12}, F_{22}\}, \quad \mathbf{M} = \{M_{11}, M_{12}, M_{22}\}, \quad \mathbf{m} = \{m_1, m_2\},$$

$$L_1(\mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{m}) = RF_{11,1} + F_{21,2}, \quad L_2(\mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{m}) = F_{22,2} + RF_{12,1} + (M_{22,2} + RM_{12,1} + Rm_2)/R, \quad (3)$$

$$L_3(\mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{m}) = RM_{11,1} + 2M_{12,1} + M_{22,2}/R - F_{22} + Rm_1 + m_{2,2},$$

связь между скоростями мембранных деформаций \mathcal{E}_{ij} , скоростями параметров искривления \mathcal{K}_{ij} срединной поверхности оболочки и скоростями смещений $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ точек этой поверхности

$$\mathcal{E}_{11} = v_{1,1}, \quad \mathcal{E}_{22} = (v_{2,2} + v_3)/R, \quad 2\mathcal{E}_{12} = 2\mathcal{E}_{21} = v_{1,2}/R + v_{2,1}, \quad \mathcal{K}_{11} = -v_{3,1}, \quad (4)$$

$$\mathcal{K}_{22} = -(v_{3,2} - v_{2,2})/R^2, \quad \mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{21} = -(v_{3,1} - v_{2,1})/R, \quad v_i = u_{i,t} \quad (i = 1, 2, 3),$$

определяющие соотношения, связывающие мембранные усилия F_{ij} и моменты M_{ij} в оболочке с \mathcal{E}_{ml} и \mathcal{K}_{ml} .

$$F_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (A_{ijml} \mathcal{E}_{ml} + B_{ijml} \mathcal{K}_{ml}), \quad M_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (B_{ijml} \mathcal{E}_{ml} + C_{ijml} \mathcal{K}_{ml}), \quad i, j = 1, 2. \quad (5)$$

В уравнениях и соотношениях (1) – (5) приняты обозначения: q_i, m_j – приведенные внешние распределенные нагрузки и моменты в направлениях a_i, a_j ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) соответственно; u_i, v_i – перемещения и скорости смещений точек срединной поверхности оболочки в направлениях a_i ($i = 1, 2, 3$); ρ – объемная плотность материала оболочки; индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной a_1, a_2 или времени t . Уравнения движения (1) записаны для случая малых смещений \mathbf{u} точек срединной поверхности и в них не учитывается инерция вращения, которая для тонкостенных кирхгофовских конструкций вносит в решение пренебрежимо малый вклад [19].

Коэффициенты $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$ в (5) нелинейно зависят от H и $\mathcal{E}_{ml}, \mathcal{K}_{ml}$. Эти зависимости определяются видом диаграммы $\sigma : \mathcal{E}$, так как согласно вязкопластической модели [9] напряжение σ при одноосном напряженном состоянии зависит от скорости деформации \mathcal{E} материала. Аппроксимируя зависимость $\sigma : \mathcal{E}$ двухзвенной ломаной (могут

быть использованы и другие соотношения, например для многозвенной ломаной), получим

$$s = \begin{cases} E\epsilon & \text{при } |\epsilon| \leq \epsilon_s = S_s / E, \\ \text{sign}(\epsilon)S_s + E_s(\epsilon - \text{sign}(\epsilon)\epsilon_s) & \text{при } |\epsilon| > \epsilon_s, \end{cases} \quad (6)$$

где E, E_s – коэффициенты линейной вязкости и линейно-вязкого упрочнения материала; S_s – значение напряжения в точке перелома двухзвенной ломаной, аппроксимирующей зависимость $s : \epsilon$ (можно трактовать как предел текучести материала). При $E \rightarrow \infty$ получаем предельный переход к жестко-вязкопластической модели, а при $E_s = 0, E \rightarrow \infty$ – к жесткопластической модели. В силу известного формального сходства определяющих уравнений теории упругоупругоупругих деформаций и теории вязкопластического течения [10] выражения для $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$ в (5) с учетом (6) формально совпадают с аналогичными коэффициентами, полученными в [22] при аппроксимации диаграммы деформирования двухзвенной ломаной типа (6) (при этом в [22] следует принять $n = 1/2, w_k = 0, 1 \leq k \leq N$); кроме того, в случае идеальной пластичности ($E_s = 0$, см. (6)) эти коэффициенты определены в [6]. Соответствующие выражения для $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$ громоздки, поэтому не будем их здесь приводить.

Подставим соотношения (4) в определяющие уравнения (5), а последние в систему (1), тогда с учетом равенств (2), (3) получим систему разрешающих уравнений движения, записанную в операторной форме,

$$2HRr\mathbf{v}_{,t} = R\mathbf{q} + \mathbf{D}(\mathbf{v}, \mathbf{m}), \quad (7)$$

$$u_{i,t} = v_i(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где согласно (2) – (5)

$$\mathbf{D} = \{D_1, D_2, D_3\}, \quad D_i = L_i(\mathbf{F}(\mathbf{v}), \mathbf{M}(\mathbf{v}), \mathbf{m}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

В развернутом виде выражения для дифференциальных операторов D_i громоздки, поэтому не будем их здесь приводить, отметим лишь, что эти операторы совпадают с левыми частями уравнений равновесия (2.1) в [23], где нужно сделать замены $u_i \rightarrow v_i$ ($i = 1, 2$), $w \rightarrow u_3$ и принять $D_{ij} = E_{ij} = 0$.

Для однозначного интегрирования системы (7), (8) необходимо использовать начальные

$$v_i(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t_0) = v_{0i}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\mathbf{v}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)), \quad (10)$$

$$u_i(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t_0) = u_{0i}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\mathbf{u}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)). \quad (11)$$

и общеизвестные граничные условия [24], которые могут быть весьма разнообразны, поэтому не будем их здесь приводить. (Если заданы кинематические граничные условия для перемещений u_i , то за счет (8) можно получить соответствующие условия для скоростей смещений v_i ($i = 1, 2, 3$). А при задании на кромках силовых факторов следует использовать соотношения (2.2) из [23], в которых по-прежнему следует сделать замены $u_i \rightarrow v_i$ ($i = 1, 2$), $w \rightarrow u_3$ и принять $D_{ij} = E_{ij} = 0$.)

Если скорости смещений v_i известны, то определение перемещений u_i из уравнений (8) при начальных условиях (11) не вызывает затруднений. Система же уравнений (7) с учетом равенств (9) является замкнутой относительно скоростей v_i системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, содержащих производные от v_i ($i = 1, 2, 3$) первого порядка по времени t и производные вплоть до 4-го порядка по переменным a_1, a_2 .

Для численного интегрирования по времени t начально-краевой задачи, соответствующей системе уравнений (7), используем один из обобщенных методов Рунге – Кутты [21], а именно, двустадийный обобщенный метод Лобатто IIIA (метода трапеций), имеющий второй порядок точности по τ , где τ – шаг по времени t . Согласно этому методу,

$$\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{a}) + t(4rHR)^{-1} \left[R(\mathbf{q}^n(\mathbf{a}) + \mathbf{q}^{n+1}(\mathbf{a})) + \mathbf{D}(\mathbf{v}^n(\mathbf{a}), \mathbf{m}^n(\mathbf{a})) + \mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}), \mathbf{m}^{n+1}(\mathbf{a})) \right], \quad (12)$$

где

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}, \quad \mathbf{q}^n(\mathbf{a}) = \mathbf{q}(\mathbf{a}, t_n), \quad \mathbf{v}^n(\mathbf{a}) = \mathbf{v}(\mathbf{a}, t_n), \quad \mathbf{m}^n(\mathbf{a}) = \mathbf{m}(\mathbf{a}, t_n), \quad (13)$$

$$t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (t_0 = 0);$$

шаг по времени $t > 0$ может быть переменным ($t = t_n$).

При соответствующих переобозначениях уравнение (12) формально совпадает с уравнением (11) из [18]. Преобразуя (12) аналогично тому, как это сделано в [18], получим систему разрешающих уравнений

$$-t\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}), \mathbf{m}^{n+1}(\mathbf{a})) + 4rH(\mathbf{a})R\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}) = \mathbf{P}^{n+1}(\mathbf{a}), \quad n \geq 0, \quad (14)$$

где правая часть известна и определяется по рекуррентной формуле

$$\mathbf{P}^{n+1}(\mathbf{a}) = -\mathbf{P}^n(\mathbf{a}) + R \left[8rH(\mathbf{a})\mathbf{v}^n(\mathbf{a}) + t(\mathbf{q}^n(\mathbf{a}) + \mathbf{q}^{n+1}(\mathbf{a})) \right], \quad \mathbf{P}^n = \{P_1^n, P_2^n, P_3^n\}. \quad (15)$$

В начальный момент времени t_0 имеем согласно [18]

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{a}) = -t\mathbf{D}(\mathbf{v}_0(\mathbf{a}), \mathbf{m}^0(\mathbf{a})) + 4rH(\mathbf{a})R\mathbf{v}_0(\mathbf{a}). \quad (16)$$

Здесь правая часть – известная функция в силу заданных начальных условий (10).

При нулевых начальных условиях

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{a}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (17)$$

из (16) имеем

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

а из (15), (17), (18) следует

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{a}) = tR(\mathbf{q}^0(\mathbf{a}) + \mathbf{q}^1(\mathbf{a})). \quad (19)$$

Таким образом, для определения скоростей смещений точек срединной поверхности оболочки на $(n+1)$ -м по времени слое необходимо проинтегрировать систему уравнений (14) с известной правой частью (15) – (19) при соответствующих граничных условиях, которые получаются из граничных условий для системы уравнений (7) формальной заменой \mathbf{v} на \mathbf{v}^{n+1} .

Система уравнений (14) с учетом выражений для операторов D_i (см. (9), (3) – (5)) является системой квазилинейных уравнений эллиптического типа и ее можно интерпретировать как систему уравнений равновесия установившейся ползучести изотропной оболочки переменной толщины на линейно-вязком основании, подчиняющемся гипотезам типа Винклера [4]. В силу известного [10] формального сходства уравнений установившейся ползучести (в рамках теории течения) и уравнений теории упругопластических деформаций равенство (14) формально совпадает с системой уравнений равновесия оболочки на линейно-упругом основании при ее упругопластическом деформировании (если под \mathbf{v}^{n+1} понимать перемещения точек срединной поверхности). Поэтому для интегрирования граничной задачи, соответствующей системе уравнений (14), можно использовать известные методы статики или установившейся ползучести.

Для линейризации системы уравнений (14) можно использовать итерационный метод, предложенный в [10] для решения задач установившейся ползучести и качественно аналогичный методу переменных параметров упругости, широко используемому при решении упругопластических задач статики [16]. Адаптация же метода переменных параметров упругости применительно к деформируемым тонкостенным конструкциям изложена в [22], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно. После такой линейризации на каждой итерации систему уравнений (14) можно рассматривать как линейную эллиптическую систему уравнений деформирования изотропной неоднородной цилиндрической оболочки на линейно-упругом основании и использовать для ее интегрирования достаточно хорошо разработанные в теории оболочек численные, вариационные и др. методы [4] (сходимость метода переменных параметров упругости доказана [9; 16]).

В качестве начального приближения $\mathbf{v}_{(0)}^{n+1}(\mathbf{a})$ для вектор-функции $\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a})$ можно выбрать решение на предыдущем по времени слое

$$\mathbf{v}_{(0)}^{n+1}(\mathbf{a}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{a})$$

или функцию

$$\mathbf{v}_{(0)}^{n+1}(\mathbf{a}) = 3\mathbf{v}^n(\mathbf{a}) + (tR\mathbf{q}^n(\mathbf{a}) - \mathbf{P}^n(\mathbf{a})) / (2rRH(\mathbf{a})),$$

получающуюся по формуле Тейлора $\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{a}) + t\mathbf{v}_{,t}(\mathbf{a}, t_n) + O(t^2)$ с учетом выражения для производной $\mathbf{v}_{,t}$ из (7) и оператора $\mathbf{D}(\mathbf{v}^n, \mathbf{m}^n)$ из (14) (при замене $n+1$ на n) в предположении, что на предыдущем n -м по времени слое решение задачи уже известно.

В качестве модельной рассмотрим задачу об осесимметричной динамике замкнутой круговой цилиндрической оболочки длиной $L > 0$, которая может иметь переменную в осевом направлении $x \equiv a_1$ толщину $2H(x)$. Предполагается, что нагрузка $\mathbf{q}(\mathbf{a}, t)$, закрепление оболочки и ее толщина не зависят от полярного угла a_2 (распределенные внешние моменты отсутствуют $\mathbf{m}(\mathbf{a}, t) \equiv \mathbf{0}$), поэтому перемещения \mathbf{u} и их скорости \mathbf{v} также не зависят от a_2 . Кроме того, предполагается, что отсутствует нагружение оболочки в окружном направлении a_2 ($q_2 \equiv 0$), поэтому $v_2 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$ и в силу осевой симметрии задачи второе уравнение движения (7) при $i = 2$ выполняется тождественно ($0 \equiv 0$).

Аналогично, и в системе (14) второе уравнение также выполняется тождественно ($0 \equiv 0$). Оставшиеся уравнения (14) с учетом выражений для операторов D_i согласно (3), (9) удобно записать в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $M_{11}^m(x)$, $v_1^m(x)$ и $v_3^m(x)$:

$$\begin{aligned}
 & -a_{11} \frac{d^2 v_1^m}{dx^2} - \frac{da_{11}}{dx} \frac{dv_1^m}{dx} + \frac{4rRH}{t} v_1^m - \frac{a_{12}}{R} \frac{dv_3^m}{dx} - \frac{1}{R} \frac{da_{12}}{dx} v_3^m - a_{13} \frac{dM_{11}^m}{dx} - \frac{da_{13}}{dx} M_{11}^m = \frac{P_1^m(x)}{t}, \\
 & -t \frac{d^2 M_{11}^m}{dx^2} + \frac{ta_{21}}{R} M_{11}^m + \frac{ta_{12}}{R} \frac{dv_1^m}{dx} + \left(4rRH + \frac{ta_{22}}{R} \right) v_3^m = P_3^m(x), \\
 & B_{1111} \frac{dv_1^m}{dx} - C_{1111} \frac{d^2 v_3^m}{dx^2} + \frac{B_{1122}}{R} v_3^m - M_{11}^m = 0, \quad m = n+1, \quad 0 < x < L,
 \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A_{1111} - B_{1111}^2 / C_{1111}, \quad a_{12} = A_{1122} - B_{1122} B_{1111} / C_{1111}, \quad a_{13} = B_{1111} / C_{1111}, \\
 a_{21} &= B_{1122} / C_{1111}, \quad a_{22} = A_{2222} - B_{1122}^2 / C_{1111}, \quad C_{1111} > 0,
 \end{aligned} \tag{21}$$

A_{ijj} , B_{ijj} , C_{1111} – коэффициенты, входящие в соотношения (5); M_{11}^m – осевой момент в оболочке на m -м по времени слое; $P_1^m(x)$, $P_3^m(x)$ определяются по формуле (15) при замене \mathbf{a} на x .

Линеаризуем систему (20) указанным выше методом. Пусть $v_1^{(k)}(x)$, $v_3^{(k)}(x)$, $M_{11}^{(k)}(x)$ – известные k -е приближения разыскиваемых функций $v_1^m(x)$, $v_3^m(x)$, $M_{11}^m(x)$ соответственно, тогда следующие приближения этих функций определим из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
 & -ta_{11}^{(k)} \frac{d^2 v_1^{(l)}}{dx^2} - t \frac{da_{11}^{(k)}}{dx} \frac{dv_1^{(l)}}{dx} + 4rRH v_1^{(l)} - \frac{ta_{12}^{(k)}}{R} \frac{dv_3^{(l)}}{dx} - \frac{t}{R} \frac{da_{12}^{(k)}}{dx} v_3^{(l)} - \\
 & -ta_{13}^{(k)} \frac{dM_{11}^{(l)}}{dx} - t \frac{da_{13}^{(k)}}{dx} M_{11}^{(l)} = P_1^m(x), \\
 & -t \frac{d^2 M_{11}^{(l)}}{dx^2} + \frac{ta_{21}^{(k)}}{R} M_{11}^{(l)} + \frac{ta_{12}^{(k)}}{R} \frac{dv_1^{(l)}}{dx} + \left(4rRH + \frac{t}{R} a_{22}^{(k)} \right) v_3^{(l)} = P_3^m(x), \\
 & B_{1111}^{(k)} \frac{dv_1^{(l)}}{dx} - C_{1111}^{(k)} \frac{d^2 v_3^{(l)}}{dx^2} + \frac{B_{1122}^{(k)}}{R} v_3^{(l)} - M_{11}^{(l)} = 0, \quad m = n+1, \quad l = k+1, \quad 0 < x < L,
 \end{aligned} \tag{22}$$

где коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$ известны и получаются по формулам (21) с использованием функций $v_1^{(k)}(x)$, $v_3^{(k)}(x)$ согласно [22].

К системе (22) нужно добавить граничные условия. Если кромки оболочки жестко заземлены, то

$$v_1^{(l)}(x) = 0, \quad v_3^{(l)}(x) = 0, \quad \frac{dv_3^{(l)}}{dx} = 0, \quad x = 0 \text{ и/или } x = L, \quad (23)$$

при шарнирном опирании кромок и отсутствии смещений в осевом направлении имеем

$$v_1^{(l)}(x) = 0, \quad v_3^{(l)}(x) = 0, \quad M_{11}^{(l)}(x) = 0, \quad x = 0 \text{ и/или } x = L, \quad (24)$$

а при шарнирном опирании кромок и свободном их смещении в осевом направлении вместо (24) следует использовать

$$F_{11}^{(l)}(x) \equiv a_{11}^{(k)} \frac{dv_1^{(l)}}{dx} + a_{12}^{(k)} \frac{v_3^{(l)}}{R} + a_{13}^{(k)} M_{11}^{(l)} = 0, \quad (25)$$

$$v_3^{(l)}(x) = 0, \quad M_{11}^{(l)}(x) = 0, \quad x = 0 \text{ и/или } x = L, \quad l = k + 1,$$

где из выражения для осевого усилия $F_{11}^{(l)}$ исключена вторая производная $d^2v_3^{(l)}/dx^2$ за счет третьего равенства (22).

Если все входные данные задачи обладают симметрией относительно центрального поперечного сечения цилиндрической оболочки ($x = L/2$), то такой же симметрией будут обладать и неизвестные функции: $v_i^m(x) = v_i^m(L-x)$, $M_{11}^m(x) = M_{11}^m(L-x)$, $0 \leq x \leq L/2$ ($i = 1, 3$), поэтому вместо всей оболочки можно рассматривать лишь ее левую половину при $0 \leq x \leq L/2$. В этом случае на кромке $x = 0$ выполняется один из типов граничных условий (23) – (25), а в точке $x = L/2$ имеем

$$v_1^{(l)}(x) = 0, \quad \frac{dv_3^{(l)}}{dx} = 0, \quad \frac{dM_{11}^{(l)}}{dx} = 0, \quad x = L/2, \quad l = k + 1. \quad (26)$$

(Могут быть заданы и другие условия опирания оболочки, например, опора на вязкоупругом основании и т.п.)

Заменив в (22), (23), (25), (26) производные конечными разностями на равномерной сетке по x с шагом h , получим для трехточечного шаблона конечно-разностные аналоги уравнений (22) и граничных условий (23) – (26) со вторым порядком аппроксимации по h . Для решения соответствующей СЛАУ можно использовать матричную прогонку [8], которая устойчива.

Как показывают многочисленные расчеты, проведенные авторами, итерационный процесс (22) – (26) всегда сходится, поэтому предложенная схема численного интегрирования граничной задачи для системы (20) имеет точность порядка h^2 .

Если скорости смещений \mathbf{v} известны на n -м и $(n+1)$ -м слоях по времени, то из системы уравнений (8) по формуле трапеций с учетом начальных условий (11) можно определить перемещения \mathbf{u} точек срединной поверхности оболочки на $(n+1)$ -м слое по времени со вторым порядком точности по τ :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \tau \left(v_i^n + v_i^{n+1} \right) / 2, \quad i = 1, 2, 3, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

В случае вязкопластического деформирования система разрешающих уравнений динамики оболочки (7) является системой квазилинейных уравнений параболического типа относительно скоростей смещений \mathbf{v} . Известно [27], что для квазилинейных дифференциальных уравнений и систем общая теория устойчивости и сходимости конечно-разностных схем разработана недостаточно, поэтому основным критерием доверия той или иной конечно-разностной схеме служат приближенные решения для тестовых (модельных) задач, аналитические решения которых известны.

Авторам пока не удалось доказать устойчивость численной схемы (14), (27) в общем случае, когда операторы D_i согласно (9), (3) – (5) нелинейны. Но в пользу устойчивости этой схемы говорят физическая корректность (непротиворечивость) результатов многочисленных расчетов, проведенных авторами, и хорошее совпадение результатов с известными аналитическими и апробированными численными решениями (см. далее обсуждение результатов расчетов). В случае линейной вязкости согласно (6) при $\mu \rightarrow \infty$ доказать спектральную устойчивость схемы (12), (14) можно, повторив все рассуждения в [21], касающиеся доказательства устойчивости обобщенных методов Рунге–Кутты при решении задачи нестационарной теплопроводности, которая описывается параболическим уравнением, содержащим производную по времени t только первого порядка (подобно уравнениям системы (7)).

Исследуем динамическое вязкопластическое деформирование замкнутых круговых цилиндрических оболочек радиуса R и длиной L . Толщина оболочки может быть постоянной ($2H(x) = 2H_* = \text{const}$, $x \equiv a_1$) или переменной и определяется формулой

$$2H(x) = 2H_*s + p(1-s)H_* \sin(px/L), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (28)$$

При задании толщины тонкой цилиндрической оболочки в виде (28) расход материала с точностью используемой теории будет такой же, как и в оболочках постоянной толщины $2H_*$. При значениях параметра $0 < s < 1$ из (28) следует, что толщина оболочки на кромках $x = 0, L$ меньше, чем в центральном сечении $x = L/2$; при $s = 1$ получаем оболочку постоянной толщины $2H_*$; при $s > 1$ толщина оболочки на кромках больше, чем в центральном сечении. В расчетах будем принимать $2H_* = 3$ см.

На кромках $x = 0, L$ оболочка может быть шарнирно оперта или жестко закреплена (в осевом направлении x кромки смещаются свободно, согласно (25)). Конструкция динамически нагружается внутренним давлением взрывного типа

$$q_3(x, t) = q_3(t) = p_0 \exp(-at), \quad q_1 = q_2 = 0 \quad (a = 120 \text{ с}^{-1}, \quad t \geq t_0), \quad (29)$$

где p_0 – значение нагрузки в начальный момент времени $t_0 = 0$, в который оболочка находится в покое. (Может быть задан другой закон изменения взрывной нагрузки по времени [7], в рамках настоящего исследования это не принципиально).

Оболочки изготовлены из алюминиевого сплава Д16 или высококачественной малоуглеродистой стали, физико-механические характеристики которых приведены в табл. 1. (Коэффициент вязкого упрочнения E_s для стали получен по табличным данным из [5] с использованием метода наименьших квадратов; пределы же текучести алюминиевых сплавов практически не зависят от скорости деформаций ($E_s \approx 0$) [17]. Во всех приведенных ниже расчетах принималось $E = 10^{16}$ Па·с (см. (6)), что соответствует вязкопластической модели, приближенной к модели жестко-вязко-пластического тела).

Таблица 1

Физико-механические характеристики материалов оболочки [5; 12]

Материал	r , кг/м ³	s_s , МПа	E_s , МПа·с
Малоуглеродистая сталь	8000	248	90,9
Сплав Д16	2780	380	—

Авторам не известны полные аналитические решения вязкопластической или жесткопластической динамики оболочек с использованием критерия текучести Мизеса (который неявно заложен в используемой вязкопластической модели), поэтому для тестирования разработанного выше метода сравним результаты численных расчетов короткой цилиндрической оболочки с уже апробированными численными решениями вязкопластической динамики пластин. Действительно, если радиус оболочки $R \rightarrow \infty$, то решение задачи о вязкопластическом деформировании цилиндрической оболочки должно в пределе совпадать с решением задачи о динамическом вязкопластическом цилиндрическом изгибе прямоугольной удлиненной пластины шириной L и той же толщины, что и оболочка. Динамика прямоугольных удлиненных пластин при нагрузках взрывного типа исследована в [29], где был разработан численный метод интегрирования таких задач, аналогичный методам, развитым в [18; 19] и в настоящей работе. Известно, что при соответствующей нормировке нагрузки решения задачи о цилиндрическом изгибе прямоугольной удлиненной пластины и об изгибе стержня (балки) совпадают, поэтому решениям, полученным на основе метода из [29] можно доверять, так как в [19] было проведено сравнение численного решения для стержня с полным аналитическим решением задачи жесткопластической динамики стержня, давшее хорошее совпадение результатов. Кроме того, в [18] было произведено сравнение численного решения с полным аналитическим решением для круглой пластины, также давшее хорошее согласование результатов, что дополнительно подтверждает достоверность, разработанного в [29] метода.

Сравним результаты численных расчетов динамического цилиндрического изгиба прямоугольной удлиненной пластины шириной $L=1$ м и постоянной толщины $2H_*$ с расчетами неупругой динамики цилиндрической оболочки радиуса $R=1000$ м, длиной $L=1$ м и той же толщины $2H_*$ при действии нагрузок (29) разной интенсивности p_0 и при разных типах закрепления кромок.

В табл. 2 приведены значения времени остановки T_f и максимального безразмерного остаточного прогиба $U_{\max} = H_* \max_x u_3 / L^2$ (который возникает в центральном поперечном сечении конструкции $x = L/2$), рассчитанные по формулам из [29] и по формулам (20) – (27) настоящего исследования. В расчетах характерный период времени $T = 0,1$ с, в течение которого изучалось движение конструкции, разбивался на 1000 слоев ($t = T/1000$), а по ширине пластины и длине оболочки L вводился 401 узел. Расчеты проводились при начальных значениях нагрузки p_0 , указанных в таблице. В скобках в табл. 2 приведены отклонения решения для оболочки от решения для пластины.

Таблица 2

**Сравнение численных решений задач вязкопластической динамики
прямоугольных удлиненных пластин и коротких цилиндрических оболочек**

Характеристика решения	Конструкции из сплава Д16				Стальные конструкции	
	Шарнирное опирание, $p_0 = 9$ МПа		Защемление кромок, $p_0 = 11$ МПа		Шарнирное опирание, $p_0 = 1$ ГПа	
	Пластина	Оболочка	Пластина	Оболочка	Пластина	Оболочка

$T_f \cdot 10, c$	0,952	0,938 (1,5 %)	0,575	0,569 (1 %)	0,646	0,635 (1,7 %)
$U_{max} \cdot 10^2$	74,57	71,88 (3,6 %)	48,75	46,72 (4,2 %)	59,37	59,01 (0,6 %)

На рис. 1 изображены эпюры безразмерных остаточных прогибов $U(x) = H_3 u_3(x) / L^2$, определенные численно по формулам (20)–(27) и по формулам из [29]. Кривые 1–3 рассчитаны для прямоугольных удлиненных пластин, а линии 1'–3' – для коротких цилиндрических оболочек. Кривые 1, 1' получены для шарнирно опертых конструкций из сплава Д16 при $p_0 = 9$ МПа, линии 2, 2' – для аналогичных конструкций из малоуглеродистой стали (с учетом вязкого упрочнения) при $p_0 = 1$ ГПа, а кривые 3, 3' – для зашумленных на кромках конструкций из сплава Д16 при $p_0 = 11$ МПа. Значения максимумов этих кривых занесены в табл. 2.

Как видно из табл. 2 и рис. 1, время остановки и остаточные прогибы для прямоугольных удлиненных пластин и коротких цилиндрических оболочек различаются незначительно (менее чем на 5 %), причем наилучшее согласование решений наблюдается для стальных конструкций, материал которых имеет вязкопластическое упрочнение (см. кривые 2, 2' на рис. 1 и два последних столбца табл. 2). Расчетные характеристики для оболочек несколько ниже, чем для пластин. Это объясняется тем, что даже при столь большом радиусе кривизны ($R = 1000$ м) в цилиндрических оболочках возникают мембранные деформации, вызывающие дополнительную диссипацию энергии; при деформирова-

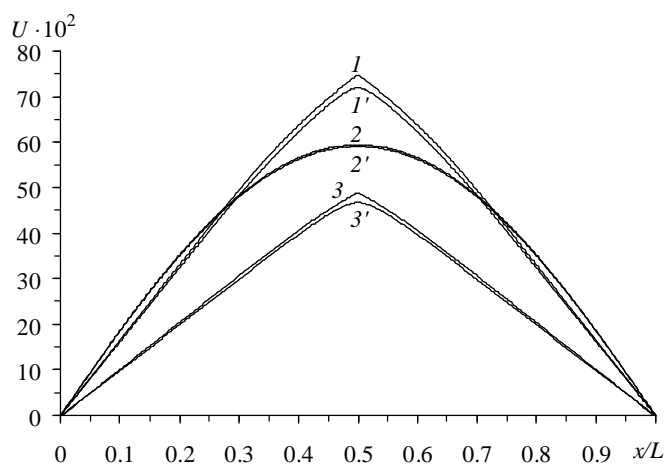


Рис. 1

нии прямоугольных удлиненных пластин реализуется случай поперечного изгиба, при котором мембранные деформации вообще отсутствуют, поэтому отсутствует соответствующая им составляющая диссипации энергии.

Исследованный выше случай является предельным, когда в короткой оболочке реализуется почти чисто изгибное напряженное состояние. Рассмотрим другой предельный случай динамики цилиндрической оболочки, при котором реализуется безмоментное состояние. Пусть кромки замкнутой круговой цилиндрической оболочки не закреплены и свободны от нагружения; на конструкцию действует только равномерно распределенное

внутреннее давление взрывного типа (29). Считаем, что в оболочке реализуется безмоментное состояние ($M_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$), тогда пренебрегая инерционными членами в осевом направлении (что допустимо в первом асимптотическом приближении для тонких оболочек), из первого уравнения движения (1) с учетом отсутствия нагрузок на кромках получим

$$F_{11}(x, t) = 0. \quad (30)$$

Второе уравнение движения (1) в осесимметричном случае выполняется тождественно ($0 \equiv 0$), а из третьего уравнения (1) с учетом (30) следует

$$q_3(t) - 2Hr v_{3,t} = F_{22}/R, \quad u_{3,t} = v_3. \quad (31)$$

В рамках жесткопластической модели уравнения движения (31) в силу равенства (30) имеют смысл лишь при $F_{22} = 2Hs_s = \text{const}$ (как при использовании критерия текучести Мизеса, так и при использовании критерия Треска), поэтому из (31) с учетом (29) имеем

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{p_0}{2Hr} \exp(-at) - \frac{s_s}{rR}, \quad \frac{du_3}{dt} = v_3(t),$$

отсюда при нулевых начальных условиях и $t_0 = 0$ следует

$$v_3(t) = \frac{p_0}{2Hra} [\exp(-at) - 1] - \frac{s_s}{rR} t, \quad (32)$$

$$u_3(t) = \frac{p_0}{2Hra} \left[\frac{1}{a} (\exp(-at) - 1) + t \right] - \frac{s_s}{2rR} t^2 \quad (0 \leq t \leq T_f). \quad (33)$$

Из условия $v_3(T_f) = 0$ с учетом выражения (32) определим время остановки движения T_f оболочки, затем из (33) при $t = T_f$ определим величину остаточного прогиба.

Таблица 3

Сравнение аналитического и численных решений задачи жесткопластической и вязкопластической динамики длинной цилиндрической оболочки

Характеристика решения	Аналитическое безмоментное решение по жесткопластической модели	Численное решение для длинных оболочек с разным закреплением кромок	
		Шарнирное опирание	Жесткое защемление
$T_f \cdot 10, \text{ с}$	0,1539	0,155 (0,69 %)	0,154 (0,04 %)
$U_{\max} \cdot 10^2$	1,5745	1,5325 (2,67 %)	1,5274 (2,99 %)

В табл. 3 приведены результаты аналитического (32), (33) и численного расчетов для длинной ($H = H_*$, $R = 0,5 \text{ м}$, $L = 3 \text{ м}$) цилиндрической оболочки из сплава Д16 при начальном значении нагрузки $p_0 = 50 \text{ МПа}$. (В скобках указаны отклонения численного решения от аналитического). При численном решении значения остаточных прогибов, занесенных в табл. 3, определялись в центральном сечении оболочки ($x = L/2$). Как видно из табл. 3, для длинных оболочек при высоком уровне динамической нагрузки численное решение хорошо согласуется с аналитическим безмоментным решением. Это объясняется, очевидно, тем, что в таких оболочках подавляющая часть диссипации энергии

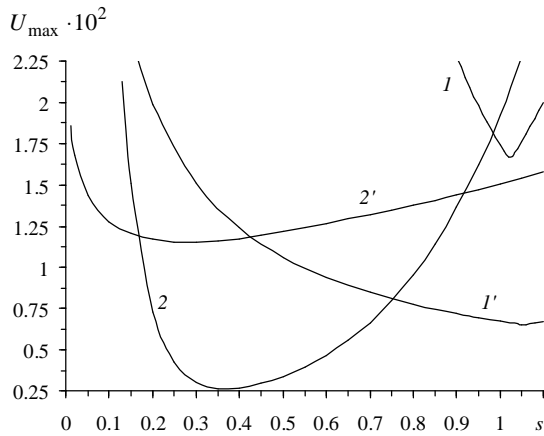


Рис. 2

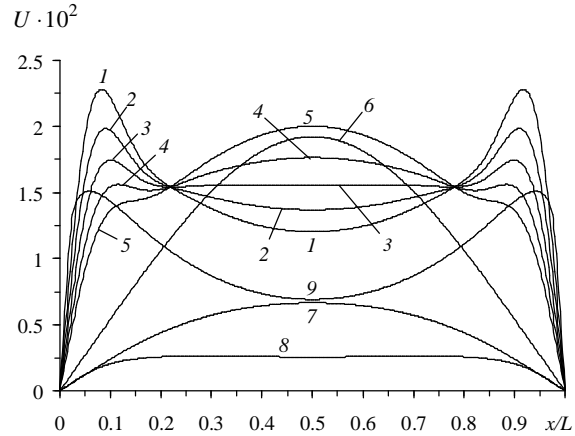


Рис. 3

во время движения происходит за счет основного безмоментного состояния, по сравнению с которой диссипация энергии в зонах краевых эффектов пренебрежимо мала.

Хорошее совпадение результатов расчетов, приведенных в табл. 2, 3 и на рис. 1, позволяет доверительно относиться к разработанному в настоящей работе численному методу интегрирования задачи вязкопластической динамики изотропных оболочек.

Выше исследовалась динамика цилиндрических оболочек постоянной толщины $2H_*$. Варьируя же длину оболочки и распределение толщины в осевом направлении, можно управлять остаточными смещениями u , величины которых в рамках вязкопластической модели характеризуют степень повреждаемости конструкции. На рис. 2 изображены кривые, характеризующие зависимость максимального безразмерного остаточного прогиба U_{\max} шарнирно опертых оболочек радиуса $R = 0,5$ м и разной длины от значения параметра толщины s в (28) при разных уровнях p_0 нагружения и прежнем характерном значении толщины $2H_*$. Кривые 1 и 1' рассчитаны для длинных оболочек $L = 3$ м при $p_0 = 50$ МПа и $p_0 = 50$ ГПа соответственно, а линии 2 и 2' – для коротких оболочек $L = 0,5$ м при $p_0 = 30$ МПа и $p_0 = 3$ ГПа соответственно. Кривые 1, 2 характеризуют остаточные прогибы оболочек из алюминиевого сплава Д16, а линии 1', 2' – из малоуглеродистой стали, обладающей вязким упрочнением.

Все кривые на рис. 2 имеют локальные минимумы, которым соответствуют рациональные распределения (28) толщин оболочек, обеспечивающие наименьшие остаточные прогибы. Так как в рамках вязкопластической модели величина остаточных прогибов является мерой повреждаемости конструкции, из поведения кривых на рис. 2 следует, что за счет рационального распределения толщины, остаточные прогибы оболочки можно уменьшить в разы, существенно повышая, тем самым, сопротивляемость конструкции нагрузкам взрывного типа.

Кривые 1 и 1' имеют локальные минимумы в точках $s = 1,024 \approx 1$ и $s = 1,064 \approx 1$ соответственно, поэтому длинные оболочки постоянной толщины при нагрузках вида (29) могут рассматриваться как рациональные или близкие к рациональным. Это объясняется тем, что в длинных оболочках постоянной толщины большая часть диссипации энергии

осуществляется основным напряженным состоянием, которое близко к безмоментному и однородному; краевые же эффекты вносят незначительный вклад в диссипацию (этот вклад для кривых I и I' сказался в том, что минимум их реализуется при $s = 1,024$ и $s = 1,064$, а не строго при $s = 1$). Для коротких же оболочек постоянной толщины, наоборот, большая часть диссипации осуществляется за счет изгибных напряжений, поэтому профилирование для таких оболочек является более эффективным (см. кривые 2 и 2') и в рациональных проектах, как будет показано ниже, вновь приводит к напряженному состоянию, близкому к безмоментному и однородному.

Кривые, качественно схожие с теми, что изображены на рис. 2, получаются и для зависимостей времени остановки движения оболочки от параметра s в (28). Эти кривые также имеют локальные минимумы, причем при тех же значениях s , что и линии на рис. 2.

На рис. 3 изображены эпюры безразмерных остаточных прогибов оболочек из сплава Д16 при разных значениях параметра s . Кривые 1 – 5 получены для длинной оболочки $L = 3$ м при $p_0 = 50$ МПа, а линия 6 – 9 – для короткой оболочки $L = 0,5$ м при $p_0 = 30$ МПа. Кривые 1–5 рассчитаны при значениях $s = 0,9 + 0,05(k - 1)$, где k – номер кривой; линии 6, 7, 8, 9 определены при значениях $s = 1, 0,7, 0,35, 0,15$ соответственно. Значения максимумов кривых 1 – 5 и 6 – 9 на рис. 3 соответствуют точкам на кривых 1 и 2 рис. 2 при указанных выше значениях s . (Качественно аналогичные эпюры остаточных прогибов получают и для оболочек из малоуглеродистой стали).

Сравнение кривых на рис. 3 позволяет проследить за изменением формы остаточных прогибов цилиндрической оболочки в зависимости от формы ее профиля в осевом направлении. Центральные участки кривых 3, 8 почти горизонтальны. Это позволяет утверждать, что в оболочках с рациональными распределениями толщин (как длинных, так и коротких) реализуется основное напряженное состояние, близкое к безмоментному и однородному.

В заключение настоящего исследования проведем сравнение численных решений с известными аналитическими решениями жесткопластической динамики замкнутых круговых цилиндрических оболочек постоянной толщины с защемленными кромками [11; 30; 31]. При построении этих аналитических решений использовалась простейшая кусочно-линейная аппроксимация кривой текучести в фазовом пространстве обобщенных напряжений (M_{11}, F_{22}) – в виде прямоугольника, что является достаточно грубым приближением истинной предельной кривой, поэтому такие решения не использовались выше в качестве эталонных при тестировании разработанного численного метода.

Согласно аналитическим решениям из [11; 30; 31], «механизмы» динамического деформирования различны в случаях коротких ($R \geq R_0 = L^2 / (24H)$) и длинных ($R < R_0$) цилиндрических оболочек, а также при нагрузках «средней» ($p_s \leq p_0 \leq p_1$) и «высокой» ($p_0 > p_1$) интенсивности. Здесь, в отличие от (29) нагрузка имеет ступенчатый вид

$$q_3(t) = \begin{cases} p_0 = \text{const} > 0, & 0 < t \leq T_0, \\ 0, & t > T_0; \end{cases} \quad (34)$$

$$p_s = \frac{2HS_s}{R} \left(1 + \frac{8HR}{L^2} \right), \quad p_1 = \frac{2HS_s}{R} \left(1 + \frac{24HR}{L^2} \right), \quad H = H_*;$$

p_s – предельное статическое давление; T_0 – время действия нагрузки.

Таблица 4

Сравнение аналитических и численных решений задачи жестко- и вязкопластической динамики для защемленных цилиндрических оболочек

Характеристика решения	Нагрузки средней интенсивности ($p_0 = p_1$)		Нагрузки высокой интенсивности ($p_0 = 2p_1$)	
	Аналитическое решение	Численное решение	Аналитическое решение	Численное решение
Короткая оболочка ($R = 1000$ м, $L = 1$ м, $p_s = 1,379$ МПа, $p_1 = 4,115$ МПа)				
$T_f \cdot 10, c$	0,02983	0,02568 (16,2 %)	0,05967	0,05117 (16,6 %)
$U_{max} \cdot 10^2$	0,11011	0,08422 (30,7 %)	0,51446	0,42277 (21,7 %)
Длинная оболочка ($R = 0,5$ м, $L = 3$ м, $p_s = 22,952$ МПа, $p_1 = 23,256$ МПа)				
$T_f \cdot 10, c$	0,03460	0,01016 (359 %)	0,02000	0,0201 (0,5 %)
$U_{max} \cdot 10^2$	$4,6419 \times 10^{-4}$	$3,0331 \times 10^{-4}$ (53 %)	0,04556	0,04810 (5,3 %)

В табл. 4 приведены результаты аналитических (см. формулы (7.14), (7.18), (7.30), (7.31), (7.40), (7.57), (7.58) в [11]) и численных расчетов для коротких и длинных защемленных оболочек постоянной толщины из сплава Д16 при нагрузках (34) средней и высокой интенсивности, действующих в течение времени $T_0 = 0,001$ с. (В скобках указаны отклонения аналитического решения от численного). Из табл. 4 следует, что для коротких оболочек аналитическое решение дает завышение времени T_f остановки движения на 16–17 %, а максимума остаточного прогиба – на 20 – 30 %; для длинных оболочек при нагрузках средней интенсивности аналитическое решение завышает значение T_f в 3,59 раза, а U_{max} – на 53 %. Хорошее согласование численного и аналитического решений наблюдается лишь для длинных оболочек при нагрузках высокой интенсивности. Это объясняется, по-видимому, тем, что в этом случае большая часть диссипации энергии в оболочке происходит за счет основного безмоментного состояния, которое удовлетворительно описывается даже упрощенной кривой текучести, используемой в аналитическом решении [11; 30; 31]. Однако, в этом случае все же существует качественное отличие эпюры остаточных прогибов $u_3(x)$, определенных численно и аналитически. Согласно решению из [11], максимум остаточного прогиба всегда реализуется в центральном сечении оболочки ($x = L/2$), а при численных расчетах длинной защемленной оболочки при интенсивном нагружении эпюра остаточных прогибов схожа с кривой 3 на рис. 3 и имеет максимум не в центральном сечении, а в окрестности кромок (результат возникновения ярко выраженных краевых эффектов).

Таким образом, для проведения оценочных расчетов в случае длинных защемленных цилиндрических оболочек при нагрузках высокой интенсивности можно рекомендовать использование достаточно простых аналитических формул (7.57), (7.58) из [11]. В других случаях аналитические формулы из [11; 30; 31] дают значительное завышение времени остановки движения и максимума остаточных прогибов, при этом численное решение лучше согласуется с экспериментом, так как известно, что остаточные прогибы,

определенные по формулам из [11; 30; 31], на 30 – 80 % превышают экспериментальные значения [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00161-а).

г. Новосибирск

Поступила: 13.12.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. Автономенко, Н. А. О динамическом деформировании пластин из нелинейного вязкопластического материала / Н. А. Автономенко, Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969 г.). – М. : Наука, 1970. – 267 с.
2. Амандосов, А. А. Движение жесткопластической круговой цилиндрической оболочки в сопротивляющейся среде / А. А. Амандосов // В кн. : Теория оболочек и пластин, Ереван. – 1964. – С. 779-787.
3. Быковцев, Г. И. О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек вращения / Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 68-76.
4. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Физматгиз, 1960. – 387 с.
5. Ворнок, Ф. Изменение механических свойств мягкой стали при повторных ударах / Ф. Ворнок, Дж. Поуп // Механика. – 1950. – Вып. 2. – С. 69-83.
6. Илюшин, А. А. Пластичность / А. А. Илюшин. – М. : ОГИЗ ГИТТЛ, 1949. – 289 с.
7. Ионов, В. Н. Напряжения в телах при импульсивном нагружении. Учеб. пособие для вузов / В. Н. Ионов, П. М. Огибалов. – М. : Высш. школа, 1975. – 568 с.
8. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 589 с.
9. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 399 с.
10. Качанов, Л. М. Теория ползучести / Л. М. Качанов. – М. : Физматгиз, 1960. – 467 с.
11. Комаров, К. Л. Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 349 с.
12. Композиционные материалы: Справ. / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев : Наук. думка, 1985. – 489 с.
13. Кошур, В. Д. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций / В. Д. Кошур, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 1990. – 536 с.
14. Кузин, П. А. О динамике жесткопластической цилиндрической оболочки конечной длины / П. А. Кузин // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 2. – С. 79-83.
15. Мазалов, В. Н. Динамика тонкостенных пластических конструкций / В. Н. Мазалов, Ю. В. Немировский // Проблемы динамики упругопластических сред : Сб. обзоров. Серия : Механика. Новое в зарубежной науке. – Вып. 5. – М. : Мир, 1975. – С. 155-247.
16. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1968. – 379 с.
17. Немировский, Ю. В. Вязкопластическая динамика изотропных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 123-134.
18. Немировский, Ю. В. Динамический вязкопластический изгиб армированных стержней переменного поперечного сечения / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Математические методы и физико-механические поля. – 2006. – Т. 49, № 1. – С. 53-66.
19. Немировский, Ю. В. Динамическое сопротивление пластических цилиндрических оболочек / Ю. В. Немировский // Современные проблемы механики и прикладной математики: Сб. трудов Междунар. школы-семинара. – Воронеж : Научная книга, 2007. – С. 259-263.
20. Немировский, Ю. В. Обобщение методов Рунге–Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 51–76.
21. Немировский, Ю. В. Термоупругопластический изгиб сложно армированных пластин / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 715-742.

22. *Немировский, Ю. В.* Термоупругопластическое деформирование сложно армированных оболочек / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // *Механика композитных материалов.* – 2006. – Т. 42, № 6. – С. 707-728.
23. *Огибалов, П. М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек / П. М. Огибалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963. – 463 с.
24. *Перроне, Н.* Импульсное нагружение пластинки, чувствительной к скорости деформации / Н. Перроне // *Тр. Америк. общ-ва инж.-мех. Сер. Е.* – 1967. – № 2. – С. 137.
25. *Пэжжина, П.* Основные вопросы вязкопластичности / П. Пэжжина. – М.: Мир, 1968. – 175 с.
26. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 489 с.
27. *Спорых, А. Н.* О динамическом изгибе жесткопластической цилиндрической оболочки под действием распределенного давления / А. Н. Спорых, Н. Д. Хомяков // *Сб. научн. трудов факультета прикладной математики и механики ВГУ.* – 1971. – Вып. 7. – С. 90-97.
28. *Янковский, А. П.* Численное интегрирование задачи вязкопластической динамики слоисто-волокнистых прямоугольных удлиненных пластин / А. П. Янковский // *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Тр. XIX Всеросс. конф., Бийск, 28–31 августа 2005 г.* – Новосибирск: «Параллель», 2005. – С. 290–297.
29. *Eason, G.* Dynamic loading of rigid – plastic cylindrical shells / G. Eason, R. T. Shield // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1956. – V. 4, N 2. – P. 53-71.
30. *Hodge, P. G.* Impact pressure loading of rigid – plastic cylindrical shells / P. G. Hodge // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1955. – V. 3, N 3. – P. 176-188.
31. *Mazalov, V. N.* The dynamic behavior of cylindrical shells reinforced by ring ribs. – II Shells of finite length / V. N. Mazalov, Ju. V. Nemirovsky // *Internat. J. Solids and Structures.* – 1971. – No 7. – P. 111-123.

Yu. V. Nemirovsky, A. P. Yankovsky

INTEGRATION OF THE PROBLEM DYNAMIC VISCO-PLASTIC DEFORMATIONS OF ISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS BY THE GENERALIZED METHOD RUNGE - KUTTA

The problem visco-plastic dynamic deformation of isotropic shells of variable thickness is formulated. On the basis of generalization of methods of the Runge - Kutta method of an integration of the put initial-bending problem is developed. Comparison of outcomes of calculations with analytical and with approved numerical by solutions is lead; it is shown, that they will well agree. Effectiveness of the developed method is confirmed by numerical calculations. It is shown, that due to rational distribution of thickness of envelopes maximum magnitude of their residual deflections can be reduced in some times.

Keywords: *envelopes, explosive loadings, inelastic dynamics, visco-plastic deformation, rigid-plastic deformation, rational profiling*

Сальковский Ю. Е.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ СТАЦИОНАРНОЙ СТРУИ ПОЛИМЕРНОГО РАСТВОРА ПРИ ЭЛЕКТРОФОРМОВАНИИ ВОЛОКОН

(Саратовский государственный университет)

Электроформование – это перспективный метод производства сверхдлинных нановолокон из полимерных растворов и расплавов в электрическом поле высокой напряженности. Явление электроформования – комплексное, включающее в себя как электрогидродинамические процессы, так и тепло- и массоперенос, фазовые превращения и т.д. Существующие на данный момент одномерные электрогидродинамические модели течения полимерной струи в процессе электроформования основываются на предположении постоянного распределения свойств жидкости и течения вдоль поперечного сечения струи. Однако, испарение растворителя с поверхности тонких струй может привести к существенной нелинейности этих параметров по сечению. В настоящей работе представлена трехмерная модель течения устойчивой осесимметричной струи в электростатическом поле с учетом массопереноса вследствие испарения. Исследовано влияние испарения на распределение реологических свойств раствора по сечению струи и на поперечные профили скоростей. Рассмотрена нелинейная зависимость изменения диаметра струи вдоль оси от коэффициента массопереноса. Показано, что диаметр устойчивой струи возрастает с увеличением скорости испарения, что противоречит первоначальному предположению об уменьшении диаметра вследствие уменьшения массы растворителя при испарении. Результаты настоящей работы способствуют более глубокому пониманию механизма электроформования и могут быть использованы для разработки новейших производственных технологий с полностью управляемым процессом электроформования нановолокон.

Ключевые слова: электроформование, электроспиннинг, нанотехнология, нановолокна, полимерные волокна, испарение, массоперенос, полимерные растворы, осесимметричная струя, метод маркеров и ячеек, электрогидродинамика.

Электроформование волокон (электропрядение, электроспиннинг) – это процесс получения микро- и нановолокон произвольной длины из полимерных растворов и расплавов под действием электрического поля [1, 3, 6, 16]. На сегодняшний день при помощи электроформования возможно производить волокна диаметром от 1,5 нанометров до нескольких микрон более чем из 200 различных полимеров. Одними из главных досто-

инств метода являются его простота и относительная дешевизна по сравнению с большинством альтернативных технологий производства одномерных нанообъектов, а также то, что вдоль волокна форма его поперечного сечения меняется незначительно. Список областей практического применения микро- и нановолокон, полученных методом электроформования, весьма обширен и включает в себя фильтры различного назначения, нанокомпозиты, биомедицинские приложения – клеточные каркасы и системы транспортировки лекарственных средств, и т.д.

Хотя метод электроформования стал известен в начале XX века, механизм уменьшения диаметра струи и образования волокна остается до конца не ясным. Несмотря на технологическую простоту, электроформование представляет собой комплексный процесс, включающий в себя электрогидродинамику слабопроводящих неньютоновских жидкостей и фазовые превращения – испарение растворителя и отвердевание полимерного волокна. В процессе электроформования струя полимерного раствора (смеси полимера и летучего растворителя) проходит три стадии – начального прямолинейного стационарного течения, нестабильного движения и окончательного формирования полимерного волокна с его осаждением на субстрате. Электрогидродинамика заряженных струй впервые была рассмотрена в работах Рэля [15], Зелени [31] и Тэйлора [19, 23]. Механизм появления струи из капли полимерного раствора был исследован Спиваком и Дзенисом [19] и Яриным [30]. Спивак и Дзенис [21] и Фенг [9] предложили одномерные модели течения стационарной струи. Ренкер, Ярин [17, 29] и Ратледж [12] разработали дискретные модели для нестабильной струи.

Большинство существующих моделей основаны на сведении задачи к одномерному случаю в предположении, что скорости и реологические свойства жидкости постоянны по сечению струи. Экспериментально показано [8], что испарение растворителя с поверхности струи ведет к значительной неоднородности свойств струи по сечению, а это, в свою очередь, сказывается на течении в целом. Таким образом, для более точного моделирования процесса электроформования и разработки эффективных методов контроля за конечным диаметром производимого волокна необходим качественно новый подход в виде перехода от упрощенных одномерных моделей к трехмерным. В настоящей работе рассматривается трехмерная задача об устойчивом течении осесимметричной струи с учетом испарения в начале процесса электроформования (рис.1).

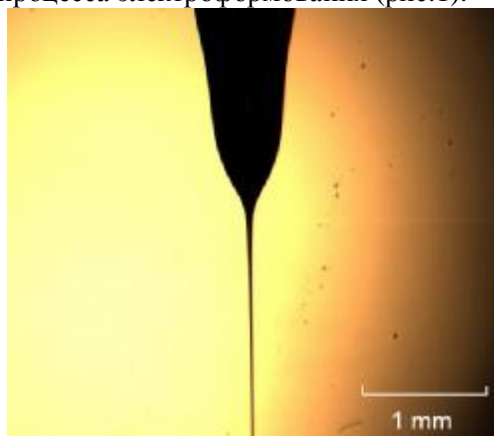


Рис.1. Стационарная струя на начальном этапе электроформования волокна

1. Постановка задачи

Рассматривается задача об устойчивом течении осесимметричной струи вязкой жидкости с переменной вязкостью с учетом массопереноса в результате испарения с поверхности. Стационарное решение получается методом установления из решения динамической задачи. Математическая формулировка задачи состоит из уравнений гидродинамики, электростатики и термодинамики. Гидродинамическая часть представляет собой уравнение неразрывности

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla(r\bar{v}) = 0 \quad (1)$$

и уравнение движения вязкой жидкости с переменной вязкостью

$$r\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v}\right) = -\nabla p + \nabla T^{visc}, \quad T^{visc} = 2hG, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости, \bar{v} – вектор скорости, p – давление, η – кинематическая вязкость, T^{visc} – тензор вязких напряжений, и тензор градиента скорости $G = (\nabla\bar{v} + \nabla\bar{v}^T)/2$.

В рассматриваемой цилиндрической системе координат (r, j, z) все переменные являются функциями времени и не зависят от угла j . Свободная поверхность струи задается при помощи уравнения

$$r = R(z, t). \quad (3)$$

На поверхности жидкости ставятся кинематическое граничное условие

$$\frac{\partial R}{\partial t} + v_z \frac{\partial R}{\partial z} = v_r \quad (4)$$

и динамическое граничное условие [13, 14]

$$-[p]I + (\mathbf{S}^M)_{r=R} - (T^{visc})_{r=R} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2). \quad (5)$$

Здесь v_r и v_z – радиальная и продольная составляющие скорости соответственно, \mathbf{S}^M – тензор Максвелла, γ – коэффициент поверхностного натяжения, ξ_1 и ξ_2 – главные кривизны поверхности жидкости, I – единичный тензор, $[p]$ – разница между гидростатическим давлением у поверхности жидкости и атмосферным давлением. Максвелловский тензор напряжений на свободной поверхности имеет касательную и нормальную составляющие t_t^e и t_n^e , определяемые внешним полем \bar{E} и поверхностной плотностью заряда \mathbf{S}

$$t_t^e = \mathbf{S}E_t \approx \mathbf{S}E, \quad (6)$$

$$t_n^e = \left\| \frac{\mathbf{e}}{2} (E_n^2 - E_t^2) \right\| \approx \frac{\mathbf{S}^2}{2\bar{\epsilon}} - \frac{\bar{\epsilon} - \epsilon}{2} E^2, \quad (7)$$

где $E = |\bar{E}|$, $\bar{\epsilon}$ и ϵ – диэлектрические постоянные жидкости и воздуха соответственно [9, 11, 18, 20].

Поверхностная плотность заряда для слабопроводящих жидкостей вычисляется по формуле [19, 20, 21]

$$\mathbf{S} = \frac{I_0 R}{2Q}, \quad (8)$$

где I_0 – электрический ток, переносимый струей, Q – объемный расход через поперечное

сечение струи

$$Q(z) = \int_0^{2p} \int_0^R v_z dr dj = 2p \int_0^R v_z dr = const. \quad (9)$$

При решении методом установления условие стационарности течения требует, чтобы объемный расход был одинаковым для любого поперечного сечения

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

При постановке задачи об испарении мы пренебрегаем диффузией растворителя вдоль оси тонкой струи, ограничиваясь лишь массопереносом в радиальном направлении. Обозначим через C массовую концентрацию растворителя, через D – коэффициент диффузии. Тогда уравнение диффузии растворителя имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Dr \frac{\partial C}{\partial r} \right). \quad (11)$$

Начальные условия

$$t = 0: \quad C = C_0, \quad R(z, 0) = R_0(z), \quad (12)$$

где C_0 – начальная массовая концентрация, постоянная по сечению струи, R_0 – начальный радиус струи. Далее, введем граничные условия на оси

$$r = 0: \quad \partial C / \partial r = 0 \quad (13)$$

и на поверхности жидкости

$$r = R(z, t): \quad \frac{D}{1 - \bar{V}_1 C} \frac{\partial C}{\partial r} = - \frac{k_g M_1 (P_s - P_\infty)}{R_{gas} T}, \quad \bar{V}_1 = 1 / r_2. \quad (14)$$

Здесь k_g – коэффициент массопереноса через поверхность струи, M_1 – молярная масса растворителя, $R_{gas} = 8.3144$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная, P_s и P_∞ – давление насыщенного пара растворителя у поверхности и на бесконечности соответственно, T – абсолютная температура, r_2 – массовая плотность полимера.

Изменение радиуса вследствие массопереноса записывается в виде

$$\frac{dR}{dt} = - \frac{k_g M_1 \bar{V}_1}{R_{gas} T} (P_s - P_\infty). \quad (15)$$

Для двухкомпонентного раствора давление насыщенного пара как функция концентрации задается уравнением Флори и Хаггинса [10]

$$P_s / P_0 = f_1 \exp(f_2 + c f_2^2), \quad (16)$$

где P_0 – давление насыщенного пара чистого растворителя, ϕ_1 и $\phi_2 = (1 - \phi_1)$ – объемные доли растворителя и полимера соответственно, и χ – параметр Флори-Хаггинса, задающийся полуэмпирическим уравнением Бристуа [3, 32]

$$c = 0.35 + (d_1 - d_2) \tilde{V} / (R_{gas} T). \quad (17)$$

Здесь \tilde{V} – молярный объем растворителя, δ_1 and δ_2 – коэффициенты растворимости растворителя и полимера соответственно.

Согласно теории «свободного объема» Врентаса и Дуды [7, 32] выражение для коэффициента диффузии в растворе имеет вид

$$D = D_1(1 - f_1)^2(1 - 2cf_1), \quad (18)$$

где D_1 – коэффициент самодиффузии растворителя.

Смешанная осесимметричная задача электрогидродинамики и массопереноса (1 – 7) и (11 – 14) решается численно.

2. Решение

Для математического моделирования течения жидкости в вязких заряженных струях с учетом испарения был разработан специальный алгоритм, состоящий из трех частей – а) комбинированный лагранжево-эйлеров метод решения задач динамики жидкости со свободной поверхностью, б) конечно-разностная лагранжева схема для массопереноса, в) связующий алгоритм.

Для решения задачи о движении жидкости со свободной поверхностью используется метод, основанный на упрощенном методе маркеров и ячеек (SMAC, Simplified Marker-And-Cell method) Амсдена и Харлоу[2]. Этот метод является дальнейшим развитием метода маркеров и ячеек (MAC, Marker-And-Cell method), предложенного в 1961 г. Харлоу и Уэлчем [28], и ставшего основой для целого ряда модифицированных методов [5, 24–27], включающих в себя методы расчета течения вязкоупругих жидкостей, трехмерные методы и т.д. Метод SMAC является конечно-разностным методом, использующим совместное эйлера-лагранжево представление среды. При наличии у жидкости свободной поверхности область интегрирования уравнений гидродинамики в общем случае постоянно меняется, поэтому в методе SMAC на каждом шаге итерации отслеживаются частицы-маркеры, движущиеся вместе с жидкостью, не оказывающие влияния на течение и позволяющие определять положение жидкости в пространстве и рассчитывать течения с большими деформациями. В данной работе маркеры применяются только для расчета свободной поверхности.

Задача о диффузии и массопереносе решается при помощи неявной конечно-разностной схемы на лагранжевой сетке. Число узлов фиксировано, и шаг меняется после каждой итерации. Значения концентрации в узлах на новой сетке после каждого шага итерации вычисляются с помощью интерполирования из значений на предыдущем шаге. Кроме того, вблизи поверхности используется более мелкая сетка для устранения возможных ошибок из-за быстрого массопереноса.

Для реализации связующего алгоритма струя разбивается на относительно короткие сегменты (длиной 1 мм при начальном диаметре струи 100 мкм). Для каждого из сегментов решается динамическая задача об установлении осесимметричной струи. Каждый сегмент изначально задается цилиндрическим, с полем скоростей и распределением вязкости, полученными на выходе из предыдущего сегмента и не меняющимися вдоль оси струи. Сам связующий алгоритм состоит из трех этапов. На первом этапе гидродинамическая задача течения в струе с фиксированным полем скоростей на входе и неизвестным на выходе решается до тех пор, пока струя не становится стационарной и условие (10) не удовлетворяется. На втором этапе решается уравнение диффузии для струи со средним значением радиуса R_c , полученного на предыдущем этапе. Временной интервал рассчитывается как

$$\Delta t = pR_c^2 L / Q, \quad (19)$$

где L – длина сегмента. На третьем этапе относительное уменьшение радиуса вследствие испарения прикладывается к полученному радиусу на выходе из сегмента. Новое поле скоростей в эйлеровой сетке вычисляется путем интерполирования. Распределение вязко-

сти вдоль сечения находится по эмпирической формуле Марка-Хоувинка на основе полученных на втором этапе профилей концентрации

$$h = r_1 C K_m M_1^\alpha. \quad (20)$$

Здесь r_1 – плотность растворителя, K_m и α – постоянные коэффициенты.

3. Результаты

Рассмотрен раствор полиакрилонитрила в диметилформамиде с начальной массовой концентрацией растворителя 96%. Свойства растворителя (диметилформамид): плотность $\rho_1 = 0.944$ г/см³, молекулярная масса $M_1 = 73$, свойства полимера (полиакрилонитрил): плотность $\rho_2 = 1.184$ г/см³, молекулярная масса $M_2 = 145000$. Коэффициент самодиффузии растворителя $D_1 = 1.5 \times 10^{-6}$ см/с, коэффициент Флори-Хаггинса $\chi = 0.45$. Давление насыщенного пара чистого растворителя при 20°C равно 500 Па. Напряженность электрического поля $E = 40$ кВ/м, ток, переносимый струей $I_0 = 95$ нА, диэлектрические постоянные жидкости и воздуха соответственно $\epsilon = 4.117 \times 10^{-10}$ Кл²/Н·м² and $\bar{\epsilon} = 8.854 \times 10^{-12}$ Кл²/Н·м². Постоянный объемный расход в начале струи $Q = 15$ мкл/с, начальный радиус струи 50 мкм. Начальная динамическая вязкость $\mu = 2296$ сантипуаз получена из уравнения Марка-Хоувинка, где $K_\mu = 11.92 \times 10^{-6}$ Па·л/г и $\alpha = 0.76$. Коэффициент поверхностного натяжения $\gamma = 0.050$ Н/м.

Коэффициент массопереноса k_g является определяющим параметром для скорости процесса испарения через поверхность струи. Результаты численного анализа течения струи с различными значениями коэффициента массопереноса приведены ниже. Случай $k_g = 0$ соответствует чисто электрогидродинамической задаче без учета испарения растворителя с поверхности и диффузии внутри струи, таким образом, вязкость остается постоянной вдоль всей струи и не меняется со временем. Рис. 2 показывает изменение вдоль оси радиусов струй с пятью различными коэффициентами массопереноса. Соответствующие профили скоростей и вязкости представлены на рис. 3-4.

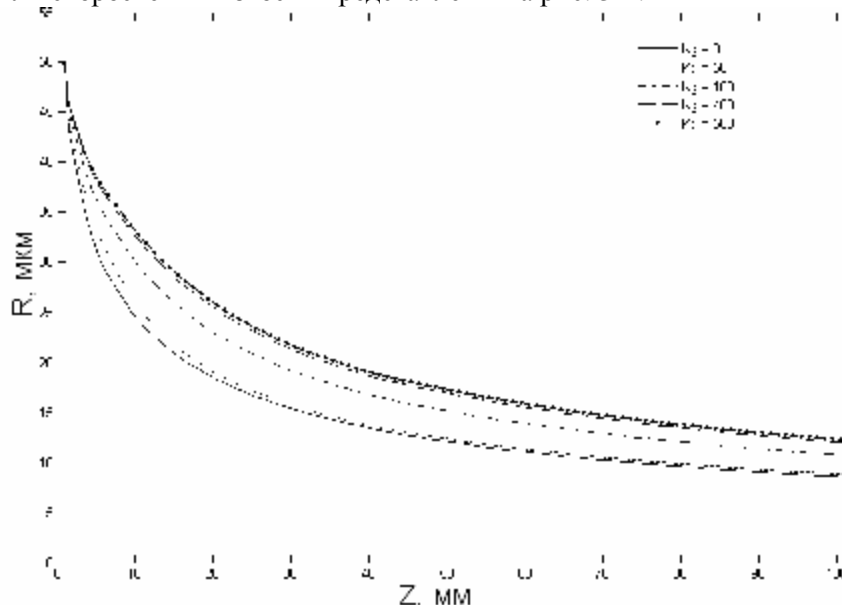


Рис. 2. Зависимости радиуса струи от продольной координаты для различных значений k_g

Из рис. 2 следует, что скорость испарения оказывает большое влияние на формирование струи при электроспиннинге. В рассматриваемом диапазоне коэффициентов массопереноса уже на расстоянии 20 мм от начала струи разница радиусов разных струй может составлять до 45%. Разница возрастает вдоль оси. Следует отметить, что испарение растворителя ведет к увеличению радиуса струи, а не к его уменьшению, как можно было бы ожидать. Причиной этого является резкое возрастание вязкости на поверхности жидкости вследствие испарения (рис. 4), что в свою очередь ведет к уменьшению скорости на поверхности жидкости и замедлению процесса вытягивания струи в целом. Уменьшение диаметра в результате испарения на рассматриваемом нами начальном этапе электроформования мало по сравнению с увеличением радиуса из-за замедления течения струи при постоянном объемном расходе.

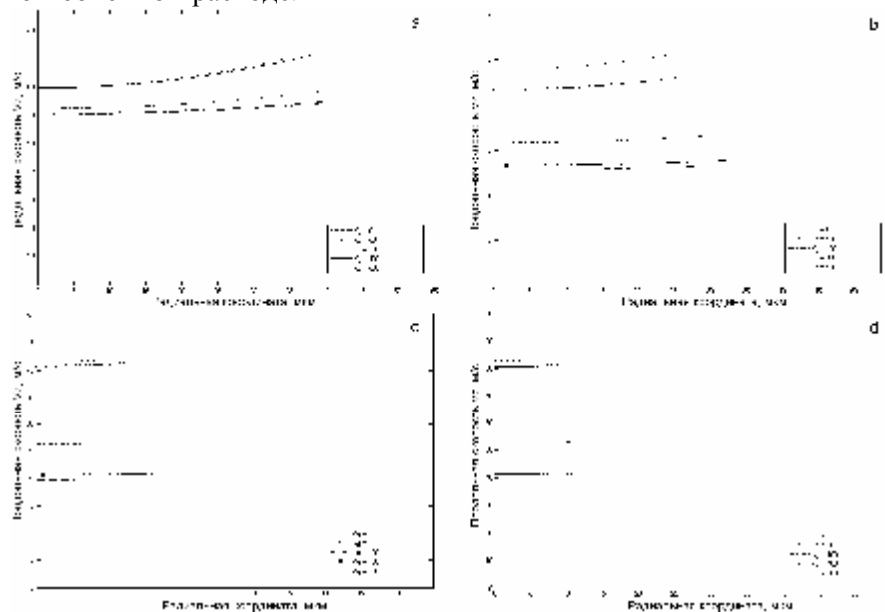


Рис. 3. Профили продольных скоростей для поперечных сечений (a) $z = 2$ мм, (b) $z = 5$ мм, (c) $z = 50$ мм, and (d) $z = 100$ мм.

Как видно из рис. 3, испарение приводит к значительному разбросу осредненных по сечению продольных скоростей для разных значений k_g . При $z=100$ мм средние по сечению скорости в случаях $k_g = 50$ см/с и 500 см/с различаются примерно в два раза. Во всех случаях профили продольной скорости не являются постоянными по сечению, распределение близко к параболическому, причем скорость достигает своего максимума на поверхности струи. Профили скоростей в струе без испарения ($k_g = 0$) также неоднородны по сечению, следовательно, неоднородность реологических параметров жидкости в случае испарения влияет лишь на среднюю скорость течения и не ведет к качественному изменению профиля скоростей вдоль радиуса струи.

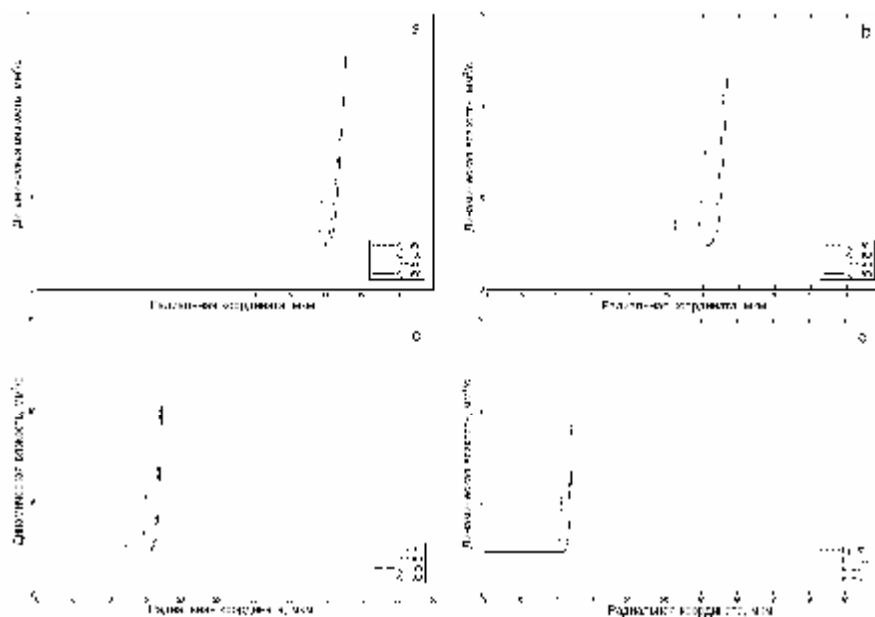


Рис. 4. Распределение динамической вязкости для поперечных сечений (a) $z = 2$ мм, (b) $z = 5$ мм, (c) $z = 50$ мм, and (d) $z = 100$ мм

Заключение

Впервые разработана трехмерная электрогидродинамическая модель электроформования полимерных волокон с учетом испарения растворителя с поверхности струи. На основании полученных данных можно сделать следующие выводы:

1) Испарение растворителя ведет к значительной неоднородности реологических свойств жидкости вдоль радиуса струи. Неоднородность возникает практически сразу после начала течения струи и оказывает существенное влияние на процесс уже на раннем этапе.

2) Испарение приводит к значительному уменьшению скорости в стационарной струе. Процесс уменьшения диаметра испаряющейся струи замедляется вместе с увеличением скорости испарения растворителя, несмотря на то, что испарение ведет к уменьшению диаметра за счет массопереноса растворителя через поверхность. Зависимость диаметра от коэффициента массопереноса является нелинейной.

3) Продольные скорости распределены неравномерно по сечению, характер распределения параболический. Осредненная по сечению скорость зависит от скорости испарения и распределения вязкости/концентрации по сечению струи.

г. Саратов

Поступила: 14 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петрянов, И. В.* Волокнистые фильтрующие материалы / И. В. Петрянов, В. И. Козлов, П. И. Басманов и др. – М. : Знание, 1968. – 77 с.
2. *Amsden, A. A.* The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flow (Report

- LA-4370) / A. A. Amsden, F. H. Harlow. – Los Alamos: Los Alamos National Laboratory, 1970
3. *Bristow, G. M.* Trans. Faraday Soc / G. M. Bristow, W. F. Watson 54, 1958. – C. 1731
 4. *Crank, J.* The Mathematics of Diffusion / J. Crank. – Oxford: Oxford University Press, 1975
 5. *Daly, B. J. J.* Comput. Phys / B. J. Daly. 4, 1969. – C. 97
 6. *Doshi, J.* Electrostatic / J. Doshi., D. H. Reneker 35, 1995 – C. 151
 7. *Duda, J. L.* AIChE J. / J. L. Duda, J. S. Vrentas, S. T. Ju, H. T. Liu 28, 1982. – C. 279
 8. *Dzenis, Y.* Science / Y. Dzenis 304, 2004. – 1917 c.
 9. *Feng, J. J.* Non-Newtonian Fluid Mech / J. J. Feng 116, 2003. – C.55
 10. *Flory, P. J.* Principles of Polymer Chemistry/ P. J. Flory. – Ithaca: Cornell University Press, 1953
 11. *Ganan-Calvo, M. J.* Fluid Mech / M. Ganan-Calvo. 335, 1997. – C. 165
 12. *Hohman, M. M.* Phys. Fluids / M. M. Hohman, M. Shin, G. Rutledge, M.P. Brenner 13, 2001. – C.2201
 13. *Landau L. D.*, Electrodynamics of Continuous Media / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – London: Pergamon, 1959
 14. *Landau, L. D.* Fluid Mechanics / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – London: Pergamon, 1959
 15. *Lord Rayleigh, J. W. S.* Philos / J. W. S. Lord Rayleigh Mag. 44, 1882. – C. 184
 16. *Reneker, D. H.* / Nanotechnology 7 / D. H. Reneker, I. Chun, 1996 – C. 216
 17. *Reneker, D. H.* J. Appl. / D. H. Reneker, A. L. Yarin, S. Koombhongse. – Phys. 87, 2000. – C.4531
 18. *Saville, D. A.* Annu. Rev. Fluid Mech / D. A. Saville. 29, 1997. – C. 27
 19. *Spivak, A. F.* / J. Appl / A. F. Spivak, Y. A. Dzenis. – Mech. 66, 1999. – C. 1026
 20. *Spivak, A. F.* Electrohydrodynamics of Electrospinning Process (Ph.D. thesis) / A. F. Spivak. – Lincoln: University of Nebraska, 2000
 21. *Spivak, A. F.* Mech. Res. Commun. / A. F. Spivak, Y. A. Dzenis, D. H. Reneker. 27, 2000. – C.37
 22. *Taylor, G. I.* / Proc. R. Soc. London / G. I Taylor, Ser. A 280, 1964. – P. 383
 23. *Taylor, G. I.* Proc. R. Soc. London/ G. I Taylor, Ser. A 313, 1969. – C. 453
 24. *Tomé, M. F.* / J. Non-Newtonian Fluid Mech. / M. F. Tomé, N. Mangiavacchi, J. A. Cuminato, A. 106, 2002. – C. 61
 25. *Tome, M. F. J.* Comput. Phys. / M. F. Tome, S. McKee. 110, 1994. – C. 171
 26. *Tome, M. F. J. A.* Cuminato, N. Mangiavacchi, and S. McKee, S., Int. J. Nume. Meth. Fluids 37 / M. F. Tome, A. Castelo 2002. – C. 747
 27. *Viecelli, J. A. J.* Comput. Phys / J. A. Viecelli. 8, 1971. – C. 119
 28. *Welch, J. R.* The MAC Method (Report LA-3425) / J. R. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon, B. J. Daly. – Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory, 1965
 29. *Yarin, L. J.* Appl / L. Yarin, S. Koombhongse, D. H. Reneker. – Phys. 90, 2001. – C. 4836
 30. *Yarin, A. L. J.* Appl. / A. L. Yarin, S. Koombhongse, D. H. Reneker. – Phys. 89, 2001. – C.3018
 31. *Zeleny, J.* Phys. / J. Zeleny. // Rev. 10, 1917. – C. 1
 32. *Zielinski, J. M.* AIChE J / J. M. Zielinski, J. L. Duda 38, 1992. – C. 405

Salkovskiy Y. E.

MODELING OF THE STEADY-STATE EVAPORATING POLYMER JET DURING ELECTROSPINNING

Electrospinning is an emerging nanomanufacturing technology producing continuous nanofibers from polymer solutions or melts in high electric fields. Electrospinning is a complex process involving coupled electrohydrodynamics, mass and heat diffusion/transfer, and phase transition, etc. Currently available one-dimensional electrohydrodynamic models of electrospinning are based on the assumption that the fluid properties and flow parameters distribute uniformly across the jet. However, solvent evaporation from thin jets can lead to significant jet inhomogeneity over cross section. In this paper, a 3D model of the steady-state axisymmetric evaporating electrospun jet flow incorporating electrostatic, mechanical, and mass transfer phenomena is presented. Effects of solvent evaporation on the distribution of the rheological properties across

the jet and on the velocity profiles are examined. Nonlinear dependence of the jet diameter evolution on mass transfer coefficient is also evaluated. It is shown that the diameter of the stable jet increases with higher values of the solvent evaporation rate, opposite to the expected jet thinning due to the pure solvent loss. Results in this study can be helpful for better understanding of the electrospinning process and can be used for development of the advanced, fully controlled methods of nanofiber manufacturing based on electrospinning.

Keywords: *electrospinning, nanomanufacturing, nanotechnology, nanofibers, polymer fibers, drying, evaporation, mass transfer, axisymmetric jets, polymer solution, MAC method, electrohydrodynamics.*

О ДИССЕРТАЦИОННЫХ СОВЕТАХ
по физико-математическим наукам по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела при ГОУ ВПО «ЧГПУ им. И.Я. Яковлева»

Диссертационный совет Д113.67.01 утвержден при Чувашском государственном педагогическом институте им. И.Я. Яковлева (г. Чебоксары) приказом Высшего аттестационного комитета №428в от 13 декабря 1995г.

Диссертационному совету разрешено принимать к защите диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математическим наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела.

Состав диссертационного совета Д113.67.01
при ЧГПИ им. И.Я. Яковлева

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание, шифр специальности и отрасль науки в совете
1.	Ивлев Дюис Данилович (председатель)	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
2.	Толоконников Леонид Александрович (зам. председателя)	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
3.	Чекмарев Георгий Евгеньевич (ученый секретарь)	к.ф.-м.н., доцент, 01.02.04 – физико-математические науки
4.	Аннин Борис Дмитриевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
5.	Астафьев Владимир Иванович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
6.	Ерхов Михаил Иванович	д.т.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
7.	Иванов Евгений Григорьевич	д.т.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
8.	Кулиев Валех Джафарович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
9.	Маркин Алексей Александрович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки

10.	Матченко Николай Михайлович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
11.	Непершин Ростислав Иванович	д.т.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
12.	Паймушин Виталий Николаевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
13.	Сильвестров Василий Васильевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
14.	Соснин Олег Васильевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
15.	Спорыхин Анатолий Николаевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
16.	Столяров Алексей Васильевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
17.	Терегулов Ильтизар Гизатович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
18.	Тереньтьев Алексей Григорьевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки

СВЕДЕНИЯ О ДИССЕРТАНТАХ

1996год

Защиты на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

1. **Зеленев Вячеслав Михайлович.** (Воронежский государственный педагогический университет)

Тема диссертации: «Некоторые вопросы теории и задачи динамики вязкоупругих сред»

Дата защиты диссертационной работы: 26 декабря

Научные консультанты: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ. Мешков Станислав Иванович, д.ф.-м.н., профессор Воронежского государственного педагогического университета.

Оппоненты

Шестериков Сергей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий отделом прочности Института механики Московского государственного университета.

Ломакин Евгений Викторович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории пластичности Московского государственного университета.

Астафьев Владимир Иванович, д.ф.-м.н., профессор, зав кафедрой механики сплошной среды Самарского государственного университета, проректор по НИР.

Ведущая организация: Российский Университет Дружбы Народов, г. Москва.

2. **Артемов Михаил Анатольевич** (Воронежский государственный университет)

Тема диссертации: «Вопросы и задачи теории идеальной пластичности»

Дата защиты диссертационной работы: 25 декабря

Научный консультант: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты

Ерхов Михаил Иванович, д.т.н., профессор, член корреспондент РАА и С, зав. Кафедрой сопротивления материалов Российского Университета Дружбы Народов.

Ревуженко Александр Филиппович, д.ф.-м.н., профессор зав. лабораторией института горного дела Сибирского отделения РАН.

Шестериков Сергей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий отделом прочности Института механики Московского государственного университета.

Ведущая организация: Самарский государственный университет.

3. Салиев Алишер Борубаевич (Институт физики и механики горных пород Национальной академии наук Киргизской Республики)

Тема диссертации: «**Структурные представления в механике материалов**»

Дата защиты диссертационной работы: 25 декабря

Научный консультант: Леонов Михаил Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. лабораторией теории упругости в Институте автоматике НАН КР, академик НАН КР.

Оппоненты

Ломакин Евгений Викторович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории пластичности Московского государственного университета.

Матченко Николай Михайлович, д.ф.-м.н., профессор Тульского государственного университета, декан.

Ревуженко Александр Филиппович, д.ф.-м.н., профессор зав. лабораторией института горного дела Сибирского отделения РАН.

Ведущая организация: Воронежский государственный университет.

Защиты на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

1. Захарова Татьяна Львовна. (ЧГПИ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «**Линеаризованные задачи упругопластического состояния анизотропных и неоднородных сред**»

Дата защиты диссертационной работы: 25 декабря

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Маркин Алексей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой зав. кафедрой вычислительной математики Тульского государственного университета.

Григорьев Евгений Арсеньевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и геометрии Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова.

Ведущая организация: Воронежский государственный педагогический университет.

2. Ефремов Вячеслав Геннадьевич. (ЧГПИ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «**Напряженное состояние упругопластического пространства с эллипсоидальной полостью**»

Дата защиты диссертационной работы: 24 декабря

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Иванов Евгений Григорьевич, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова.

Романов Александр Викторович, к.ф.-м.н., зам. кафедрой информатики Республиканского института образования, проректор по научной работе. (г. Чебоксары).

Ведущая организация: Воронежская государственная архитектурно-строительная академия.

3. Михайлова Марина Васильевна (ЧГПИ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Предельное состояние идеально пластических тел, ослабленных пологими выточками»

Дата защиты диссертационной работы: 26 декабря

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Сильвестров Василий Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, зав кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова.

Романов Александр Викторович, к.ф.-м.н., зам. кафедрой информатики Республиканского института образования проректор по научной работе. (г. Чебоксары).

Ведущая организация: Воронежский государственный университет.

4. Васильева Анна Михайловна (ЧГПИ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Идеальнопластическое состояние цилиндрических и призматических тел переменного сечения»

Дата защиты диссертационной работы: 25 декабря

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Терегулов Ильтизар Гизатович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов Казанской государственной архитектурно-строительной академии.

Шитова Любовь Борисовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и геометрии Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова.

Ведущая организация: Воронежский государственный технический университет.

5. Рыбакова Татьяна Ивановна. (ЧГПИ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Устойчивость течения вязкопластических тел»

Дата защиты диссертационной работы: 24 декабря

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Паймушин Виталий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов Казанского государственного технического университета.

Миронов Петр Геннадьевич. к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и геометрии Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова.

Ведущая организация: Воронежская государственная технологическая академия.

1999г.

Защиты на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

1. Мяснянкин Юрий Михайлович (Воронежский государственный университет)

Тема диссертации: «Некоторые задачи математической теории пластичности и ее приложения»

Дата защиты диссертационной работы: 29 июня

Научный консультант: Быковцев Геннадий Иванович, зам. Директора Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН.

Оппоненты.

Ломакин Евгений Викторович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории пластичности Московского государственного университета.

Маркин Алексей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического моделирования Тульского государственного университета.

Баскаков Владимир Александрович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической механики и теоретической физики Воронежского государственного технического университета.

Ведущая организация: Воронежская государственная архитектурно-строительная академия.

2. Коробкин Валерий Дмитриевич. (Воронежская государственная архитектурно-строительная академия)

Тема диссертации: «Некоторые вопросы математического анализа задач теории пластичности»

Дата защиты диссертационной работы: 30 июня

Научный консультант: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты

Баскаков Владимир Александрович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической механики и теоретической физики Воронежского государственного технического университета.

Ерхов Михаил Иванович, д.т.н., профессор, член корреспондент РАА и С, зав. кафедрой сопротивления материалов Российского Университета Дружбы Народов.

Ревуженко Александр Филиппович, д.ф.-м.н., профессор зав. лабораторией института горного дела Сибирского отделения РАН.

Ведущая организация: Воронежский государственный университет.

3. Шашкин Александр Иванович. (Воронежский государственный университет)

Тема диссертации: «Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород»

Дата защиты диссертационной работы: 29 июня

Научный консультант: Спорыхин Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета.

Оппоненты

Астафьев Владимир Иванович, д.ф.-м.н., профессор, проректор по НИР, зав кафедрой механики сплошной среды Самарского государственного университета.

Ломакин Евгений Викторович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории пластичности Московского государственного университета.

Ревуженко Александр Филиппович, д.ф.-м.н., профессор зав. лабораторией института горного дела Сибирского отделения РАН.

Ведущая организация: Воронежская государственная архитектурно-строительная академия.

Защиты на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

1. Петров Григорий Васильевич (ЧГПУ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Деформирование упрочняющихся пластических тел с возмущенными границами»

Дата защиты диссертационной работы: 30 июня

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты

Иванов Евгений Григорьевич, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов ЧГУ им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары.

Максимова Людмила Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент ЧГПУ им. И.Я. Яковлева.

Ведущая организация: Воронежский государственный университет.

2000г.

Защиты на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

1. Семькина Татьяна Дмитриевна. (Воронежский государственный университет)

Тема диссертации: «Некоторые вопросы теории и прикладные задачи пластических и вязко пластических тел и конструкций»

Дата защиты диссертационной работы: 21 декабря

Научный консультант: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты

Баскаков Владимир Александрович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической механики и теоретической физики Воронежского государственного технического университета.

Ерхов Михаил Иванович, д.т.н., профессор, член корреспондент РАА и С, зав. кафедрой сопротивления материалов Российского Университета Дружбы Народов.

Ломакин Евгений Викторович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории пластичности Московского государственного университета.

Ведущая организация: Воронежская государственная архитектурно-строительная академия.

Защиты на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

1. Целистова Евгения Анатольевна (ЧГПУ им. И. Я. Яковлева)

Тема диссертации: **«Некоторые задачи определения напряженно-деформированного состояния слоя из неоднородного идеальнопластического материала, сжатого шероховатыми плитами»**

Дата защиты диссертационной работы: 21 декабря

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты

Ерхов Михаил Иванович, д.т.н., профессор, член корреспондент РАА и С, зав. кафедрой сопротивления материалов Российского Университета Дружбы Народов.

Максимова Людмила Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент ЧГПУ им. И.Я. Яковлева.

Ведущая организация: Воронежский государственный университет.

Диссертационный совет ДМ 212.300.02 утвержден при Чувашском государственном педагогическом университете им. И.Я. Яковлева (г. Чебоксары) приказом Высшей аттестационной комиссии от 13 апреля 2001 г. № 1101-в.

Диссертационному совету разрешено принимать к защите диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математическим наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела.

Состав диссертационного совета ДМ 212.300.02

При ГОУ ВПО «ЧГПУ им. И.Я. Яковлева»

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание, шифр специальности и отрасль науки в совете
1.	Ивлев Дюис Данилович (председатель)	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
2.	Матченко Николай Михайлович (зам. председателя)	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
3.	Михайлова Марина Васильевна (ученый секретарь)	к.ф.-м.н., 01.02.04 – физико-математические науки
4.	Артемов Михаил Анатольевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
5.	Баскаков Владимир Александрович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
6.	Ерхов	д.т.н., профессор,

	Михаил Иванович	01.02.04 – физико-математические науки
7.	Иванов Евгений Григорьевич	д.т.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
8.	Илларионов Илья Егорович	д.т.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
9.	Маркин Алексей Александрович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
10.	Непершин Ростислав Иванович	д.т.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
11.	Радаев Юрий Николаевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
12.	Россихин Юрий Алексеевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
13.	Сильвестров Василий Васильевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
14.	Столяров Алексей Васильевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
15.	Шашкин Александр Иванович	д.ф.-м.н., доцент, 01.02.04 – физико-математические науки

2002год.

Защиты на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

1. Петрова Вера Евгеньевна (Воронежский государственный университет)

Тема диссертации: «Взаимодействие магистральной трещины с микродефектами и микровключениями»

Дата защиты диссертационной работы: 20 июня

Научный консультант: Тамуж Витаут Петрович, д.ф.-м.н., профессор, академик Латвийской АН, зав. лабораторией Института механики полимеров, г. Рига, Латвия.

Оппоненты.

Морозов Евгений Михайлович, д.т.н., профессор кафедры физики прочности Московского инженерно-физического института (государственного университета)

Ломакин Евгений Викторович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории пластичности Московского государственного университета.

Маркин Алексей Александрович, д.ф.-м.н., зав кафедрой вычислительной математики Тульского госуниверситета.

Ведущая организация: Институт проблем механики РАН (г. Москва)

2. Михайлова Марина Васильевна (ЧГПУ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Исследование некоторых вопросов теории пластического тела»

Дата защиты диссертационной работы: 21 июня

Научный консультант: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Шемякин Евгений Иванович, д.т.н., профессор, зав. кафедрой волновой и газовой динамики Московского государственного университета, Академик РАН.

Морозов Евгений Михайлович, д.т.н., профессор кафедры физики прочности Московского инженерно-физического института (государственного университета)

Артемов Михаил Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета

Ведущая организация: Воронежская государственная технологическая академия

Защиты на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

1. Гоцев Дмитрий Викторович (Воронежский государственный университет)

Тема диссертации: «Исследование устойчивости горных выработок с многослойными креплениями при упруго-пластическом поведении материалов массива и крепи»

Дата защиты диссертационной работы: 20 июня

Научный руководитель: Спорыхин Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета.

Оппоненты.

Шашкин Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, декан ПММ Воронежского государственного университета.

Васильева Анна Михайловна, к.ф.-м.н., доцент Чебоксарского кооперативного института Московского университета потребительской кооперации.

Ведущая организация: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет.

2. Ильин Дмитрий Владимирович (ЧГПУ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Предельное состояние идеально пластического слоя, сжатого жесткими искривленными и наклонными плитами»

Дата защиты диссертационной работы: 21 июня

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Артемов Михаил Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета.

Максимова Людмила Анатольевна, д.ф.-м.н., доцент ЧГПУ им. И.Я. Яковлева.

Ведущая организация: Воронежский государственный педагогический университет.

3. Лямина Елена Алексеевна (Институт проблем механики РАН, г. Москва)

Тема диссертации: «Сингулярные поля скоростей при плоском пластическом течении материала, подчиняющегося модели двойного сдвига (модели Спенсера)»

Дата защиты диссертационной работы: 21 июня

Научные руководители: Гольдштейн Роберт Вениаминович, д.ф.-м.н., профессор, зав. лабораторией механики прочности и разрушения материалов и конструкций Института проблем механики РАН. Александров Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н., В.н.с. Института проблем механики РАН.

Оппоненты

Маркин Алексей Александрович, д.ф.-м.н., зав кафедрой вычислительной математики Тульского госуниверситета.

Максимова Людмила Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент ЧГПУ им. И.Я. Яковлева

Ведущая организация: Московская государственная академия приборостроения и информатики

4. Иванов Игорь Александрович. (ЧГУ им. И.Н. Ульянова)

Тема диссертации: «**Задача соединения упругих пластин в пакет вдоль периодической системы кривых**»

Дата защиты диссертационной работы: 20 июня

Научный руководитель: Сильвестров Василий Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, зав кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений ЧГУ им. И.Н. Ульянова.

Оппоненты

Маркин Алексей Александрович, д.ф.-м.н., профессор зав кафедрой вычислительной математики Тульского госуниверситета.

Чекмарев Георгий Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент ЧГПУ им. И.Я. Яковлева

Ведущая организация: Самарский государственный технический университет.

5. Максимов Алексей Николаевич. (Чебоксарский институт (филиал) Московского государственного открытого университета)

Тема диссертации: «**Напряженное состояние упругопластического сжимаемого пространства, ослабленного эллипсоидальной полостью**»

Дата защиты диссертационной работы: 20 июня

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты

Баскаков Владимир Александрович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры теоретической физики Воронежского государственного технического университета.

Максимова Людмила Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент ЧГПУ им. И.Я. Яковлева

Ведущая организация: Воронежский государственный педагогический университет.

2004 год

Защиты на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

1. Миклашевич Игорь Александрович. (Белорусский национальный технический университет. Г. Минск)

Тема диссертации: «**Влияние структурной неоднородности на процессы стохастизации и регуляции процессов деформирования и разрушения твердых сред**»

Дата защиты диссертационной работы: 21 апреля

Научный консультант: Чигарев Анатолий Власович, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой теоретической механики Белорусского национального технического университета.

Оппоненты.

Шемякин Евгений Иванович, д.т.н., профессор, зав. кафедрой волновой и газовой динамики Московского государственного университета Академик РАН.

Морозов Евгений Михайлович, д.т.н., профессор, профессор кафедры физики прочности Московского инженерно-физического института. (государственного университета)

Сильвестров Василий Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, зав кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений ЧГУ им. И.Н. Ульянова.

Ведущая организация: Самарский государственный университет.

2. Кравчук Александр Степанович. (Белорусский национальный технический университет. Г. Минск)

Тема диссертации: «**Теория контактного взаимодействия деформируемых твердых тел с круговыми границами с учетом механических и микрогеометрических характеристик поверхностей**»

Дата защиты диссертационной работы: 22 апреля

Научный консультант: Чигарев Анатолий Власович, Д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой теоретической механики Белорусского национального технического университета.

Оппоненты.

Шемякин Евгений Иванович, д.т.н., профессор, зав. кафедрой волновой и газовой динамики Московского государственного университета. Академик РАН.

Морозов Евгений Михайлович, д.т.н., профессор, профессор кафедры физики прочности Московского инженерно-физического института (государственного университета)

Маркин Алексей Александрович, д.ф.-м.н., профессор зав кафедрой вычислительной математики Тульского госуниверситета.

Ведущая организация: Самарский государственный университет.

3. Матченко Илья Николаевич. (Тульский госуниверситет)

Тема диссертации: «**Собственные упругие и пластические состояния анизотропных сред**»

Дата защиты диссертационной работы: 21 октября

Научный консультант: Яковлев Сергей Сергеевич, д.т.н. профессор кафедры пластического деформирования Тульского государственного университета.

Оппоненты.

Шемякин Евгений Иванович, д.т.н., профессор, зав. кафедрой волновой и газовой динамики Московского государственного университета Академик РАН.

Астафьев Владимир Иванович, д.ф.-м.н., профессор, декан мехмата Самарского госуниверситета

Шашкин Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой дифференциальных уравнений Воронежского госуниверситета

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Тверской государственный технический университет».

4. Максимова Людмила Анатольевна. (Московский госуниверситет)

Тема диссертации: «**Некоторые вопросы теории идеальнопластического тела**»

Дата защиты диссертационной работы: 21 октября

Научный консультант: Шемякин Евгений Иванович, д.т.н., профессор, зав. кафедрой волновой и газовой динамики Московского государственного университета. Академик РАН.

Оппоненты.

Астафьев Владимир Иванович, д.ф.-м.н., профессор, декан мехмата Самарского государственного университета

Зубчанинов Владимир Георгиевич, д.т.н., профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета.

Маркин Алексей Александрович, д.ф.-м.н., профессор зав кафедрой математического моделирования Тульского государственного университета

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный университет».

Защиты на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

1. Горский Алексей Владимирович (ЧГПУ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Общие двумерные задачи теории идеальной пластичности»

Дата защиты диссертационной работы: 21 апреля

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Шашкин Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, декан ПММ Воронежского государственного университета

Максимова Людмила Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургский государственный инженерно – экономический университет

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный педагогический университет».

2. Горский Павел Владимирович (ЧГПУ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Определение предельных состояний при вдавлении осесимметричных штампов с учетом сдвигающих усилий»

Дата защиты диссертационной работы: 22 апреля

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Непершин Ростислав Иванович, д.т.н., профессор, профессор кафедры системы пластического деформирования Московского института приборостроения.

Максимова Людмила Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургский государственный инженерно – экономический университет

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный университет».

2006год

Защиты на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

1. Миронов Борис Гурьевич (ЧГПУ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Некоторые вопросы общей теории предельного состояния твердых деформируемых тел»

Дата защиты диссертационной работы: 28 июня

Научный консультант: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Шемякин Евгений Иванович, д.т.н., профессор, зав. кафедрой волновой и газовой динамики Московского государственного университета, Академик РАН.

Зубчанинов Владимир Георгиевич, д.т.н., профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета.

Максимова Людмила Анатольевна, д.ф.-м.н., зав. кафедрой исследования операции в экономике филиала Санкт-Петербургского государственного инженерно – экономического университета в г. Чебоксары.

Ведущая организация: ГОУ ВПО Воронежский государственный университет.

Ковалев Алексей Викторович (Воронежский госуниверситет)

Тема диссертации: «Задачи определения упругопластического состояния сложных и упрочняющихся сред»

Дата защиты диссертационной работы: 29 июня

Научный консультант: Спорыхин Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета.

Оппоненты.

Шемякин Евгений Иванович, д.т.н., профессор, зав. кафедрой волновой и газовой динамики Московского государственного университета, Академик РАН.

Зубчанинов Владимир Георгиевич, д.т.н., профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета.

Маркин Алексей Александрович, д.ф.-м.н., профессор зав кафедрой математического моделирования Тульского госуниверситета

Ведущая организация: ГОУ ВПО Воронежский государственный архитектурно-строительный университет.

Защиты на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Никонова Елена Николаевна. (ЧГПУ им. И.Я. Яковлева)

Тема диссертации: «Задачи определения предельных усилий при вдавлении жестких штампов и тел»

Дата защиты диссертационной работы: 28 июня

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Спори́хин Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор Воронежского государственного университета.

Непершин Ростислав Иванович, Д.т.н., профессор Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный архитектурно-строительный университет».

2. Леденев Алексей Петрович (ГОУ ВПО «МГОУ»)

Тема диссертации: «**Упругопластическое состояние анизотропных труб и тел ослабленных отверстием**»

Дата защиты диссертационной работы: 30 июня

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Кулиев Валех Джафарович зав. кафедрой высшей математики ГОУ ВПО «Московский государственный открытый университет»

Научный консультант: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Максимова Людмила Анатольевна, д.ф.-м.н., зав. кафедрой исследования операции в экономике филиала Санкт-Петербургского государственного инженерно – экономического университета в г. Чебоксары.

Романов Александр Викторович, к.ф.-м.н., зам. директора по УР Чувашского филиала МГЭИ. (г. Чебоксары).

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный университет».

3. Стрельникова Светлана Николаевна (Воронежский госуниверситет)

Тема диссертации: «**Исследование напряженно-деформированного состояния оболочек статическим методом**»

Тема диссертации: «**Исследование напряженно-деформированного состояния оболочек статическим методом**»

Дата защиты диссертационной работы: 29 июня

Научный руководитель: Семькина Татьяна Дмитриевна, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры теоретической и прикладной механики ГОУ ВПО «Воронежский государственный университет».

Оппоненты.

Трещев Александр Анатольевич, д.т.н. профессор, зав. кафедрой «Строительство, строительные материалы и конструкции» ГОУ ВПО «Тульский государственный университет»

Рыбакова Татьяна Ивановна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа ГОУ ВПО «ЧГПУ им. И.Я. Яковлева»

Ведущая организация: ГОУ ВПО Воронежский государственный педагогический университет.

4. Кривоченко Алексей Викторович. (Старооскольский филиал ГОУ ВПО «Воронежский госуниверситет»)

Тема диссертации: «**Исследование устойчивости задач горной механики в сжимаемых упруго-вязко-пластических средах**»

Дата защиты диссертационной работы: 30 июня

Научный руководитель: Спорыхин Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета.

Оппоненты.

Шашкин Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, декан ПММ Воронежского государственного университета

Васильева Анна Михайловна, к.ф.-м.н., доцент кафедры информатики ГОУ ВПО «ЧГПУ им. И.Я. Яковлева»

Ведущая организация: ГОУ ВПО Воронежский государственный педагогический университет.

5. Ененко Ирина Анатольевна (Воронежский госуниверситет)

Тема диссертации: «Локальная неустойчивость горных выработок некруговой формы при упруговязкопластическом состоянии массива»

Дата защиты диссертационной работы: 29 июня

Научный руководитель: Спорыхин Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета.

Оппоненты.

Шашкин Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, декан ПММ Воронежского государственного университета

Васильева Анна Михайловна, к.ф.-м.н., доцент кафедры информатики ГОУ ВПО «ЧГПУ им. И.Я. Яковлева»

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный архитектурно-строительный университет».

6. Ярдькова Наталия Алексеевна (Чувашский филиал МГЭИ. (г. Чебоксары).

Тема диссертации: «Упругопластическое состояние пространства, ослабленного цилиндрической полостью, находящегося под действием давления, крутящих и продольных сдвигающих усилий»

Дата защиты диссертационной работы: 29 июня

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Спорыхин Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой ТиПМ Воронежского государственного университета.

Максимов Алексей Николаевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей и прикладной математики Чебоксарского института (филиала) Московского государственного открытого университета.

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный педагогический университет».

7. Кульпина Татьяна Александровна (ГОУ ВПО «ЧГПУ им. И.Я. Яковлева»)

Тема диссертации: «Упругопластическое состояние толстостенных тел, ослабленных отверстием, под действием давления и сдвигающих усилий»

Дата защиты диссертационной работы: 28 июня

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Максимова Людмила Анатольевна, д.ф.-м.н., зав. кафедрой исследования операции в экономике филиала Санкт-Петербургского государственного инженерно – экономического университета в г. Чебоксары.

Романов Александр Викторович, к.ф.-м.н., зам. директора по УР Чувашского филиала МГЭИ. (г. Чебоксары).

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный университет».

Диссертационный совет ДМ 212.300.02 утвержден (продлен) при Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Чувашский государственный педагогический университет имени И.Я. Яковлева», г. Чебоксары приказом Рособрандзора от 04 сентября 2007 г. № 1990-1015/211.

Диссертационному совету разрешено принимать к защите диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математическим наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела.

2007год

Защиты на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

1. Курнышева Наталья Александровна. (ГОУ ВПО «Самарский государственный университет»)

Тема диссертации: «Связанные (пластичность-поврежденность) задачи механики деформируемых сред»

Дата защиты диссертационной работы: 18 октября

Научный руководитель: Радаев Юрий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой механики сплошных сред ГОУ ВПО «Самарский государственный университет».

Оппоненты.

Ковалев Владимир Александрович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «математические и информационные основы управления», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский городской университет управления Правительства Москвы».

Миронов Борис Гурьевич, д.ф.-м.н., проректор ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева»,

Ведущая организация: Институт проблем механики Российской академии наук (ИПМех РАН), г. Москва

2. Матвеев Сергей Владимирович (ГОУ ВПО «ЧГПУ им. И.Я. Яковлева»)

Тема диссертации: «Упругопластическое состояние тяжелых тел, ослабленных отверстиями»

Дата защиты диссертационной работы: 18 октября

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Глаголев Вадим Вадимович, д.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования ГОУ ВПО «Тульский государственный университет»

Захарова Татьяна Львовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Российского государственного социального университета, филиал г. Чебоксары,

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный архитектурно-строительный университет»

3. Михин Михаил Николаевич. (ГОУ ВПО «Московский государственный университет приборостроения и информатики»)

Тема диссертации: **“Задача кручения и плоская задача механики наращаемых тел”**

Дата защиты диссертационной работы: 18 октября

Научный руководитель: Манжиров Александр Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики Российской академии наук.

Оппоненты.

Ковалев Владимир Александрович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой “математические и информационные основы управления”, Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский городской университет управления Правительства Москвы”.

Шашкин Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, декан ПММ Воронежского госуниверситета.

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

4. Роштова Алена Николаевна. (ГОУ ВПО «ЧГПУ им. И.Я. Яковлева»)

Тема диссертации: **“Предельное и упругопластическое состояние тел при отрыве”**

Дата защиты диссертационной работы: 19 октября

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Максимова Людмила Анатольевна, д.ф.-м.н., зав. кафедрой исследования операции в экономике филиала Санкт-Петербургского государственного инженерно – экономического университета в г. Чебоксары.

Романов Александр Викторович, к.ф.-м.н., зам. директора по УР Чувашского филиала МГЭИ. (г. Чебоксары).

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

5. Сайфутдинов Юсуп Назипович. (ГОУ ВПО «Самарский государственный университет»)

Тема диссертации: **“Динамика трехслойной вязкоупругой сферической оболочки”**

Дата защиты диссертационной работы: 19 октября

Научный руководитель: Радаев Юрий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой механики сплошных сред ГОУ ВПО «Самарский государственный университет».

Оппоненты.

Максимова Людмила Анатольевна, д.ф.-м.н., зав. кафедрой исследования операции в экономике филиала Санкт-Петербургского государственного инженерно – экономического университета в г. Чебоксары.

Гришин Сергей Анатольевич, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики Российской академии наук.

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Самарский государственный архитектурно-строительный университет»

6. Тихонов Сергей Владимирович. (ГОУ ВПО «ЧГПУ им. И.Я. Яковлева»)

Тема диссертации: **“Упругопластическое состояние неоднородных тел, ослабленных отверстиями”**

Дата защиты диссертационной работы: 19 октября

Научный руководитель: Ивлев Дюис Данилович, д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

Оппоненты.

Шашкин Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, декан ПММ Воронежского государственного университета.

Романов Александр Викторович, к.ф.-м.н., зам. директора по УР Чувашского филиала МГЭИ. (г. Чебоксары).

Ведущая организация: ГОУ ВПО “Воронежский государственный педагогический университет”

**ДЕЙСТВУЮЩИЙ СОСТАВ СОВЕТА
ПО ЗАЩИТЕ ДОКТОРСКИХ И КАНДИДАТСКИХ ДИССЕРТАЦИЙ
при Государственном образовательном учреждении
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я.
Яковлева»,
утвержден приказом Высшего аттестационного комитета
1990-1015/211 от 04 сентября 2007 г.**

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание, шифр специальности и отрасль науки в совете
1.	Ивлев Дюис Данилович (председатель)	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
2.	Матченко	д.ф.-м.н., профессор,

	Николай Михайлович (зам. председателя)	01.02.04 – физико-математические науки
3.	Радаев Сергей Юрьевич (ученый секретарь)	к.ф.-м.н., доцент, 01.02.04 – физико-математические науки
4.	Баскаков Владимир Александрович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
5.	Глаголев Вадим Вадимович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
6.	Ковалев Алексей Викторович	д.ф.-м.н., доцент, 01.02.04 – физико-математические науки
7.	Максимова Людмила Анатольевна	д.ф.-м.н., доцент, 01.02.04 – физико-математические науки
8.	Маркин Алексей Александрович	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
9.	Миронов Борис Гурьевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
10.	Непершин Ростислав Иванович	д.т.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
11.	Радаев Юрий Николаевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
12.	Сильвестров Василий Васильевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
13.	Спорьихин Анатолий Николаевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
14.	Столяров Алексей Васильевич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
15.	Хромов Александр Игоревич	д.ф.-м.н., профессор, 01.02.04 – физико-математические науки
16.	Шашкин Александр Иванович	д.ф.-м.н., доцент, 01.02.04 – физико-математические науки
17.	Шемякин Евгений Иванович	д.т.н., академик РАН, 01.02.04 – физико-математические науки



БАГДОЕВ АЛЕКСАНДР ГЕОРГИЕВИЧ

(К 75-летию со дня рождения)

Крупному ученому-механику, член-корреспонденту НАН Армении Александру Георгиевичу Багдоеву исполнилось 75 лет.

Александр Георгиевич Багдоев родился 9-ого июля 1933 года в городе Тбилиси. В школьные годы он увлекался историей, языками, писал стихи. Переехав в Ереван, начал увлекаться математикой и физикой. Закончив школу в 1950 г., он поступил на механико-математический факультет МГУ. В 1955 году Александр Георгиевич поступает в аспирантуру на кафедре "Волновой и газовой динамики", где заведующим кафедрой был академик Х. А. Рахматулин, а руководителем его диссертации был профессор той же кафедры А. Я. Сагомоян. В 1958 году в МГУ состоялась защита кандидатской диссертации, которая была посвящена решению задач проникания тел или ударных волн в сжимаемую жидкость.

После защиты кандидатской диссертации воспитанник мех-мата МГУ возвращается в Ереван и начинает трудовую деятельность в Институте математики и механики (с 1971 Институт Механики) Академии Наук Армении, где он до настоящего времени и работает. В 1972 году Александр Георгиевич защищает докторскую диссертацию в МГУ, которая была посвящена вопросам определения особенностей фронтов линейных и нелинейных волн. В 2000 году Александр Георгиевич избирается член-корреспондентом НАН Армении.

Научные интересы А. Г. охватывают обширный круг вопросов механики деформируемого твердого тела. Он является автором трех монографий и более чем 350 статей.

Своим основным достижением в механике А. Г. считает обобщение метода Пуанкаре – Лайхилла – Го на двумерные волновые задачи дифракции и каустики.

В последние годы А. Г. Багдоев вместе со своими учениками изучает линейные и нелинейные вопросы развития аналитических и численных методов при изучении колебаний тонких пластин и оболочек при наличии электромагнитных полей, а так же при решении смешанных граничных нестационарных задач сплошной среды. Александр Георгиевич занимается также вопросами практической философии и этики. Кроме лирических стихов детского периода, в зрелом возрасте им написаны 3 оды историко-философского содержания, отражающие устремления к созданию образа творческой во всем личности, характерные для мыслящих личностей конца 20-го и 21-го веков. Результаты этих исследований опубликованы в популярной и научной литературе.

А. Г. стремится сблизить всевозможные области естественных и гуманитарных наук путем теоретического исследования детерминированных и стохастических процессов в экономике, физике, социологии, биологии, сейсмологии, с сочетанием с экспериментальными временными зависимостями, методами нелинейной волновой динамики.

Педагогическая деятельность ученого обширна. Под его руководством защитили диссертации 14 кандидатов и 3 доктора наук. Александр Георгиевич долгие годы преподавал в разных вузах Армении. В последнее время его педагогическая деятельность тесно связана с Горисским Государственным Университетом, где он создал своеобразную научную школу механиков. Особо следует отметить тот факт, что научная деятельность А. Г. отличается широким диапазоном интересов, крайне плодотворна и многопланова, а в сочетании с его высокими человеческими качествами является примером подражания для современных молодых ученых.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Александра Георгиевича Багдоева с семидесятипятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.



ДЕМЬЯНОВ ЮРИЙ АНДРЕЕВИЧ

(К 75-летию со дня рождения)

Исполнилось 75 лет Юрию Андреевичу Демьянову – выдающемуся ученому и инженеру в области механики сплошной среды и ее приложений. Работам Ю. А. присуща высокая математическая культура и непосредственное приложение высоких теоретических достижений в инженерной практике.

Юрию Андреевичу посвящен ряд юбилейных статей, отметим, в частности, статью в журнале «Успехи механики», **2-2006**, из которых можно узнать, что большую часть своей трудовой деятельности Ю. А. посвятил оборонной промышленности, награжден орденом Ленина, является лауреатом Ленинской премии и т.д., и т.п.

Мое знакомство с Юрием Андреевичем пришлось на конец августа 1948 года, когда мы разглядывали списки студентов, принятых на первый курс мехмата МГУ. Начальные годы мы учились в одной группе, в нашей же группе училась Наяда Александровна

Егорычева, свадьба Ю. А. и Н. А. состоялась в конце студенческого срока обучения, состоялась она в Царицино, мы с женой там присутствовали. У Ю. А. и Н. А. два достойных сына и четыре внука. Благоденствий и благополучия этой семье.

Помню я родителей Ю. А., помню дачу в Челюскинской, которой сейчас нет. Помню, как высоко ценил Анатолий Алексеевич Дородницын результаты Ю. А., далеко разившего результаты А. А.

Своим непосредственным учителем Ю. А. всегда считал Халила Ахмедовича Рахматулина. В разговорах со мной он всегда восхищался талантливостью, как мы между собой говорили, Халила. Я, конечно, нисколько в этом не сомневался, оригинальную работу Х. А. по остаточной волне разгрузки осилить не смог, прояснил для себя этот вопрос после работ Г. С. Шапиро и Б. Л. Бидермана.

Наши добрые уважительные чувства с Ю. А. никогда не прерывались и сохраняются до сегодняшнего дня. Может быть, не так часто нам приходится встречаться, но в разговорах между собой мы откровенны по всем интересующим нас вопросам.

Однажды я спросил: «Скажи, Юра, семья, конечно, дело священное, вне обсуждения, но есть у нас работы, монографии, – ну и что? Есть у нас кандидаты, доктора, профессора, – ну и что? Неужели *то* было для этого?» «Знаешь, – ответил Юра, – что сказал мне мой дед, вернувшийся после долгих лет вынужденного пребывания в местах отдаленных и не столь отдаленных. Он сказал: Юра, главное в жизни быть порядочным человеком.»

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Юрия Андреевича Демьянова с семидесятипятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.

Д. Д. Ивлев



КЛИМОВ ДМИТРИЙ МИХАЙЛОВИЧ

(К 75-летию со дня рождения)

Выдающемуся российскому ученому Дмитрию Михайловичу Климову исполнилось 75 лет. За плечами Дмитрия Михайловича гигантский опыт научной, инженерной, научно-организационной деятельности. Отличительной чертой научной деятельности Д. М. является глубокое проникновение в физическую суть явлений, связанных с управлением движения и умение дать отточенное математическое описание сути происходящих процессов.

Начальные этапы работы Дмитрия Михайловича проходят непосредственно в конструкторских бюро, проектирующих выдающиеся приборы управления движением. С 1967 года вскоре после основания Института проблем механики АН СССР Д. М. переходит на работу в этот институт. В 1975 году становится заместителем директора, а в 1989 году – директором ИПМ АН СССР.

За годы работы в ИПМ Д. М. выполняет ряд выдающихся работ в области навигации на суше и на море, предлагает с сотрудниками научную основу совершенно нового

типа гироскопического чувствительного элемента. Круг научных интересов Д. М. чрезвычайно разнообразен, здесь и методы разрыхления пластов при георыхлении и нефтедобыче, исследование вязкопластических сред, развитие компьютерных методов в механике и др.

Дмитрий Михайлович Климов член корр. АН СССР с 1980 года, академик – с 1992 г., он дважды удостоен государственных премий – СССР и РФ.

Велика роль Д. М. в обеспечении плодотворной работы журнала Известия РАН МТТ, главным редактором которого он является.

Круг академических обязанностей Дмитрия Михайловича чрезвычайно велик, на последних выборах он вновь избран заместителем академика-секретаря Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН и членом Президиума РАН.

С Д. М. связана история с лабораторией РАН «Механика предельного состояния» при ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, о которой я вкратце расскажу. Сразу скажу, что в лице Д. М. я встретил полную благожелательность и мощную поддержку. Началось с того, что в беседе с Президентом ЧР Н. В. Федоровым было решено обратиться в РАН с просьбой создать подобную лабораторию. Н. В. Федоров встретился с Ю. С. Осиповым, позднее Ю. С. принял меня, при этом посетовал на тяжелое финансовое состояние РАН. Ю. С. Осипов направил письмо Н. В. Федорову с согласием об организации внештатной (внебюджетной) научной лабораторией РАН при ЧГПУ им. И. Я. Яковлева по проблемам предельного состояния и несущей способности конструкций.

Позднее вышло постановление Бюро Отделения ЭММПУ РАН о создании подобной лаборатории на условиях финансирования ее ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Ректорат смог выделить нам две штатные единицы и, собственно, вопрос, по существу, завис в воздухе.

Я долго размышлял о том, что же, собственно, я хочу.

Основные научные результаты по пространственному предельному состоянию тел я получил еще в конце 50-х годов прошлого века. Но понадобилось достаточное время, чтобы осмыслить полученные результаты, придать им замкнутый законченный характер и после блестящих результатов Р. И. Непершина была получена возможность их широко использовать.

Мне не нужна стационарная, традиционная, академическая структура, с течением времени она вырождается, как и все ей подобное. У меня сейчас есть пять талантливых молодых людей, которые, если создать условия, имеющиеся у научных сотрудников РАН, смогут за четыре года так двинуть проблему, что, думаю, все основные прикладные результаты в области пространственного предельного состояния тел будут получены. А через четыре года эту лабораторию, как исчерпавшую себя, надо закрывать, к этому времени молодые люди станут настолько крупными специалистами, что реализовать себя для них не представит труда. А что я могу сделать сейчас, если мои молодые люди через день имеют по пять пар учебной нагрузки и т.д.

В серьезный футбол играют тогда, когда могут играть в серьезный футбол. Я надеюсь более детально обсудить с Д. М. Климовым эти проблемы и, как всегда, получить компетентные, доброжелательные советы.

Участники издания журнала «Механика предельного состояния» сердечно поздравляют Д. М. Климова с семидесятипятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих творческих достижений.

Д. Д. Ивлев



БАЖЕНОВ ВАЛЕНТИН ГЕОРГИЕВИЧ

(К 70-летию со дня рождения)

Исполнилось 70 лет со дня рождения Валентина Георгиевича Баженова, – крупного ученого в области механики и машиностроения, доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки РФ.

Работы профессора В. Г. Баженова внесли весомый вклад в развитие экспериментально-расчетных методов исследования деформационных и прочностных свойств материалов и сложных конструкций машиностроения при нестационарных динамических воздействиях и взаимодействии со сжимаемыми средами (жидкость, газ, грунт) с комплексным учетом физических и геометрических нелинейных эффектов. Разработанные им и его учениками математические модели, методы, алгоритмы и компьютерные программы применяются при проектировании аппаратов ракетной техники, ядерных зарядов, атомных и термоядерных установок, большегабаритных кабин для разборки ядерного оружия, контейнеров для транспортировки радиоактивных материалов и других конструкций машиностроения на предприятиях Росатома.

В. Г. Баженов ведет большую научную, педагогическую, научно-организационную деятельность, являясь заведующим кафедрой численного моделирования физико-механических процессов на механико-математическом факультете ННГУ, которую возглавляет со дня ее основания в 1987 году, и директором НИИ механики ННГУ (с 1991 года). Научная школа, сформированная В. Г. Баженовым, получила высокую оценку – стала лауреатом конкурса государственной поддержки ведущих научных школ России в 1997, 2000, 2003, 2006, 2008 годах. В. Г. Баженов является руководителем грантов РФФИ и Рособразования, руководителем крупных тем, выполняемых по заказам Росатома и Минобороны РФ, руководителем регионального учебно-научного центра «Механика материалов и конструкций». Под его научным руководством защищены 7 докторских и 46 кандидатских диссертаций. В. Г. – автор и соавтор более 200 научных статей и 7 монографий

В. Г. Баженов – член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, член бюро Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела, эксперт РФФИ, председатель диссертационного Совета ННГУ по защите кандидатских и докторских диссертаций по механике, ответственный редактор межвузовского сборника «Проблемы прочности и пластичности», член редколлегии Вестника ННГУ, заместитель председателя оргкомитета IX Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, член ряда оргкомитетов международных конференций по механике, председатель оргкомитетов XIV, XIX, XX Международных конференций по теории оболочек и пластин.

Научно-организационные достижения профессора В. Г. Баженова получили признание: в 1998 году он награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования РФ», в 1999 году ему присвоено звание «Заслуженный профессор Нижегородского университета», в 1995 году он избран действительным членом Российской академии инженерных наук.

Участники издания журнала «Механика предельного состояния» сердечно поздравляют В. Г. Баженова с семидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих творческих достижений.



НЕПЕРШИН РОСТИСЛАВ ИВАНОВИЧ

(К 70-летию со дня рождения)

Замечательному российскому ученому и инженеру Ростиславу Ивановичу Непершину, доктору технических наук, профессору исполнилось 70 лет. Ростислав Иванович – специалист в области технологии обработки металлов, в его работах сочетается исключительное понимание механической сути рассматриваемых технологических процессов и использование адекватного математического аппарата.

Ростислав Иванович окончил Станкин в 1962 году, далее около тридцати лет его научная деятельность была связана с институтом машиноведения АН СССР, где он работал в лаборатории выдающегося специалиста Александра Дмитриевича Томленова.

Несколько лет Ростислав Иванович проработал в США в лаборатории профессора Ричмонда.

С 2003 г. по настоящее время Р. И. – профессор кафедры «Системы пластического деформирования» МГТУ «Станкин». Член диссертационного совета МГТУ «Станкин» по специальности 05.03.05 «Технологии и машины обработки давлением» и Ученого совета Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева (г. Чебоксары) по специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела». Ростислав Иванович избран членом Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике РАН.

Непершин Р. И. автор более 100 научных работ и нескольких монографий, опубликованных в отечественных и международных издательствах, по контактному и технологическим задачам прикладной теории пластичности, теплопередаче в системе инструмент-заготовка при высокотемпературной пластической деформации в процессах штамповки, листовой прокатки и в машинах непрерывного литья заготовок, по механике и оптимальному проектированию волокнистых композитов, по моделированию пластического течения в процессахковки, прокатки, объемной и листовой штамповки. Им разработаны учебные программы и методические пособия для подготовки инженеров на базе фундаментальных исследований по механике деформируемого твердого тела.

Блестящие результаты Р. И. Непершина в области пространственной теории предельного состояния тел и конструкций открывают широкие научные перспективы перед этой теорией.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Ростислава Ивановича Непершина с семидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.



РЕДКОЗУБОВ СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

(К 70-летию со дня рождения)

Исполнилось 70 лет со дня рождения Сергея Алексеевича Редкозубова, крупного ученого в области теории управления и моделирования, доктора технических наук, профессора.

Сергей Алексеевич выходец из Тамбовской губернии, окончил мехмат МГУ в 1960 году, ряд лет отдал работе в оборонной промышленности. После защиты кандидатской диссертации в Московском Горном институте в 1967 г. был оставлен на преподавательской работе и с тех пор беспрерывно работает в МГГУ на кафедре высшей математики. В свое время этой кафедрой заведовал Леонид Викторович Ершов, после ухода Л. В. с 1988 года более 20 лет кафедрой руководит С. А. Редкозубов. Надо сказать, что Л. В. и С. А. всегда связывали самые дружеские и уважительные отношения.

Научные интересы С. А. Редкозубова лежат в области теории управления, моделирования и идентификации, систем принятия решений, адаптивного стохастического про-

гнозирования и интеллектуальных систем; он автор работ по инновационному развитию и экологическому моделированию и прогнозу в сложных системах в чрезвычайных ситуациях. Эта область теории управления сегодня наиболее бурно развивается, обсуждаются вопросы управления знаниями, особенно в экономике, бизнес-процессах, научной и образовательной сферах. Большое внимание уделяется построению и анализу адаптивных систем и систем принятия решений, а также построению систем управления на нечёткой логике.

В сфере математических исследований С. А. получены общие методы решения трёх основных задач со сдвигом для полианалитических функций на моделях первой основной задачи теории упругости с исследованием в теории для изотропных и анизотропных тел. Данное направление важно для теории и алгоритмов решения краевых задач со сдвигом для полианалитических функций в статической теории упругости. Существенно развит и исследован кинематико-геометрический подход при математическом моделировании в широком круге теоретических и практических задач.

Надо сказать, что в своих исследованиях С. А. Редкозубов развивал фундаментальные исследования Д. И. Шермана.

Редкозубов С. А. принимает большое участие в создании технопарковых структур. Под его руководством создан ряд автоматизированных систем управления в энергетике, горном деле, химии и др. отраслях. Автор более 200 научных публикаций, 8 монографий, учебных пособий, является членом многих редколлегий, среди его учеников кандидаты и доктора наук.

Редкозубов С. А. является членом Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, заместителем председателя экспертного совета ВАК РФ по управлению, вычислительной технике и информатике, председателем диссертационного совета в МГГУ, а так же членом ряда других диссертационных советов.

Вопросы моделирования и прогнозирования селевых сходов в горах Кавказа занимают большое место в последних работах Редкозубова С.А. Управление эффективностью возмещения ущерба объектов, оценка рисков для многих объектов при чрезвычайных ситуациях – основное направление работ автора.

Построение информационных систем экологического мониторинга водных экосистем и других объектов и создание научно-обоснованных разработок программных комплексов, обеспечивающих решение важных прикладных задач – прикладная направленность всех работ С. А. Редкозубова.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Сергея Алексеевича Редкозубова с семидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.



КОССОВИЧ ЛЕОНИД ЮРЬЕВИЧ

(К 60-летию со дня рождения)

Исполнилось 60 лет со дня рождения Леонида Юрьевича Коссовича, крупного ученого в области механики сплошных сред, ректора Саратовского государственного университета, доктора физико-математических наук, профессора. Основными направлениями научной деятельности Л. Ю. Коссовича являются исследования асимптотических методов теории упругости, колебаний и распространения нестационарных волн, динамика толстостенных упругих и вязкоупругих конструкций, биомеханика. Ему принадлежит свыше 120 научных работ, получивших широкую известность и заслуженный авторитет у научной общественности. Большое влияние на научную деятельность Л. Ю. Коссовича оказал один из самых ярких представителей российской прикладной механики – Алексей Львович Гольденвейзер. Тесное научное взаимодействие с ученым такого масштаба, безусловно, было плодотворным для Л. Ю. Коссовича. Л. Ю. Коссовичу принадлежит ряд великолепных результатов, он является лауреатом государственной премии в области

науки и техники РФ. Л. Ю. Коссович является членом Российского Научного Комитета по теоретической и прикладной механике.

Под руководством Л. Ю. Коссовича успешно работает большой коллектив профессоров, научных сотрудников, аспирантов и студентов над самыми разнообразными вопросами механики сплошной среды.

Л. Ю. Коссович является руководителем одного из крупнейших центров науки и образования России, объединившим 28 тысяч студентов и 5 тысяч работников профессорско-преподавательского состава. Саратовский университет – один из крупнейших центров организации научной работы в России. Великолепно организованные всероссийские научные конференции, симпозиумы и совещания служат мощным импульсом к интеграции и развитию российской науки. Успеху организуемых мероприятий способствует неперенное компетентное участие ученого секретаря, доцента Ирины Васильевны Кирилловой.

Саратовский университет, безусловно, одна из жемчужин образовательных центров России.

Остается сказать, что для мехматовцев Московского университета свет Саратовского университета связан и с личностью гениального Владимира Васильевича Голубева.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Леонида Юрьевича Коссовича с шестидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.



МАРКИН АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ
(К 60-летию со дня рождения)

Исполнилось 60 лет со дня рождения Алексея Александровича Маркина – крупного специалиста в области механики деформируемого твердого тела, доктора физико-математических наук, профессора, заведующего кафедрой «математическое моделирование» Тульского Государственного Университета.

А. А. Маркин – один из основоположников нового перспективного направления механики – термомеханики процессов конечного деформирования материалов со сложными свойствами. Им был предложен вариант теории процессов и дана постановка граничных задач конечного деформирования упругопластических тел. На основе полученных А. А. Маркиным фундаментальных результатов решен ряд практических задач по моделированию процессов формоизменения элементов конструкций с требуемыми геометрическими и физическими характеристиками.

Построен вариант теории трехслойных пластин, позволяющий, в отличие от известных подходов, учесть сдвиговые напряжения, и напряжения, связанные с учетом обжатия материала. На основе данной теории разработаны методы расчета на прочность элементов конструкций из композитных материалов.

А. А. Маркиным предложена теория, описывающая поведение конечно деформируемых тел с учетом эффекта сверхпластичности. На основе данной теории установлены скоростные и температурные режимы формоизменения заготовок при сложном напряженном состоянии, позволяющие “выводить” материал в режим сверхпластического деформирования и существенно снизить уровень внешних силовых воздействий.

А. А. Маркиным предложена и обоснована гипотеза о параметрах состояния сплошной среды, позволяющая строить экспериментально конкретизируемые варианты соотношений, определяющие поведение различных материалов при равновесных и неравновесных внешних тепловых и механических воздействиях.

Совместно с учениками А. А. Маркиным разработана теория направленного разделения упругопластических материалов, основанная на соотношениях, учитывающих как стадию упрочнения, так и разупрочнения материала вплоть до прекращения взаимодействия между частицами. В рамках данной теории, наряду с процессами квазихрупкого разрушения, описываются процессы разделения материалов резанием и вырубкой.

А. А. Маркин обладает большим научным авторитетом среди широких кругов научной общественности. Он руководит Тульским научным семинаром по механике им. Л. А. Толоконникова, является ответственным редактором Известий ТулГУ по механике.

Научная и педагогическая деятельность А. А. Маркина отражена в 127 печатных трудах. Он активно участвует в воспитании научных кадров. Среди его учеников кандидаты и доктора наук.

А. А. Маркин является членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, ему присвоено звание «Заслуженный работник высшей школы РФ».

В течение многих лет А. А. Маркин принимает активное участие в работе диссертационного совета в Чебоксарах. Высоко-эрудированные выступления А. А., позволяющие дать всестороннюю оценку диссертационных работ, вызывают большое уважение коллег.

Профессор А. А. Маркин вносит существенный вклад в подготовку научных и научно-педагогических кадров и в научные исследования фундаментального характера в области механики.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Алексея Александровича Маркина с шестидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.



ТРЕЩЕВ АЛЕКСАНДР АНАТОЛЬЕВИЧ

(К 50-летию со дня рождения)

Выпускник Тульского политехнического института (ТПИ) 1980 года Александр Анатольевич Трещев в 1985 г. досрочно закончил аспирантуру с защитой диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. По распределению остался работать на строительном факультете в ТПИ – где плодотворно работает до сих пор, это его бессменное место работы.

Большинство профессорско-преподавательского состава молодого поколения кафедры, возглавляемой Трещевым А. А., защитившими диссертации, являются его учениками. Тульская школа нелинейной механики деформируемого твердого тела, в большинстве состоит из учеников д.ф.-м.н., профессора Л. А.Толоконникова, среди которых полноправно может быть назван и А. А.Трещев. Его научные работы связаны с теорией упругости и пластичности дилатирующих материалов, механикой поврежденных сред, теорией деформирования композитных материалов с учетом трещин, кинетикой напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций с учетом воздействия агрессивных сред и деградации материалов и конструкций. В 1993 г. Александр Анатоль-

евич возглавил кафедру, которой после проведенных реорганизаций он заведует по настоящее время. В 1995 г. в диссертационном совете при Тверском государственном техническом университете под председательством д.т.н., профессора Зубчанинова В. Г. Александр Анатольевич защитил докторскую диссертацию.

За период работы Трещева А. А. заведующим кафедрой, кафедра из слабых и второстепенных превратилась в одну из ведущих в университете и в агентстве по высшему образованию РФ.

В настоящее время Трещев А. А. активно занимается научно-исследовательской работой и подготовкой кадров высшей квалификации (подготовил 2-х докторов и 20 кандидатов наук), является ведущим экспертом ООО «Строительное проектирование» при кафедре, занимающимся экспертизой промышленной безопасности зданий и сооружений опасных производств, обследованием и проектированием зданий и сооружений. Является членом трех диссертационных советов по присуждению ученой степени доктора наук по специальностям 01.02.04 и 05.23.01 при Тульском государственном, Тверском государственном техническом и Пензенском государственном университете архитектуры и строительства, членом редколлегии журнала «Известия Тульского государственного университета», членом редакционных советов ряда центральных научных журналов, председателем Тульского регионального отделения Российского научного керамического общества. Трещев А. А. автор более 490 научных работ, среди которых 5 монографий и 5 патентов на изобретения. В 2006 г. серии монографий Трещева А. А. присужден диплом РААСН за лучшую научную работу, в 2007 г. он награжден серебряным знаком «За заслуги перед ТулГУ». А. А. Трещев является членом Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике.

Свой юбилей Александр Анатольевич встречает полным сил и творческих идей, которыми он щедро делится со своими учениками.

Участники издания журнала «Механика предельного состояния» желают А. А. Трещеву крепкого здоровья, многих творческих достижений.



Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.



Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.



Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru, burenin@dvo.ru) – член-корреспондент РАН, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.



Варданын Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.



Демьянов Юрий Андреевич – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.



Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru, kafsm@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.



Ивлев Дюис Данилович (Ivlev21@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.



Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – Академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.



Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.



Ломакин Евгений Викторович (lomakin@nw.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.



Максимова Людмила Анатольевна (strangcheb@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.



Маркин Алексей Александрович (markin@uic.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



Матченко Николай Михайлович (ekc@tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



Миронов Борис Гурьевич (prorektor@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.



Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@proc.ru, gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.



Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.



Непершин Ростислав Иванович (Nepershin_r@pop.mtu.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет «СТАНКИН», г. Москва.



Победря Борис Ефимович (pob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.



Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара.



Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.



Редкозубов Сергей Алексеевич (nike109@yandex.ru, marusbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.



Спорыхин Анатолий Николаевич (pmmdeans@main.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.



Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – ученый секретарь редакции журнала, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



Трещев Александр Анатольевич (taa@uic.tula.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.



Черепанов Геннадий Петрович (genadyc@netscape.net, genacherepanov@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, пожизненный член Нью-Йоркской академии наук, Флорида, США.



Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.



Шашкин Александр Иванович (pmmdeans@main.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



Шемякин Евгений Иванович (esh@msu.ru, eshem@mech.math.msu.su) – академик РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Журнал «Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия Механика предельного состояния» издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом в целях развития научно исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале «Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия механика предельного состояния» печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет три регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут.

Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному. Электронный вариант должен быть набран на компьютере в текстовом редакторе Microsoft Word (7.0, 6.0 версии). Формат бумаги – А4, поля: справа, слева и сверху 3 см, снизу 6 см. Размер шрифта – 11. Абзацный отступ – 1 см. Интервал – одинарный. Текст статьи набирается шрифтом Times New Roman с выравниванием по ширине и автоматическим переносом слов. Страницы не нумеруются. Заголовок пишется жирным шрифтом заглавными буквами. Фамилия и инициалы автора даются курсивом в правом верхнем углу над заголовком.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; короткую аннотацию (объем до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчить чтение работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с

указанием всех авторов; список ключевых слов на английском языке; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Иллюстрации: должны быть пронумерованы и упомянуты в тексте; подрисуночные подписи выполняются шрифтом размера 9.

5. Формулы и буквенные обозначения по тексту должны быть набраны в среде редактора формул Microsoft Equation 3.0. Шрифт для греческих букв – Symbol, для всех остальных – Times New Roman, основной размер – 11, крупный индекс – 7, мелкий – 5. В формулах следует избегать громоздких обозначений. Формулы располагаются по центру страницы. В случае необходимости формулы нумеруются.

6. Таблицы выполняются шрифтом 9. Они могут быть с заголовками и без них. Заголовок набирается полужирным шрифтом 9. Таблицы необходимо пронумеровать и упомянуть в тексте.

7. Список литературы набирается по алфавиту шрифтом Times New Roman размера 9. Фамилия и инициалы автора или первое слово в названии издания (если нет автора) выделяются курсивом.

8. Ссылки на используемую литературу даются внутри текста в квадратных скобках. Например: [1, 23], где 1 – порядковый номер в списке использованной литературы, 23 – номер страницы.

9. Сведения об авторах «Вестника ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния» включают фамилию, имя и отчество автора, данные об ученой степени и занимаемой должности. Например, *Ивлев Дюис Данилович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

УДК 629.7.01

Амензаде Р. Ю., Киясбейли Э. Т., Фатуллаева Л. Ф.

ПРЕДЕЛЬНОЕ ВРЕМЯ СЖАТОГО МНОГОСЛОЙНОГО ВЯЗКО-УПРУГОГО КОЛЬЦА

(Институт Прикладной Математики Бакинского Государственного Университета)

Целью настоящей статьи является исследование потери устойчивости многослойного линейно вязко-упругого кольца, составленного из различных материалов и находящегося под действием равномерно распределенного внешнего давления заданной интенсивности.

Ключевые слова: многослойное вязко-упругое кольцо, модуль упругости, коэффициент ползучести материала, пакет, критическое время, вариационный метод, метод Релея-Ритца, аппроксимирующая функция, сжимающая нагрузка, мгновенная деформация, напряжение.

Для трехслойного кольца при его симметричной структуре относительно срединной поверхности численно выявлено влияние различных геометрически нелинейных теорий на критическое время устойчивости.

Зададим полярную систему координат (z, j) и введем в рассмотрение кольцо радиуса R и толщины $2h$. Предположим, что оно составлено из s чередующихся соединенных между собой по всем окружностям, разных по толщине концентрических слоев с разными значениями модуля упругости E_{k+1} и функциями ползучести $D_{k+1}\{(t-t)S(t)\}$ [$k = 0, 1, \mathbf{K}(s-1)$]. Далее будем их считать линейными относительно напряжения S

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев, Г. И. О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек / Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 68-76.
2. Киряков, П. П., Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.
3. Кроха, В. А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации : справочник / В. А. Кроха. – М. : Машиностроение, 1980. – 157 с.
4. Одинокоев, В. И. Разрушение льда под действием гидростатического давления на подведенном плавающем контейнере с учетом его заполнения водой / В. И. Одинокоев, А. М. Сергеева // Механика микронеоднородных материалов и разрушение : тезисы докладов IV Всероссийского семинара (Екатеринбург, 23–24 марта 2006 г.). – Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2006. – С. 43.
5. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 396 с.
6. Maugin, G. A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture / G. A. Maugin. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 350 p.
7. Radayev, Y. N. On directional average of the local anisotropic damage / Y. N. Radayev // Int. J. Fracture. – 2004. – V. 128. – P. 293-307.

Amenzadeh R. Y., Kiyasbeyli E. T., Fatullayeva L. F.

LIMITING TIME COMPRESSED MULTILAYERED VISCOELASTIC RING

(Institute of Applied Mathematics of the Baku State University)

The purpose of present article is research of loss of stability of the multilayered linearly viscoelastic ring which are made of various materials and taking place under action of in regular intervals distributed external pressure of set intensity. The decision of a problem is carried out by means of a variational method of the mixed type. For a three-layer ring at its symmetric structure concerning a median surface influence of various vectorially nonlinear theories on critical time of stability is numerically revealed.

Keywords: *a multilayered viscoelastic ring, the module of elasticity, factor of creep of a material, a package, critical time, a variational method, method Rayleigh-Ritz, the approximating function, compressing loading, instant deformation, a pressure.*

Амензаде Рафаэль Юсиф оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики и механики сплошной среды Бакинского государственного университета, г. Баку

Божанов Павел Валерьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула

Быкова Мария Игоревна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

Васильева Анна Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники Чувашского государственного педагогического университета, г. Чебоксары

Вервейко Николай Дмитриевич – доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж.

Гаврилкина Мария Владимировна – аспирант кафедры математического моделирования Тульского государственного университета, г. Тула

Герасименко Екатерина Андреевна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

Глаголев Вадим Вадимович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования Тульского государственного университета, г. Тула

Гоцев Дмитрий Викторович – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математики Воронежского ВВАИУ, г. Воронеж

Забелин Артем Николаевич – аспирант кафедры строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула

Завертан Александр Викторович – аспирант Института автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

Ивлев Дюис Данилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Исаев Абдулла Гусейн оглы – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Азербайджанского государственного педагогического университета, г. Баку

Киясбейли Энфира Талат кызы – кандидат физико-математических наук, зав. лабораторией кафедры «Теоретической механики и механики сплошной среды» Бакинского государственного университета, г. Баку

Корнеев Алексей Владимирович – магистрант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции» Тульского государственного университета, г. Тула

Левко Валерий Анатольевич – кандидат технических наук, докторант Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

Манцыбора Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

Мионов Дмитрий Николаевич – аспирант кафедры теоретической механики Белорусского национально-технического университета, г. Минск

Мир-Салим-заде Минавар Вагиф кызы – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института математики и механики Национальной Академии Наук Азербайджана, г. Баку

Немировский Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича, г. Новосибирск

Рагозина Виктория Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

Радаев Сергей Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Сальковский Юрий Евгеньевич – аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики Саратовского государственного университета, г. Саратов

Семенов Кирилл Тимофеевич – аспирант Института автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

Спыхин Анатолий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

Стасюк Александр Николаевич – аспирант кафедры ТиПМ Воронежского государственного университета, г. Воронеж

Трещев Александр Анатольевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула

Фатуллаева Лаура Фаик кызы – кандидат физико-математических наук, преподавательница кафедры «Математика, Информатика и их методики» Института учителей Азербайджана, г. Баку

Шашкина Софья Александровна – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

Янковский Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск

ПОЗДРАВЛЕНИЯ.....		3
<i>Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф.</i>	Предельное время сжатого многослойного вязко-упругого кольца	5
<i>Божанов П. В., Забелин А. Н., Трещев А. А.</i>	Определение напряженно-деформированного состояния тонкой полой оболочки с учетом пластической дилатансии	16
<i>Быкова М. И., Вервейко Н. Д., Шашкина С. А.</i>	Влияние микроструктуры материала стержня на его устойчивость	24
<i>Васильева А. М.</i>	Напряженное состояние анизотропного идеальнопластического пространства вблизи сферической полости	28
<i>Герасименко Е.А., Завертан А.А., Рагозина В.Е.</i>	Лучевые разложения в аналитических и численно-аналитических расчетах задач ударного деформирования	38
<i>Гаврилкина М.В., Глаголев В.В.</i>	Вариант постановки задачи разрушения типа нормального отрыва	52
<i>Гоцев Д.В., Спорыхин А.Н., Стасюк А.Н.</i>	Устойчивость подкрепленных выработок некруговой формы при совместном расчете крепи и массива горных пород	58
<i>Исаев А.Г.</i>	Двойкопериодическая система прямолинейных трещин со связями между берегами	72
<i>Корнеев А. В., Трещев А. А.</i>	Модель влияния газонасыщения на напряженно-деформированное состояние материалов на основе титановых сплавов	78

<i>Левко В. А.</i>	Модель течения рабочей среды при абразивно-экструзионной обработке тонких осесимметричных каналов большой длины	85
<i>Манцыбора А. А., Семенов К. Т.</i>	Задача о соударении двух упругопластических тел	95
<i>Миронов Д. Н.</i>	Моделирование процессов деформирования сложных механических систем под действием термосиловых нагрузок	104
<i>Мир-Салим-заде М.В.</i>	Зарождение трещины в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров	115
<i>Немировский Ю. В., Янковский А. П.</i>	Интегрирование задачи динамического вязкопластического деформирования изотропных цилиндрических оболочек обобщенным методом Рунге–Кутты	129
<i>Сальковский Ю. Е.</i>	Математическое моделирование стационарной струи полимерного раствора с учетом испарения при электроформовании волокон	145
<i>Ивлев Д. Д., Радаев С. Ю.</i>	О диссертационных советах при ГОУ ВПО ЧГПУ им. И. Я. Яковлева.....	155
Юбилей		
	Багдоев Александр Георгиевич (к 75-летию со дня рождения).....	174
	Демьянов Юрий Андреевич (к 75-летию со дня рождения).....	176
	Климов Дмитрий Михайлович (к 75-летию со дня рождения).....	178
	Баженов Валентин Георгиевич (к 70-летию со дня рождения).....	180
	Непершин Ростислав Иванович (к 70-летию со дня рождения).....	182
	Редкозубов Сергей Алексеевич (к 70-летию со дня рождения).....	184
	Коссович Леонид Юрьевич (к 60-летию со дня рождения).....	186
	Маркин Алексей Александрович (к 60-летию со дня рождения).....	188
	Трещев Александр Анатольевич (к 50-летию со дня рождения).....	190
	УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	192
	ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	197
	АВТОРЫ ЖУРНАЛА.....	200

Вестник
Чувашского государственного педагогического университета
им. И. Я. Яковлева

Серия: Механика предельного состояния

№ 2(5) • 2008

Отв. за выпуск Т. Н. Павлова
 С. В. Матвеев
 С. В. Тихонов
 П. Н. Кузнецов

Технические редакторы Т. Н. Павлова
 С. В. Матвеев
 С. В. Тихонов
 П. Н. Кузнецов

Компьютерная верстка, макет Т. Н. Павловой

Подписано в печать 21.11.08. Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 25,5. Тираж 300 экз. Цена свободная. Заказ №

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»

428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38