

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**  
**Научный журнал**  
**№ 1(51)**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”  
**Основатели серии:** Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

**Ответственные секретари:** С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,  
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,  
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-  
лоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

**Адрес издателя:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1182

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2022

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK  
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO  
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA  
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal  
№ 1(51)**

**The Journal founder:** I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University  
**Founders of the series:** D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,  
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007  
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications  
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"  
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"  
(reg. No. 13109).

**Editor-in-chief:** B. G. Mironov

**Executive Editor:** Yu. N. Radayev

**Associate Editor:** N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

**Executive Secretary:** E. V. Murashkin, S. V. Matveev

**Editorial Board:** V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,  
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,  
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,  
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,  
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,  
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

**International Council:** V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

**Postal address::** ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

**Phone::** +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

**E-mail::** predel21@mail.ru

**Journal website::** <http://limit21.ru>





Е. В. Мурашкин<sup>1</sup>, С. В. Тихонов<sup>2</sup>

## К 60-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФ. ЮРИЯ НИКОЛАЕВИЧА РАДАЕВА

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** в 2022 исполняется 60 лет известному ученому в области механики деформируемого твердого тела и прикладной математики, педагогу, организатору науки и высшего образования в России Радаеву Юрию Николаевичу. Радаев Ю.Н. автор фундаментальных работ по математической теории пластичности, механике разрушения, теории трещин и накопления микрповреждений, связанной гиперболической термоупругости и термомеханике, микрополярной упругости, механике сыпучих и гранулированных сред, механике растущих тел.

**Ключевые слова:** Ю. Н. Радаев, математическая теория пластичности, механика разрушения, теория трещин и накопления микрповреждений, связанная гиперболическая термоупругость, микрополярная упругость, механика сыпучих и гранулированных сред, механика растущих тел

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.001

УДК: 539.374

Радаев Ю. Н. родился 10 февраля 1962 г. в г. Куйбышев (сейчас г. Самара). В 1979 г. окончил с золотой медалью среднюю политехническую школу. В этом же году Радаев Ю. Н. переезжает в г. Москву и поступает в Куйбышевский государственный университет, который в 1984 г. оканчивает с отличием, получив квалификацию «механик». Его научным руководителем в эти годы был проф. Г. И. Быковцев<sup>1</sup> — создатель и заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела. В 1984-1986 гг. проходил срочную воинскую службу в ВВС СССР. В 1986 г. Радаев Ю. Н. поступает в аспирантуру Института проблем механики Академии наук СССР (ИПМ АН

---

© Мурашкин Е. В., Тихонов С. В., 2022

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

**e-mail:** murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия,

*Тихонов Сергей Владимирович*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

<sup>1</sup>Научная биография Г. И. Быковцева и его вклад в механику обсуждются в статье: Яровой Г. П., Радаев Ю. Н. К 70-летию Г.И. Быковцева // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 9/1(59). С. 9-30.

СССР), по окончании которой в 1989 г. в совете при ИПМ АН СССР успешно защитил кандидатскую диссертационную работу по теме “Упругопластическое кручение призматических стержней” по специальности 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела, выполнявшуюся под руководством Нагуша Христофоровича Арутюняна.<sup>2</sup> Оппонентами по диссертации выступили В. О. Геогджаев и Р. Л. Салганик.

После защиты кандидатской диссертации Радаев Ю. Н. в 1989 г. возвращается в Самарский государственный университет, где проходит путь от ассистента кафедры механики деформируемого твердого тела (1989-1991 гг.) до профессора, заведующего кафедрой механики сплошных сред (2002-2010 гг.). В 1996 г. Радаеву Ю. Н. было присвоено ученое звание доцента, а в 2005 г. — ученое звание профессора.

В 1993-1995 г.г. он проходил двухгодичную научную стажировку под руководством проф. Sumio Murakami<sup>3</sup> в университете Нагоя, Япония (Department of Mechanical Engineering, Nagoya University, Nagoya, JAPAN), финансирование которой осуществлялось Министерством науки и культуры Японии; в 1999-2000 г.г. при поддержке Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) проводил научно-исследовательскую работу под руководством проф. G.A. Maugin<sup>4</sup> в лаборатории математического моделирования в механике при университете Пьера и Марии Кюри, Франция (Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, FRANCE).

В 2000 г. Радаев Ю.Н. в совете при ИПМех РАН успешно защитил докторскую диссертационную работу на тему “Континуальные модели поврежденности твердых тел” по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. Оппонентами выступили: Б.Д. Аннин, Е.М. Морозов, В.Н. Кукуджанов.

В 2004–2007 гг. Радаев Ю.Н. руководит крупным научным проектом, реализуемым Самарским государственным университетом, по новому прочтению, переводу и комментированию фундаментальной трехтомной монографии А.Уайтхеда и Б.Рассела “Principia Mathematica”.<sup>5</sup> Современный перевод на русский язык “Principia Mathematica”<sup>6</sup> восполняет существующий пробел в литературе по математической логике и основаниям математики, а также способствует развитию формальной математики в духе ее основоположников.

С 2010 г. Радаев Ю.Н. работает в должности ведущего научного сотрудника лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

В 2017–2018 гг. работал в Университете Киото в должности visiting professor (Department of Energy Conversion Science, Graduate School of Energy Science, Kyoto University, JAPAN), где читал курсы по механике разрушения и механике поврежденности.

<sup>2</sup>Murashkin E. V. Arutyunyan, Nagush Khachaturovich. In: Altenbach H., Öchsner A. (eds) Encyclopedia of Continuum Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg. 2019. DOI:10.1007/978-3-662-53605-6\_321-1

<sup>3</sup>In Memoriam of Professor S. Murakami // International Journal of Damage Mechanics. Vol. 25, iss. 2, P. 117–119.

<sup>4</sup>Jarić J. and Micunovic M. Gérard A. Maugin (in memoriam) // Theoretical and Applied Mechanics. 2017. V. 44, №. 1. P. 5–9.

<sup>5</sup>Яровой Г. П., Радаев Ю. Н. О новом прочтении «Оснований математики» А. Уайтхеда и Б. Рассела // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2004. № 4(34). С. 5-19.

<sup>6</sup>Уайтхед А. Н., Рассел Б. Основания математики: в 3 т. пер. с англ. Г. П. Яровой, Ю. Н. Радаева. Самара: Изд-во “Самарский государственный университет”, 2005. 1920 с.

За годы преподавательской деятельности Ю.Н. Радаев читал курсы по “Математической теории пластичности”, “Механике разрушения”, “Динамическим задачам теории упругости”, “Реологическим моделям сплошных сред”, “Математической физике и ее приложениям”, “Двумерные задачи теории упругости”, “Вязкоупругие и наследственные среды”.

Радаев Ю.Н. является автором более 400 научных работ, включая 9 монографий по различным проблемам механики деформируемого твердого тела, и 2 изобретения/патента. В разные годы Ю.Н. Радаев выступал руководителем научных грантов РФФИ, а также руководил в 2010 г. программой ФЦП “Математическая физика и ее приложения”. За годы работы в ИПМех РАН Радаев Ю.Н. осуществлял руководство научными проектами РФФИ: “Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности”, “Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой”, “Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости”; участвовал в крупных научных проектах “Моделирование процессов производства тканых 3D-материалов” и “Механические аспекты дизайна и анализа изделий аддитивного производства: теория и эксперимент”.

Радаев Ю.Н. принимает активное участие в подготовке кадров высшей квалификации. Он является ключевым организатором серии Всероссийских конференций по механике деформируемого твердого тела. Совместно с А.В. Манжировым и Е.В. Мурашкиным было проведено в разные годы 10 конференций.

Радаев Ю.Н. — член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, член Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела, член нескольких диссертационных советов, эксперт РАН, эксперт по крупным научным проектам Министерства высшего образования и науки РФ, член редакционных советов журналов: Известия Саратовского государственного университета, Вестник Самарского государственного технического университета, Вопросы науки: серия ПММ, Известия РАН. Механика твердого тела, Проблемы прочности и пластичности, ответственный редактор журнала Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева, серия: Механика предельного состояния, соруководитель регулярного научного семинара ИПМех РАН им. Л.А. Галина.

Редакционная коллегия журнала Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния поздравляет Юрия Николаевича с 60-летием и желает ему новых ярких достижений в науке, талантливых учеников и успехов в его многогранной деятельности на благо России.

## REFERENCES

- [1] Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Упругопластическое кручение призматических стержней // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. с. 563–566.
- [2] Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Оптимальные задачи упругопластического кручения // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1987. № 5. с. 117–125.
- [3] Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Упругопластическое кручение призматических стержней // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1988. № 4. с. 123–132.
- [4] Радаев Ю. Н. Предельное состояние шейки произвольного очертания в жесткопластическом теле // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1988. № 6. с. 69–75.
- [5] Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // Прикладная матем. и механика. 1989. Т. 53. Вып. 6. с. 1014–1022.

- [6] Arutyunyan N. K., Radayev Y. N. Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1989. Vol. 53. Issue 6. p. 804–811. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021892889900907>.
- [7] Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Об экстремальных задачах упругопластического кручения // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1989. № 2. с. 139–144.
- [8] Арутюнян Н.Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание деформируемых тел: Препринт/ Институт проблем механики АН СССР. № 374. 1989. 44 с.
- [9] Радаев Ю. Н. Двусторонняя оценка предельного момента при пластическом кручении // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1989. № 4. с. 112–116.
- [10] Н.Х. Арутюнян, В.Э. Наумов, Ю.Н Радаев. Волны в растущих упругих телах: Препринт /Институт проблем механики АН СССР // М. 1989. с. 405. 44 с.
- [11] Радаев Ю. Н. Упругопластическое кручение призматических стержней. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт проблем механики АН СССР. Москва, 1989. 173 с.
- [12] Ю.Н Радаев. Упругопластическое кручение призматических стержней. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт проблем механики АН СССР. Москва, 1989. 16 с.
- [13] Годин Е. А., Гришин С. А., Манжиров А. В. [и др.]. Способ определения механических свойств кожного покрова/ АС СССР No1586679, 22.04.1990 г. (SU 1586679 A1).
- [14] Годин Е. А., Манжиров А. В., Радаев Ю. Н. [и др.]. Способ определения механических свойств биологических мягких тканей/ АС СССР No1644029, 22.12.1990 г. (SU 1644029 A1).
- [15] Радаев Ю. Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. № 1. с. 86–94.
- [16] Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. № 6. с. 85–98.
- [17] Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1991. № 1. с. 72–86.
- [18] Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Об условиях на границах раздела в упругопластических телах // Докл. АН Армении. 1990. Т. 91, № 1. с. 35–39.
- [19] Радаев Ю. Н. Пластическое течение четвертьплоскости под действием плоского штампа // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1992. № 2. с. 93–100.
- [20] Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1992. № 5. с. 6–24.
- [21] Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1992. № 6. с. 99–112.
- [22] Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Термомеханическая модель наращиваемого тела: Вариационная формулировка: Препринт / Институт проблем механики РАН. М., 1993. No 527. 40 с.
- [23] Дмитриева А. М., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Наращивание термоупругого сферического слоя: Применение вариационного подхода: Препринт / Институт проблем механики РАН. М., 1993. No 528. 64 с.
- [24] Radayev Y. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics // Trans. Japan Soc. Mech. Engrn. 1994. Vol. 60A, no. 580. p. 68–76.
- [25] Naumov V. E., Radayev Y. N., Schneiderman D. N. The Variational Formulations of Thermomechanics of Accreting Solids: Preprint / Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences. Moscow, 1995. No. 558. 68 pp.
- [26] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part I. Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropic Damage State // J. Non-Equilib. Thermodyn. 1996. Vol. 21, no. 2. p. 129–152.
- [27] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part II. Canonical Damage Growth Rate Equations and Theory of Damage Invariants // J. Non-Equilib. Thermodyn. 1996. Vol. 21, no. 3. p. 197–222.



- [28] Мураками С., Радаев Ю. Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1996. № 4. с. 93–110.
- [29] Радаев Ю. Н. Термодинамическая модель накопления анизотропной поврежденности в твердых телах. 1996.
- [30] Радаев Ю. Н. Задачи и теоремы по курсу «Математическая теория пластичности». Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1996. 80 с.
- [31] Радаев Ю. Н. Теория конечных деформаций сплошных сред. Самара.: Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1997. 103 с.
- [32] Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. Задача о разгрузке для трещины Дагдейла // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1997. № 4(6). с. 103–114.
- [33] Памяти Г.И. Быковцева / В. Э. Наумов, Т. Б. Лаврова, Ю. Н. Радаев [и др.] // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1998. № 2(8). с. 74–78.
- [34] Радаев Ю. Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1998. № 2(8). с. 79–105.
- [35] Радаев Ю. Н. К 50-летию В.И. Астафьева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1998. № 4(10). с. 120–126.
- [36] Radayev Y. N. Constitutive Models of Anisotropic Damage Growth and Modeling of Damaging Processes in Solids // Proc. 1st Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics. Vol. 1. Victoria, B. C., Canada: 1999. p. 294–303.
- [37] Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. О влиянии удаленной локализованной пластической зоны на раскрытие трещины нормального отрыва // Вестник Самарского гос. технического университета. Вып. 7, серия «Физико-математические науки». 1999. с. 70–85.
- [38] Радаев Ю. Н. Точное усреднение тонкой структуры поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1999. № 2(12). с. 71–96.
- [39] Радаев Ю. Н. Тензорное и гармоническое представление анизотропной поврежденности // В кн.: Прикладные задачи механики сплошных сред. 1999. с. 199–238.
- [40] Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. Прикладные задачи механики разрушения. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1999. 195 с.
- [41] Радаев Ю. Н. Континуальные модели поврежденности твердых тел Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Самарский гос. университет. Самара, 1999. 380 с.
- [42] Радаев Ю. Н. Континуальные модели поврежденности твердых тел Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Институт проблем механики РАН, Москва, 1999. 36 с.
- [43] Радаев Ю. Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1999. № 4(14). с. 70–93.
- [44] Radayev Y. N., Stepanova L. V. The effect of residual stress field induced by cyclic loading on crack initiation in a cracked sheet // Fatigue '99: Proceedings Of The Seventh International Fatigue Congress (Beijing, Peoples R China). Vol. 1-4. 1999. p. 1231–1236.
- [45] Радаев Ю. Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2000. № 5. с. 27–45.
- [46] Радаев Ю. Н. Об оценке скрытой свободной энергии и поврежденности у вершины трещины нормального отрыва // Прикл. механика и технич. физика. 2000. Т. 41, № 6. с. 106–117.
- [47] Радаев Ю. Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2000. № 4(18). с. 87–113.
- [48] Радаев Ю. Н. К 70-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2000. № 4(18). с. 63–68.
- [49] Radayev Y. N., Stepanova L. V. On the Effect of the Residual Stresses on the Crack Opening Displacement in a Cracked Sheet // Int. J. of Fracture. 2001. Vol. 107, no. 4. p. 329–360.
- [50] В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2001. 632 с.
- [51] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2001. № 2(20). с. 55–86.

- [52] Радаев Ю. Н. О влиянии удаленной пластической зоны на раскрытие трещины нормального отрыва // В сб.: Проблемы механики деформируемых тел и горных пород, посв. 70-летию проф. Л.В. Ершова (под ред. акад. РАН А.Ю. Ишлинского. М.: Изд-во Московского гос. горного ун-та, 2001. с. 251–262.
- [53] Астафьев В. И., Беркович Л. М., Радаев Ю. Н. VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2001. № 4(22). с. 63–68.
- [54] Манжиров А. В., Радаев Ю. Н. К 90-летию Н.Х. Арутюняна // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2002. № 4(26). с. 39–58.
- [55] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. О вычислении нулевых Лагранжианов нелинейно упругого поля // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Специальный выпуск. 2002. с. 39–56.
- [56] Radayev Y. N. On Directional Average of the Local Anisotropic Damage // Proc. 2nd Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics. Vol. II. Vancouver, B. C., Canada: 2002. p. 571–580.
- [57] Манжиров А. В., Арутюнян Н.Х., Радаев Ю.Н. К 90-летию со дня рождения // В сб.: Проблемы механики деформируемых тел. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН Республики Армения, 2003. с. 6–27.
- [58] Радаев Ю. Н., Бахарева Ю. Н., Рябова Ю. Н. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. № 2(28). с. 96–112.
- [59] Радаев Ю. Н., Бахарева Ю. Н. К теории осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. № 4(30). с. 125–139.
- [60] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. О канонических формах автомодельных уравнений осесимметричной задачи теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. № 4(30). с. 140–146.
- [61] Кабытов П.С., Радаев Ю.Н. К 60-летию Г.П. Ярового // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. № 4(30). с. 5–20.
- [62] Ю.Н Радаев. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. № 5. с. 102–120.
- [63] Радаев Ю. Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Проблемы механики: Сб. статей. к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / под ред. Д. М. Климов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. с. 658–684.
- [64] Параллельные информационные технологии на базе вычислительного кластера / Г.П. Яровой, Ю.Н. Радаев, Ю.А. Родичев [и др.] // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. 2003. с. 5–14.
- [65] Radayev Y. N. Constitutive models of anisotropic damage and modelling of damaging microprocesses in solids // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. 2003. с. 74–86.
- [66] Радаев Ю.Н. Программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. Самара: Изд-во Универс-групп, 2004. 30 с.
- [67] Радаев Ю.Н. Программа кандидатского экзамена по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. Самара: Изд-во Универс-групп, 2004. 28 с. с.
- [68] Радаев Ю.Н. Дополнительные теоремы теории плоской и осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2004. № 2(32). с. 41–61.
- [69] Bahareva Y., Radayev Y. Self-similar solutions of axially-symmetric problem of the mathematical theory of plasticity // Book of Abstracts. XXXII Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics. June 24 – July 1, 2004. St. Petersburg (Repino), Russia: 2004. p. 24.
- [70] Радаев Ю.Н. Математическая логика и основы теории алгоритмов. Программа курса. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. с. 20.
- [71] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

- [72] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. Группы симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2004. № 4(34). с. 99–111.
- [73] Яровой Г.П., Радаев Ю.Н. О новом прочтении «Оснований математики» А. Уайтхеда и Б. Рассела // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2004. № 4(34). с. 5–19.
- [74] Radayev Y. N. On directional average of the local anisotropic damage // Int. J. of Fracture. 2004. Vol. 128. p. 293–307.
- [75] Радаев Ю. Н., Бахарева Ю. Н. Об одном численном методе решения осесимметричной задачи теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. 2004. с. 52–64.
- [76] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. Инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. 2004. с. 65–84.
- [77] Радаев Ю. Н., Бахарева Ю. Н. Об обобщении автомодельных решений Шилда осесимметричной задачи теории пластичности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2005. № 2. с. 104–116.
- [78] Bakhareva Y. N., Radaev Y. N. A generalization of Shield's self-similar solutions of the axially symmetric problem of plasticity // Mech. Solids. 2005. Vol. 40, no. 2. p. 86–96.
- [79] Радаев Ю. Н., Гудков В. А., Бахарева Ю. Н. Группы симметрий и алгебра симметрий трехмерных уравнений математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 2(36). с. 106–124.
- [80] Yu.N. B., Y.N. R. A numerical method for solution of three-dimensional problem of the perfect plasticity // Book of Abstracts. XXXIII Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics. June 28 – July 5, 2005. St. Petersburg (Repino), Russia. p. 25.
- [81] Радаев Ю. Н. Об одном принципе классификации уравнений осесимметричной задачи теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 3(37). с. 43–56.
- [82] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. О t-гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 3(37). с. 57–71.
- [83] Радаев Ю. Н., Лычев С. А. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля. Самара: Изд-во Универс-групп, 2005. 60 с.
- [84] Радаев Ю. Н. К 75-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 5(39). с. 5–32.
- [85] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. Об одной естественной конечномерной подалгебре алгебры симметрий трехмерных уравнений математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 5(39). с. 52–70.
- [86] Радаев Ю. Н., Курнышева Н. А. О гиперболичности связанных уравнений математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 6(40). с. 89–112.
- [87] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. О максимально простых нормальных формах пространственных уравнений теории пластичности // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. 2006. № 1(48). с. 18–31.
- [88] Радаев Ю. Н. Группы симметрий дифференциальных уравнений плоской задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2006. № 4(44). с. 66–84.
- [89] Радаев Ю. Н. О кинематических соотношениях, определяющих пространственное пластическое течение на грани и ребре призмы Кулона–Треска // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2006. № 6/1(46). с. 123–156.
- [90] Радаев Ю. Н. Кинематика пространственного идеально пластического течения на поверхностях скольжения // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2006. № 9(49). с. 30–41.
- [91] Radayev Y. N., Kurnysheva N. A. Numerical Analysis of Strain–Damage Coupled Problems Represented by Isostatic Coordinate Net // Vol. of Abstracts 35th Solid Mechanics Conference. Krakow: 2006. P. 241–242.

- [92] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.
- [93] Радаев Ю. Н., Бахарева Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Тез. докл. на семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина (646-е заседание // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2006. № 1. с. 192.
- [94] Радаев Ю. Н., Курнышева Н. А. Трехмерные уравнения связанной задачи математической теории пластичности // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 1. с. 90–120.
- [95] Яровой Г. П., Панов А. Н., Радаев Ю. Н. Профессор Валентин Евгеньевич Воскресенский (к восьмидесятилетию со дня рождения) // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 2(52). с. 5–18.
- [96] Радаев Ю. Н. К 50-летию А.В. Манжирова // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4(54). с. 5–22.
- [97] Радаев Ю. Н. Точный анализ распределения напряжений у вершины трещины нормального отрыва в условиях пластического плоского напряженного состояния // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4(54). с. 336–365.
- [98] Радаев Ю. Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 6(56). с. 102–114.
- [99] Радаев Ю. Н. О дополнительном тензорном соотношении симметрии в математической теории пластичности // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 3. с. 109–125.
- [100] Яровой Г. П., Радаев Ю. Н. К 70-летию Г.И. Быковцева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 9/1(59). с. 9–30.
- [101] Радаев Ю. Н. О системах независимых соотношений совместности приращений деформаций в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 9/1(59). с. 195–215.
- [102] Радаев Ю. Н., Курнышева Н. А. Связанные задачи математической теории пластичности. Тез. докл. на семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина (660-е заседание // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2007. № 6. с. 170.
- [103] Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород / Ивлев Д.Д., Максимова Л.А., Непершин Р.И. [и др.]. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.
- [104] Радаев Ю. Н. Граничные условия для пространственных состояний идеально пластических тел // Вестник Самарского гос. университета. ] Естественнонаучная серия. 2008. № 2(61). с. 230–247.
- [105] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности (кинематические соотношения, определяющие течение на грани и ребре призмы Кулона–Треска) // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. Вып. 2. с. 34–76.
- [106] Яровой Г. П., Кабытов П. С., Радаев Ю. Н. Памяти профессора Игоря Степановича Загузова // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 3(62). с. 5–26.
- [107] Радаев Ю. Н. К теории плоской деформации идеально пластического тела // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 3(62). с. 272–289.
- [108] Радаев Ю. Н. О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2008. № 5. с. 79–89.
- [109] Radaev Y. N. On the hyperbolicity of 3D plasticity equations in isostatic coordinates // Mech. Solids. 2008. Vol. 43, no. 5. p. 756–764.
- [110] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Об одной форме определяющих соотношений математической теории пластичности (течение на ребре призмы Кулона–Треска) // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 6(65). с. 260–280.
- [111] Яровой Г. П., Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Профессор Леонид Юрьевич Коссович (к 60-летию со дня рождения) // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 6(65). с. 5–19.

- [112] Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Гармонические связанные СТЕ-термоупругие волны в свободном цилиндрическом волноводе // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 8/1(67). с. 411–459.
- [113] Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Гармонические связанные термоупругие волны в свободном теплоизолированном цилиндрическом волноводе // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 8/2(67). с. 109–129.
- [114] Радаев Ю. Н. Кинематика пространственного пластического течения на поверхности максимальной скорости сдвига. Тез. докл. на семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина (667-е заседание // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2008. № 5. с. 167.
- [115] Радаев Ю. Н. О системах независимых соотношений совместности приращения деформаций в случае течения на ребре призмы Кулона-Треска. Тез. докл. на семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина (686-е заседание // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2008. № 5. с. 175–176.
- [116] Kovalev V. A., Radayev Y. N. A strain-damage coupled model and its application to near crack tip localization analysis // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. Vol. 181. p. 012068 9.
- [117] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Математические модели и современные физические теории поля // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4. Ч. 2. с. 41–94.
- [118] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4. Ч. 2. с. 94–128.
- [119] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 156 с.
- [120] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Трехмерные определяющие соотношения теории идеальной пластичности и течение на ребре призмы Кулона-Треска // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2010. № 2. с. 171–188.
- [121] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Three-Dimensional Constitutive Relations of Ideal Plasticity and the Flow on the Coulomb-Tresca Prism Edge // Mech. Solids. 2010. Vol. 45, no. 2. p. 295–308.
- [122] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые числа плоских GIII-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10. Вып. 3. с. 46–53.
- [123] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. с. 328.
- [124] Климов Д. М., Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. К 80-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Ч. 1. С. с. 5–38.
- [125] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Распространение связанных гармонических GIII-термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Ч. 2. С. с. 207–255.
- [126] Радаев Ю. Н., Ревинский Р. А., Таранова М. В. Локализация волновых чисел связанной термоупругой волны в цилиндрическом волноводе с теплопроницаемой стенкой // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Ч.3. С. с. 588–595.
- [127] Коссович Л. Ю., Радаев Ю. Н. Профессор Дюис Данилович Ивлев (к 80-летию со дня рождения) // Изв. сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Вып 4. с. 69–91.
- [128] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Ревинский Р. А. Прохождение обобщенной GIII-термоупругой волны через волновод с проницаемой для тепла стенкой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. с. 59–70.
- [129] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Оптимальные системы одномерных подалгебр алгебры симметрий трехмерных уравнений математической теории пластичности // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1(22). с. 196–220.
- [130] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Ревинский Р. А. Прохождение термоупругого гармонического сигнала через волновод с теплопроницаемой стенкой // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1(22). с. 221–227.

- [131] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Алгоритм построения оптимальных систем одномерных подалгебр трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 2. с. 61–77.
- [132] Радаев Ю. Н., Таранова М. В. Связанное волновое термоупругое поле в длинном волноводе эллиптического поперечного сечения // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). с. 183–196.
- [133] Ивлев Д. Д., Радаев Ю. Н., Матченко Н. М. К 80-летию Владимира Георгиевича Зубчанинова // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). с. 3–22.
- [134] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Волновые задачи теории поля и термоупругие волны // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 4. с. 4.
- [135] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Null Lagrangians in the Field Theories of Continuum Mechanics // Int. Conference Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis, dedicated to the 70th Anniversary of the Georgian National Academy of Sciences and the 120th Birthday of N. Muskhelishvili. Book of Abstracts. Tbilisi, Georgia, September 9-14. 2011. p. 57–58.
- [136] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Optimal Systems of One-Dimensional Subalgebras of the Symmetry Algebra of Hyperbolic Equations of Perfect Plasticity // II Int. Conference dedicated to the 70th Anniversary of the Georgian National Academy of Sciences and the 120th Birthday of N. Muskhelishvili. Book of Abstracts. Batumi, Georgia, September 15-19. 2011. p. 99–100.
- [137] Радаев Ю. Н., Таранова М. В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2(23). с. 53–61.
- [138] Радаев Ю. Н. Траектории нарушений сплошности в идеально пластических телах // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2011. № 4. с. 85–103.
- [139] N. R. Y. Continuity Violation Trajectories in Perfectly Plastic Bodies // Mech. Solids. 2011. Vol. 46, no. 4. p. 563–578.
- [140] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Вывод тензоров энергии-импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2011. № 5. с. 58–77.
- [141] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Derivation of Energy-Momentum Tensors in Theories of Micropolar Hyperbolic Thermoelasticity // Mech. Solids. 2011. Vol. 46, no. 5. p. 705–720.
- [142] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Связанные термоупругие волны третьего типа заданного азимутального порядка в волноводе с проникаемой для тепла стенкой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Вып. 4. с. 86–108.
- [143] Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Распространение связанных термоупругих волн в цилиндрических волноводах. Тез. докл. на семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина (693-е заседание) // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2011. № 1. с. 190.
- [144] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Об одной форме определяющего уравнения идеально пластического тела (течение на ребре призмы Кулона-Треска). Тез. докл. на семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина (689-е заседание) // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2011. № 1. с. 188–189.
- [145] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Формы нулевых лагранжианов в полевых теориях механики континуума // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2012. № 1. с. 169–192.
- [146] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Forms of Null Lagrangians in Field Theories of Continuum Mechanics // Mech. Solids. 2012. Vol. 47, no. 1. p. 137–154.
- [147] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Двусторонние оценки азимутальных чисел, ассоциированных с элементарными волновыми функциями эллиптического цилиндра // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 2. с. 68–81.
- [148] Радаев Ю. Н. О вычислении «конечных» бистохастических возмущений азимутов гиперболических термоупругих волн в длинном волноводе. Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012), 25-31 мая, 2012 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2012. с. 418–420.
- [149] Радаев Ю. Н. «Конечные» двойко-стохастические возмущения азимутальных чисел гиперболических термоупругих волн в длинном волноводе // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1(11). с. 44–55.
- [150] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Термомеханическая ортогональность в нелинейной термоупругости третьего типа GNIII // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 3. с. 72–82.

- [151] Радаев Ю. Н. О достижимой нижней границе трехмерного инварианта Кулона–Треска. 2012.
- [152] Radaev Y. N. On Attainable Lower Boundary of the Three-Dimensional Coulomb-Tresca Invariant // Mech. Solids. 2012. Vol. 47, no. 6. p. 671–676.
- [153] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4. с. 71–79.
- [154] Радаев Ю. Н. Об одном новом варианте построения теории плоского деформированного состояния идеальнопластического тела, исходя из пространственных уравнений Д.Д. Ивлева // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 2(12). с. 20–35.
- [155] Радаев Ю. Н. Об одной достижимой оценке снизу трехмерного инварианта напряжений Кулона–Треска системами «двумерных» касательных напряжений // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4(14). с. 3–16.
- [156] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Связанная термомеханическая ортогональность в нелинейных моделях термоупругости третьего типа // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1(30). с. 207–214.
- [157] Радаев Ю. Н., Таранова М. В. Об уточнении локализации азимутальных чисел Матъе с помощью овалов Кассини // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1(30). с. 260–269.
- [158] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и d-тензоры термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. Т. 13. Вып. 2. Ч. 1. с. 60–68.
- [159] Radayev Y. N., Kovalev V. A. On propagation of cross-coupled hyperbolic thermoelastic waves of a given azimuthal number via a cylindrical waveguide // The 4th Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics (CanCNSM 2013). Montreal, Canada, McGill University, July 23-26, 2013. Book of Abstracts (Eds. Marco Amabili and Farbod Alijani. 2013. p. 28–29.
- [160] Radayev Y. N., Kovalev V. A. On propagation of cross-coupled hyperbolic thermoelastic waves of a given azimuthal number via a cylindrical waveguide // The 4th Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics (CanCNSM 2013). Montreal, Qc Canada, McGill University, July 23-26, 2013. 2013. p. 1–6.
- [161] Радаев Ю. Н. Памяти Дюиса Даниловича Ивлева // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 2(31). с. 9–12.
- [162] Коссович Л. Ю., Радаев Ю.Н. Профессор А.О. Ватульян. К 60-летию со дня рождения // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. Т. 13. Вып. 3. С. с. 111–118.
- [163] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Теоретико-полевая модель гиперболического термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой // Изв. Тульского гос. университета. Естественные науки. 2013. Т. Вып. 2. Ч. 2. с. 117–127.
- [164] Радаев Ю. Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2013. № 5. с. 77–85.
- [165] Radaev Yu. N. Asymptotic axes of stress tensors and strain increment tensors in mechanics of compressible continua // Mech. Solids. 2013. Т. 48, № 5. с. 546–552. ISSN 0025-6544, Mechanics of Solids, 2013, Vol. 48, No. 5, pp. 546–552.
- [166] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного континуума второго типа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. Т. 13. Вып. 4. Ч. 1. с. 96–102.
- [167] Радаев Ю. Н. Асимптотические директоры тензора напряжений и векторные дифференциальные уравнения механики континуума // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1(15). с. 195–206.
- [168] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. Т. 14. Вып. 1. с. 77–87.
- [169] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Об оценке азимутальных чисел, ассоциированных с элементарными волновыми функциями эллиптического цилиндра // Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2014. № 3. с. 23–43.

- [170] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Estimates of azimuthal numbers associated with elementary elliptic cylinder wave functions // *Mechanics of Solids*. 2014. Vol. 49, no. 3. p. 253–269.
- [171] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О нелинейных тензорах и векторах экстрадеформации в теории и механике континуума // *Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2014. № 1(34). с. 66–85.
- [172] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О сильных и слабых разрывах связанного термомеханического поля в термоупругих микрополярных континуумах второго типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2014. № 4(37). с. 85–97.
- [173] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Конечные деформации и экстрадеформации термоупругого континуума второго типа с микроструктурой // *Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). с. 3–29.
- [174] Murashkin E. V., Radayev Y. N. ON A CLASSIFICATION OF WEAK DISCONTINUITIES IN MICROPOLAR THERMOELASTICITY // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23. p. 10–13.
- [175] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Гиперболические теории и задачи механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2015. Т. 19, № 1. с. 186–202.
- [176] Radayev Yu. N., Kovalev V. A. Hyperbolic theories and problems of continuum mechanics // *Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci]*. 2015. Т. 19, № 1. с. 186–202.
- [177] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Объективные ротационно-инвариантные формы термоупругих лагранжианов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2015. Т. 19, № 2. с. 325–340.
- [178] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Модели микрополярных термоупругих континуумов со связанными параметрами микроструктуры // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2015. Т. 15, вып. 4. с. 451–461.
- [179] Миронов Б. Г., Радаев Ю. Н. Профессор А.В. Манжиров. К избранию членом Национальной академии наук Республики Армения // *Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3(25). с. 5–21.
- [180] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Связанные вариационные задачи механики с подвижной границей // *Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3(25). с. 29–36.
- [181] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Экстрадеформации микроструктурного континуума с одним свободным директором // *Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3(25). с. 61–65.
- [182] Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Незатухающие тепловые волны в цилиндрическом волноводе // *Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3(25). с. 100–107.
- [183] Миронов Б. Г., Радаев Ю. Н. Профессор Д.Д.Ивлева. К 85-летию со дня рождения // *Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 1(27). с. 3–36.
- [184] Радаев Ю. Н., Радченко В. П. К 85-летию со дня рождения профессора Д.Д. Ивлева // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. Т. 20. с. 197–219.
- [185] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Каноническая полевая теория термоупругого континуума с тремя полярными директорами // *Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). с. 11–40.
- [186] Kovalev V. A., Radayev Y. N. On plastic flow of solids for stress states corresponding to an edge of the Coulomb-Tresca prism // *Materials Phys. and Mech*. 2016. Vol. 28, no. 1/2. p. 57–61.
- [187] Kovalev V., Murashkin E., Radayev Y. On a Physical Field Theory of Micropolar Thermoelasticity // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. Vol. 788. p. 012043. V International Conference on «Problems of Mathematical and Theoretical Physics and Mathematical Modelling» 5–7 April 2016, Moscow, Russian Federation.
- [188] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Рационально алгебраически полные системы тензоров конечных деформаций сложных континуумов // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17. Вып. 1. с. 71–84.
- [189] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Thermodynamics of Wave Processes of Heat Transport // *Mechanics for Materials and Technologies*. Eds. Altenbach, Holm, Goldstein, Robert V., Murashkin, Evgenii. *Advanced Structured Materials*. Springer International Publishing, 2017. Vol. 46. p. 363–376.



- [190] Radayev Y. N. Dedication to Professor Alexander Vladimirovich Manzhirov // Topical problems of continuum mechanics. Proceedings of V International Conference (02-07 October 2017, Tsakhkadzor, Armenia. Yerevan: 2017. p. 5–12.
- [191] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Full thermomechanical coupling in modelling of micropolar thermoelasticity // Topical problems of continuum mechanics. Proceedings of V International Conference (02-07 October 2017, Tsakhkadzor, Armenia. Yerevan: NUACA, 2017. p. 204–205.
- [192] Radayev Y. N., Kovalev V. A. Harmonic waves in a micropolar circular cylinder // Topical problems of continuum mechanics. Proceedings of V International Conference (02-07 October 2017, Tsakhkadzor, Armenia. Yerevan: Nauca, 2017. p. 213–214.
- [193] Коссович Л. Ю., Радаев Ю. Н. Профессор Александр Владимирович Манжиров (к 60-летию со дня рождения) // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. Вып. 4. с. 465–483.
- [194] Радаев Ю. Н., Радченко В. П. К 60-летию профессора Александра Владимировича Манжирова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 3. с. 401–416.
- [195] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Analytical Solution of Cylindrical Wave problem in the Frameworks of Micropolar Elasticity // Journal of Physics: Conference Series. VI International Conference «Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling» 25–27 May 2017, Moscow, Russian Federation. 2017. Vol. 937. p. 012031.
- [196] Radayev Y. N. On 60th Anniversary of Professor Alexander Vladimirovich Manzhirov // Journal of Physics: Conf. Series. 5th International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics with a Special Session in Honor of Alexander Manzhirov's 60th Birthday, 2–7 October 2017, Tsakhkadzor, Armenia. 2018. Vol. 991. p. 012001.
- [197] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. Wave propagation problem for a micropolar elastic waveguide // Journal of Physics: Conf. Series. 5th International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics with a Special Session in Honor of Alexander Manzhirov's 60th Birthday, 2–7 October 2017, Tsakhkadzor, Armenia. 2018. Vol. 991. p. 012047.
- [198] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Full thermomechanical coupling in modelling of micropolar thermoelasticity // Journal of Physics: Conf. Series. 5th International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics with a Special Session in Honor of Alexander Manzhirov's 60th Birthday, 2–7 October 2017, Tsakhkadzor, Armenia. 2018. Vol. 991. p. 012061.
- [199] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Divergent conservation laws in hyperbolic thermoelasticity // AIP Conference Proceedings. THE EIGHTH POLYAKHOV'S READING: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics (29 January–2 February 2018, Saint Petersburg, Russia). 1959. Vol. 070025.
- [200] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On deformation of complex continuum immersed in a plane space // AIP Conference Proceedings. THE EIGHTH POLYAKHOV'S READING: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics (29 January–2 February 2018, Saint Petersburg, Russia). 1959. Vol. 070018.
- [201] Памяти ученого. А.В. Манжиров (1957-2018) / Ватульян А.О., Радаев Ю.Н., Карякин М.И. [и др.] // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2018. № 3. с. 130–132.
- [202] Радаев Ю. Н. Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона–Мора // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. Вып. 4. с. 467–483.
- [203] Радаев Ю. Н. Профессор Леонид Юрьевич Коссович (К 70-летию со дня рождения) // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. Вып. 4. с. 507–521.
- [204] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Президент Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского Леонид Юрьевич Коссович. К 70-летию со дня рождения // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). с. 5–17.
- [205] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Законы сохранения в теориях гиперболической термоупругости, следующие из вариационных симметрий действия // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). с. 18–25.

- [206] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 3. с. 504–517.
- [207] Радаев Ю. Н. К теории неплотно связанных сред Кулона-Мора и обобщенных пластических тел Прандтля // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4(38). с. 3–24.
- [208] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Multi-Physics Modelling in Continuum Mechanics // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. Fundamental and Applied Problems of Mechanics 201724–27, October 2017, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation. 2018. Vol. 468. p. 012043.
- [209] Murashkin E. V., Radayev Y. N., Kovalev V. A. Microrotation Waves Propagating in a Cylindrical Waveguide // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. Fundamental and Applied Problems of Mechanics 201724–27, October 2017, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation. 2018. Vol. 468. p. 012030.
- [210] Radayev Y. N. Asymmetric tensor representations in micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. Vol. 23, no. 2. p. 246–255.
- [211] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О волновых решениях динамических уравнений гемитропной микрополярной термоупругости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. Вып. 4. с. 454–463.
- [212] Радаев Ю. Н. Пространственные асимптотические директоры в асимметричных теориях механики сплошных деформируемых тел // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 2(40). с. 36–44.
- [213] Radayev Y. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2019. Vol. 23, no. 3. p. 464–474.
- [214] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // Известия Российской Академии Наук. Механика Твёрдого Тела. 2019. № 6. с. 38–46.
- [215] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). с. 11–29.
- [216] E.V. M., Yu.N R. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2019. Vol. 23, no. 4. p. 646–656.
- [217] Радаев Ю. Н. Об одной гиперболической модели плоских необратимо сжимаемых течений сред Кулона-Мора и пластических тел Прандтля // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4(42).
- [218] Радаев Ю. Н. О кинематических соотношениях вдоль мгновенно нерастяжимых линий в течениях сжимаемых сред // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4(42). с. 84–91.
- [219] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Преобразования дифференциальных  $d$ -операторов в моделях механики деформируемых сред // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4(42). с. 92–102.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ПРИВЕДЕНИЯ ОДНОТОЧЕЧНЫХ ПСЕВДОТЕНЗОРОВ К АБСОЛЮТНЫМ ТЕНЗОРАМ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В настоящей работе предлагается алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров произвольной валентности и веса к абсолютным тензорам. Вес псевдотензора полагается целым числом. Алгоритм основан на преобразовании одноточечного псевдотензора произвольной валентности и веса с использованием символов перестановок как ковариантных, так и контравариантных. Приводятся необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. На основании предложенного алгебраического алгоритма преобразования предлагается реализация ковариантного дифференцирования одноточечного псевдотензорного поля произвольной валентности и веса, с помощью которой вводится определение градиента псевдотензорного поля.

**Ключевые слова:** псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, символ перестановок, ковариантная производная, градиент

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002

УДК: 539.374

---

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2022

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2022

**1. Вводные замечания и предварительные сведения.** Моделирование поведения современных конструкционных структурных материалов и метаматериалов привело к необходимости использования формализма и принципов современной многомерной геометрии [1–3], псевдотензорного анализа [4–6] и современных моделей моделей механики континуума. Псевдотензоры целого веса<sup>7</sup> естественным образом возникают в механике упругих микрополярных сред. В частности, таковыми выступают: псевдовекторы микроповоротов<sup>8</sup>, псевдотензор изгиба–кручения, псевдовектор и псевдотензор моментных напряжений, коэффициент микроинерции, распределения объемных и поверхностных моментов. Псевдотензорный формализм особенно интересен при построении моделей полуизотропных микрополярных упругих континуумов (см. [7–13]).

Вывод дифференциальных уравнений, составляющих математическую модель континуума требует определения операторов ковариантного дифференцирования псевдотензора. Литературный поиск сведений о правилах ковариантного дифференцирования псевдотензорных полей заданного целого веса представляет собой трудоемкую задачу. Наиболее ранние попытки вычислить ковариантную производную одноточечного псевдотензора, по-видимому, встречаются в работах [14, 15]. В настоящей работе обсуждаются новые возможные реализации ковариантного дифференцирования одноточечных псевдотензоров, основанные на оригинальных алгебраических алгоритмах систематического приведения одноточечных псевдотензоров целого веса к абсолютным тензорам с помощью символов перестановок. Обсуждаются минимально необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Различные подходы к развитию псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [4–6, 16, 17].

**2. Необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров в евклидовом пространстве.** Рассмотрим евклидово пространство размерности  $N$ . Введем в рассмотрение локальные базисы, связанные с выбранной системой координат:  $\mathbf{i}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) — локальный ковариантный базис;  $\overset{s}{\mathbf{i}}$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) — локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\mathbf{i}_s \cdot \overset{k}{\mathbf{i}} = \delta_s^k \quad (k = 1, 2, \dots, N; s = 1, 2, \dots, N).$$

Базисные направления и различные способы их нумерации являются фундаментальными понятиями в теории относительных тензоров и ориентируемых многообразий. Речь идет о перестановках ряда чисел  $1, 2, \dots, N$ .

Символы перестановок  $\epsilon^{s_1 s_2 \dots s_N}$  и  $\epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N}$ , называемыми также альтернирующими или дискриминантными символами, являются псевдотензорами и определяются

<sup>7</sup>Хотя как указывают некоторые авторы [4, с. 159] вес псевдоинвариантов может быть дробным.

<sup>8</sup>В микрополярных теориях упругости микроповорот можно описывать абсолютным вектором  $\phi^s$  или одним из двух псевдовекторов

$$\overset{[+1]}{\phi}_s, \quad \overset{[-1]}{\phi}_s$$

Переход от одного псевдовектора к другому не чувствителен к зеркальному преобразованию системы координат.

согласно

$$\begin{aligned} \epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N}^{[-1]} &= \epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N}^{[+1]} = \\ &= \epsilon(s_1, s_2, \dots, s_N) = \begin{cases} +1, & \text{если } s_1, s_2, \dots, s_N \text{ четная} \\ & \text{перестановка ряда чисел } 1, 2, \dots, N; \\ -1, & \text{если } s_1, s_2, \dots, s_N \text{ нечетная} \\ & \text{перестановка ряда чисел } 1, 2, \dots, N; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Из определения (1) видно, что единственной существенной компонентой символов перестановок будет

$$\epsilon_{12\dots N} = \epsilon^{12\dots N} = 1.$$

Абсолютные дискриминантные тензоры  $e^{s_1 s_2 \dots s_N}$  и  $e_{s_1 s_2 \dots s_N}$  определяются по аналогии с (1). При этом  $e_{s_1 s_2 \dots s_N} = e \epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N}$ ,  $e = e_{12\dots N}$  — псевдоскаляр веса  $+1$ , являющийся косым произведением [1, с. 63–65] векторов ковариантного базиса  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N$ :

$$\left[ \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N \right] = e \quad (2)$$

поскольку

$$\det(\iota^s) = 1, \quad \iota_c^s = \mathbf{z}_c \cdot \mathbf{z}^s = \delta_c^s.$$

Псевдоскаляр  $e$  — фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, позволяющий идентифицировать правые и левые локальные базисные системы.

Можно показать, что детерминант метрического тензора  $g$  является псевдоскаляром веса  $+2$ , а также  $e = \sqrt{g}$  для правоориентированного базиса и  $e = -\sqrt{g}$  для левоориентированного базиса.

Несложно заметить, что

$$e^{s_1 s_2 \dots s_N} e_{s_1 s_2 \dots s_N} = \epsilon^{s_1 s_2 \dots s_N} \epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N} = N!. \quad (3)$$

Важно также отметить, что для символов перестановок нарушаются правила жонглирования индексами. Поднимать или опускать индексы у символов перестановок необходимо согласно правилу

$$e^{h_1 h_2 \dots h_N} = e^2 g^{h_1 k_1} g^{h_2 k_2} \dots g^{h_N k_N} \epsilon_{k_1 k_2 \dots k_N}. \quad (4)$$

В пространстве трех измерений справедливо

$$e_{ijk} = \left[ \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k \right] = \left( \mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_j \right) \cdot \mathbf{z}_k, \quad (5)$$

тогда

$$e = \left[ \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \right] = \left( \mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 \right) \cdot \mathbf{z}_3. \quad (6)$$

Отметим, что псевдотензоры легко преобразовывать в абсолютные тензоры при помощи фундаментального ориентирующего псевдоскаляра  $e$  (см. [7–9]). Для произвольного псевдотензора целого веса  $w$  имеем

$$T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s} = e^{-w} T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}. \quad (7)$$

Здесь и далее в квадратных скобках сверху корневого символа будем указывать вес псевдотензорного поля, а в круглых скобках снизу — валентность. Нулевые веса и

ранги не отражаются в обозначениях. То же самое касается весов фундаментальных величин и ориентирующих псевдоскаляров.

**3. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров произвольной валентности и веса к абсолютным тензорам.** Рассмотрим один алгебраический алгоритм приведения одноточечного псевдотензора произвольного ранга ( $s + r = n$ ) и целого веса  $w$  к абсолютному тензору. В частности, если  $w > 0$ , построим абсолютный тензор согласно формуле

$$T_{(n+Nw) \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}}^{h_1 h_2 \dots h_s} = T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \underbrace{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]}}_w. \quad (8)$$

Аналоги соответствующих псевдотензорных представлений заинтересованный читатель найдет в книге [4, с. 175].

Учитывая свойство символов перестановок (3), можно возвратиться к исходному псевдотензору с помощью обратного преобразования

$$T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = (N!)^{-w} T_{(n+Nw) \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}}^{h_1 h_2 \dots h_s} \underbrace{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[+1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[+1]}}_w. \quad (9)$$

Для псевдотензоров с целым отрицательным весом  $w < 0$  соотношения (8) и (9) примут вид

$$T_{(n+N|w|) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_{s+N|w|}} = T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \underbrace{\epsilon_{h_{r+1} \dots h_{r+N}}^{[+1]} \dots \epsilon_{h_{r+(|w|-1)N+1} \dots h_{r+N|w|}}^{[+1]}}_{|w|}, \quad (10)$$

$$T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = (N!)^{-|w|} T_{(n+N|w|) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_{s+N|w|}} \underbrace{\epsilon_{h_{r+1} \dots h_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{h_{r+(|w|-1)N+1} \dots h_{r+N|w|}}^{[-1]}}_{|w|}. \quad (11)$$

Для абсолютного тензора  $T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s}$  хорошо известна реализация ковариантного дифференцирования<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \nabla_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} &= \partial_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} + \Gamma_{qp}^{h_1} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{qh_2 \dots h_s} + \dots \\ &\dots + \Gamma_{qp}^{h_s} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots q} - \Gamma_{k_1 p}^q T_{(n) \dots q k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} - \dots - \Gamma_{k_r p}^q T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots q}^{h_1 h_2 \dots h_s}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ковариантная производная псевдотензора  $T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}$  валентности  $n$  веса  $w$  вычисляется согласно (см. [14–16]):

$$\begin{aligned} \nabla_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} &= \partial_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} + \Gamma_{qp}^{h_1} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] qh_2 \dots h_s} + \dots + \Gamma_{qp}^{h_s} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots q} - \\ &- \Gamma_{k_1 p}^q T_{(n) \dots q k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - \dots - \Gamma_{k_r p}^q T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots q}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - w T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \Gamma_{qp}^q. \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>9</sup>Отметим, что данная реализация ковариантного дифференцирования пригодна для использования не только в евклидовых, но и в римановых пространствах [2].

Однако, существуют альтернативные подходы реализации ковариантного дифференцирования псевдотензора. Определим ковариантную производную псевдотензора произвольной валентности и целого веса  $w$  с помощью соотношения:<sup>10</sup>

$$\nabla_p \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r} = e^w \nabla_p \left( e^{-w} \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r} \right). \quad (14)$$

В сокращенной записи вместо (14) имеем<sup>11</sup>:

$$\nabla \otimes \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w]} = e^{w \mathbf{i}} \otimes \partial_p (e^{-w} \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w]}). \quad (15)$$

Легко проверить, что

$$\nabla \otimes \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w]} = \mathbf{i}^p \otimes (\partial_p - \lambda_p) \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w]}, \quad (16)$$

где

$$\lambda_p = w \frac{\partial_p e}{e}.$$

Определение (14) позволяет получить (13) следуя, например, статье [13].

**4. Альтернативная схема реализации ковариантного дифференцирования одноточечного псевдотензора.** Воспользуемся алгебраическим алгоритмом раздела 3 и вычислим ковариантную производную абсолютного тензора

<sup>10</sup>Формула (14) имеет смысл и для дробных значений  $w$ , правда с одним ограничением: в леворентированных координатных системах значение степени  $e^w$  должно быть вещественным.

<sup>11</sup>Оператор Гамильтона определяется согласно:  $\nabla = \mathbf{i}^k \partial_k$ .

$T_{(n+Nw) \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}}^{h_1 h_2 \dots h_s}$ . Поскольку он имеет нулевой вес, то согласно (12) имеем:

$$\begin{aligned}
& \nabla_p T_{(n+Nw) \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}}^{h_1 h_2 \dots h_s} = \\
& \quad = \frac{[-1]_{k_{r+1} \dots k_{r+N}} \cdots [-1]_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}} \partial_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}}{1} + \\
& \quad + \frac{[-1]_{k_{r+1} \dots k_{r+N}} \cdots [-1]_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}} \Gamma_{pq}^{h_1} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_2 \dots h_s}}{2} + \cdots \\
& \quad \cdots + \frac{[-1]_{k_{r+1} \dots k_{r+N}} \cdots [-1]_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}} \Gamma_{pq}^{h_s} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots q}}{s} - \\
& \quad - \frac{[-1]_{k_{r+1} \dots k_{r+N}} \cdots [-1]_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}} \Gamma_{pk_1}^q T_{(n) \dots q k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}}{s+1} - \cdots \\
& \quad - \cdots - \frac{[-1]_{k_{r+1} \dots k_{r+N}} \cdots [-1]_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}} \Gamma_{pk_r}^q T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots q}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}}{s+r=n} - \\
& \quad - \Gamma_{pk_{r+1}}^q \frac{[-1]_{q \dots k_{r+N}} \cdots [-1]_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}}{n+1} - \cdots \\
& \quad \cdots - \Gamma_{pk_{r+Nw}}^q \frac{[-1]_{k_{r+1} \dots k_{r+N}} \cdots [-1]_{k_{r+(w-1)N+1} \dots q} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}}{n+Nw}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим подробнее отрезок формулы (17) между слагаемыми с номерами от  $n+1$  до  $n+Nw$ . Типичное здесь слагаемое (всего их  $Nw$ ) имеет вид:

$$\Gamma_{pk_{r+mN+l}}^q \frac{[-1]_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}}{1} \cdots \frac{[-1]_{k_{r+mN+1} \dots q \dots k_{r+(m+1)N}}}{m+1} \cdots \frac{[-1]_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}}{w} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}, \tag{18}$$

$$m = 0, 1, \dots, w-1; \quad q = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, N;$$

где по индексу  $q$  производится суммирование.

Очевидно, что единственным отличным от нуля слагаемым в указанной сумме будет слагаемое с номером  $q = k_{r+mN+l}$ , а именно

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{pk_{r+mN+l}}^{k_{r+mN+l}} \frac{[-1]_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}}{1} \cdots \frac{[-1]_{k_{r+mN+1} \dots k_{r+mN+l} \dots k_{r+(m+1)N}}}{m+1} \cdots \\
& \quad \cdots \frac{[-1]_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}}{w} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь по индексу  $k_{r+mN+l}$  не производится суммирование. Каждому символу перестановок в (19) будет соответствовать следующая сумма  $\Gamma$ -символов

$$\Gamma_{pk_{r+i}}^{k_{r+i}} = \frac{\partial_p e}{e} \quad (i = mN+1, mN+2, \dots, (m+1)N). \tag{20}$$



Так как в (19) ровно  $w$  штук символов перестановок, окончательно получим

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{pk_{r+1}}^q \epsilon_{q \dots k_{r+N}}^{[-1]} \cdots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} + \cdots \\
& \cdots + \Gamma_{pk_{r+Nw}}^q \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \cdots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots q}^{[-1]} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = \\
& = w \frac{\partial_p e}{e} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \cdots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Принимая во внимание вышесказанное, ковариантная производная (17) примет вид

$$\begin{aligned}
& \nabla_p T_{(n+Nw) \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}}^{h_1 h_2 \dots h_s} = \\
& = \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \cdots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} \left[ \partial_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} + \right. \\
& \quad + \Gamma_{pq}^{h_1} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] q h_2 \dots h_s} + \cdots + \Gamma_{pq}^{h_s} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots q} - \Gamma_{pk_1}^q T_{(n) \dots q k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - \cdots \\
& \quad \left. - \cdots - \Gamma_{pk_r}^q T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots q}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - w \frac{\partial_p e}{e} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Воспользовавшись обратным преобразованием (9), определим ковариантную производную одноточечного псевдотензора на основании

$$\begin{aligned}
& \nabla_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = (N!)^{-w} \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[+1]} \cdots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[+1]} \nabla_p T_{(n+Nw) \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}}^{h_1 h_2 \dots h_s} = \\
& = (N!)^{-w} \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[+1]} \cdots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[+1]} \times \\
& \quad \times \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \cdots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} \left[ \partial_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} + \right. \\
& \quad + \Gamma_{pq}^{h_1} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] q h_2 \dots h_s} + \cdots + \Gamma_{pq}^{h_s} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots q} - \Gamma_{pk_1}^q T_{(n) \dots q k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - \cdots \\
& \quad \left. \cdots - \Gamma_{pk_r}^q T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots q}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - w \frac{\partial_p e}{e} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \right] = \\
& = \partial_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} + \Gamma_{pq}^{h_1} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] q h_2 \dots h_s} + \cdots + \Gamma_{pq}^{h_s} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots q} - \\
& \quad - \Gamma_{pk_1}^q T_{(n) \dots q k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - \cdots - \Gamma_{pk_r}^q T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots q}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - w \frac{\partial_p e}{e} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}.
\end{aligned} \tag{23}$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned}
& \nabla_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = (N!)^{-w} \underbrace{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[+1]} \cdots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[+1]}}_w \times \\
& \quad \times \nabla_p \left( T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \underbrace{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \cdots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]}}_w \right).
\end{aligned} \tag{24}$$

Определенная таким образом ковариантная производная совпадает с (13) и (14). Отметим, что оба определения (14) и (24) имеют свои преимущества и недостатки. Определение (14) имеет компактную запись и справедливо для дробных весов, если дробная степень фундаментального определяющего псевдоскаляра вещественна, который может принимать отрицательные значения, но, при этом, вычисление фундаментального определяющего псевдоскаляра требует определения косоугольного произведения базисных векторов евклидова пространства. Для вычисления производной по определению (24) не требуется никаких предварительных сведений, кроме определения символов перестановок (1), что позволяет снять требование евклидовости пространства и вести речь о римановом пространстве. Однако в (24), вес дифференцируемого псевдотензора должен быть целым.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [2] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 316 с.
- [3] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
- [4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [5] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [7] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.
- [8] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [9] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [10] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 104–114.
- [11] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Псевдовекторные дифференциальные операторы микрополярной упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 4(50). С. 59–72.
- [12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130–138.
- [13] Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [14] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [15] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.].
- [16] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [17] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev*

## ALGEBRAIC ALGORITHM FOR THE SYSTEMATIC REDUCTION OF ONE-POINT PSEUDOTENSORS TO ABSOLUTE TENSORS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper is devoted to the an algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors of an arbitrary valency and weight to absolute tensors. The weight of a pseudotensor is assumed to be an integer. The algorithm is based on the transformation of a one-point pseudotensor of an arbitrary valency and weight by the permutation symbols, both covariant and contravariant types. Notions and requisite equations from Algebra and the Analysis of pseudotensors are recalled and discussed. An implementation of covariant differentiation of a one-point pseudotensor field of an arbitrary valency and weight is manifested and derived by the proposed algebraic algorithm of pseudotensor transformation. The definition of the pseudotensor field gradient is introduced and discussed.

**Keywords:** pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, permutation symbol, covariant derivative, gradient

### REFERENCES

- [1] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [2] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 316 с.
- [3] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
- [4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
- [5] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.]
- [7] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.
- [8] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 104–114.
- [9] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Псевдовекторные дифференциальные операторы микрополярной упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 4(50). С. 59–72.
- [10] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [11] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.

---

*Evgenii V. Murashkin*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.  
*Yuri N. Radayev*, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- 
- [12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130–138.
- [13] Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [15] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.].
- [16] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [17] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].

---

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 20-01-00666.

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

## КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗРЫВА В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Получено решение начально-краевой задачи о воздействии импульсной нагрузки взрывного типа на упругую балку, лежащую свободно на неподвижных недеформируемых опорах в воде. Влияние сопротивления воды движению колеблющейся балки учтено введением присоединенной массы воды. Решение поставленной задачи получено в самом общем виде с применением функции влияния Грина.

**Ключевые слова:** импульсная нагрузка, упругая балка, колебания, присоединенная масса воды, функция Грина.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.003

УДК: 531/534

### Постановка задачи.

Рассмотрим случай прямолинейных балок постоянного по всей длине поперечного сечения. Предполагаем, что поперечные размеры балки невелики по сравнению с её длиной  $l$ . Нагрузка прикладывается к балке мгновенно и действует, монотонно убывая, в течение времени  $t_+$ , которое в пределе можно считать стремящимся к нулю.

Пренебрегаем в силу малости усилиями, возникающими в балке от её собственного веса; следовательно можно полагать, что до действия нагрузки ось балки прямолинейна, балка находится в покое, а именно: начальные смещения всех её точек  $z=0$  и начальные скорости всех частиц  $z_t' = 0$ . Под действием внешней нагрузки частицы балки получают смещения и скорости  $u$ , которые распределены по длине балки, то есть являются функциями положения сечения  $x$  и времени  $t$  [1].

Введем обозначения: начало координат поместим на левом конце балки, ось  $x$  совместим с осью балки, а ось прогибов  $z$  направим вниз по направлению действия нагрузки. В этих обозначениях ордината обозначает прогиб балки в сечении, находящемся на расстоянии  $x$  от её левого конца. Для вывода уравнения движения балки

---

© Володин Г. Т., Кочергин Д. С., 2022

Володин Геннадий Тимофеевич

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Кочергин Денис Сергеевич

e-mail: sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 14.04.2022

применим принцип Даламбера, при этом сопротивление движению балки в воде будем учитывать введением присоединенной массы воды в соответствующие силы инерции.

Вырежем мысленно элемент балки длиной  $dx$  и применим к нему принцип Даламбера, согласно которому в любой момент времени внешние силы  $dq_2$ , действующие на элемент, уравновешиваются внутренними силами  $dq_1$  и силами инерции  $dq_3$ , то есть

$$dq_1 + dq_3 = dq_2 \quad (1)$$

Внешняя сила, действующая на элемент равна

$$dq_2 = p_2 b K_1 f(t) dx, \quad (2)$$

где  $p_2$  – давление на балку в момент приложения к ней нагрузки;  $b$  – ширина балки;  $K_1$  – коэффициент формы, учитывающий расположение балки по отношению к действующей на нее нагрузке;  $f(t)$  – функция, учитывающая спад давления со временем; эта функция на основе обработки данных многочисленных экспериментов может быть задана в виде

$$f(t) = \left(1 - \frac{t}{t_+}\right)^n, \quad (3)$$

где  $n$  – параметр, значения которого расположены в интервале  $n \in (1, 3)$  в зависимости от величины и вида взрывной нагрузки. [1], [2], [3], [4], [5]

Величину сил инерции с учётом присоединенной массы воды найдём в виде соотношения

$$dq_3 = (m_* + m_1) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dx, \quad (4)$$

где  $m_*$  и  $m_1$  – соответственно погонная масса балки и погонная присоединенная масса воды. Величину внутренних сил  $dq_1$  можно определить из уравнения

$$dq_1 = -\frac{\partial Q}{\partial x} dx = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} dx \quad (5)$$

При этом величина изгибающего момента  $M$ , действующего в рассматриваемом сечении, определяется по известной формуле для малых прогибов

$$M = -EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где  $E$  – модуль упругости материала балки;  $J$  – момент инерции поперечного сечения балки относительно её поперечной оси, проходящей через начало координат [6]. Подставляя найденные значения величин (2), (4), (5) в исходное уравнение (1), получим

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + (m_* + m_1) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = bK_1 p_2(x) f(t) \quad (7)$$

С учётом соотношения (6) для момента  $M$ , уравнение (7) можно записать в виде

$$EJ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + (m_* + m_1) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = K_1 b p_2(x) f(t)$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{K_1 b}{m_* + m_1} p_2(x) f(t) \quad (8)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{EJ}{m_* + m_1}} \quad (9)$$

Уравнение (8) представляет собой искомое уравнение упругих колебаний балки.

Рассмотрим поведение балки под действием кратковременно действующего импульса, характерного для взрывной нагрузки. Интенсивность действующего импульса по длине балки (погонный импульс) определяется функцией

$$i_*(x) = K_1 b p_2(x) \int_0^{t_+} f(t) dt \quad (10)$$

Так как импульс действует кратковременно, то за время его действия частицы балки не успевают получить заметных смещений, а получают лишь некоторые скорости [1], [2]. Деформирование балки происходит после окончания действия нагрузки, в период ее свободных колебаний. Уравнение свободных колебаний балки получим из общего уравнения (8) приравниванием к нулю внешних сил в соответствии с условиями деформирования балки:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \quad (11)$$

Рассмотрим случай свободно опертой по концам однопролётной балки длиной  $l$ . Для этого случая граничными условиями будут следующие условия на концах балки

$$z(0, t) = z(l, t) = 0, \quad (12)$$

то есть смещения на концах балки в направлении оси  $z$  отсутствуют;

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (13)$$

поскольку балка на свободно опертых концах не способна воспринимать изгибающего момента. Начальные условия в соответствии с характером действующей импульсной нагрузки запишем в виде [1], [2]

$$z(x, 0) = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right|_{t=0} = \frac{i_*(x)}{m_* + m_1} \quad (14)$$

#### Решение поставленной задачи.

Таким образом, поведение однопролётной свободно опертой по концам упругой балки в воде под действием импульсной взрывной нагрузки определяется решением начально-краевой задачи, описываемой уравнением (11) с граничными условиями (12), (13) и начальными условиями (14).

Перейдём к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{a_0}{l} t, \quad w = \frac{z}{l}, \quad (15)$$

при этом  $\xi \in [0; 1]$ ,  $\tau \in [0; \frac{a_0}{l} t_+]$ ,  $w \in [0; w_*]$ ,  $w_* = \frac{z_*}{l}$ ,  $z_*$  - максимально-возможный прогиб балки,  $a_0$  - скорость звука в воде. В этих безразмерных переменных определяющее уравнение (11), граничные условия (12), (13) и начальные условия (14) примут вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \beta_1^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{a_0 l} \quad (16)$$

$$w(0, \tau) = w(1, \tau) = 0 \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (18)$$

$$w(\xi, 0) = 0 \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{\tau=0} = \frac{i_*}{a_0(m_* + m_1)} \quad (20)$$

Итак, требуется найти частный интеграл уравнения (16), удовлетворяющий край-  
вым условиям (17), (18) и начальным условиям (19), (20).

Решение будем искать по методу Фурье. Согласно этому методу разделения пере-  
менных, решение записывают в виде ряда, каждое слагаемое которого есть произве-  
дение двух функций  $\chi(\xi)$  и  $T(\tau)$ :

$$w(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(\xi) \cdot T_j(\tau), \quad (21)$$

при этом  $\chi(\xi)$  и  $T(\tau)$  - пока неизвестные функции своих аргументов, причем каждый  
член суммы должен удовлетворять исходному уравнению (16) и соответствующим  
краевым и начальным условиям.

Как известно [1], [3], [7] решение обладает наибольшей общностью, когда оно вы-  
ражено через функцию влияния. Функцией влияния или функцией Грина называет-  
ся решение задачи для случая сосредоточенной нагрузки. В рассматриваемом случае  
функция Грина определяет значение прогиба в точке  $\xi$  от сосредоточенного импульса,  
приложенного в точке с координатой  $\xi_*$ . Следуя работе [1], функцию Грина запишем  
в виде  $w(\xi, \tau | \xi_*)$ .

Функция Грина должна удовлетворять дифференциальному уравнению, край-  
вым и начальным условиям. Краевые условия и начальное условие (19) для решения, выра-  
женного через функцию Грина, не меняются. Второе начальное условие (20) запишем  
через разрывную функцию Дирака  $\delta(\xi)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} = \frac{i_*(\xi)}{a_0(m_* + m_1)} \cdot \delta(\xi - \xi_*) \quad (22)$$

Функцию Грина для уравнения (16) и соответствующих начальных условий (19)-  
(20) будем искать в виде

$$w(\xi, \tau | \xi_*) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(\xi) \cdot T_j(\tau) \quad (23)$$

Подставляя предполагаемое решение (23) в уравнение (16), получим для каждого  
члена суммы уравнение

$$T''(\tau) \cdot \chi(\xi) + \beta_1^2 T(\tau) \chi^{(4)}(\xi) = 0 \quad (24)$$

или

$$\frac{1}{\beta_1^2} \cdot \frac{T''(\tau)}{T(\tau)} = -\frac{\chi^{(4)}(\xi)}{\chi(\xi)} = -\lambda^4, \quad (25)$$

где  $\lambda$  - параметр, подлежащий определению в ходе решения задачи. (Здесь, как об-  
щепринято, верхний индекс в круглых скобках означает порядок производной).

Таким образом, переменные разделились, при этом исходное уравнение (16) в част-  
ных производных заменено двумя равнозначными ему обыкновенными дифференци-  
альными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} T''(\tau) + \lambda^4 \beta_1^2 T(\tau) &= 0, \\ \chi^{(4)}(\xi) - \lambda^4 \chi(\xi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$



Решения уравнений (26) имеют вид

$$T(\tau) = A \cos \lambda^2 \beta_1 \tau + B \sin \lambda^2 \beta_1 \tau \quad (27)$$

$$\chi(\xi) = C_1 \cos \lambda \xi + C_2 \sin \lambda \xi + C_3 \operatorname{ch} \lambda \xi + C_4 \operatorname{sh} \lambda \xi \quad (28)$$

Для нахождения постоянных  $A, B, C_1, C_2, C_3, C_4$  и  $\lambda$  воспользуемся соответствующими начальными и краевыми условиями, учитывая, что так как переменные разделились, то за начальные условия отвечают только функции  $T(\tau)$ , а за краевые условия – только функции  $\chi(\xi)$ .

Из первого начального условия (19) найдём константу  $A$ . Так как для любого  $\xi$  при  $\tau = 0$  прогибы  $w = 0$ , то, следовательно, и  $T(0) = 0$ , поэтому из (27) сразу получаем, что постоянная  $A = 0$  для всех случаев. Следовательно, теперь решение (23) можно записать в виде

$$w(\xi, \tau | \xi_*) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin \lambda^2 \beta_1 \tau (C_1 \cos \lambda_j \xi + C_2 \sin \lambda_j \xi + C_3 \operatorname{ch} \lambda_j \xi + C_4 \operatorname{sh} \lambda_j \xi) \quad (29)$$

или

$$w(\xi, \tau | \xi_*) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \chi_j(\xi) \sin \lambda_j^2 \beta_1 \tau \quad (30)$$

Продифференцируем равенство (30) по  $\tau$  и воспользуемся вторым начальным условием (22), в результате получим

$$\frac{i_*(\xi_*)}{\beta_1(m_1 + m_*)a_0} \delta(\xi - \xi_*) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 B_j \chi_j(\xi) \quad (31)$$

Для нахождения коэффициента  $B_j$  умножим обе части равенства (31) на  $\chi_j(\xi)$  и проинтегрируем его по  $\xi$  от нуля до единицы. Учтём при этом ортогональность функций  $\chi_j(\xi)$  и  $\chi_k(\xi)$ , удовлетворяющих краевым условиям, и соотношениям

$$\int_0^1 \chi_j(\xi) \cdot \chi_k(\xi) d\xi = 0, \quad (32)$$

если  $j \neq k$  и

$$\int_0^1 \chi_j^2(\xi) d\xi = \frac{1}{4} [\chi_j^2(\xi) - 2\ddot{\chi}_j \dot{\chi}_j(\xi) + \dot{\chi}_j^2(\xi)]_{\xi=1}, \quad (33)$$

где точки означают дифференцирование по полному аргументу ( $\lambda_j \xi$ ) в отличие от дифференцирования по  $\xi$ , которое обозначают черточками [1]. В силу соотношения (32) все члены, кроме одного, содержащего  $\chi_j^2(\xi)$ , получаемого при  $j = k$  в рассматриваемой сумме, исчезнут. В результате получим

$$\int_0^1 \frac{i_*(\xi_*)}{\beta_1 a_0 (m_1 + m_*)} \delta(\xi - \xi_*) \chi_j(\xi) d\xi = \lambda_j^2 B_j \int_0^1 \chi_j^2(\xi) d\xi \quad (34)$$

В силу свойства  $\delta$  – функции

$$\int_0^1 \delta(\xi - \xi_*) f(\xi) d\xi = f(\xi_*), \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (35)$$

левую часть уравнения (34) запишем в виде

$$\int_0^1 \frac{i_*(\xi_*)}{\beta_1 a_0 (m_1 + m_*)} \delta(\xi - \xi_*) \chi_j(\xi) d\xi = \frac{i_*(\xi_*)}{\beta_1 a_0 (m_1 + m_*)} \chi_j(\xi_*)$$

Используя формулу (33), получим выражение для  $B_j$  в виде

$$B_j = \frac{4i_*(\xi_*)\chi_j(\xi_*)}{\beta_1 a_0(m_1 + m_*)\lambda_j^2 \left[ \chi_j^2(\xi) - 2\ddot{\chi}_j(\xi)\dot{\chi}_j(\xi) + \ddot{\chi}_j^2(\xi) \right]_{\xi=1}} \quad (36)$$

Следовательно, функция влияния примет вид

$$w(\xi, \tau | \xi_*) = \frac{4i_*(\xi_*)}{\beta_1 a_0(m_1 + m_*)} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j(\xi_*)\chi_j(\xi) \sin \lambda_j^2 \beta_1 \tau}{\lambda_j^2 \left[ \chi_j^2(\xi) - 2\ddot{\chi}_j(\xi)\dot{\chi}_j(\xi) + \ddot{\chi}_j^2(\xi) \right]_{\xi=1}} \quad (37)$$

Полный прогиб балки равен интегралу от функции влияния

$$w(\xi, \tau) = \int_0^1 w(\xi, \tau | \xi_*) d\xi_* \quad (38)$$

или

$$w(\xi, \tau) = \frac{4}{\beta_1 a_0(m_1 + m_*)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j(\xi) \sin \lambda_j^2 \beta_1 \tau}{\lambda_j^2 \left[ \chi_j^2(\xi) - 2\ddot{\chi}_j(\xi)\dot{\chi}_j(\xi) + \ddot{\chi}_j^2(\xi) \right]_{\xi=1}} \cdot \int_0^1 i_*(\xi_*)\chi_j(\xi_*) d\xi_* \quad (39)$$

Формула (39) определяет решение поставленной задачи в самом общем виде. Рассмотрим теперь один чаще всего встречающийся на практике случай, когда оба конца балки свободно оперты на неподвижные опоры. Для этого случая краевые условия определяются соотношениями (12), (13) или в безразмерных переменных (17), (18).

Так как за краевые условия в соответствии с решением (23) отвечают только фундаментальные функции  $\chi$ , то должны выполняться равенства

$$\chi_j(0) = \chi_j(1) = \chi_j''(0) = \chi_j''(1) = 0 \quad (40)$$

Подставляя эти значения в выражения для  $\chi$  и  $\chi''$ , получим систему четырёх уравнений относительно  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0; \\ C_1 \cos \lambda_j + C_2 \sin \lambda_j + C_3 \operatorname{ch} \lambda_j + C_4 \operatorname{sh} \lambda_j &= 0; \\ \lambda_j^2 (-C_1 + C_3) &= 0; \\ \lambda_j^2 (-C_1 \cos \lambda_j - C_2 \sin \lambda_j + C_3 \operatorname{ch} \lambda_j + C_4 \operatorname{sh} \lambda_j) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Пусть  $\lambda_j \neq 0$ . Тогда из первого и третьего уравнения системы (41) следует, что  $C_1 = C_3 = 0$ . Два оставшихся уравнения дают систему линейных однородных уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_2 \sin \lambda_j + C_4 \operatorname{sh} \lambda_j &= 0 \\ -C_2 \sin \lambda_j + C_4 \operatorname{sh} \lambda_j &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Условие нетривиальной совместности системы (42) приводит к уравнению

$$\sin \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j = 0 \quad (43)$$

Это характеристическое уравнение имеет бесконечное множество корней

$$\lambda_j = j\pi, \quad (44)$$

где  $j$  – любое целое число  $1, 2, 3, \dots$ . Корень, соответствующий  $j=0$  и удовлетворяющий уравнению (43) приводит к тривиальному результату  $z=0$ , означающему равновесие прямой неколеблющейся балки. Для  $j=1, 2, 3, \dots$ ,  $\operatorname{sh} \lambda_j \neq 0$ , поэтому из системы уравнений (42) находим, что  $C_4 = 0$ , а  $C_2 \neq 0$ , при этом  $C_2$  – произвольная константа, что является свойством системы однородных линейных уравнений [1], [7].

Положим для простоты  $C_2 = 1$ . Тогда фундаментальные функции примут вид

$$\chi_j(\xi) = \sin j\pi\xi \quad (45)$$

и решение (39) можно записать в виде

$$w(\xi, \tau) = \frac{2}{\pi^2 \beta_1 a_0 (m_1 + m_*)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sin j\pi\xi \sin j^2 \pi^2 \beta_1 \tau \int_0^1 i_*(\xi_*) \sin j\pi\xi_* d\xi_* \quad (46)$$

Из решения (46) видно, что балка в воде со свободно опертыми концами совершает гармонические колебания с частотами

$$\bar{\omega}_j = j^2 \pi^2 \beta_1, \quad (47)$$

представленными в безразмерной форме, или

$$\omega_j = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{a_0 (m_1 + m_*)}}, \quad (48)$$

записанные в размерных величинах.

#### **Заключение.**

Представленный на частном примере способ определения частот и форм свободных колебаний однопролетных балок в воде и нахождения общих решений для них может быть применен и к другим случаям закрепления балочных элементов конструкций. Полученные при этом решения об их деформировании в процессе колебаний под действием взрывной нагрузки могут быть использованы для определения гарантированного разрушения и гарантированной взрывостойкости таких конструкций.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Саламахин Т. М. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.
- [2] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидкой среде. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. – Тула: «Левша». 2005. 160 с.
- [3] Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 735 с.
- [4] Христофоров Б. Д. Параметры ударной волны и газового пузыря при подводном взрыве зарядов разной плотности из тэна и азида свинца. Механическое действие взрыва, 1994. 245-259 с.
- [5] Яковлев Ю. С. Основы гидродинамики взрыва. Ленинград: ВМАКВ, 1958. 283 с.
- [6] Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 608 с.
- [7] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Москва: ГИТТЛ, 1951. Т. 1. 476 с.

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

**VIBRATIONS OF THE ELEMENTS OF BEAM STRUCTURES UNDER THE  
ACTION OF AN EXPLOSION IN THE WATER**

*Tula State University, Tula, Russia.*

**Abstract.** The solution of the initial boundary value problem of the impact of an explosive-type pulsed load on an elastic beam lying freely on fixed non-deformable supports in water is obtained. The influence of water resistance to the motion of the oscillating beam is taken into account by the introduction of an attached mass of water. The solution of the problem is obtained in the most general form using the Green's influence function.

**Keywords:** pulse load, elastic beam, vibrations, attached water mass, Green function.

**REFERENCES**

- [1] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
- [2] Volodin G. T. The effect of the explosion of charges of condensed explosives in a gas and liquid medium. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).
- [3] Budak B., Samarsky A., Tikhonov A. Equations of mathematical physics. Moscow: Science, 1977. 735 p. in Russian.
- [4] Khristoforov B. Parameters of a shock wave and a gas bubble during an underwater explosion of charges of different densities of ten and lead azide. Mechanical action of the explosion, 1994. 245-259 p. (in Russian).
- [5] Yakovlev Y. Fundamentals of explosion hydrodynamics. Leningrad: VMAKV, 1958. 283 p. (in Russian).
- [6] Belyaev N. Resistance of materials. Moscow: Science, 1976. 608 p. (in Russian).
- [7] Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol. 1. Moscow: GITTL, 1951. 476 p. (in Russian).

---

*Volodin Gennady Timofeevich*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia,  
*Kochergin Denis Sergeevich*, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

Н. И. Петров

## О ВЛИЯНИИ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ В ТЕОРИИ НЕУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Проведена оценка влияния различных форм уравнений равновесия и граничных условий на величину критического давления и ее поведение по отношению к эйлеровой критической нагрузке.

**Ключевые слова:** растяжение, перемещение, деформация, напряжение, граничные условия, линеаризация, функция Бесселя.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.004

УДК: 539.375

Устойчивость полосы при сжатии в случае плоской деформации исследовалась в ряде работ [1-5,8]. При этом уравнения для определения критического давления получались на основе различных подходов и предположений.

В работах [1,2] впервые предполагалось, что потеря устойчивости в основном определяется изменением граничных условий. В работе [3] учитывались углы поворота в уравнениях равновесия аналогично [4] и, кроме того, сохранялись члены того же порядка малости в граничных условиях. В [4] использовались нелинейные соотношения между напряжениями и деформациями, причем уравнения равновесия приняты в форме [4]. Авторы работы [5] уравнения равновесия для компонент возмущения использовали в предложениях работ [4,6].

Целью данной работы является оценка влияния различных форм уравнений равновесия и граничных условий на величину критического давления и ее поведение по отношению к эйлеровой критической нагрузке.

В работе использованы общепринятые обозначения:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  - компоненты напряжения;  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  - компоненты деформаций; где  $u, v$  - компоненты перемещения вдоль осей  $x$  и  $y$ . Рассматривалась потеря устойчивости плоскости  $xOy$  (рис.1) под действием давления  $p$ .

Компоненты напряжения и деформаций связаны известными соотношениями закона Гука и условием несжимаемости

---

© Петров Н. И., 2022

Петров Николай Ильич

e-mail: ni.petrov46@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 18.01.2022

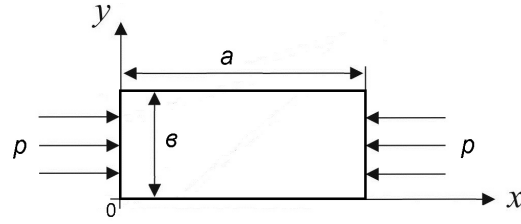


Рис. 1

$$\sigma_x - \sigma_y = 2G(\epsilon_x - \epsilon_y), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \epsilon_x + \epsilon_y = 0. \quad (1)$$

Решение задачи искалось в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \epsilon'_{ij}, \quad u = u^0 + u', \dots \quad (2)$$

Напряженное состояние до потери устойчивости определяется выражениями

$$\sigma_x^0 = -p, \quad \sigma_y^0 = 0, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (3)$$

Формы уравнений равновесия, граничных условий и соответствующие им уравнения для определения критического параметра  $\gamma$ , которые использовались в данной работе, представлены в таблице.

Связь критического параметра  $\gamma$  с критическим давлением  $p_{кр}$ , при котором происходит потеря устойчивости полосы, определяется соотношением

$$\gamma = \frac{p_{кр}}{2G}, \quad (4)$$

где  $G$  – модуль сдвига.

На рис.2 представлены графики зависимости критического параметра  $\gamma_i$  от величины  $kb$ , рассчитанные по уравнениям приведенным в таблице 1. Аналогичная зависимость приводиться для эйлеровской критической нагрузки  $\gamma_{эл}$ , рассчитанной по формуле

$$\gamma_{эл} = \frac{(kb)^2}{6}, \quad (5)$$

На рис.3 приведены графики зависимости отношений  $\gamma_i / \gamma_{эл}$  от параметра  $kb$ .

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. При малых значениях  $kb$  ( $kb < 0.3$ ) значения критических параметров  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$  и  $\gamma_{эл}$  практически совпадают, а значения  $\gamma_1$  совпадают с значением  $\gamma_4$ .

2. Для больших значений параметра  $kb$  зависимость  $\gamma_2 = \gamma_2(kb)$  похожа на зависимость  $\gamma_{эл} = \gamma_{эл}(kb)$ , но сильно отличается от поведения остальных кривых.

3. Сравнение величин  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  показывает, что пренебрежение слагаемыми в граничных условиях приводит к повышению критического давления при  $kb=3$  до 50

4. Сравнение кривых для  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  указывает, что учет слагаемых в уравнениях равновесия при условии сохранения их и в граничных условиях приводит к резкому повышению величины критического давления при одних и тех же значениях параметра  $kb$ .

Уравнения равновесия и граничные условия	Уравнение для определения критического параметра $\gamma_i$
$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} = 0,$ $\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} = 0;$ $\sigma'_y = 0, \quad \tau'_{xy} + p \frac{\partial v'}{\partial x} = 0$	$\gamma_2 = \frac{sh(kb) - kb}{kb}$
$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} = 0,$ $\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} - p \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right] = 0;$ $\sigma'_y = 0, \quad \tau'_{xy} + p \frac{\partial v'}{\partial x} = 0$	$\frac{2[ch(kb)\sqrt{1-\gamma_1}ch(kb)-1]}{sh(kb)\sqrt{1-\gamma_1}sh(kb)} =$ $= \frac{1}{(1+\gamma_1)\sqrt{1-\gamma_1}} + (1 + \gamma_1\sqrt{1-\gamma_1})$
$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} - p \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0,$ $\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} - p \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0;$ $\sigma'_y = 0, \quad \tau'_{xy} = 0$	$\frac{2[ch(kb)\sqrt{1-2\gamma_5}ch(kb)-1]}{sh(kb)\sqrt{1-2\gamma_5}sh(kb)} =$ $= \frac{(1-\gamma_5)^2}{\sqrt{1-2\gamma_5}} + \frac{\sqrt{1-2\gamma_5}}{(1-\gamma_5)^2}$
$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} = 0,$ $\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} - p \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right] = 0;$ $\sigma'_y = 0, \quad \tau'_{xy} = 0$	$\frac{2[ch(kb)\sqrt{1-\gamma_3}ch(kb)-1]}{sh(kb)\sqrt{1-\gamma_3}sh(kb)} =$ $= \frac{(2+\gamma_3)\sqrt{1-\gamma_3}}{(2-\gamma_3)} + \frac{(2-\gamma_3)}{(2+\gamma_3)\sqrt{1-\gamma_3}}$
$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} - p \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0,$ $\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} - p \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0;$ $\sigma'_y = 0, \quad \tau'_{xy} + p \frac{\partial v'}{\partial x} = 0$	$\frac{2[ch(kb)\sqrt{1-2\gamma_4}ch(kb)-1]}{sh(kb)\sqrt{1-2\gamma_4}sh(kb)} =$ $= \frac{(1-\gamma_4)}{\sqrt{1-2\gamma_4}(1+\gamma_4)} + \frac{\sqrt{1-2\gamma_4}(1+\gamma_4)}{(1-\gamma_4)}$

Таблица 1.

5. Из рис.3 видно, что учет слагаемыми в граничных условиях, но пренебрежение ими в уравнениях равновесия приводит к повышению значения критической силы по сравнению с эйлеровой критической силой.

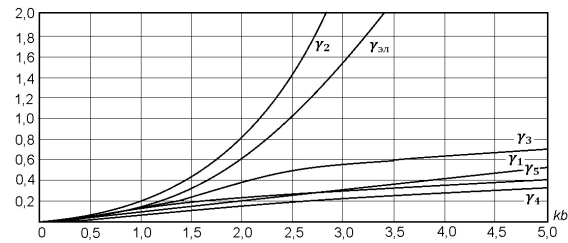


Рис. 2

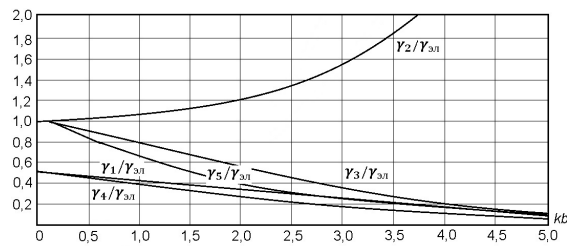


Рис. 3

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собрание трудов. Т.1. Москва: АН СССР, 1951. 115 с.
- [2] Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Т.4 // Украинский математический журнал. 1954. № 2. С. 140–146.
- [3] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Об устойчивости полосы при сжатии // АН СССР. 1961. № 5. с. 138.
- [4] Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1948. 408 с.
- [5] Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971. 276 с.
- [6] Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Москва: Физматгиз, 1961. 339 с.



N. I. Petrov

**STRETCHING OF A CYLINDRICAL ROD OF VARIABLE CROSS-SECTION IN  
THE THEORY OF SMALL ELASTIC-PLASTIC**

*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The influence of various forms of equilibrium equations and boundary conditions on the critical pressure value and its behavior with respect to the Eulerian critical load is evaluated.

**Keywords:** stretching, displacement, deformation, stress, boundary conditions, linearization, Bessel function.

**REFERENCES**

- [1] Leibenzon L. S. On the application of harmonic functions to the question of the stability of spherical and cylindrical shells, Collection of works. Moscow: Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, 1951. 115 c. (in Russian).
- [2] Ishlinsky A. Y. Consideration of questions about the stability of the equilibrium of elastic bodies from the point of view of the mathematical theory of elasticity // Ukrainian Mathematical Journal. 1954. № 2. C. 140–146. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D., Ershov L. V. On the stability of the strip under compression // USSR Academy OF Sciences. 1961. № 5. c. 138. (in Russian).
- [4] Ershov L. V., Kaluzhin A.A. On the stability of the strip under compression // USSR Academy OF Sciences. 1965. № 4. C. 152–153. (in Russian).
- [5] Guz A. N. Stability of three-dimensional deformable bodies. Kiev: Scientific opinion, 1971. 276 c. (in Russian).
- [6] Novozhilov V. V. Fundamentals of nonlinear elasticity theory. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 408 c. (in Russian).
- [7] Bolotin V. V. Nonconservative problems of elastic stability theory. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 339 c. (in Russian).

Ю. В. Немировский<sup>1,2</sup>, С. В. Тихонов<sup>3</sup>

## ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

<sup>1</sup> *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

<sup>3</sup> *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается задача центрального растяжения составного бетонного стержня квазистатическими нагрузками. В качестве распределенной нагрузки принимается сила тяжести, действующая на стержень. Определены предельные нагрузки и удлинения стержня в зависимости от физических параметров стержня. При деформации ниже предельной упругой предполагается, что бетон деформируется линейно, в противном случае нелинейно неупруго. Приведены примеры расчетов по полученным соотношениям для составных стержней одинаковой массы, где в каждом участке стержня могут быть реализованы различные марки бетонов.

**Ключевые слова:** составной стержень, центральное растяжение, физическая нелинейность, предельные нагрузки

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.005

УДК: 539.374

В данной работе будем рассматривать составные бетонные стержни с поперечным сечением в форме круга (рис. 1). Положим, что стержень заземлен с левого края, а к правому краю приложена нагрузка  $P$  (рис. 2). Ось  $Ox$  направим вдоль центральной оси стержня, ось  $Oz$  направим вертикально вверх, начало координат  $O$  поместим в центр грани левого конца стержня.

---

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В., 2022

*Немировский Юрий Владимирович*

**e-mail:** nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор Новосибирского государственного технического университета, г. Новосибирск, Россия.

*Тихонов Сергей Владимирович*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.05.2022

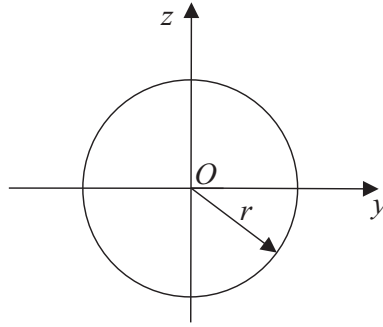


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

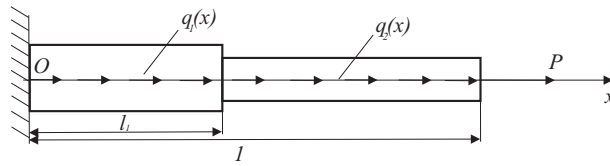


Рис. 2. Защемленный стержень

В данной работе будем учитывать физическую нелинейность деформирования бетонов, а также его разносопротивляемость растяжению и сжатию [1–16].

Примем, что на участках  $[0, l_1]$  и  $[l_1, l]$  стержень состоит из бетонов разных марок и радиусы  $r$  в поперечном сечении различны и равны соответственно  $r_1$  и  $r_2$ .

Зависимость между напряжениями и деформациями на  $i$ -ом участке стержня для случая  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{0i}^+$  примем равной

$$\sigma_i = E_i^+ \varepsilon, \tag{1}$$

а при  $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$  равной

$$\sigma_i = A_{1i}^{3+} \varepsilon + A_{3i}^{3+} \varepsilon^3, \tag{2}$$

где  $E_i^+$  – модуль упругости при растяжении бетона  $i$ -го участка стержня,  $\varepsilon_{0i}^+$  – предельная упругая деформация при растяжении  $i$ -го участка стержня,  $\varepsilon_{*i}^+$  – предельная деформация упрочнения при растяжении  $i$ -го участка стержня,  $A_{1i}^{3+}, A_{3i}^{3+}$  – физические параметры, определяемые из реальной диаграммы растяжения бетонов  $i$ -го участка стержня [14].

Указанные коэффициенты также могут быть определены из достаточно простых предположений [17], исходя из вида диаграммы растяжения-сжатия бетонов

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_{*i}^+} = 0, \quad \sigma_i(\varepsilon_{*i}^+) = \sigma_{*i}^+, \tag{3}$$

где  $\sigma_{*i}^+$  – предел прочности бетона.

Случай равенства или превышения деформации значения  $\varepsilon_*^+ = \min\{\varepsilon_{*i}^+\}$  будем считать случаем потери несущей способности стержня.

Во всех последующих расчетах будем использовать безразмерные величины

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{l}_1 = \frac{l_1}{l}, \quad \tilde{r}_i = \frac{r_i}{l}, \quad \tilde{P} = P \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{q}_1 = q \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \\ \tilde{N} = N \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{l}, \end{aligned} \quad (4)$$

где безразмеривающие величины:  $\sigma_{1*}^-$  – предел прочности при сжатии бетона марки В10,  $l$  – длина стержня;  $P$  – величина нагрузки, приложенной к правому краю стержня,  $q$  – величина распределенной нагрузки,  $N$  – величина продольного усилия,  $u$  – величина перемещений вдоль оси  $Ox$ .

Для определения коэффициентов  $A_{1i}^{3+}$ ,  $A_{3i}^{3+}$  уравнения деформирования (2) по формулам (3) достаточно знать характеристики бетона  $\varepsilon_0^+$ ,  $\varepsilon_*^+$ ,  $\sigma_*^+$ . В качестве материалов участков стержня будем использовать бетоны марок В10, В30, В50 с физическими параметрами, определенными в работе [18]. Результаты расчета коэффициентов по соотношениям (3) после безразмеривания по формулам (4) занесем в таблицу 1. Диаграммы деформирования бетонов, построенные по соотношениям (2) с коэффициентами из таблицы 1, имеют вид, изображенный на рис. 3.

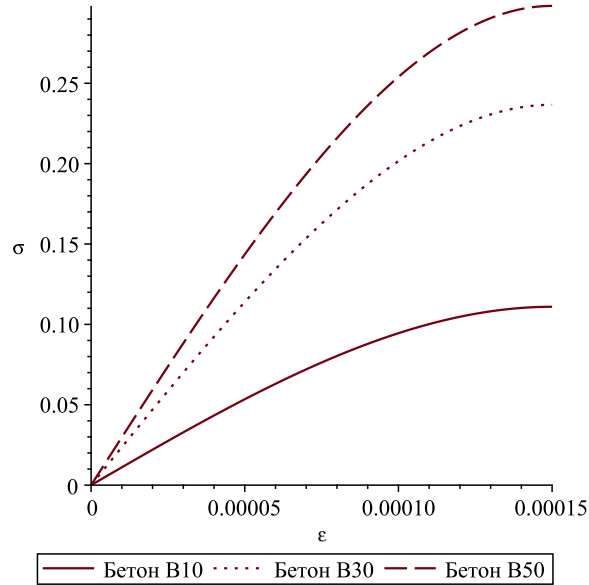


Рис. 3. Диаграммы деформирования бетонов, построенные по соотношениям (2)

Под распределенными нагрузками  $q_1$ ,  $q_2$  будем понимать действие силы тяжести на стержень. Нагрузка  $q_1$  действует на участке  $[0, l_1]$ , нагрузка  $q_2$  на участке  $[l_1, l]$ , которые определяются из соотношений

$$\tilde{q}_1 = \frac{\rho_1 g}{l \sigma_{1*}^-} \pi r_1^2, \quad \tilde{q}_2 = \frac{\rho_2 g}{l \sigma_{1*}^-} \pi r_2^2, \quad (5)$$

№	Марка бетона	$E^+$	$\varepsilon_0^+, 10^{-2}$	$\sigma_*^+$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$A_1^{3+}$	$A_3^{3+}, 10^{10}$
1	B10	1068,53	0,005	0,110963	0,015	1109,63	-1,644
2	B30	2278,67	0,005	0,236631	0,015	2366,31	-3,506
3	B50	2919,17	0,00375	0,298128	0,015	2981,28	-4,417

Таблица 1. Физические параметры бетонов

где  $\rho_1, \rho_2$  – плотности бетонов на участках  $[0, l_1]$  и  $[l_1, 1]$  соответственно,  $g$  – величина ускорения свободного падения.

Положим плотности бетонов марок B10, B30, B50 равными соответственно  $\rho_1 = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 2800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_3 = 3100 \text{ кг/м}^3$ .

В дальнейшем надстрочный индекс «~» во всех формулах и обозначениях будем опускать.

Уравнение равновесия при центральном растяжении имеет вид

$$\frac{dN}{dx} = -q(x), \quad (6)$$

где  $q(x)$  – распределенная нагрузка.

В рассматриваемом сечении  $S$  продольное усилие  $N$  может быть определено через напряжения

$$N = \iint_S \sigma dS. \quad (7)$$

Обозначим через  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$ ,  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  – продольные усилия, деформации и перемещения на участках  $[0, l_1]$  и  $[l_1, 1]$  соответственно. В рассматриваемой задаче наибольшее значение величины продольного усилия будет реализовываться в местах защемления стержня или на границе двух участков, т.е. при  $x = 0$  и  $x = l_1$ .

Наибольшее значение деформации в данной задаче может быть либо в месте защемления  $x = 0$ , либо на границе двух участков стержня  $x = l_1$ .

Для продольных усилий  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  справедливы соотношения

$$N_1(l_1) = N_2(l_2), \quad N_2(1) = P, \quad (8)$$

уравнение равновесия (6) имеет вид

$$\frac{dN_1}{dx} = -q_1, \quad \frac{dN_2}{dx} = -q_2. \quad (9)$$

Из соотношений (8), (9) получим выражение для продольных усилий

$$N_1(x) = P + (1 - l_1)q_2 + (l_1 - x)q_1, \quad N_2(x) = P + (1 - x)q_2. \quad (10)$$

Значения продольных усилий в точках  $x = 0$  и  $x = l_1$  будет равно

$$N_1(0) = P + (1 - l_1)q_2 + l_1q_1, \quad N_2(l_1) = P + (1 - l_1)q_2. \quad (11)$$

Найдем выражение для нагрузки  $P_{01}$ , при которой в левом конце стержня деформация равна предельной упругой  $\varepsilon_{01}^+$ , тогда из (1), (7) будем иметь

$$P_{01} = \pi r_1^2 E_1^+ \varepsilon_{01}^+ - q_2(1 - l_1) - l_1q_1. \quad (12)$$

Значение нагрузки  $P_{02}$ , при которой на границе двух участков стержня деформация равна предельной упругой  $\varepsilon_{02}^+$ , имеет вид

$$P_{02} = \pi r_2^2 E_2^+ \varepsilon_{02}^+ - q_2(1 - l_1). \quad (13)$$

Наименьшая из двух нагрузок  $P_{01}$ ,  $P_{02}$  будет соответствовать образованию в стержне участка с нелинейным неупругим деформированием материала

$$P_0 = \min\{P_{01}, P_{02}\}. \quad (14)$$

Если значение  $P > P_0$ , тогда в стержне будет область нелинейного неупругого деформирования. Найдем значение нагрузки  $P_{11}$ , при которой весь первый участок стержня  $[0, l_1]$  деформируется нелинейно неупруго. Указанную нагрузку можно определить, положив  $\varepsilon_1(l_1) = \varepsilon_{01}^+$

$$P_{11} = \pi r_1^2 E_1^+ \varepsilon_{01}^+ - (1 - l_1)q_2. \quad (15)$$

Найдем значение нагрузки  $P_{12}$ , при которой весь второй участок стержня в области нелинейного неупругого деформирования, положив  $\varepsilon_2(1) = \varepsilon_{02}^+$ .

$$P_{12} = \pi r_2^2 E_2^+ \varepsilon_{02}^+. \quad (16)$$

Предельная нагрузка  $P_1$ , соответствующая случаю, когда весь стержень стал деформироваться нелинейно неупруго, определяется из соотношений

$$P_1 = \max\{P_{11}, P_{12}\}. \quad (17)$$

Предельную нагрузку  $P_{21}$ , соответствующую достижению в месте заземления деформации значения, равного предельной упругости  $\varepsilon_*^+$ , можно определить из (2), (11)

$$P_{21} = \pi r_1^2 (A_{11}^{3+} \varepsilon_*^+ + A_{21}^{3+} (\varepsilon_*^+)^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_*^+)^3) - (1 - l_1)q_2 - l_1 q_1. \quad (18)$$

Аналогично определяется нагрузка, соответствующая достижению в месте соединения двух участков деформации значения, равного предельной упругости  $\varepsilon_*^+$

$$P_{22} = \pi r_2^2 (A_{12}^{3+} \varepsilon_*^+ + A_{22}^{3+} (\varepsilon_*^+)^2 + A_{32}^{3+} (\varepsilon_*^+)^3) - (1 - l_1)q_2. \quad (19)$$

В этом случае имеем для предельной нагрузки  $P_2$  при которой появляются стержне деформации  $\varepsilon_*^+$ ,

$$P_2 = \min\{P_{21}, P_{22}\}. \quad (20)$$

Рассмотрим случай, когда в стержне деформация не превышает предельного упругого значения, т.е.  $P \leq P_0$ , и весь стержень деформируется упруго (4) (на рисунке цифрами обозначены номера участков стержня).

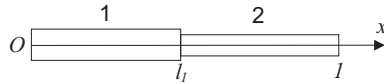


Рис. 4. Случай  $P < P_0$

В этом случае из соотношений (1), (7) получим

$$N_1(x) = \pi r_1^2 E_1^+ \varepsilon_1(x), \quad N_2(x) = \pi r_2^2 E_2^+ \varepsilon_2(x). \quad (21)$$

Из (10), (21) получим выражения для деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= \frac{1}{\pi r_1^2 E_1^+} (P + (1 - l_1)q_2 + (l_1 - x)q_1), \\ \varepsilon_2(x) &= \frac{1}{\pi r_2^2 E_2^+} (P + (1 - x)q_2). \end{aligned} \quad (22)$$

В случае если параметры стержня таковы, что  $P_{01} < P_{02}$ , т.е. выполняется условие

$$\pi r_1^2 E_1^+ \varepsilon_{01}^+ - l_1 q_1 < \pi r_2^2 E_2^+ \varepsilon_{02}^+, \quad (23)$$

и нагрузка удовлетворяет условиям  $P_{01} < P < P_{02}$ , то на первом участке будут области нелинейного неупругого деформирования  $[0, x_{s1}]$  и упругого деформирования  $[x_{s1}, l_1]$ , а на втором только упругого (рис. 5). На рисунке 5 заштрихованная область стержня соответствует участку нелинейного неупругого деформирования.

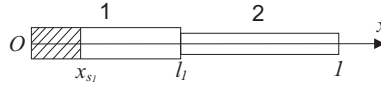


Рис. 5. Случай  $P_{01} < P < P_{02}$

В случае же, если нагрузка находится в диапазоне  $P_{02} < P < P_{01}$ , имеем случай изображенный на рис. 6.

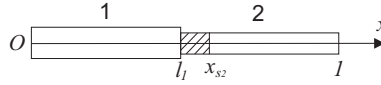


Рис. 6. Случай  $P_{02} < P < P_{01}$

При выполнении условия  $P_{11} < P_{02}$  имеем, в случае если нагрузка удовлетворяет условию  $P_{11} < P < P_{02}$ , область нелинейного неупругого деформирования, которая полностью охватывает первый участок стержня, а второй участок будет деформироваться упруго (рис. 7). Указанный случай будет иметь место при условии

$$r_1^2 E_1^+ \varepsilon_{01}^+ < r_2^2 E_2^+ \varepsilon_{02}^+. \quad (24)$$

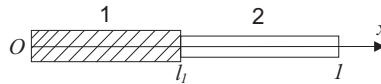
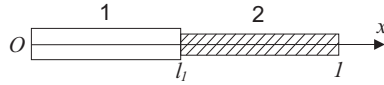
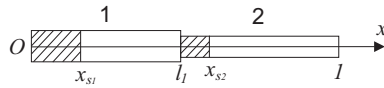


Рис. 7. Случай  $P_{11} < P < P_{02}$

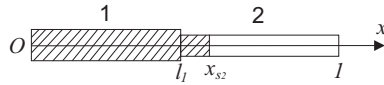
В случае физических параметров стержня, при которых справедливо неравенство  $P_{12} < P_{01}$  и если  $P$  находится в диапазоне  $P_{12} < P < P_{01}$ , второй участок полностью деформируется нелинейно неупруго, а первый участок будет деформироваться упруго (рис. 8).

Рис. 8. Случай  $P_{12} < P < P_{01}$ 

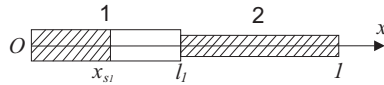
Если физические параметры стержня таковы, что  $\max\{P_{01}, P_{02}\} < P < \min\{P_{11}, P_{12}\}$ , имеем, что первый и второй участки стержня состоят из областей нелинейного неупругого деформирования и упругого, разделенных точками  $x_{s1}$  и  $x_{s2}$  соответственно (рис. 9).

Рис. 9. Случай  $\max\{P_{01}, P_{02}\} < P < \min\{P_{11}, P_{12}\}$ 

В случае  $P_{11} < P_{12}$  и нагрузке, удовлетворяющей условиям  $P_{11} < P < P_{12}$ ,  $P > P_{02}$ , первый участок стержня полностью находится в области нелинейного неупругого деформирования, а второй участок состоит из двух частей: области нелинейного неупругого деформирования  $[l_1, x_{s2}]$  и области упругого деформирования  $[x_{s2}, l]$  (рис. 10).

Рис. 10. Случай  $P_{11} < P < P_{12}$  и  $P > P_{02}$ 

Если справедливо неравенство  $P_{12} < P_{11}$  и для нагрузки  $P$  справедливо  $P_{12} < P < P_{11}$ ,  $P > P_{01}$ , тогда второй участок стержня полностью находится в области нелинейного неупругого деформирования, а первый участок состоит из двух частей: области нелинейного неупругого деформирования  $[0, x_{s1}]$  и области упругого деформирования  $[x_{s1}, l_1]$  (рис. 11).

Рис. 11. Случай  $P_{12} < P < P_{11}$  и  $P > P_{01}$ 

В случае  $P_1 < P < P_2$  весь стержень находится в области нелинейного деформирования (рис. 12).



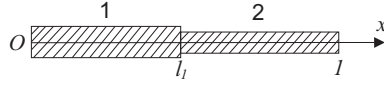


Рис. 12. Случай  $P_1 < P < P_2$

Рассмотрим случай  $P < P_0$  (рис. 4), тогда для удлинения  $\delta$  справедливо

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x)dx = \frac{l_1}{2\pi r_1^2 E_1^+} (2P + 2(1 - l_1)q_2 + l_1 q_1) + \frac{1 - l_1}{2\pi r_2^2 E_2^+} (2P + q_2(1 - l_1)). \quad (25)$$

При нагрузке  $P = P_0$  из (14), (25) получим для удлинения  $\delta_0$ .

При  $P_{01} < P < P_{02}$  имеем случай, изображенный на рис. 5, тогда для удлинения справедливо

$$\delta = \int_0^{x_s} \varepsilon_1(x)dx + \int_{x_{s1}}^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x)dx, \quad (26)$$

где  $\varepsilon_1(x)$  на участке  $[0, x_{s1}]$  определяется как решение уравнения

$$\pi r_1^2 (A_{11}^{3+} \varepsilon_1(x) + A_{21}^{3+} (\varepsilon_1(x))^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) = P + (1 - l_1)q_2 + (l_1 - x)q_1, \quad (27)$$

которое является кубическим относительно  $\varepsilon_1(x)$  и может быть найдено по формуле Кардано [19], а деформация  $\varepsilon_1(x)$  на интервале  $[x_{s1}, l_1]$  и  $\varepsilon_2(x)$  определяется по соотношениям для упругой области (22).

Из условия того, что  $\varepsilon_1(x_{s1}) = \varepsilon_{01}^+$ , из (22) получим для  $x_{s1}$  выражение

$$x_{s1} = l_1 - \frac{\varepsilon_{01}^+ \pi r_1^2 E_1^+ - P - (1 - l_1)q_2}{q_1}. \quad (28)$$

Из (28) видно, что при  $P_0 < P < P_{01}$  для границы справедливо условие  $0 < x_{s1} < l_1$ .

В случае  $P_{02} < P < P_{01}$  будет иметь место случай, изображенный на рис. 6, тогда удлинение стержня можно определить по соотношению

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^{x_{s2}} \varepsilon_2(x)dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x)dx, \quad (29)$$

где деформация  $\varepsilon_1(x)$  на участке  $[0, l_1]$  и  $\varepsilon_2(x)$  на участке  $[l_1, 1]$  определяется по соотношениям для упругой области (22), а в области  $\varepsilon_2(x)$  в области нелинейного деформирования из решения уравнения

$$\pi r_2^2 (A_{12}^{3+} \varepsilon_2(x) + A_{22}^{3+} (\varepsilon_2(x))^2 + A_{32}^{3+} (\varepsilon_2(x))^3) = P + (1 - x)q_2. \quad (30)$$

Выражение для границы раздела областей  $x_{s2}$  можно определить из уравнения  $\varepsilon_2(x_{s2}) = \varepsilon_{02}^+$ , где  $\varepsilon_2(x)$  определяется, согласно уравнению (17), тогда получим для  $x_{s2}$

$$x_{s2} = \frac{q_2 + P - \varepsilon_{02}^+ \pi r_2^2 E_2^+}{q_2}. \quad (31)$$

В случае  $P_{11} < P < P_{02}$  (рис. 7) удлинение  $\delta$  стержня определяется из соотношений

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x) dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x) dx, \quad (32)$$

где  $\varepsilon_1(x)$  – решение уравнения (27),  $\varepsilon_2(x)$  определяется из (22).

В случае  $P_{12} < P < P_{01}$  (рис. 8) удлинение  $\delta$  стержня определяется из соотношений

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x) dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x) dx, \quad (33)$$

где  $\varepsilon_1(x)$  определяется из (22),  $\varepsilon_2(x)$  – решение уравнения (30).

Если нагрузки и параметры стержня таковы, что  $\max\{P_{01}, P_{02}\} < P < \min\{P_{11}, P_{12}\}$  (рис. 9), тогда имеем для удлинения  $\delta$

$$\delta = \int_0^{x_{s1}} \varepsilon_1(x) dx + \int_{x_{s1}}^{l_1} \varepsilon_1(x) dx + \int_{l_1}^{x_{s2}} \varepsilon_2(x) dx + \int_{x_{s2}}^1 \varepsilon_2(x) dx, \quad (34)$$

где  $\varepsilon_1(x)$  на интервале  $[0, x_{s1}]$  определяется уравнением (27),  $\varepsilon_2(x)$  на интервале  $[l_1, x_{s2}]$  уравнением (30),  $\varepsilon_1(x)$  на интервале  $[x_{s1}, l_1]$  и  $\varepsilon_2(x)$  на интервале  $[x_{s2}, 1]$  уравнениями (22),  $x_{s1}$  и  $x_{s2}$  соотношениями (28) и (31) соответственно.

Если справедливо  $P_{11} < P < P_{12}$  и  $P > P_{02}$  (рис. 10), то удлинение стержня будет равно

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x) dx + \int_{l_1}^{x_{s2}} \varepsilon_2(x) dx + \int_{x_{s2}}^1 \varepsilon_2(x) dx, \quad (35)$$

где  $\varepsilon_1(x)$  на интервале  $[0, l_1]$  определяется уравнением (27),  $\varepsilon_2(x)$  на интервале  $[l_1, x_{s2}]$  уравнением (30),  $\varepsilon_2(x)$  на интервале  $[x_{s2}, 1]$  уравнением (22),  $x_{s2}$  соотношением (31).

В случае нагрузок и физических параметров стержня, таковых, что справедливо  $P_{12} < P < P_{11}$  и  $P > P_{01}$  (рис. 11), удлинение равно

$$\delta = \int_0^{x_{s1}} \varepsilon_1(x) dx + \int_{x_{s1}}^{l_1} \varepsilon_1(x) dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x) dx, \quad (36)$$

где  $\varepsilon_1(x)$  на интервале  $[0, x_{s1}]$  определяется уравнением (27),  $\varepsilon_2(x)$  на интервале  $[l_1, 1]$  уравнением (30),  $\varepsilon_1(x)$  на интервале  $[x_{s1}, l_1]$  уравнением (22),  $x_{s1}$  соотношением (28).

Удлинение  $\delta_1$ , соответствующее нагрузке  $P_1$ , будет равно

$$\delta_1 = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x) dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x) dx, \quad (37)$$

где  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$  определяются из уравнений (27), (30) при  $P = P_1$ .

В случае деформирования стержня при нагрузках  $P_1 < P < P_2$  удлинение определяется выражением

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x) dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x) dx, \quad (38)$$

где  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$  определяются из уравнений (27), (30).

Удлинение  $\delta_2$  определяется по соотношениям (37), если положить в уравнениях (27), (30) значение нагрузки  $P = P_2$ .

В качестве примера рассмотрим однородный стержень из бетона марки B10 с параметрами

$$r_1 = r_2 = 5/100. \quad (39)$$

Тогда для предельных нагрузок по соотношениям (14), (17), (20) получим

$$P_0 = 0,000162, \quad P_1 = 0,000420, \quad P_2 = 0,000614. \quad (40)$$

Определим удлинения при заданных нагрузках  $P_0, P_1, P_2$

$$\delta_0 = 0,000035, \quad \delta_1 = 0,000068, \quad \delta_2 = 0,000102. \quad (41)$$

Интегралы в формуле (37) считались по соотношениям

$$\delta_1 = \sum_{i=60}^{100} \varepsilon_2(x_i)h + \sum_{i=0}^{60} \varepsilon_1(x_i)h, \quad (42)$$

где  $h = \frac{1}{100}$ ,  $x_i = ih$ ,  $\varepsilon_1(x_i)$ ,  $\varepsilon_2(x_i)$  решения уравнений (27), (30) при соответствующих значениях  $x_i$ .

В общем случае уравнения (27), (30) имеют три решения. При выборе соответствующего решения  $\varepsilon_1(x_i)$ ,  $\varepsilon_2(x_i)$  в формуле (42) искалось ближайшее неотрицательное решение к решению, полученному на предыдущем шаге  $\varepsilon_1(x_{i+1})$ ,  $\varepsilon_2(x_{i+1})$ . При нахождении удлинения  $\delta_1$  при нагрузке  $P_1$  деформация в правом конце стержня должна равняться предельной, соответственно подсчет суммы велся, начиная с  $x_{100} = 1$ , и в качестве предыдущего значения для корректного выбора решения бралось значение деформации равной предельной. При нахождении предыдущего значения для  $x_{60} = l_1$  (на границе двух участков) в первом участке стержня бралось значение деформации, равной значению на втором участке стержня (на границе соприкосновения с первым участком стержня). Все полученные расчеты выполнялись в математическом пакете Maple. Аналогичная сумма составлялась при вычислении интеграла (30).

Корректность выбора решений можно проследить на рисунке 13.

Выполним аналогичные расчеты для стержня (40) без учета силы тяжести, положив  $q_1 = q_2 = 0$ , тогда величина деформации будет постоянно вдоль стержня и равны  $\varepsilon_0^+$ ,  $\varepsilon_*^+$  при нагрузках  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. Значения предельных нагрузок и удлинений будет иметь в этом случае вид

$$P_0 = 0,000420, \quad P_1 = 0,000420, \quad P_2 = 0,000871, \quad (43)$$

$$\delta_0 = 0,000050, \quad \delta_1 = 0,000069, \quad \delta_2 = 0,000150. \quad (44)$$

Сопоставляя результаты с учетом силы тяжести (40), (41), и без учета силы тяжести (43), (44) можно увидеть, что предельная нагрузка  $P_0$  во втором случае больше в 2,6 раза, нагрузка  $P_1$  совпадает, а  $P_2$  больше во втором случае в 1,41 раза.

В дальнейшем стержни указанного сечения и материала будем считать эталонными и будем рассматривать стержни, с массой равной массе эталонного стержня

$$\pi r_{\text{Э}}^2 \rho_{\text{Э}} = \pi r_{1i}^2 l_1 \rho_{1i} + \pi r_{2i}^2 (1 - l_1) \rho_{2i}, \quad (45)$$

где  $r_{1i}, r_{2i}$  – радиусы первого и второго участка составного стержня в поперечном сечении,  $\rho_1, \rho_2$  – плотности первого и второго участка составного стержня,  $r_{\text{Э}}$  – радиус эталонного стержня,  $\rho_{\text{Э}}$  – плотность бетона эталонного стержня.

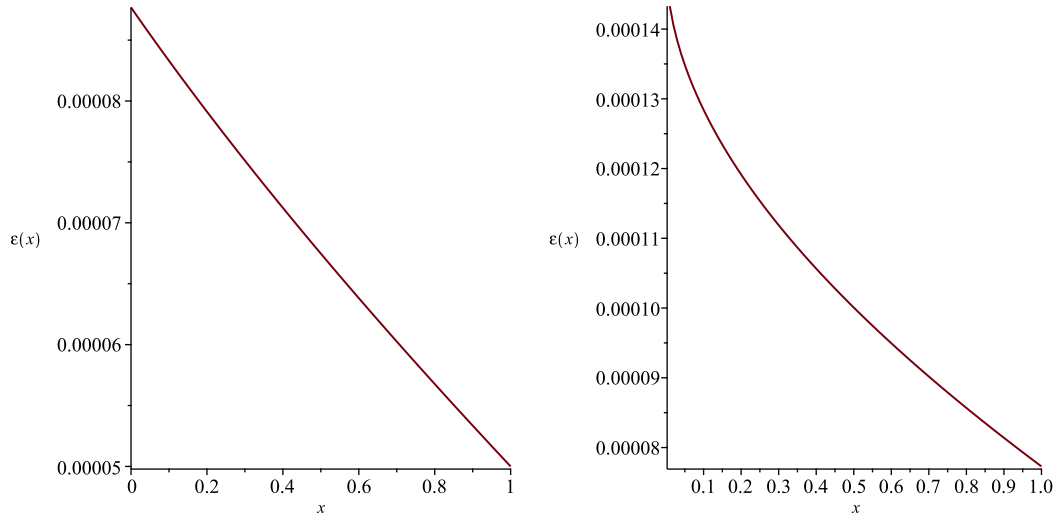


Рис. 13. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке  $P_1$  и  $P_2$  соответственно

Рассмотрим слоистый стержень (46) такой же массы, как и эталонный стержень, т.е. с параметрами, удовлетворяющими соотношениям (45). Первый участок стержня предполагается, что изготовлен из бетона марки В50, а второй – В30.

$$r_1 = 42/1000, r_2 = 5/100, l_1 = 1/2. \quad (46)$$

В результате расчетов получаем для предельных нагрузок и удлинений решения:

$$P_0 = 0,000353, \quad P_1 = 0,000895, \quad P_2 = 0,001404, \quad (47)$$

$$\delta_0 = 0,00029, \quad \delta_1 = 0,00064, \quad \delta_2 = 0,000109. \quad (48)$$

Распределение деформаций в стержне при нагрузках  $P_1$  и  $P_2$  изображены на рис. 14.

Как видно из полученных решений на рис. 14, деформации и, следовательно, напряжения будут терпеть разрыв на границе соприкосновения слоев. Непрерывными будут, исходя из построения решения, продольные усилия и перемещения. Графики деформаций, изображенные на рис. 14, соответствуют принятым предположениями, т.е. при  $P = P_1$  (рисунок слева) деформация в правом конце стержня равна предельному упругому значению, а при  $P = P_2$  в левом конце стержня равна предельной деформации упрочнения.

Расчетные значения предельных усилий и соответствующих удлинений стержня, отношение разности предельных нагрузок рассматриваемого и эталонного стержня к предельной нагрузке эталонного стержня (если нагрузка считалась с учетом силы тяжести, то и для эталонного стержня нагрузка считалась тоже с учетом силы тяжести и наоборот) поместим в таблицу 3, причем знак плюс будет соответствовать тому, что предельная нагрузка больше, а минус – предельная нагрузка меньше по сравнению с эталонным стержнем.

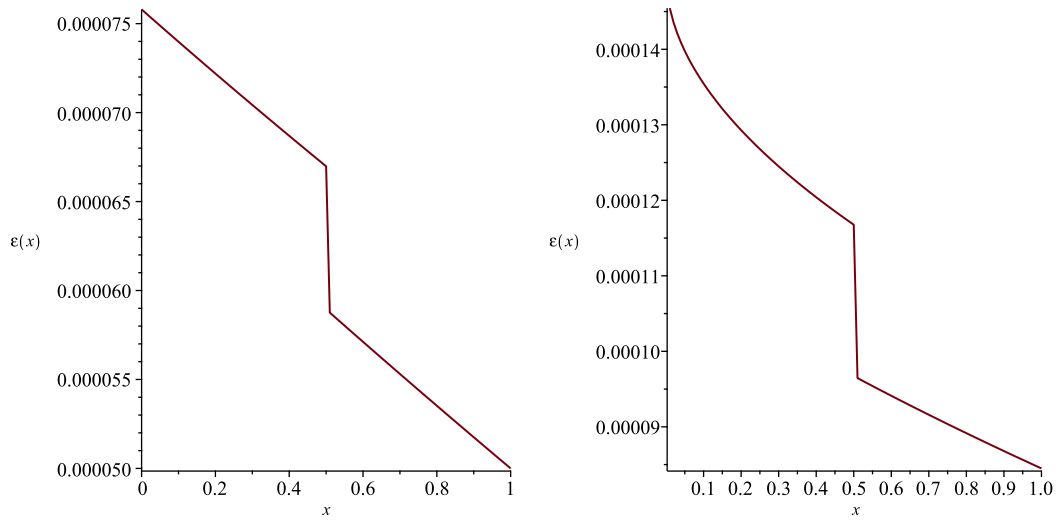


Рис. 14. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке  $P_1$  и  $P_2$  соответственно

Рассмотрим стержень с параметрами

$$r_1 = 0,05086, r_2 = 4/100, l_1 = 1/2. \tag{49}$$

Распределение деформаций при нагрузках  $P_1$  и  $P_2$  имеют вид, изображенный на рис. 15. Как видно из полученных решений, деформации в левом участке стержня существенно выше, чем в правом, наибольшее значение будет на границе раздела двух участков. В случае нагрузки  $P = P_1$  деформация равна предельному упругому значению в первом участке на границе сопряжения слоев, при нагрузке  $P = P_2$  деформация равна предельной деформации упрочнения во втором слое, на границе раздела двух участков. Соответственно потеря стержнем несущей способности будет происходить на границе двух участков стержня. Указанные значения предельных нагрузок для данного случая и для различных комбинаций параметров сечения и материалов стержня, имеющих одинаковую массу (45), будем помещать в таблицу 3.

Если сравнить случаи 9 и 11 из таблицы 3, то можно увидеть, что при перестановке местами материалов слоев, в случае когда слой бетона В10 находится в зоне заземления, демонстрируется существенно низкая несущая способность. В этом случае (случай 11) потеря несущей способности происходит при нагрузке ниже, чем нагрузки, когда оба участка стали в области зоны нелинейного неупругого деформирования ( $P_1 > P_2$ ), в случае 9 первый участок находится в зоне нелинейного-неупругого деформирования, а во втором участке слева деформация равна предельной деформации упрочнения (рис. 16). Причем, в случае 9 предельная нагрузка  $P_2$  больше, чем в случае 11, в 3,7 раза. Распределение деформаций в стержне при нагрузке  $P_2$  для случая 11 из таблицы 3 изображено на рис. 17. Из указанного рисунка видно, что во втором участке стержень находится в упругом состоянии, а в первом участке в месте заземления деформация равна предельной упрочнения.

Из полученных решений видно, что существенную роль при проектировании стержней играет выбор материалов стержня и то, в каком порядке эти материалы будут

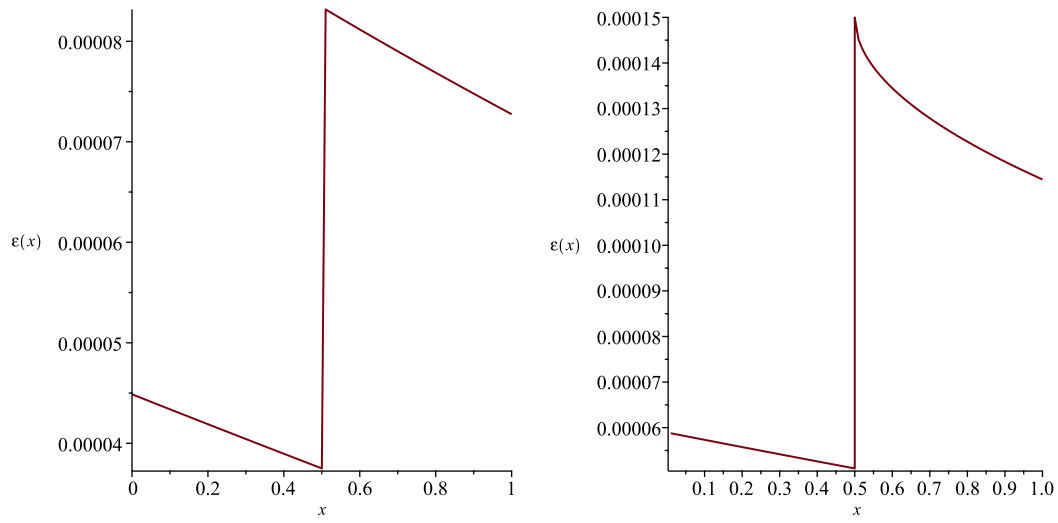


Рис. 15. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке  $P_1$  и  $P_2$  соответственно

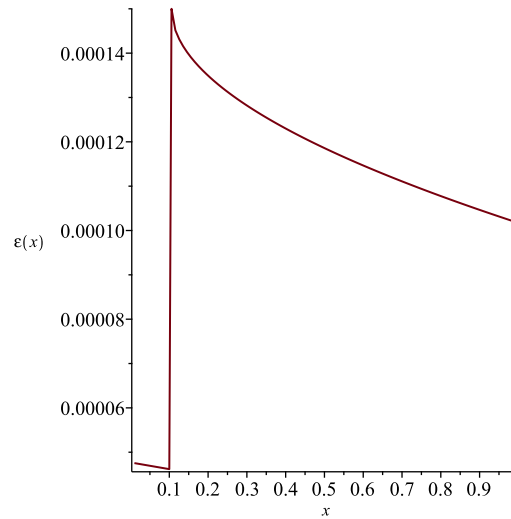


Рис. 16. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке  $P_2$  для случая 9 из таблицы 2

располагаться в стержне. Существенную роль также играет учет силы тяжести, игнорирование которой приводит к существенным погрешностям в расчетах.

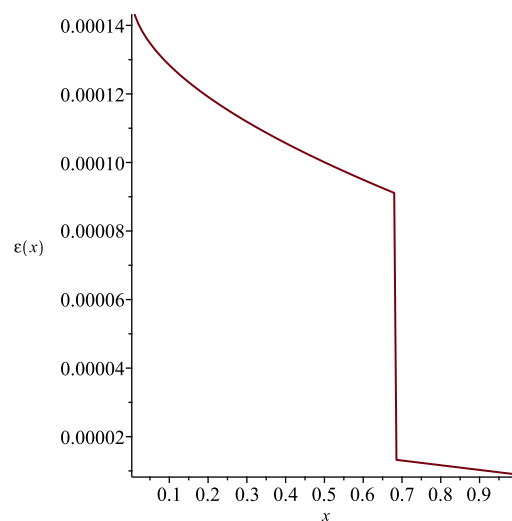


Рис. 17. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке  $P_2$  для случая 11 из таблицы 2

№	$r_1$	$r_2$	$l_1$	Сила тяжести	Слой 1	Слой 2
1	0,042	0,05	0,5	+	B50	B30
2	0,042	0,05	0,5	-	B50	B30
3	0,05086	0,05	0,5	+	B50	B30
4	0,05086	0,05	0,5	-	B50	B30
5	0,0556	0,04	0,6	+	B10	B10
6	0,0556	0,04	0,6	-	B10	B10
7	0,06	0,045	0,1	+	B50	B30
8	0,06	0,045	0,1	-	B50	B30
9	0,04	0,06	0,68	+	B50	B10
10	0,04	0,06	0,68	-	B50	B10
11	0,04	0,06	0,68	+	B10	B50
12	0,04	0,06	0,68	+	B10	B50

Таблица 2. Параметры поперечных сечений, марки бетонов, реализованные в слоях составных эквивалентных по массе стержней, и наличие или отсутствие действия силы тяжести при расчетах

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.
- [2] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.

№	$P_0, 10^{-4}$	$P_1, 10^{-4}$	$P_2, 10^{-4}$	$\delta_0, 10^{-5}$	$\delta_1, 10^{-5}$	$\delta_2, 10^{-4}$	$\Delta P_0/P_{0э}$	$\Delta P_1/P_{1э}$	$\Delta P_2/P_{2э}$
1	3,53	8,95	14,04	2,9	6,2	1,09	117 %	113 %	128 %
2	6,10	8,95	16,61	3,6	5,3	1,29	45 %	113 %	90 %
3	4,80	7,97	10,97	3,7	6,0	0,91	196 %	89 %	78 %
4	5,73	8,90	11,89	3,7	6,0	1,01	36 %	111 %	36 %
5	2,03	4,54	4,92	3,9	7,8	0,87	25 %	8 %	-19 %
6	2,68	5,20	5,58	3,5	7,7	0,92	-36 %	23 %	-35 %
7	5,16	10,29	12,96	4,1	8,0	1,10	218 %	144 %	111 %
8	7,25	12,38	15,05	4,7	8,9	1,38	72 %	194 %	72 %
9	2,93	6,04	11,36	3,2	5,5	1,11	80 %	43 %	85 %
10	5,50	12,04	12,55	4,0	4,4	1,13	30 %	43 %	44 %
11	0,11	12,38	3,00	2,8	-	0,79	-93 %	- %	-51 %
12	2,68	12,38	5,58	3,7	-	1,07	-36 %	- %	-35 %

Таблица 3. Расчетные значения предельных нагрузок, соответствующих этим нагрузками удлинений составных эквивалентных по массе стержней и относительное изменение предельных нагрузок по сравнению с эталонным стержнем для стержней с параметрами из таблицы 2

- [3] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1(117). С. 40–46.
- [4] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения многослойного бетонного стержня на несущую способность при продольно-поперечной нагрузке // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник тезисов 9-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН. 2019. С. 185–189.
- [6] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных бетонных стержней армированных стальной арматурой под действием массовых сил // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 94–103.
- [7] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [9] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб физически-нелинейных железобетонных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3(49). С. 85–93.
- [10] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146.
- [11] Плевков В. С., Колупаева С. Н., Кудяков К. Л. Расчетные диаграммы нелинейного деформирования базальто-фибробетона при статических и кратковременных динамических воздействиях // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 3. с. 95–110.
- [12] Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. Москва: Строительство, 1974. 208 с.



- [13] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения и силы тяжести на деформирование многослойных бетонных стержней при квазистатических нагрузках // Моделирование и механика конструкций. 2020. № 12. С. 11–49.
- [14] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [15] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела : материалы второй международной конференции, Казань, Россия, 8-11 декабря 2009 г. Казань: Казанский гос. ун-т, 2009.
- [16] Немировский Ю. В. Метод расчета стержневых композитных стержней из разномодульных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы V Всероссийской научной конференции. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С. 288–290.
- [17] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
- [18] Иващенко Е. И. Разработка методов расчета железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов с учетом фактического изменения площади их поперечных сечений // дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 2006. 230 с.
- [19] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 720 с.

*Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov*

## CENTRAL TREATMENT OF A PHYSICALLY NON-LINEAR ROD COMPOSITIONS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The problem of central tension of a composite concrete rod by quasi-static loads is considered. The force of gravity acting on the rod is taken as a distributed load. The ultimate loads and elongations of the rod are determined depending on the physical parameters of the rod. At a deformation below the limiting elastic one, it is assumed that the concrete deforms linearly, otherwise it is non-linearly inelastic. Examples of calculations based on the obtained ratios for composite rods of the same mass are given, where different grades of concrete can be realized in each section of the rod.

**Keywords:** composite rod, central tension, physical non-linearity, limit loads

## REFERENCES

- [1] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.  
*Tikhonov Sergey Vladimirovich*, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State

- plasticity: Proceedings of the XIX All-english Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005. P. 184–188.
- [2] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2020. no. 1. P. 60–73.
  - [3] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel-fiber-reinforced concrete bars // News of the Altai State University. 2021. no. 1(117). P. 40–46.
  - [4] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
  - [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape of a multilayer concrete bar on the bearing capacity under longitudinal-transverse loading // Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Collection of abstracts of the 9th All-english scientific conference with international participation named after V.I. I.F. Obraztsov and Yu.G. Yanovsky dedicated to the 30th anniversary of IPRIM RAS. 2019. P. 185–189.
  - [6] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete bars reinforced with steel reinforcement under the action of body forces // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2021. no. 2(48). P. 94–103.
  - [7] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
  - [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
  - [9] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically non-linear reinforced concrete beams // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2021. no. 3(49). P. 85–93.
  - [10] Mishchenko A. V., Nemirovskiy Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements during longitudinal-transverse bending // News of universities. Construction. 2013. no. 4. P. 133–146.
  - [11] Plevkov V. S., Kolupaeva S. N., Kudyakov K. L. Design diagrams of non-linear deformation of basalt-fiber-reinforced concrete under static and short-term dynamic effects // Bulletin of the Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2016. no. 3. p. 95–110.
  - [12] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. M.: Science, 1978. 208 p.
  - [13] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete bars under quasi-static loads // Modeling and structural mechanics. 2020. no. 12. P. 11–49.
  - [14] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of the Belgorod State Technological University. V.G. Shukhov. 2015. no. 6. p. 125–129.
  - [15] Nemirovsky Y. V. Nonlinear Deformation Prediction for Hybrid Composite Materials // Problems of non-linear mechanics of a deformable solid body: materials of the second international conference, Kazan, Russia, December 8-11, 2009. Kazan: Kazan state. university, 2009.
  - [16] Nemirovsky Y. V. Method of calculation of rod composite rods from different-modulus materials // Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics: Proceedings of the V All-english Scientific Conference. Tomsk: TSU publishing house, 2006. P. 288–290.
  - [17] Nemirovsky Y. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2018. no. 3(37). P. 26–37.
  - [18] Ivashchenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams, taking into account the actual change in their cross-sectional area // dis. ... cand. tech. Sciences. Voronezh, 2006. 230 p.
  - [19] Korn G., Korn T. Handbook of mathematics (for scientists and engineers). M.: Science, 1973. 720 p.

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

## КОЛЕБАНИЯ И УСЛОВИЯ ГАРАНТИРОВАННОГО РАЗРУШЕНИЯ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ВЗРЫВОМ В ВОДЕ

*Тульский государственный университет, г. Тула, Россия*

**Аннотация.** Представлено решение актуальной задачи о колебаниях балки, находящейся в воде, вызванных воздействием на неё взрыва заряда конденсированного взрывчатого вещества (ВВ). В предположении, что максимальный изгибающий момент при таких колебаниях приводит к гарантированному разрушению рассматриваемой балочной конструкции, в соответствии с выбранным критерием разрушения балки найдена нижняя граница величины разрушающего импульса.

**Ключевые слова:** взрыв в воде, балка, колебания, гарантированное разрушение, взрывная нагрузка.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.006

УДК: 531/534

### **Постановка задачи.**

Рассмотрим задачу о нахождении условий гарантированного разрушения взрывной нагрузкой жестко закрепленной по концам балки, находящейся в воде.

### **Физическая модель явления (основные допущения).**

Балка жестко закреплена в неподвижных идеальных (неразрушаемых) опорах, находится в воде на известной глубине. Известны физические и геометрические характеристики балки, а также интенсивность взрывной нагрузки. Окружающая балку среда (вода) является сжимаемой, используются экспериментальные уравнения динамических адиабат воды [1].

Предполагаем, что в недеформированном состоянии упругая ось балки прямолинейна и совпадает с линией центров тяжести поперечных сечений; эту ось принимаем за координатную ось  $x$ .

---

© Володин Г. Т., Кочергин Д. С., 2022

*Володин Геннадий Тимофеевич*

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

*Кочергин Денис Сергеевич*

e-mail: sig.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 05.04.2022

Предполагаем также, что отклонения отдельных точек оси балки происходят перпендикулярно прямолинейному, недеформированному её направлению, при этом пренебрегаем смещениями этих точек, параллельными оси  $x$ . Отклонения точек оси балки при поперечных колебаниях происходят в одной плоскости и являются малыми отклонениями, при которых выполняется режим упругого деформирования. Балка имеет постоянное поперечное сечение, не изменяющееся вдоль оси  $x$ .

При достижении в некотором сечении балки максимального значения изгибающего момента, она разрушается в том смысле, что в этом сечении образуется пластический шарнир, переходящий в пластическую зону, либо трещина, нарушающие несущую способность балки [2], [3].

#### Математическая модель.

Взрывная нагрузка относится к импульсным интенсивным и весьма скоротечным непериодическим нагрузкам. За время её действия элементы балки не успевают получить заметных начальных смещений от положения равновесия, а получают лишь начальные скорости. Деформирование балки происходит после окончания действия нагрузки, во время ее свободных колебаний. Сопrotивление воды движению балки при колебаниях можно отнести к инерционным силам путём введения присоединенной массы воды [4], [5].

Определяющее уравнение колебаний, в процессе которых происходит деформирование балки, представляет собой однородное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, которое имеет вид [2], [3], [5], [6].

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

где  $y = y(x, t)$  - прогиб балки для сечения с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ; параметр  $c$  определяется из соотношения

$$c^2 = \frac{EJ}{\mu} \quad (2)$$

где  $\mu = m_* + m_1$ ,  $m_*$  и  $m_1$  - соответственно погонная масса материала балки и погонная присоединенная масса воды;  $E$  - модуль упругости материала балки,  $J$  - момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси.

Граничные условия для уравнения (1) запишем в соответствии с видом закрепления концов балки. В случае жесткого закрепления получим

$$y(0, t) = y(l, t) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (4)$$

Условия (3) означают, что на зашцеplенных концах балки отсутствуют смещения, а условия (4) указывают на отсутствие поворотов сечений балки на зашцеplенных ее концах относительно соответствующей нейтральной оси.

Начальные условия для уравнения (1) запишем в соответствии с характером действующей взрывной нагрузки

$$y(x, 0) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \frac{i_*(x)}{\mu}, \quad (6)$$

где  $i_*(x)$  - удельный погонный импульс.

Решение поставленной начально-краевой задачи (1) - (6) будем искать в виде

$$y(x, t) = \varphi(x) \cdot T(t), \quad (7)$$

где функцию  $T(t)$  представим в виде

$$T(t) = \sin(P \cdot t + \alpha), \quad (8)$$

выделив, тем самым, главное колебание [6], где  $P$  – частота,  $\alpha$  – фаза.

Подстановка предполагаемого решения (7) в уравнение (1) приводит к уравнению для функции  $\varphi(x)$  в виде

$$\varphi^{(4)}(x) - k^4 \cdot \varphi(x) = 0, \quad (9)$$

где

$$k^4 = \frac{P^2}{c^2} = \frac{P^2 \mu}{EJ} \quad (10)$$

Общий интеграл уравнения (9) найдем в виде

$$\varphi(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx \quad (11)$$

Подчинив функцию (11) краевым условиям (3)-(4) получим систему однородных уравнений относительно коэффициентов  $c_1 - c_4$  в виде

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 e^{kl} + c_2 e^{-kl} + c_3 \cos kl + c_4 \sin kl = 0 \\ c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 e^{kl} - c_2 e^{-kl} - c_3 \sin kl + c_4 \cos kl = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Из условия нетривиальности решений однородных систем линейных алгебраических уравнений получим соотношение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ e^{kl} & e^{-kl} & \cos kl & \sin kl \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ e^{kl} & -e^{kl} & -\sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

После раскрытия определителя, получим уравнение частот

$$chkl \cdot \cos kl - 1 = 0 \quad (14)$$

или  $ch\alpha \cdot \cos \alpha - 1 = 0$ , где  $\alpha = kl$ .

Первые два корня уравнения (14) найдены численно  $\alpha_1 = 4,73$ ,  $\alpha_2 = 7,85$ .

Соответствующие собственные частоты первых двух собственных форм имеют вид

$$\begin{cases} P_1 = \left(\frac{\alpha_1}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \\ P_2 = \left(\frac{\alpha_2}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \end{cases} \quad (15)$$

В общем случае

$$P_j = k_j^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \quad (16)$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} (M_j \cos P_j t + N_j \sin P_j t) \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (17)$$

Из начального условия (5) найдём

$$M_j = 0, \quad (18)$$

поэтому

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sin P_j t \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (19)$$

Из начального условия (6) с учётом (19) получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} N_j P_j t \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} = \frac{i_*(x)}{\mu} \quad (20)$$

Используя (20) как представление функции  $\frac{i_*(x)}{\mu}$  рядом Фурье, найдём

$$N_j = \frac{2}{P_j l} \int_0^l \frac{i_*(x)}{\mu} \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} dx \quad (21)$$

Представляет существенный интерес случай, когда импульс  $i_*(x) = const$ , соответствующий плоской симметрии взрывной волны. Обозначим  $i_*(x) = const = i_0$ , тогда согласно (21) получим

$$y(x, t) = \frac{2i_0}{\pi\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \cos j\pi}{j \cdot P_j} \sin P_j t \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (22)$$

В моменты времени  $t_*$ , когда  $|\sin P_j t_*| = 1$ , прогибы будут максимальными. Эти моменты определяются соотношением

$$t_* = \frac{2n - 1}{2P_j} \pi \quad (23)$$

При этом

$$\max y = \frac{2i_0}{\pi\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \cos j\pi}{j \cdot P_j} \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (24)$$

Максимальный из максимальных прогибов будет в середине пролёта балки, который определяется, согласно (24), формулой

$$Y = \max(\max y) = \max y|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2i_0}{\pi\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \cos j\pi}{j \cdot P_j} \cdot \sin \frac{j\pi}{2} \quad (25)$$

Используя известную формулу для изгибающих моментов при малых прогибах

$$M = -EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (26)$$

получим соотношение для максимального изгибающего момента, который будет в момент времени  $t_*$  в середине пролёта балки, т.е. при  $x = \frac{l}{2}$ :

$$M_{\max} = 2\pi i_0 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^j] j}{\alpha_j^2} \sin \frac{j\pi}{2} \quad (27)$$

Согласно [7], условие гарантированного разрушения имеет вид

$$M_{\max} \geq K_{0*} \cdot \mu_3 \cdot \delta_{*n} \cdot W \quad (28)$$

Из равенства (27) с учётом (28) получим

$$i_0 \geq \frac{K_{0*} \cdot \mu_3 \cdot \delta_{*n} \cdot W}{2\pi \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^j]j}{\alpha_j^2} \sin \frac{j\pi}{2}} \quad (29)$$

или в развернутом виде

$$i_0 \geq \frac{K_{0*} \cdot \mu_3 \cdot \delta_{*n} \cdot W}{4\pi \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \left( \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{3}{\alpha_3^2} + \frac{5}{\alpha_5^2} - \frac{7}{\alpha_7^2} + \dots \right)}, \quad (30)$$

где  $\mu_3$  - коэффициент динамичности материала балки ( $\mu_3 = \frac{\delta_{*3}}{\delta_*}$ ,  $\delta_{*3}$  - динамический предел прочности,  $\delta_*$  - статический предел прочности),  $K_{0*}$  - коэффициент однородности на гарантированное разрушение ( $K_{0*} = \frac{\delta_{*max}}{\delta_{*0}}$ ,  $\delta_{*0}$  - нормированный браковочный минимум,  $\delta_{*max}$  - максимальное сопротивление материала),  $\delta_{*n}$  - нормативное сопротивление материала при изгибе,  $W$  - момент сопротивления балки.

Соотношение (30) определяет нижнюю границу значений удельного импульса, воздействие которого на рассматриваемую балочную конструкцию приводит к её гарантированному разрушению.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саламахин Т. М. Физические основы механического действия взрыва и методы определения взрывных нагрузок. Москва: ВИА, 1974. 275 с.
- [2] Сейлер Д., Коттер Б., Саймондс П. Импульсивное нагружение упруго-пластических балок. Москва: ИЛ, 1957. 101-114 с.
- [3] Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Расчёт конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил. Москва: Госстройиздат, 1961. 320 с.
- [4] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, часть 1. Москва: ГИФМЛ, М, 1963. 584 с.
- [5] Саламахин Т. М. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.
- [6] Бабаков И. М. Теория колебаний. Москва: Наука, 1968. 560 с.
- [7] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидкой среде. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. Тула: Левша, 2005. 160 с.

*G. T. Volodin, D. S. Kochergin*

#### FLUCTUATIONS AND CONDITIONS OF GUARANTEED DESTRUCTION OF BEAM STRUCTURAL ELEMENTS BY EXPLOSION IN WATER

*Tula State University, Tula, Russia.*

**Abstract.** The solution of the actual problem of vibrations of a beam in water caused by the impact of an explosion of a condensed explosive charge on it is presented. Assuming that the maximum bending moment under such fluctuations leads to guaranteed destruction of the beam structure in question, the lower bound of the magnitude of the destructive impulse is found in accordance with the selected criterion of beam destruction.

**Keywords:** explosion in water, beam, vibrations, guaranteed destruction, explosive load.

**REFERENCES**

- [1] Salamakhin T. M. Physical foundations of the mechanical action of the explosion and methods for determining explosive loads. Moscow: VIA, 1974. 275 p. (in Russian).
- [2] Seiler D., Cotter B., Symonds P. Impulse loading of elastic-plastic beams. Moscow: IL, 1957. 101-114 p. (in Russian).
- [3] Goldenblatt I., Nikolaenko N. Calculation of structures for the action of seismic and impulsive forces. Moscow: Gosstroyizdat, 1961. 320 p. (in Russian).
- [4] Kochin N. E., Kibel I. A., Rose N. V. Theoretical hydromechanics, part 1. Moscow: GIFML, 1963. 584 p. (in Russian).
- [5] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
- [6] Babakov I. M. Oscillation theory. Moscow: Science, 1968. 560 p. (in Russian).
- [7] Volodin G. T. The effect of the explosion of charges of condensed explosives in a gas and liquid medium. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).

---

Russia.

*Kochergin Denis Sergeevich*, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.



Ю. В. Немировский<sup>1,2</sup>, С. В. Тихонов<sup>3</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ БЕТОННЫХ СЛОИСТЫХ СТЕРЖНЕЙ

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Рассматривается задача центрального растяжения однородного и многослойного бетонного стержня квазистатическими нагрузками. В качестве распределенной нагрузки принимается сила тяжести, действующая на стержень. Определены предельные нагрузки и удлинения стержня в зависимости от физических параметров стержня. При деформации ниже предельной упругой предполагается, что бетон деформируется линейно, в противном случае нелинейно неупруго. Приведены примеры расчетов по полученным соотношениям для слоистых стержней одинаковой массы, где в каждом слое могут быть реализованы различные марки бетонов.

**Ключевые слова:** многослойный стержень, центральное растяжение, физическая нелинейность, предельные нагрузки

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.007

УДК: 539.374

В качестве объекта исследования будем рассматривать многослойные гибридные стержневые конструкции в условиях одноосного нагружения растяжением или сжатием. Будем предполагать, что существующие технологии изготовления гибридных

---

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В., 2022

*Немировский Юрий Владимирович*

**e-mail:** nem2tikhiryury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

*Тихонов Сергей Владимирович*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.05.2022

многофазных слоистых конструкций [1] позволяют создавать идеальные с точки зрения деформирования конструкции, обеспечивающие непрерывное вдоль оси деформирование всех фазовых материалов, без взаимных проскальзываний и отрывов. Будем считать, что также в рассматриваемых конструкциях все составляющие фазовые материалы являются бетонами разных марок, подчиняющимися единообразным сходственным диаграммам деформирования от начала нагружения и до разрушения. При этом будем учитывать в разрабатываемых модельных расчетных схемах, что наблюдается практически при всех испытаниях и при эксплуатации конструкций из бетона существенно различно в их деформировании и характере разрушения в условиях нагружения растяжением или сжатием. Будем также считать, что деформационные процессы на всем этапе нагружения описываются физически-нелинейными зависимостями каждой фазы на всем этапе деформирования [2–17].

Обратим внимание на то обстоятельство, что используемые традиционные во всех расчетных методиках физические характеристики типа плотности и модуля упругости практически не меняются в пределах изготовления данного фазового материала по любым известным технологиям и их характеристики отличаются при переходе только от одной марки бетона к другой.

Будем считать также, как это обычно принимается при расчете стержневых конструкций, что размеры поперечного сечения исследуемых гибридных конструкций существенно меньше их продольных размеров.

Будем учитывать в дальнейшем, что используемые традиционно во всех методиках характеристики бетонов конкретной марки типа модулей упругости и удельной плотности при изготовлении испытываемых материалов практически остаются неизменными при изготовлении, но существенно отличаются при переходе от одной марки бетона к другой.

Возьмем в качестве эталонного стержня однородный стержень прямоугольного поперечного сечения с шириной  $2b_1$  и толщиной  $2\Delta_1$  (рис. 1). В рассматриваемых задачах будем использовать следующую систему координат: ось  $Ox$  направим вдоль центральной оси стержня, ось  $Oz$  направим вертикально вверх, начало координат  $O$  поместим в центр грани левого конца стержня.

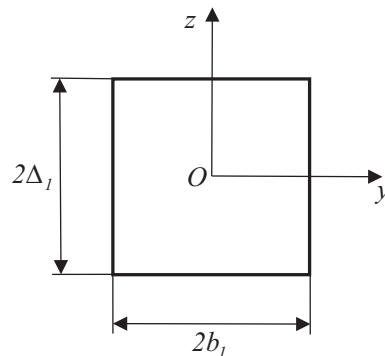


Рис. 1. Поперечное сечение эталонного стержня

Обозначим через  $\sigma_*^+$ ,  $\sigma_*^-$  пределы прочности бетона,  $\varepsilon_0^+$ ,  $\varepsilon_0^-$  – предельные упругие деформации,  $\varepsilon_*^+$ ,  $\varepsilon_*^-$  – предельные деформации упрочнения (предразрушения) [18,

19],  $E^+$ ,  $E^-$  – начальные модули упругости бетона соответственно при растяжении и сжатии.

В дальнейшем во всех расчетах будем использовать обезразмеренные величины

$$\tilde{C} = \frac{C}{C_1}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tilde{\Delta}_i = \frac{\Delta_i}{l}, \quad \tilde{P} = P \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{q} = q \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad (1)$$

$$\tilde{N} = N \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{l}.$$

где обезразмеривающие величины:  $\sigma_{1*}^-$  – предел прочности при сжатии бетона марки В10,  $l$  – длина стержня;  $P$  – величина точечной нагрузки,  $q$  – величина распределенной нагрузки,  $N$  – величина продольного усилия,  $u$  – величина перемещений вдоль оси  $Ox$ .

В дальнейшем надстрочный индекс « $\sim$ » во всех формулах и обозначениях будем опускать.

На диаграмме деформирования бетона отметим характерные точки  $D^-$ ,  $C^-$ ,  $B^-$ ,  $B^+$ ,  $C^+$ ,  $D^+$ . Участки  $B^-OB^+$  соответствуют упругой работе бетона,  $C^-OC^+$  – участкам сохранения сплошности, а участки  $D^-C^-$  и  $C^+D^+$  соответствуют участкам нарушения сплошности, сопровождающимся интенсивными процессами трещинообразования.

Значение указанных точек по результатам экспериментов [20, 21] для бетонов марок В10, В30, В50 приведены в таблицах 1, 2.

Если деформация не превышает предельных упругих деформаций (участок  $B^-OB^+$ ), тогда имеем

$$\sigma = E^- \varepsilon \quad \text{при} \quad -\varepsilon_0^- \leq \varepsilon \leq 0, \quad (2)$$

$$\sigma = E^+ \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0^+. \quad (3)$$

Марка бетона	$C$	$\sigma_0^-$	$\sigma_*^-$	$\sigma_{**}^-$	$\varepsilon_0^-, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^-, 10^{-2}$	$\varepsilon_{**}^-, 10^{-2}$	$E^-$
В10	1	0,36	1	0,35	0,0047	0,2	0,35	2233
В30	1,23	1,21	2,91	2,14	0,018	0,2	0,3	4304
В50	1,45	2,01	4,8	4,38	0,014	0,2	0,25	5160

Таблица 1. Значения физических параметров бетонов

Марка бетона	$\sigma_0^+$	$\sigma_*^+$	$\sigma_{**}^+$	$\varepsilon_0^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_{**}^+, 10^{-2}$	$E^+$
В10	0,09	0,11	0,08	0,005	0,015	0,02	2057
В30	0,19	0,24	0,19	0,005	0,015	0,02	4243
В50	0,25	0,3	0,28	0,00375	0,015	0,02	7110

Таблица 2. Значения физических параметров бетонов

В случае, когда деформация превышает предельную упругую, но меньше предельной деформации упрочнения (участки  $C^-B^-$ ,  $B^+C^+$ ), закон деформирования бетона

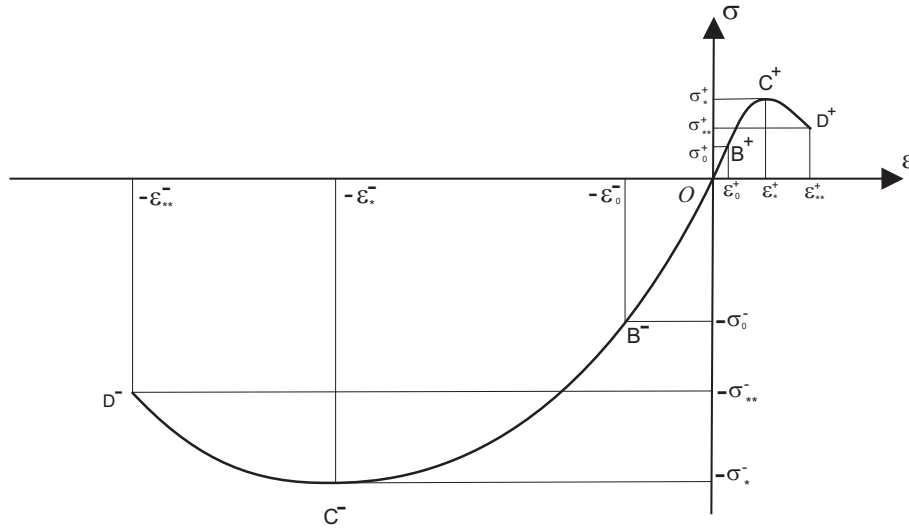


Рис. 2. Диаграмма деформирования бетона

для каждого слоя будем принимать в виде аппроксимации полиномом второго или третьего порядка [2, 5].

Для аппроксимации диаграммы деформирования бетона  $\sigma = f(\varepsilon)$  на указанном участке для зон растяжения и сжатия можно использовать одни и те же функции с одними и те же коэффициентами. Тогда для случая полинома второго порядка аппроксимация диаграммы будет иметь вид (4), а в случае полинома третьего порядка (5).

$$\sigma_i = A_{1i}^2 \varepsilon + A_{2i}^2 \varepsilon^2, \quad (4)$$

$$\sigma_i = A_{1i}^3 \varepsilon + A_{2i}^3 \varepsilon^2 + A_{3i}^3 \varepsilon^3, \quad (5)$$

где коэффициенты  $A_{1i}^2, A_{2i}^2, A_{1i}^3, A_{2i}^3, A_{3i}^3$  можно определить из реальных диаграмм растяжения-сжатия бетонов.

В случае если использовать для зон растяжения и сжатия одни и те же функции, но с различными коэффициентами, тогда аппроксимации будут иметь вид (6), (7).

$$\sigma_i^\pm = A_{1i}^{2\pm} \varepsilon + A_{2i}^{2\pm} \varepsilon^2, \quad (6)$$

$$\sigma_i^\pm = A_{1i}^{3\pm} \varepsilon + A_{2i}^{3\pm} \varepsilon^2 + A_{3i}^{3\pm} \varepsilon^3, \quad (7)$$

где знаки «+» и «-» соответствуют зонам растяжения и сжатия соответственно.

Примеры расчета указанных коэффициентов, используя результаты экспериментов [20, 21] для аппроксимаций (3), (4) методом наименьших квадратов, приведены в таблицах 3, 4. В дальнейших расчетах положим, что модуль упругости бетона при растяжении и сжатии является одинаковым, т.е. примем  $E = E^+ = E^-$ .

Аналогичные расчеты коэффициентов для аппроксимаций (6), (7) методом наименьших квадратов приведены в таблице 5.

Марка бетона	$A_1^{3+}$	$A_2^{3+}$	$A_3^{3+}$	$A_1^{2+}$	$A_2^{2+}$
В10	3864,57	$-4,4 * 10^7$	$1,57 * 10^{11}$	2379,41	$-1,14 * 10^7$
В30	7770,69	$-8,55 * 10^7$	$2,99 * 10^{11}$	4920,89	$-2,31 * 10^7$
В50	11578,48	$-1,38 * 10^8$	$5,03 * 10^{11}$	6844,36	$-3,44 * 10^7$

Таблица 3. Значения коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования бетонов при растяжении полиномами второго и третьего порядка для соотношений (6), (7)

Марка бетона	$A_1^{3-}$	$A_2^{3-}$	$A_3^{3-}$	$A_1^{2-}$	$A_2^{2-}$
В10	2318,2	$1,82 * 10^6$	$4,59 * 10^8$	1532,63	542483.2160
В30	6052,14	$4,62 * 10^6$	$1,17 * 10^9$	4074,12	$1,35 * 10^6$
В50	10793,97	$8,44 * 10^6$	$2,15 * 10^9$	6997,58	$2,4 * 10^6$

Таблица 4. Значения коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования бетонов при сжатии полиномами второго и третьего порядка для соотношений (6), (7)

Марка бетона	$A_1^3$	$A_2^3$	$A_3^3$	$A_1^2$	$A_2^2$
В10	1875,87	$1,17 * 10^6$	$2,43 * 10^8$	1493,78	519354,19
В30	4151,89	$1,78 * 10^6$	$2,1 * 10^8$	3840,79	$1,22 * 10^6$
В50	7009,38	$3,01 * 10^6$	$3,36 * 10^8$	6495,96	$2,11 * 10^6$

Таблица 5. Значения коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования бетонов при растяжении полиномами второго и третьего порядка для соотношений (4), (5)

Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (6), (7) приведены на рисунках 3, 4, 5.

Диаграммы, построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (4), (5), приведены на рисунках 6, 7, 8.

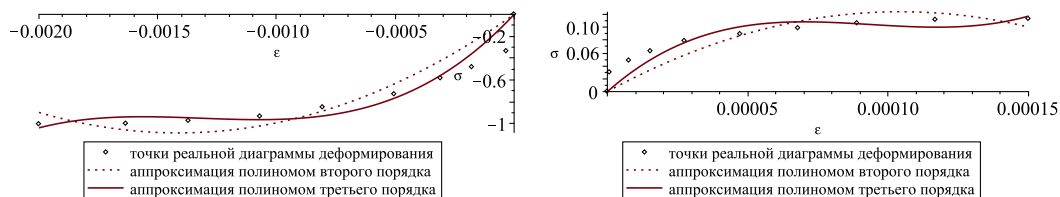


Рис. 3. Диаграммы, построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (6), (7) для бетонов марки В10

Положим, что один конец стержня зашпелен, а на другой действует сосредоточенная сила  $P$ , приложенная к центру правой грани стержня (рис. 9). Будем считать,

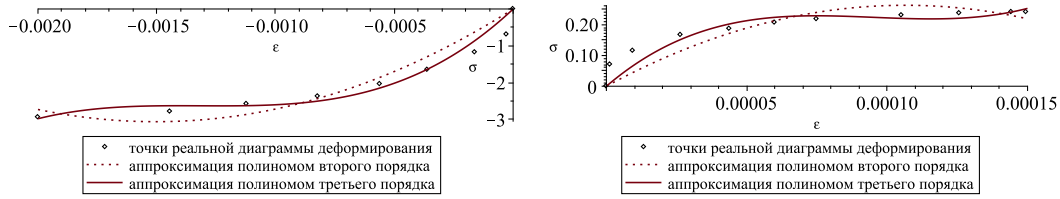


Рис. 4. Диаграммы, построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (6), (7) для бетонов марки В30

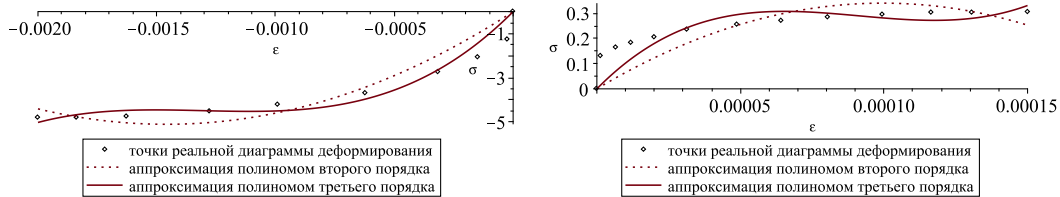


Рис. 5. Диаграммы, построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (6), (7) для бетонов марки В50

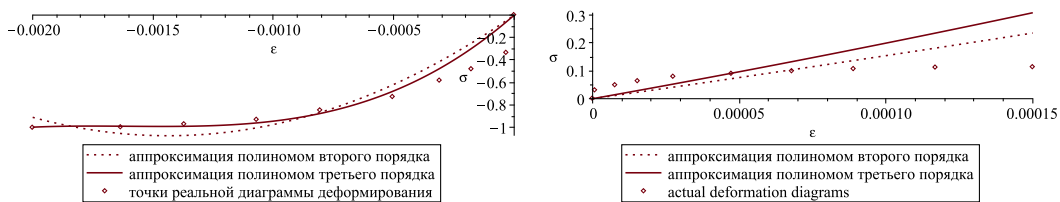


Рис. 6. Диаграммы, построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) для бетонов марки В10

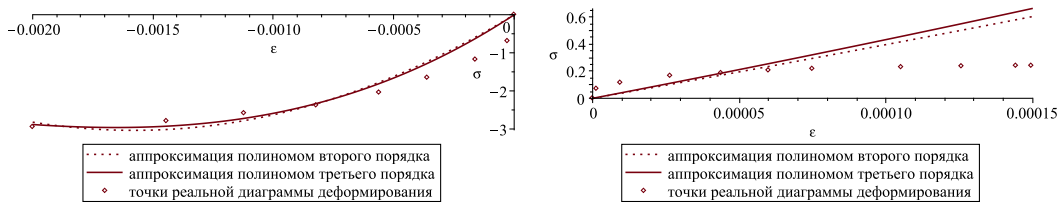


Рис. 7. Диаграммы, построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) для бетонов марки В30

что на стержень также действует распределенная нагрузка  $q(x)$ , под которой в данной работе будем понимать результат действия силы тяжести, направленной вдоль оси  $Ox$ .

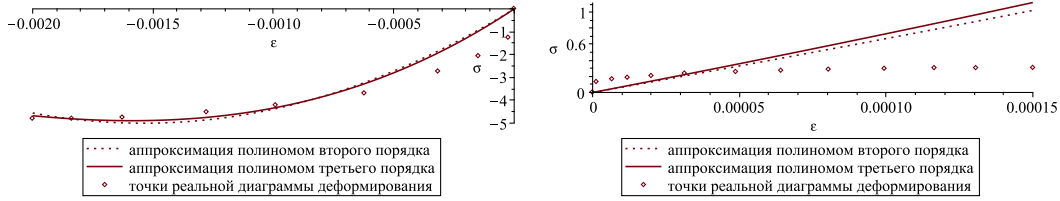


Рис. 8. Диаграммы, построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) для бетонов марки В50

В данном случае действие всех сил такое, что имеет место центральное растяжение-сжатие стержня.

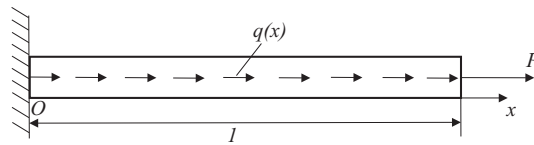


Рис. 9. Случай защемленного с левого края стержня

В указанной постановке данная задача является статически определимой. Уравнения равновесия в случае центрального растяжения-сжатия имеют вид

$$\frac{dN}{dx} = -q(x). \tag{8}$$

Если принять, что  $q(x)$  является результатом действия силы тяжести, то имеем, с учетом обезразмеривания согласно отношениям (1),

$$q(x) = q_g = \frac{4g}{l\sigma_{1*}} b_1 \Delta_1 \rho, \tag{9}$$

где  $g$  – величина ускорения свободного падения,  $\rho$  – плотность бетона материала стержня.

Интегрируя уравнение (8) с учетом (9), получим

$$\int_1^x dN = - \int_1^x q_g dx. \tag{10}$$

На правом конце стержня имеет место

$$N(1) = P. \tag{11}$$

Тогда для величины продольного усилия  $N$  будет справедливо

$$N(x) = P + (1 - x)q_g. \tag{12}$$

В данном случае во всех участках стержня имеет место  $N > 0$  и  $\varepsilon > 0$ . Причем величина продольного усилия  $N$  линейно увеличивается вдоль оси стержня и принимает наибольшее значение в месте защемления  $x = 0$ .

В зависимости от приложенных усилий  $q_g, P$  возможны следующие случаи

- (1)  $\forall x \in [0, 1] : 0 \leq \varepsilon(x) < \varepsilon_0^+$
- (2)  $\forall x \in [0, x_e] : 0 \leq \varepsilon(x) < \varepsilon_0^+,$
- (3)  $\forall x \in [x_e, 1] : \varepsilon_0^+ \leq \varepsilon(x) < \varepsilon_*^+,$
- (4)  $\forall x \in [0, 1] : \varepsilon_0^+ \leq \varepsilon(x) < \varepsilon_*^+.$

Первый случай реализуется, когда величина нагрузок такова, что деформации не превышает предельно упругие. Принимая во внимание, что значение  $q_g$  фиксировано для данного сечения стержня и набора материалов, определим величину  $P_0$ , которая соответствует предельной упругой нагрузке.

Наибольшие по величине деформации будут в левом конце стержня, тогда для указанного сечения имеем из (12)

$$P_0 = N(0) - q_g. \quad (13)$$

В указанном случае по всей длине стержня справедливо упругое деформирование, тогда

$$N = 4 \int_0^{\Delta_1} \int_0^{b_1} \sigma dy dz = 4\Delta_1 b_1 \sigma = 4\Delta_1 b_1 E \varepsilon. \quad (14)$$

Наибольшее значение продольного усилия в указанном случае может быть реализовано при  $\varepsilon = \varepsilon_0^+$ . Тогда для предельной упругой нагрузки окончательно имеем

$$P_0 = 4\Delta_1 b_1 E \varepsilon_0^+ - q_g. \quad (15)$$

Величина удлинения стержня  $\delta$  при нагрузке  $0 < P < P_0$  определим из соотношения

$$\delta = \int_0^1 \varepsilon dx = \int_0^1 \frac{P + (1-x)q_g}{4\Delta_1 b_1 E} dx.$$

Величину удлинения стержня  $\delta_0$  при предельной упругой нагрузке  $P_0$  определяется выражением

$$\delta_0 = \int_0^1 \varepsilon dx = \int_0^1 \frac{P_0 + (1-x)q_g}{4\Delta_1 b_1 E} dx = \varepsilon_0^+ - \frac{q_g}{8\Delta_1 b_1 E}. \quad (16)$$

Если окажется, что величина нагрузки  $P \geq P_0$ , тогда имеет место второй случай, когда в левой части стержня реализуется нелинейный неупругий закон деформирования (7), а в правой части – упругое растяжение стержня.

Предельное верхнее значение нагрузки  $P_1$ , при которой возможен данный случай, определяется из условия равенства деформации предельному упругому значению  $\varepsilon = \varepsilon_0^+$  в правом конце стержня ( $x = 1$ ).

Тогда для вычисления  $P_1$  имеем выражение

$$P_1 = 4\Delta_1 b_1 E \varepsilon_0^+. \quad (17)$$

В случае, если нагрузка находится в интервале  $P_0 < P < P_1$ , значение деформации, равное предельной упругой  $\varepsilon_0^+$ , будет реализовываться на границе раздела двух областей  $x = x_s$ . Тогда для определения границы  $x = x_s$  справедливо уравнение

$$4\Delta_1 b_1 E \varepsilon_0^+ = P + (1 - x_s)q_g, \quad (18)$$

откуда получим

$$x_s = 1 - \frac{4\Delta_1 b_1 E \varepsilon_0^+ - P}{q_g}. \quad (19)$$



Из соотношений (17), (19) и условия  $P_0 < P < P_1$  видно, что для границы раздела областей  $x = x_s$  справедливо  $0 < x_s < 1$ .

Удлинение  $\delta$  при нагрузке  $P_0 < P < P_1$  определим из соотношений

$$\delta = \int_0^{x_s} \varepsilon_1(x) dx + \int_{x_s}^1 \varepsilon_2(x) dx,$$

где  $\varepsilon_1(x)$  – деформация на участке  $[0, x_s]$ , а  $\varepsilon_2(x)$  – деформация на участке  $[x_s, 1]$ .

Деформацию  $\varepsilon_1(x)$  можно определить из решения уравнения

$$4\Delta_1 b_1 (A_1^{3+} \varepsilon_1(x) + A_2^{3+} (\varepsilon_1(x))^2 + A_3^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) = P + (1-x)q_g, \quad (20)$$

а деформацию  $\varepsilon_2(x)$  из соотношений

$$\varepsilon_2(x) = \frac{P + (1-x)q_g}{4\Delta_1 b_1 E}.$$

Удлинение  $\delta_1$  при нагрузке  $P_1$  определяется соотношением

$$\delta_1 = \int_0^1 \varepsilon_1(x) dx, \quad (21)$$

где  $\varepsilon_1(x)$  определяется из кубического относительно  $\varepsilon_1(x)$  уравнения с помощью формулы Кардано [22]

$$4\Delta_1 b_1 (A_1^{3+} \varepsilon_1(x) + A_2^{3+} (\varepsilon_1(x))^2 + A_3^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) = 4\Delta_1 b_1 E \varepsilon_0^+ + (1-x)q_g. \quad (22)$$

Для третьего случая в левом конце стержня нагрузка должна быть такая, что деформация не должна превышать предельное значение упрочнения (предразрушения)  $\varepsilon_*^+$ , т.е.

$$P_2 = 4\Delta_1 b_1 (A_1^{3+} \varepsilon_*^+ + A_2^{3+} (\varepsilon_*^+)^2 + A_3^{3+} (\varepsilon_*^+)^3) - q_g. \quad (23)$$

Таким образом, нагрузка должна находиться в интервале  $P_1 \leq P < P_2$ . В случае превышения нагрузки значения  $P_2$  в стержне будут участки, где деформация превышает деформации упрочнения (предразрушения), и будем считать, что стержень теряет несущую способность.

Удлинение  $\delta$  при нагрузке  $P_1 < P \leq P_2$  определим из соотношений

$$\delta = \int_0^1 \varepsilon(x) dx, \quad (24)$$

где  $\varepsilon(x)$  решение уравнения

$$4\Delta_1 b_1 (A_1^{3+} \varepsilon(x) + A_2^{3+} (\varepsilon(x))^2 + A_3^{3+} (\varepsilon(x))^3) = P + (1-x)q_g. \quad (25)$$

Рассмотрим стержень длины 1 с постоянным поперечным двутавровым сечением, симметричным вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  (рис. 10), с параметрами  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ . Положим, что в стержне послойно могут быть реализованы различные марки бетонов, соответственно с различными физическими характеристиками. Положим, что в первом слое стержня ( $0 < z < \Delta_1$ ) бетон с модулем упругости  $E_1$ , предельными деформациями  $\varepsilon_{01}^+$ ,  $\varepsilon_{01}^-$ ,  $\varepsilon_{*1}^+$ ,  $\varepsilon_{*1}^-$  и в области нелинейного деформирования коэффициентами  $A_{11}^{3+}$ ,  $A_{21}^{3+}$ ,  $A_{31}^{3+}$ ,  $A_{11}^{3-}$ ,  $A_{21}^{3-}$ ,  $A_{31}^{3-}$  (7), а во втором слое ( $\Delta_1 < z < \Delta_1 + \Delta_2$ ) соответственно с параметрами  $E_2$ ,  $\varepsilon_{02}^+$ ,  $\varepsilon_{02}^-$ ,  $\varepsilon_{*2}^+$ ,  $\varepsilon_{*2}^-$ ,  $A_{12}^{3+}$ ,  $A_{22}^{3+}$ ,  $A_{32}^{3+}$ ,  $A_{12}^{3-}$ ,  $A_{22}^{3-}$ ,  $A_{32}^{3-}$ . В дальнейшем для определенности положим, что  $\varepsilon_{01}^+ < \varepsilon_{02}^+$  и  $\varepsilon_{*1}^+ < \varepsilon_{*2}^+$ . Случаи  $\varepsilon_{01}^+ > \varepsilon_{02}^+$  и  $\varepsilon_{*1}^+ > \varepsilon_{*2}^+$  рассматриваются аналогично.

Сила тяжести, действующая на многослойный стержень, определяется соотношениями

$$q(x) = q_g = \frac{4g}{l\sigma_{1*}} (b_1\Delta_1\rho_1 + b_2\Delta_2\rho_2),$$

где  $\rho_1, \rho_2$  – плотности первого и второго слоя стержня.

Из указанного соотношения можно определить удлинение  $\delta_2$  при нагрузке  $P = P_2$ .

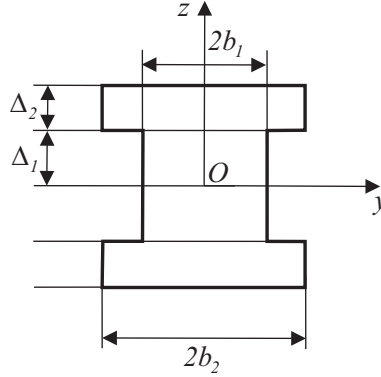


Рис. 10. Стержень двутаврового поперечного сечения

Рассмотрим аналогичную предыдущему случаю задачу о растяжении многослойного стержня (рис. 9). В этом случае в области упругого деформирования соотношения (14) примут вид

$$N = 4 \int_0^{\Delta_1} \int_0^{b_1} \sigma dy dz + 4 \int_0^{\Delta_2} \int_0^{b_2} \sigma dy dz = 4(\Delta_1 b_1 E_1 + \Delta_2 b_2 E_2) \varepsilon, \quad (26)$$

и выражение для предельной упругой нагрузки  $P_0$ , которое для однородного стержня имело вид (15), примет вид

$$P_0 = 4(\Delta_1 b_1 E_1 + \Delta_2 b_2 E_2) \varepsilon_0^+ - q_g, \quad (27)$$

где предельная деформация  $\varepsilon_0^+ = \min\{\varepsilon_{01}^+, \varepsilon_{02}^+\} = \varepsilon_{01}^+$ .

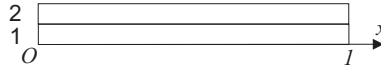


Рис. 11. Случай  $P < P_0$

Для нагрузки  $P < P_0$  (рис. 11), где цифрами обозначены номера слоев стержня, имеем для удлинения стержня  $\delta$

$$\delta = \int_0^l \varepsilon(x) dx = \frac{2P + q_g}{8(\Delta_1 b_1 E_1 + \Delta_2 b_2 E_2)}.$$

Для удлинения  $\delta_0$  при предельной упругой нагрузке  $P_0$  имеем

$$\delta_0 = \varepsilon_0 - \frac{q_g}{8(\Delta_1 b_1 E_1 + \Delta_2 b_2 E_2)}. \quad (28)$$

В случае, если нагрузка превышает значение  $P_0$ , тогда в первом слое реализуется нелинейное неупругое деформирование, а во втором до нагрузки  $P_{01}$  – упругое. Указанную нагрузку  $P_{01}$  можно определить из соотношений

$$P_{01} = 4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_{02}^+ + A_{21}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^3) + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{02}^+ - q_g. \quad (29)$$

При условии, что  $P_0 < P < P_{01}$ , можно определить значение  $x_{s1}$ , которое будет разделять две области – область нелинейного неупругого деформирования и упругого деформирования в первом слое

$$x_{s1} = 1 - \frac{4\Delta_1 b_1 E_1 \varepsilon_{01}^+ + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{01}^+ - P}{q_g}. \quad (30)$$

Из соотношения (30) и условия  $P > P_0$  следует, что  $x_{s1} > 0$ . Значение нагрузки  $P$ , при которой первый слой стержня испытывает нелинейное неупругое деформирование по всей длине, а второй полностью упругое деформирование, определяется из условия  $x_{s1} = 1$ . Если указанную нагрузку обозначить через  $P_{02}$ , то имеем

$$P_{02} = 4\Delta_1 b_1 E_1 \varepsilon_{01}^+ + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{01}^+. \quad (31)$$

Очевидно, что указанный случай может иметь место только в случае  $P_{02} < P_{01}$ , т.е. физические параметры стержня должны быть таковы, что должно быть справедливо соотношение

$$4\Delta_1 b_1 E_1 \varepsilon_{01}^+ + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{01}^+ < 4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_{02}^+ + A_{21}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^3) + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{02}^+ - q_g. \quad (32)$$

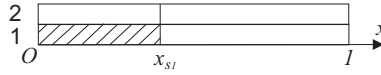


Рис. 12. Случай  $P_0 < P < P_{01} < P_{02}$

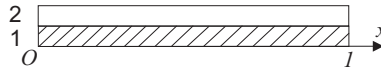


Рис. 13. Случай  $P_{02} < P < P_{01}$

При нагрузке  $P_0 < P < P_{01} < P_{02}$  (рис. 12), где заштрихованная область соответствует области нелинейного неупругого деформирования, имеем для удлинения  $\delta$

$$\delta = \int_0^{x_{s1}} \varepsilon_1(x) dx + \int_{x_{s1}}^1 \varepsilon_2(x) dx,$$

где деформация  $\varepsilon_1(x)$  определяется из решения уравнения

$$4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_1(x) + A_{21}^{3+} (\varepsilon_1(x))^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_1(x) = P + (1-x)q_g,$$

то есть для деформации  $\varepsilon_2(x)$  справедливо

$$\varepsilon_2(x) = \frac{P + (1-x)q_g}{4\Delta_1 b_1 E_1 + 4\Delta_2 b_2 E_2}.$$

Если имеет место  $P_{02} < P < P_{01}$  (рис. 13), тогда для удлинения  $\delta$  имеет место

$$\delta = \int_0^1 \varepsilon(x) dx,$$

где деформация  $\varepsilon(x)$  определяется из уравнения

$$4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon(x) + A_{21}^{3+} (\varepsilon(x))^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon(x))^3) + 4\Delta_2 b_2 \varepsilon(x) = P + (1-x)q_g.$$

Если  $P_{01} < P < P_{02}$ , тогда в первом слое стержня на участке  $[0, x_{s1}]$  и во втором слое стержня на участке  $[0, x_{s2}]$  имеет место нелинейное неупругое деформирование, в остальных областях – упругое (рис. 14).

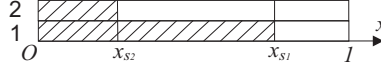


Рис. 14. Случай  $P_{01} < P < P_{02}$

Указанные границы  $x_{s1}$ ,  $x_{s2}$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned} x_{s1} &= 1 - \frac{4\Delta_1 b_1 E_1 \varepsilon_{01}^+ + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{01}^+ - P}{q_g}, \\ x_{s2} &= 1 - \frac{4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_{02}^+ + A_{21}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^3) + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{02}^+ - P}{q_g}. \end{aligned} \quad (33)$$

Удлинение  $\delta$  стержня в случае  $P_{01} < P < P_{02}$  определяется по соотношениям

$$\delta = \int_0^{x_{s1}} \varepsilon_1(x) dx + \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \varepsilon_2(x) dx + \int_{x_{s2}}^1 \varepsilon_3(x) dx,$$

где деформации  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$ ,  $\varepsilon_3(x)$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned} &4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_1(x) + A_{21}^{3+} (\varepsilon_1(x))^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) + \\ &+ 4\Delta_2 b_2 (A_{12}^{3+} \varepsilon_1(x) + (\varepsilon_1(x))^2 + A_{32}^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) = P + (1-x)q_g, \\ &4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_2(x) + A_{21}^{3+} (\varepsilon_2(x))^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_2(x))^3) + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_2(x) = P + (1-x)q_g, \\ &\varepsilon_3(x) = \frac{P + (1-x)q_g}{4\Delta_1 b_1 E_1 + 4\Delta_2 b_2 E_2}. \end{aligned}$$

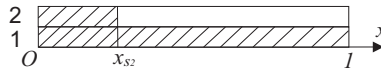


Рис. 15. Случай  $P_{02} < P_{01} < P < P_1$

При нагрузке  $P_{02} < P_{01} < P < P_1$  имеем, что первый слой стержня полностью находится в области нелинейного неупругого деформирования, а второй слой имеет участок нелинейного неупругого деформирования  $[0, x_{s2}]$  и  $[x_{s2}, 1]$  – участок упругого деформирования (рис. 15).

Указанную границу  $x_{s2}$  можно определить из соотношений

$$x_{s2} = 1 - \frac{4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_{02}^+ + A_{21}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^3) + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{02}^+ - P}{q_g}. \quad (34)$$

Для удлинения  $\delta$  при нагрузке  $P_{02} < P_{01} < P < P_1$  имеем

$$\delta = \int_0^{x_{s1}} \varepsilon_1(x) dx + \int_{x_{s1}}^1 \varepsilon_2(x) dx,$$

где деформации  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$  можно найти из уравнений

$$\begin{aligned} & 4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_1(x) + A_{21}^{3+} (\varepsilon_1(x))^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) + \\ & + 4\Delta_2 b_2 (A_{12}^{3+} \varepsilon_1(x) + (\varepsilon_1(x))^2 + A_{32}^{3+} (\varepsilon_1(x))^3) = P + (1-x)q_g, \\ & 4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_2(x) + A_{21}^{3+} (\varepsilon_2(x))^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_2(x))^3) + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_2(x) = P + (1-x)q_g. \end{aligned}$$

Предельная нагрузка  $P_1$ , соответствующая случаю, когда оба слоя стержня по всей длине оказались в области нелинейного неупругого деформирования, определяется из соотношений

$$P_1 = 4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_{02}^+ + A_{21}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^3) + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{02}^+. \quad (35)$$

Удлинение  $\delta_1$ , соответствующее предельной нагрузке  $P_1$ , имеет вид

$$\delta_1 = \int_0^1 \varepsilon(x) dx, \quad (36)$$

где  $\varepsilon(x)$  определяется из соотношений

$$\begin{aligned} & 4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon(x) + A_{21}^{3+} (\varepsilon(x))^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon(x))^3) + \\ & + 4\Delta_2 b_2 (A_{12}^{3+} \varepsilon(x) + (\varepsilon(x))^2 + A_{32}^{3+} (\varepsilon(x))^3) = \\ & = 4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_{02}^+ + A_{21}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_{02}^+)^3) + 4\Delta_2 b_2 E_2 \varepsilon_{02}^+ + (1-x)q_g. \end{aligned} \quad (37)$$

Предельную нагрузку, которую выдержит стержень, определим из соотношений

$$\begin{aligned} P_2 = & 4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon_*^+ + A_{21}^{3+} (\varepsilon_*^+)^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_*^+)^3) + \\ & + 4\Delta_2 b_2 (A_{12}^{3+} \varepsilon_*^+ + A_{22}^{3+} (\varepsilon_*^+)^2 + A_{32}^{3+} (\varepsilon_*^+)^3) - q_g, \end{aligned} \quad (38)$$

где величина предельной деформации равна  $\varepsilon_*^+ = \min\{\varepsilon_{*1}^+, \varepsilon_{*2}^+\}$ .

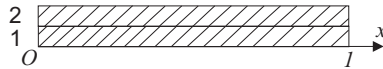


Рис. 16. Случай  $P_1 < P < P_2$

Случай  $P_1 < P < P_2$  соответствует случаю нелинейного неупругого деформирования стержня в обоих слоях стержня до потери им несущей способности (рис. 16).

Удлинение в случае  $P_1 < P \leq P_2$  будет равно

$$\delta = \int_0^1 \varepsilon(x) dx,$$

где

$$4\Delta_1 b_1 (A_{11}^{3+} \varepsilon(x) + A_{21}^{3+} (\varepsilon(x))^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon(x))^3) + \quad (39)$$

$$+4\Delta_2 b_2 (A_{12}^{3+} \varepsilon(x) + (\varepsilon(x))^2 + A_{32}^{3+} (\varepsilon(x))^3) = P + (1-x)q_g.$$

Удлинение  $\delta_2$ , соответствующее предельной нагрузке  $P_2$ , можно получить из предыдущей формулы, положив, что  $P = P_2$ .

В качестве примера рассмотрим эталонный однородный стержень из бетона марки В10 с параметрами поперечного сечения

$$\Delta_1 = b_1 = 0,5 \quad (40)$$

и физическими параметрами из таблиц 2, 3, тогда по соотношениям (15), (16), (17), (21), (22), (22), (23), (24) получим для предельных нагрузок  $P$  и удлинения стержня  $\delta$

$$P_0 = 0,09945, \quad P_1 = 0,10273, \quad P_2 = 0,11411 \quad (41)$$

$$\delta_0 = 4,92 \cdot 10^{-5}, \quad \delta_1 = 5,2987 \cdot 10^{-5}, \quad \delta_2 = 1,4862 \cdot 10^{-4}.$$

Уравнения (22), (24) в общем случае могут иметь три решения. Для определения решения уравнения (22) необходимо учитывать условие, что деформация вдоль длины стержня  $\varepsilon_1(x)$  при нагрузке  $P_1$  такова, что весь стержень находится в области нелинейного неупругого деформирования, а в правом крае стержня деформация должна быть равна предельной упругой при растяжении, т.е.  $\varepsilon_1(1) = \varepsilon_0^+$ . Аналогично определяем решение уравнения (24), полагая, что при нагрузке  $P_2$  кривая  $\varepsilon(x)$  должна проходить через точку  $x = 0$ ,  $\varepsilon(x) = \varepsilon_*^+$ . Решения, соответствующие данным условиям, изображены на рис. 17. Площади, образованные кривыми  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon(x)$  (рис. 17), являются удлинениями стержня  $\delta_1$  и  $\delta_2$  соответственно.

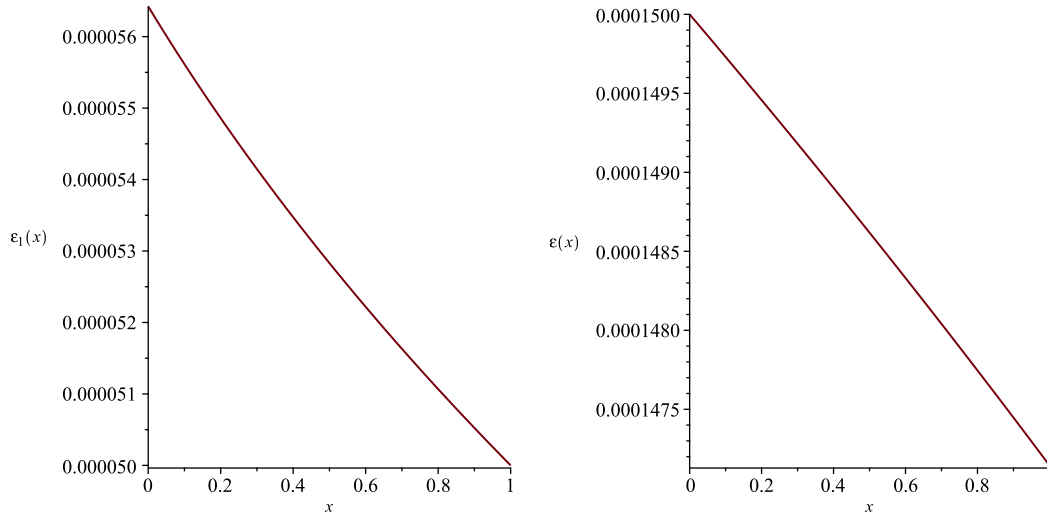


Рис. 17. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке  $P_1$  и  $P_2$  соответственно

Если в соотношениях (15), (16), (17), (21), (22), (22), (23), (24) положим, что  $q_g = 0$ , т.е. пренебрежем действием силы тяжести, тогда для предельных нагрузок  $P$  и

удлинения стержня  $\delta$  имеем

$$\begin{aligned} P_0 = 0,10273, \quad P_1 = 0,10273, \quad P_2 = 0,117389, \\ \delta_0 = 5 \cdot 10^{-5}, \quad \delta_1 = 5 \cdot 10^{-5}, \quad \delta_2 = 1,5 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (42)$$

В случае отсутствия силы тяжести в стержне деформации и продольные усилия постоянные, поэтому при достижении предельной упругой нагрузки в левом конце стержня весь стержень оказывается в зоне нелинейного неупругого деформирования, поэтому в полученных решениях (40) нагрузки  $P_0, P_1$  и удлинения  $\delta_0 = \delta_1$  одинаковые.

Сравнивая решения (40) с учетом силы тяжести и (42), можно увидеть, что предельная упругая нагрузка  $P_0$  без учета силы тяжести на 10% больше, чем с учетом, причем удлинение стержня при предельной упругой нагрузке в случае с учетом силы тяжести меньше на 2%. Предельная нагрузка  $P_1$  оказалась в обоих случаях одинаковой, а удлинение в случае учета силы тяжести больше на 4%, что объясняется тем, что при одинаковой нагрузке  $P$  на стержень в случае учета силы тяжести принимается в расчет еще дополнительно распределенная нагрузка. Нагрузка  $P_2$ , соответствующая появлению участков с деформацией, равной предельной деформации упрочнения, в случае учета силы тяжести меньше на 2,8%, и удлинение стержня также меньше в случае учета силы тяжести.

В дальнейшем рассмотренный выше однородный стержень из бетона В10 (рис. 1) с параметрами сечения (40) будем считать эталонным и будем рассматривать составные стержни (рис. 10), имеющие одинаковую массу по сравнению с эталонным стержнем.

В случае одинаковой массы рассматриваемых составных стержней имеем, что все стержни должны удовлетворять соотношениям

$$\Delta_{\text{э}} b_{\text{э}} \rho_{\text{э}} = \Delta_{1i} b_{1i} \rho_{1i} + \Delta_{2i} b_{2i} \rho_{2i}, \quad (43)$$

где  $\Delta_{\text{э}}, b_{\text{э}}$  – толщина и ширина стержня в поперечном сечении,  $\rho_{\text{э}}$  – плотность бетона эталонного стержня,  $\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, b_{1i}, b_{2i}$  – параметры поперечного сечения составного стержня (10),  $\rho_{1i}, \rho_{2i}$  – плотности первого и второго слоя стержня соответственно. В дальнейших расчетах будем полагать плотности бетонов марок В10, В30, В50 равными соответственно  $\rho_1 = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 2800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_3 = 3100 \text{ кг/м}^3$ .

Рассмотрим слоистый стержень с параметрами сечения

$$\Delta_1 = 0,25, \quad \Delta_2 = 0,16964, \quad b_1 = b_2 = 0,5, \quad (44)$$

причем если в первом слое стержня в качестве фазового материала будет взят бетон марки В50, а во втором бетон марки В30, тогда масса стержня с параметрами (44) будет равна массе эталонного стержня (41).

По соотношениям (27), (35), (38) для стержня с параметрами (44) получим выражения для предельных нагрузок и удлинений

$$\begin{aligned} P_0 = 0,1841, \quad P_1 = 0,22048, \quad P_2 = 0,247875, \\ \delta_0 = 3,71 \cdot 10^{-5}, \quad \delta_1 = 5,13 \cdot 10^{-5}, \quad \delta_2 = 1,494 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (45)$$

Корректность выбора решений уравнений (37), (39) можно проверить по графикам распределения деформаций при заданных предельных нагрузках. Из рисунка 18 а) видно, что деформация в стержне, соответствующая предельной нагрузке  $P_1$  (уравнение (37)), проходит через точку  $\varepsilon(1) = \varepsilon_{02}^+$ , а деформация при нагрузке  $P_2$  (уравнение (39)) проходит через точку  $\varepsilon(0) = \varepsilon_*^+$ .

Рассмотрим стержни, одинаковой массы по сравнению с эталонным стержнем (43), с параметрами, указанными в таблице 6. Расчетные значения предельных усилий, соответствующих удлинений стержня и отношение разности предельных нагрузок рассматриваемого и эталонного стержня к предельной нагрузке эталонного стержня (если нагрузка считалась с учетом силы тяжести, то и для эталонного стержня нагрузка считалась тоже с учетом силы тяжести и наоборот) поместим в таблицу 7, причем знак плюс будет соответствовать тому, что предельная нагрузка больше, а минус – предельная нагрузка меньше по сравнению с эталонным стержнем.

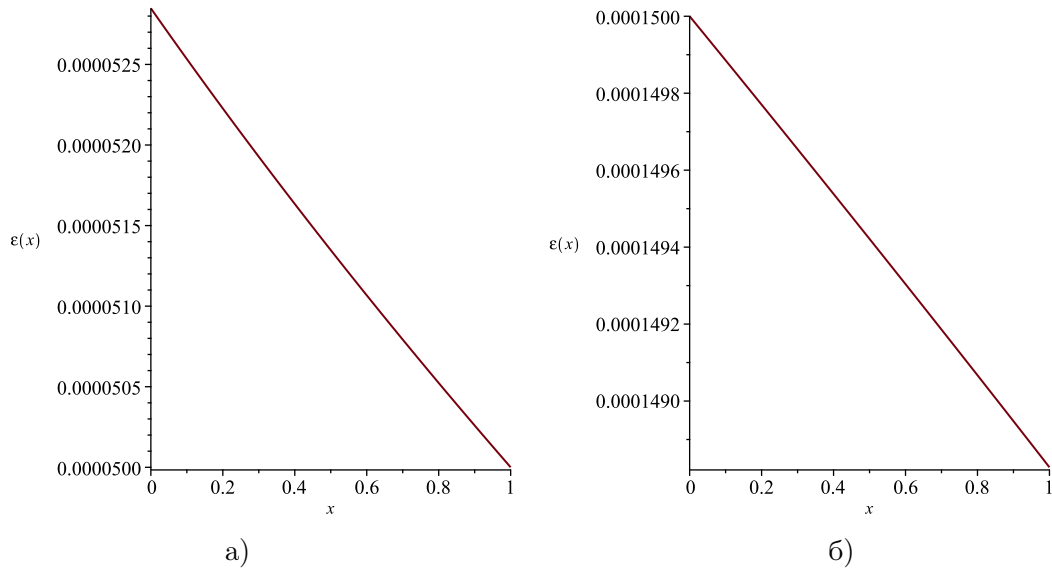


Рис. 18. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке а)  $P_1$ , б)  $P_2$



№	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$b_1$	$b_2$	Сила тяжести	Слой 1	Слой 2
1	0,25	0,17	0,5	0,5	+	B50	B30
2	0,25	0,17	0,5	0,5	-	B50	B30
3	0,25	0,19	0,5	0,5	+	B50	B10
4	0,25	0,19	0,5	0,5	-	B50	B10
5	0,25	0,22	0,5	0,5	+	B30	B10
6	0,25	0,22	0,5	0,5	-	B30	B10
7	0,3	0,19	0,5	0,3	+	B50	B30
8	0,3	0,19	0,5	0,3	-	B50	B30
9	0,4	0,2	0,3	0,4	+	B50	B50
10	0,4	0,2	0,3	0,4	-	B50	B50
11	0,35	0,28	0,4	0,3	+	B30	B30
12	0,35	0,28	0,4	0,3	-	B30	B30

Таблица 6. Параметры поперечных сечений, марки бетонов, реализованные в слоях составных эквивалентных по массе стержней, и наличие или отсутствие действия силы тяжести при расчетах

№	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$\delta_0, 10^{-5}$	$\delta_1, 10^{-5}$	$\delta_2, 10^{-4}$	$\Delta P_0/P_{0э}$	$\Delta P_1/P_{1э}$	$\Delta P_2/P_{2э}$
1	0,1841	0,2205	0,2479	3,717	5,139	1,494	85 %	114 %	117 %
2	0,1873	0,2205	0,2512	3,75	5	1,5	82 %	115 %	113 %
3	0,15938	0,18753	0,207	3,7122	5,17	1,493	60 %	82 %	81 %
4	0,16266	0,18753	0,21028	3,75	5	1,5	58 %	82 %	79 %
5	0,148	0,1513	0,1743	4,94	5,175	1,49	48 %	47 %	52 %
6	0,1512	0,1512	0,1776	5,00	5,00	1,5	47 %	47 %	51 %
7	0,1931	0,2266	0,2531	3,71	5,14	1,49	94 %	120 %	121 %
8	0,1964	0,2266	0,2564	3,75	5,00	1,5	91 %	120 %	118 %
9	0,212	0,215	0,263	3,72	3,81	1,49	113 %	109 %	131 %
10	0,215	0,215	0,267	3,75	3,75	1,5	109 %	109 %	127 %
11	0,186	0,189	0,221	4,95	5,13	1,492	87 %	84 %	94 %
12	0,1894	0,1894	0,2249	5	5	1,5	84 %	84 %	91 %

Таблица 7. Расчетные значения предельных нагрузок, соответствующих этим нагрузкам удлинений составных эквивалентных по массе стержней и относительное изменение предельных нагрузок по сравнению с эталонным стержнем для стержней с параметрами из таблицы 6

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мут А. Р. Современные технологии производства ЖБИ // Бетон и железобетон. Оборудование. Материалы. Технологии. 2009. С. 20–23.
- [2] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.

- [3] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.
- [4] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1(117). С. 40–46.
- [5] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [6] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения многослойного бетонного стержня на несущую способность при продольно-поперечной нагрузке // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник тезисов 9-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН. 2019. С. 185–189.
- [7] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных бетонных стержней армированных стальной арматурой под действием массовых сил // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 94–103.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [9] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [10] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб физически-нелинейных железобетонных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3(49). С. 85–93.
- [11] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146.
- [12] Плевков В. С., Колупаева С. Н., Кудряков К. Л. Расчетные диаграммы нелинейного деформирования базальто-фибробетона при статических и кратковременных динамических воздействиях // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 3. с. 95–110.
- [13] Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. Москва: Строительство, 1974. 208 с.
- [14] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения и силы тяжести на деформирование многослойных бетонных стержней при квазистатических нагрузках // Моделирование и механика конструкций. 2020. № 12. С. 11–49.
- [15] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [16] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела : материалы второй международной конференции, Казань, Россия, 8-11 декабря 2009 г. Казань: Казанский гос. ун-т, 2009.
- [17] Немировский Ю. В. Метод расчета стержневых композитных стержней из разномодульных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы V Всероссийской научной конференции. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С. 288–290.
- [18] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
- [19] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1(6). С. 150–159.
- [20] Иващенко Е. И. Разработка методов расчета железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов с учетом фактического изменения площади их поперечных сечений // дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 2006. 230 с.

- [21] Маилян Л. Р., Иващенко Е. И. Расчет железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовский гос. строит. ун-т, 2006. 222 с.
- [22] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 720 с.

*Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov*

## STUDY OF THE FEATURES OF DEFORMATION AND DESTRUCTION OF CONCRETE LAYERED RODS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch  
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The problem of central tension of a homogeneous and multilayer concrete rod by quasi-static loads is considered. The force of gravity acting on the rod is taken as a distributed load. The ultimate loads and elongations of the rod are determined depending on the physical parameters of the rod. At a deformation below the limiting elastic one, it is assumed that the concrete deforms linearly, otherwise it is non-linearly inelastic. Examples of calculations based on the obtained ratios for layered rods of the same mass are given, where different grades of concrete can be realized in each layer.

**Keywords:** multilayer rod, central tension, physical non-linearity, limit loads

## REFERENCES

- [1] Mut A. Modern concrete production technologies // Concrete and reinforced concrete. Equipment. Materials. Technology. 2009. P. 20–23.
- [2] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity: Proceedings of the XIX All-Russian Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005. P. 184–188.
- [3] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // Bulletin of PNRPU. Mechanics. 2020. no. 1. p. 60–73.
- [4] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel-fiber-reinforced concrete bars // News of the Altai State University. 2021. no. 1(117). P. 40–46.
- [5] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [6] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape of a multilayer concrete bar on the bearing capacity under longitudinal-transverse loading // Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Collection of abstracts of the 9th All-Russian scientific conference with international participation named after V.I. I.F. Obraztsov and Yu.G. Yanovsky dedicated to the 30th anniversary of IPRIM RAS. 2019. P. 185–189.

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.  
*Tikhonov Sergey Vladimirovich*, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State

- 
- [7] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete bars reinforced with steel reinforcement under the action of body forces // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2021. no. 2(48). P. 94–103.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [9] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [10] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically non-linear reinforced concrete beams // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2021. no. 3(49). P. 85–93.
- [11] Mishchenko A. V., Nemirovskiy Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements during longitudinal-transverse bending // News of universities. Construction. 2013. no. 4. P. 133–146.
- [12] Plevkov V. S., Kolupaeva S. N., Kudyakov K. L. Design diagrams of non-linear deformation of basalt-fiber-reinforced concrete under static and short-term dynamic effects // Bulletin of the Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2016. no. 3. p. 95–110.
- [13] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. M.: Science, 1978. 208 p.
- [14] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete bars under quasi-static loads // Modeling and structural mechanics. 2020. no. 12. P. 11–49.
- [15] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of the Belgorod State Technological University. V.G. Shukhov. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [16] Nemirovsky Y. V. Nonlinear Deformation Prediction for Hybrid Composite Materials // Problems of non-linear mechanics of a deformable solid body: materials of the second international conference, Kazan, Russia, December 8-11, 2009. Kazan: Kazan state. university, 2009.
- [17] Nemirovsky Y. V. Method of calculation of rod composite rods from different-modulus materials // Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics: Proceedings of the V All-Russian Scientific Conference. Tomsk: TSU publishing house, 2006. P. 288–290.
- [18] Nemirovsky Y. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2018. no. 3(37). P. 26–37.
- [19] Nemirovsky Y. V. Second limit state of homogeneous and composite beams // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2009. no. 1. p. 150–159.
- [20] Ivashchenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams, taking into account the actual change in their cross-sectional area // dis. ... cand. tech. Sciences. Voronezh, 2006. 230 p.
- [21] Mailyan L. R., Ivashchenko E. I. Calculation of reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams. Rostov-on-Don: Publishing house of the Rostov state. builds. un-t, 2006. 222 p.
- [22] Korn G., Korn T. Handbook of mathematics (for scientists and engineers). M.: Science, 1973. 720 p.

С. Л. Субботин, А. А. Алексеев

**КОНКРЕТИЗАЦИЯ ОБОБЩЕНИЯ ГИПОТЕЗЫ  
КОМПЛАНАРНОСТИ ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
В ТРЕХМЕРНОМ ИЗОБРАЖАЮЩЕМ ПРОСТРАНСТВЕ  
А. А. ИЛЬЮШИНА**

*Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрена одна из форм трехчленных определяющих соотношений теории упругопластических процессов и представлена методика определения функционалов теории упругопластических процессов для плоского напряженного состояния и трехмерных винтовых траекторий деформирования методом подбора аналитических функций, соответствующих экспериментальным данным. Приведены конкретизированные формулы для определения функционалов по экспериментальным данным для координат векторов напряжений и деформаций и их производным по длине дуги траектории деформирования. Результаты вычисления функционалов пластичности для трехмерной винтовой траектории деформирования представлены в наглядной графической форме.

**Ключевые слова:** теория упругопластических процессов, пластичность, гипотеза компланарности, функционалы пластичности.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.008

УДК: 539.3

**Введение.** Теория упругопластических процессов А.А.Ильюшина [1–3] является одной из наиболее востребованных теорий пластичности и широко применяется в расчетах процессов сложного нагружения материалов при малых деформациях [4–10]. В теории процессов используется векторное (геометрическое) представление истории изменения напряжений и деформаций в виде образа процесса нагружения или деформирования, включающего в себя траекторию, в каждой точке которой приписываются характеристики процесса: векторы напряжений  $\bar{\sigma}$  и деформаций  $\bar{\epsilon}$  формоизменения, их приращения  $d\bar{\sigma}$  и  $d\bar{\epsilon}$ , а также скалярные параметры (температура, среднее напряжение, средняя деформация и др.). Связь между напряжениями и деформациями

---

© Субботин С. Л., Алексеев А. А., 2022

*Субботин Сергей Львович*

**e-mail:** sbtn@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

*Алексеев Андрей Алексеевич*

**e-mail:** alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 01.04.2022

в теории процессов задается определяющими соотношениями, учитывающими скалярные и векторные свойства материалов. Скалярные свойства характеризуют связь между инвариантами девиаторов напряжений и деформаций; а векторные свойства – несоосность девиаторов напряжений, деформаций и их приращений. Важной особенностью теории является возможность прямой экспериментальной проверки ее основных положений и постулатов [4, 11-14].

В практических расчетах широко используются двучленные определяющие соотношения гипотезы компланарности А.А. Ильюшина [3], являющиеся частным случаем общих трехчленных определяющих соотношений, впервые полученных В.Г. Зубчаниновым [15]. Суть гипотезы компланарности заключается в том, что вектор напряжений  $\bar{\sigma}$ , вектор его приращения  $d\bar{\sigma}$  и единичный вектор репера Френе  $\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}$ , касательный к траектории деформирования с длиной дуги  $s$ , лежат в одной плоскости, то есть компланарны.

**Основные уравнения.** В.Г. Зубчанинов в [4] обосновал формулу трехчленных определяющих соотношений теории упругопластических процессов в виде

$$\frac{d\hat{\sigma}}{ds} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + (P - N) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^2} \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \bar{\sigma} - N \operatorname{tg} \beta \sin \vartheta_1 \hat{\mu} \quad (1)$$

где  $\hat{\mu}$  – единичный вектор, перпендикулярный плоскости, в которой расположены единичные векторы  $\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}$  и  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}$ , то есть плоскости компланарности (рис. 1);  $N$ ,  $P$ ,  $\operatorname{tg} \beta$  – функционалы упругопластического процесса, определяемые формулами

$$N = \frac{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \hat{t}}{\frac{d\bar{\Theta}}{ds} \hat{t}} = -\frac{1}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{dS_1}{ds} t_1 + \frac{dS_2}{ds} t_2 + \frac{dS_3}{ds} t_3 \right) \quad (2)$$

$$P = \frac{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \bar{\sigma}}{\frac{d\bar{\Theta}}{ds} \bar{\sigma}} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1} = \frac{1}{\sigma \cos \vartheta_1} \left( \frac{dS_1}{ds} S_1 + \frac{dS_2}{ds} S_2 + \frac{dS_3}{ds} S_3 \right) \quad (3)$$

$$Q = -N \operatorname{tg} \beta \sin \vartheta_1 = \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \hat{\mu} = \frac{dS_1}{ds} \mu_1 + \frac{dS_2}{ds} \mu_2 + \frac{dS_3}{ds} \mu_3 \quad (4)$$

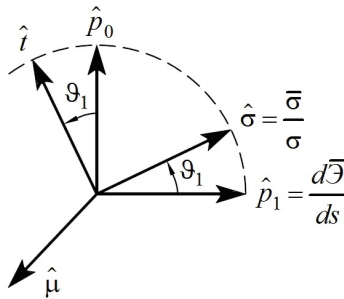


Рис. 1.

Здесь  $\vartheta_1$  – угол между векторами  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{p}_1$ , называемый углом сближения, для которого

$$\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1 = \frac{1}{\sigma} \left( S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_2 \frac{d\Theta_2}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds} \right), \quad (5)$$

$$\hat{t} = t_1 \hat{e}_1 + t_2 \hat{e}_2 + t_3 \hat{e}_3 \quad (6)$$

– единичный вектор, расположенный в плоскости компланарности, перпендикулярный вектору  $\hat{\sigma}$ ; аналогично можно разложить и вектор  $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \mu_1 \hat{e}_1 + \mu_2 \hat{e}_2 + \mu_3 \hat{e}_3, \quad (7)$$

где  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  – единичные векторы трехмерного изображающего пространства А.А. Ильюшина.

Единичный вектор  $\hat{\mu}$ , показывающий выход из плоскости компланарности, определяется векторным произведением векторов  $\hat{p}_1$  и  $\hat{\sigma}$

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{\hat{p}_1 \times \hat{\sigma}}{|\hat{p}_1 \times \hat{\sigma}|} = \frac{1}{\sin \vartheta_1} \cdot \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{d\Theta_1}{ds} & \frac{d\Theta_2}{ds} & \frac{d\Theta_3}{ds} \\ \frac{S_1}{\sigma} & \frac{S_2}{\sigma} & \frac{S_3}{\sigma} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[ \left( S_3 \frac{d\Theta_2}{ds} - S_2 \frac{d\Theta_3}{ds} \right) \hat{e}_1 + \left( S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds} \right) \hat{e}_2 + \left( S_2 \frac{d\Theta_1}{ds} - S_1 \frac{d\Theta_2}{ds} \right) \hat{e}_3 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

тогда с учетом (7) его координаты:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_3 \frac{d\Theta_2}{ds} - S_2 \frac{d\Theta_3}{ds} \right), \\ \mu_2 &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds} \right), \\ \mu_3 &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_2 \frac{d\Theta_1}{ds} - S_1 \frac{d\Theta_2}{ds} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Модуль вектора  $\hat{\mu}$  согласно формуле векторного произведения

$$|\hat{\mu}| = \frac{|\hat{p}_1 \times \hat{\sigma}|}{\sin \vartheta_1} = |\hat{p}_1| \cdot |\hat{\sigma}| = 1,$$

для проверки в расчетах можно использовать формулу

$$|\hat{\mu}| = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} = 1.$$

Единичный вектор  $\hat{t}$  (см. рис. 1) может быть найден разложением на проекции по направлениям  $\hat{p}_1$  и  $\hat{p}_0$ , то есть

$$\hat{t} = \hat{p}_0 \cos \vartheta_1 - \hat{p}_1 \sin \vartheta_1, \quad (10)$$

где  $\hat{p}_0$  – единичный вектор, расположенный в плоскости векторов  $\hat{p}_1$  и  $\hat{\sigma}$  (плоскости компланарности) и перпендикулярный вектору  $\hat{p}_1$ . Аналогично можно разложить и единичный вектор  $\hat{\sigma}$

$$\hat{\sigma} = \hat{p}_1 \cos \vartheta_1 + \hat{p}_0 \sin \vartheta_1. \quad (11)$$

Из формул (10), (11) следует, что

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sin \vartheta_1} \hat{\sigma} - \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} \hat{p}_1, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} \hat{\sigma} - \frac{1}{\sin \vartheta_1} \hat{p}_1 = \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta_1} \left[ \left( \frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) \hat{e}_2 + \left( \frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) \hat{e}_3 \right], \end{aligned} \quad (13)$$

тогда с учетом (6) координаты вектора  $\hat{t}$ :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right), \\ t_2 &= \frac{1}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_2}{ds} \right), \\ t_3 &= \frac{1}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_3}{ds} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом  $\sigma^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$  и соотношения (5) выражения (14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\sigma^2 \sin \vartheta_1} \left[ S_2 \left( S_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} - S_2 \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) + S_3 \left( S_1 \frac{d\vartheta_3}{ds} - S_3 \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) \right], \\ t_2 &= \frac{1}{\sigma^2 \sin \vartheta_1} \left[ S_1 \left( S_2 \frac{d\vartheta_1}{ds} - S_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) + S_3 \left( S_2 \frac{d\vartheta_3}{ds} - S_3 \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) \right], \\ t_3 &= \frac{1}{\sigma^2 \sin \vartheta_1} \left[ S_1 \left( S_3 \frac{d\vartheta_1}{ds} - S_1 \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) + S_2 \left( S_3 \frac{d\vartheta_2}{ds} - S_2 \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Скалярное умножение  $\hat{t}$  по (13) и  $\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\vartheta}}{ds}$  дает соотношение

$$\hat{p}_1 \cdot \hat{t} = \hat{p}_1 \cdot \left( \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} \hat{\sigma} - \frac{1}{\sin \vartheta_1} \hat{p}_1 \right) = \frac{\cos^2 \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} - \frac{1}{\sin \vartheta_1} = -\sin \vartheta_1,$$

где учтено, что  $\sin^2 \vartheta_1 = 1 - \cos^2 \vartheta_1$ .

Формулу для вектора  $\hat{t}$  можно также получить из векторного произведения векторов  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\sigma}$  в координатной форме (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{\hat{\mu} \times \hat{\sigma}}{|\hat{\mu} \times \hat{\sigma}|} = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \left( S_3 \frac{d\vartheta_2}{ds} - S_2 \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) & \left( S_1 \frac{d\vartheta_3}{ds} - S_3 \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) & \left( S_2 \frac{d\vartheta_1}{ds} - S_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) \\ \frac{S_1}{\sigma} & \frac{S_2}{\sigma} & \frac{S_3}{\sigma} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[ \left( \frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) \hat{e}_2 + \left( \frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) \hat{e}_3 \right]. \end{aligned}$$



Далее представлена проверка ортогональности векторов  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{t}$ ,  $\hat{\mu}$ . Известно, что два вектора являются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение векторов  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{t}$ :

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma} \cdot \hat{t} = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[ \frac{S_1}{\sigma} \left( \frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + \frac{S_2}{\sigma} \left( \frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) + \frac{S_3}{\sigma} \left( \frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[ \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{\sigma^2} \cos \vartheta_1 - \frac{S_1 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + S_2 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + S_3 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}}{\sigma} \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} [\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_1] = 0. \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{\mu}$ :

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma} \cdot \hat{\mu} = \\ &= \frac{1}{\sigma^2 \sin \vartheta_1} \left[ S_1 \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) + S_2 \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + S_3 \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов  $\hat{t}$  и  $\hat{\mu}$  с учетом (9) и (15):

$$\begin{aligned} & \hat{t} \cdot \hat{\mu} = t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2 + t_3 \mu_3 = \\ &= \frac{1}{\sigma^3 \sin^2 \vartheta_1} \left[ S_2 \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) + \right. \\ &+ S_3 \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) + S_1 \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + \\ &+ S_3 \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + S_1 \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) + \\ &\left. + S_2 \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Проверка ортогональности выполняется.

Окончательно, с учетом полученных выражений (5), (9), (14) формулы для функционалов (2), (3), (4) записываются в виде

$$N = -\frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \left[ \frac{dS_1}{ds} \left( \frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + \frac{dS_2}{ds} \left( \frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) + \frac{dS_3}{ds} \left( \frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) \right],$$

$$P = \frac{S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_2 \frac{dS_2}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}}{S_1 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + S_2 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + S_3 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}},$$

$$Q = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[ \frac{dS_1}{ds} \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) + \frac{dS_2}{ds} \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + \frac{dS_3}{ds} \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \right].$$

Полученные формулы позволяют по экспериментальным данным для координат вектора деформаций  $\mathcal{E}_1(s)$ ,  $\mathcal{E}_2(s)$ ,  $\mathcal{E}_3(s)$  и координат вектора напряжений  $S_1(s)$ ,  $S_2(s)$ ,  $S_3(s)$  и их производным по длине дуги  $s$  траектории деформирования найти

функционалы  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ . В скалярной форме определяющее соотношение (1) с учетом полученных выражений имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{ds} &= N \frac{d\Theta_1}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_3 \frac{d\Theta_2}{ds} - S_2 \frac{d\Theta_3}{ds} \right), \\ \frac{dS_2}{ds} &= N \frac{d\Theta_2}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds} \right), \\ \frac{dS_3}{ds} &= N \frac{d\Theta_3}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_2 \frac{d\Theta_1}{ds} - S_1 \frac{d\Theta_2}{ds} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

Несомненное достоинство данной формы определяющих соотношений (1), (16), что при  $Q = 0$  она включает, как показано В.Г. Зубчаниновым [4], все известные варианты гипотезы компланарности (теория пластического течения, деформационная теория пластичности, модель нелинейно-упругого материала).

**Результаты.** Далее, на рисунках 2-8 представлены результаты обработки экспериментальных данных [4, табл. 9.4] для пространственной винтовой траектории постоянной кривизны и кручения, которая была реализована в трехмерном девиаторном пространстве деформаций на цилиндрической стальной тонкостенной оболочке в условиях плоского напряженного состояния и комбинированного воздействия осевой силы, крутящего момента и внутреннего давления. Выход на криволинейную часть траектории осуществлялся растяжением образца до значения  $\Theta_1 = 0,92\%$ , затем без излома реализовано три с половиной витка винта при увеличивающемся значении  $\Theta_2$ . Шаг винта в направлении  $\Theta_2$  составил  $a = 0,25\%$ , а радиус следа винтовой траектории на плоскости  $\Theta_1 - \Theta_3$  был равен  $R = 0,5\%$ . Координаты центра кривизны винтовой плоскости  $\Theta_1 - \Theta_3$  были равны:  $\Theta_1^0 = 0,92\%$ ,  $\Theta_3^0 = R = 0,5\%$ , то есть центр кривизны не совпадал с началом координат, такая траектория называется «смещенным» винтом.

Для вычисления производных  $\frac{d\Theta_i}{ds}$ ,  $\frac{dS_i}{ds}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) по экспериментальным данным в [4], например, предлагается численное дифференцирование равноотстоящих точек при предварительном сглаживании экспериментальных данных на основе метода наименьших квадратов. В данной работе предлагается найти и использовать хорошо соответствующие экспериментальным данным аналитические функции и продифференцировать их. Для координат вектора деформаций было принято

$$\Theta_1 = \Theta_1^0 + R \sin \varphi, \quad \Theta_2 = b \cdot \varphi = \frac{a}{2\pi} \cdot \varphi, \quad \Theta_3 = R - R \cos \varphi,$$

где  $b = a/2\pi$ ,  $\varphi$  – полярный угол на плоскости  $\Theta_1 - \Theta_3$ , отсчитываемый от точки начала винта. Задаваясь углом  $\varphi$  можно найти длину дуги траектории деформирования

$$s = s_0 + \sqrt{R^2 + b^2} \cdot \varphi,$$

где  $s_0 = \Theta_1^0 = 0,92\%$  – значение длины дуги в начальной точке винтовой траектории. Тогда

$$\frac{d\Theta_1}{ds} = R \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{d\Theta_2}{ds} = b \frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{d\Theta_3}{ds} = R \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\text{где } \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}}.$$

Графики зависимостей координат вектора деформаций от длины дуги траектории деформирования  $s$  представлены на рисунках 2-4. Экспериментальные точки на рисунках обозначены затупшеванными кружками.

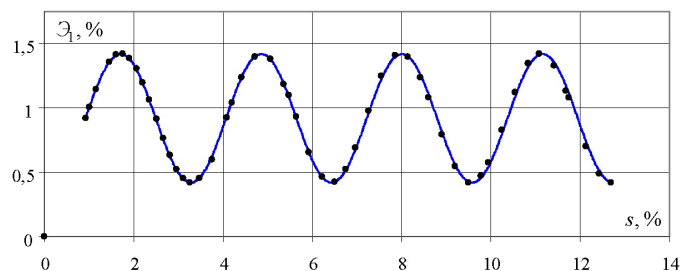


Рис. 2. Диаграмма зависимости  $\Theta_1 - s$

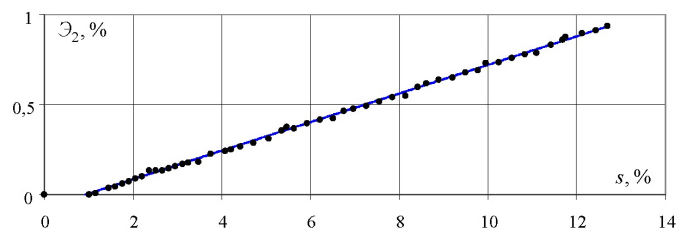


Рис. 3. Диаграмма зависимости  $\Theta_2 - s$

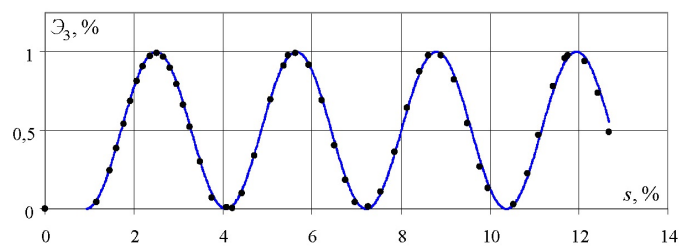


Рис. 4. Диаграмма зависимости  $\Theta_3 - s$

Для координат вектора напряжений принимались следующие функции

$$S_1 = 40 + 340 \sin(\varphi + 0, 6), \quad S_3 = -10 + 360 \sin(\varphi - 0, 9),$$

$$S_2 = 40 + 700(s - s_0) + 25 \sin(\varphi - 0, 8) - 35 \sin(2\varphi + 0, 6).$$

Тогда производные

$$\frac{dS_1}{ds} = 340 \cos(\varphi + 0, 6) \frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{dS_3}{ds} = 360 \cos(\varphi - 0, 9) \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{dS_2}{ds} = 700 + 25 \cos(\varphi - 0, 8) \frac{d\varphi}{ds} - 70 \cos(2\varphi + 0, 6) \frac{d\varphi}{ds}.$$

Графики зависимостей координат вектора напряжений от длины дуги траектории деформирования представлены на рисунках 5-7. Полученные функции хорошо согласуются с данными эксперимента на установившемся участке винтовой траектории при  $s > 1,5\%$ .

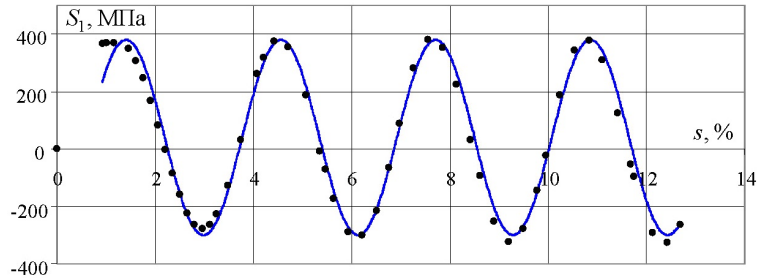


Рис. 5. Диаграмма зависимости  $S_1 - s$

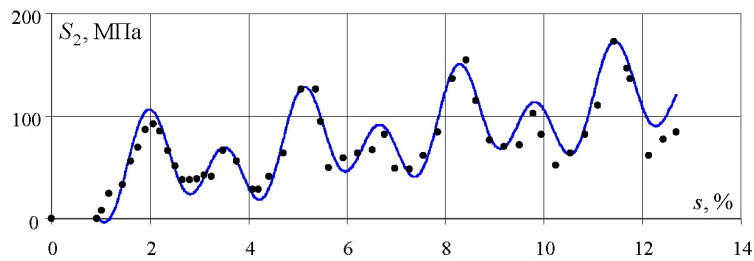


Рис. 6. Диаграмма зависимости  $S_2 - s$

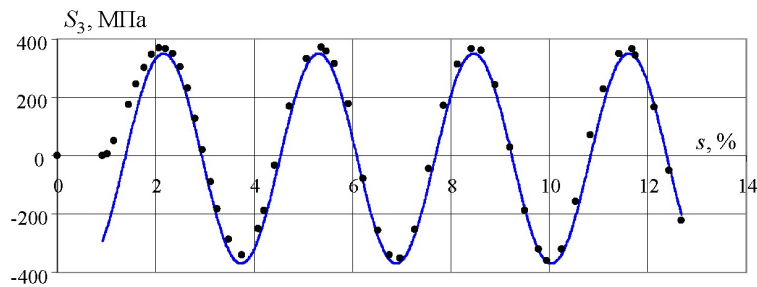


Рис. 7. Диаграмма зависимости  $S_3 - s$

Графики зависимостей посчитанных по формулам (2), (3), (4) функционалов процесса  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  представлены на рис. 8.

Из рис. 8 видно, что зависимости функционалов носят колебательный характер, при этом явно прослеживается их периодичность. Данные графики нужны для решения важной задачи построения универсальных аппроксимаций функционалов.

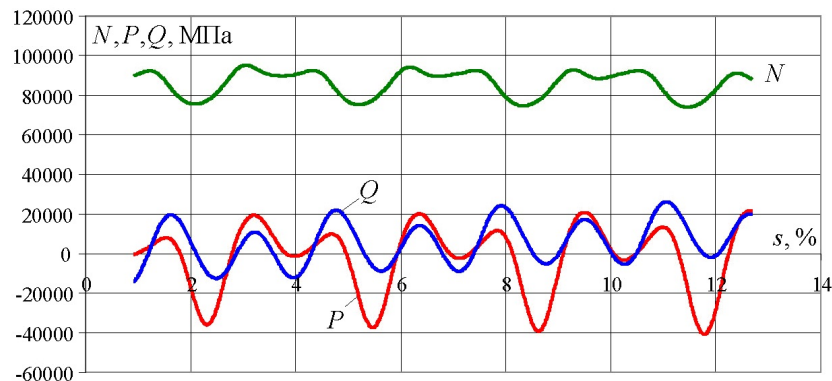


Рис. 8. Функционалы  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  в зависимости от  $s$

Таким образом, представленная в статье методика определения функционалов теории упругопластических процессов для плоского напряженного состояния и трехмерных винтовых траекторий деформирования может быть использована для обработки экспериментальных данных и построения аппроксимаций функционалов пластичности.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18. № 6. С. 641-666.
- [2] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 273 с.
- [3] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 310 с.
- [4] Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
- [5] Alekseev A., Zubchaninov V., Gultiaev V., Alekseeva E. Modeling of elastoplastic deformation of low-carbon steel along multi-link plane strain trajectories // AIP Conference Proceedings 2371, 020001 (2021) <https://doi.org/10.1063/5.0059630>
- [6] Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультияев В.И., Алексеева Е.Г. Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 32–44. doi: 10.17223/19988621/61/4
- [7] Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally // Materials Physics and Mechanics. 2019. vol. 42. № 5. С. 528-534.
- [8] Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МГТ. 2016. № 1. С. 110-135. DOI: 10.3103/S0025654416010106
- [9] Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. Некоторые вопросы верификации теории упругопластических процессов при сложном нагружении // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2016. № 3. С. 98-105.
- [10] Зубчанинов В.Г., Субботин С.Л., Алексеев А.А. Учет упрочнения в расчетах процессов сложного упругопластического нагружения // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2010. № 3. С. 207-212.
- [11] Зубчанинов В.Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2018. – № 5 – С. 29-46. DOI: 10.3103/S0027133018050011

- [12] Ленский В. С., Машков И. Д. Проверка законов в трехмерном пространстве девиатора деформаций // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. № 2. С. 58-166.
- [13] Gulyaev V.I., Alekseev A.A., Savrasov I.A., Subbotin S.L. Experimental verification of the isotropy postulate on orthogonal curved trajectories of constant curvature // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Т. 151 LNCE. С. 315-321.
- [14] Гультаев В.И., Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Саврасов И.А. Проверка постулата изотропии при сложном кинематическом нагружении материала сталь 45 по траекториям деформирования в виде полукружностей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 4 (50). С. 16-24.
- [15] Зубчанинов В.Г. Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов // Прикладная механика, 1989. Т. 25. № 5. С. 3-12.

*S. L. Subbotin, A. A. Alekseev*

**CONCRETIZATION OF GENERALIZATION OF THE COPLANARITY  
HYPOTHESIS FOR ELASTIC-PLASTIC PROCESSES IN A  
THREE-DIMENSIONAL SPACE BY A.A. ILYUSHIN**

*Tver State Technical University, Tver*

**Abstract.** One of the forms of the three-term constitutive relations of the theory of elastic-plastic processes is considered and a method for determining the functionals of the theory of elastic-plastic processes for plane stress state and three-dimensional helical strain trajectories by selecting analytical functions corresponding to experimental data is presented. Concretized formulas for determining functionals from experimental data for the coordinates of stress and strain vectors and their derivatives along the length of the arc of the strain trajectory are given. The results of calculating the plasticity functionals for a three-dimensional helical strain trajectory are presented in a visual graphical form.

**Keywords:** theory of elastic-plastic processes, plasticity, coplanarity hypothesis, plasticity functionals.

**REFERENCES**

- [1] И'lyushin A.A. On the Relation between Stresses and Small Strains in Continuum Mechanics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1954. Т. 18. № 6. pp. 641-666. (in Russian)
- [2] И'lyushin A.A. Plastichnost'. Plasticity. Bases of the General Mathematical Theory. Moscow: Izdatelstvo AS USSR, 1963, 273 p. (in Russian)
- [3] И'lyushin A.A. Continuum Mechanics. Moscow: Izdatelstvo MSU, 1990, 310 p. (in Russian)
- [4] Zubchaninov V.G. Mechanics of processes in plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010, 352 p. (in Russian)
- [5] Alekseev A., Zubchaninov V., Gultiaev V., Alekseeva E. Modeling of elastoplastic deformation of low-carbon steel along multi-link plane strain trajectories // AIP Conference Proceedings 2371, 020001 (2021) <https://doi.org/10.1063/5.0059630>

---

*Subbotin Sergey Lvovich*

e-mail: sbtn@yandex.ru, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tver State Technical University, Tver

*Alekseev Andrey Alekseevich*

e-mail: alexeev@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver

- [6] Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. The processes of a complex loading of structural steel in a fivelink piecewise polygonal strain path // *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2019. Vol. 61. pp. 32-44. doi: 10.17223/19988621/61/4
- [7] Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally // *Materials Physics and Mechanics*. 2019. vol. 42. № 5. С. 528-534.
- [8] Peleshko V.A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification // *Mechanics of Solids*, 2016, Vol. 51, Issue 1, pp 91–113. doi: 10.3103/S0025654416010106
- [9] Molodtsov I.N., Babaeva D.O. Some problems of verification of plastic-elastic complex loading processes // *Engineering and Automation Problems*. 2016. № 3. pp. 98-105.
- [10] Zubchaninov V.G., Subbotin S.L., Alekseev A.A. Accounting for hardening in the calculation of processes of complex elastoplastic loading // *News of the Tula state university. Technical sciences*. 2010. №. 3. pp. 207-212.
- [11] Zubchaninov V.G. The General Mathematical Theory of Plasticity and the Il'yushin Postulates of Macroscopic Definability and Isotropy // *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2018, Volume 73, Issue 5, pp 101–116. doi:10.3103/S0027133018050011
- [12] Lensky V.S., Mashkov I.D. Proverka zakonov v trekhmernom prostranstve deviatora deformatsii // *Uprugost' i neuprugost'*. Moscow: MSU, 1971. № 2, pp. 158-166.
- [13] Gulyaev V.I., Alekseev A.A., Savrasov I.A., Subbotin S.L. Experimental verification of the isotropy postulate on orthogonal curved trajectories of constant curvature // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. T. 151 LNCE. C. 315-321.
- [14] Gultiaev V.I., Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Savrasov I.A. Verification of isotropy postulate under complex kinematic loading of steel 45 along the strain trajectories as semicircles // *Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya*. 2021. № 4 (50). pp. 16-24.
- [15] Zubchaninov V.G. On the constitutive relations of the theory of elastic-plastic processes // *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 1989. V. 25. №. 5. pp. 3–12.

А. П. Кержаев<sup>1</sup>, И. В. Меньшова<sup>1,2</sup>, А. В. Никитин<sup>3</sup>, А. М. Самсонов<sup>3</sup>

## МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЫВАМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

<sup>1</sup> *Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,*

*г. Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,*

*г. Москва, Россия*

<sup>3</sup> *Чебоксарский институт (филиал) Московского политехнического университета,*

*г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** В статье рассматривается применение метода начальных функций в пространстве преобразований Фурье к решению задач для плоскости с разрывом перемещений. Рассмотрены четно- и нечетно-симметричная деформации относительно оси трещины. Окончательные решения всех задач представляются в виде несобственных интегралов. Приведены примеры, в которых рассмотрены разрывы трех типов, отличающиеся гладкостью контура разрыва вблизи его концов. Решения получаются быстро, просто и, в отличие от классического решения, без использования теории функций комплексного переменного.

**Ключевые слова:** метод начальных функций, плоскость, разрыв перемещений, интегральное преобразование Фурье.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.009

УДК: 539.3

**1. Введение.** Метод начальных функций (МНФ) является аналитическим методом теории упругости и строительной механики. Он позволяет получать как точные,

---

© Кержаев А. П., Меньшова И. В., Никитин А. В., Самсонов А. М., 2022

*Кержаев Александр Петрович*

**e-mail:** alex\_kerg@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.

*Меньшова Ирина Владимировна*

**e-mail:** menshovairina@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия; доцент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Исследование А.П. Кержаева и И.В. Меньшовой выполнено в рамках государственного задания ИТПЗ РАН.

Поступила 29.05.2022



так и приближенные решения в виде рядов по тригонометрическим, экспоненциальным и иным системам функций задач теории упругости для канонических областей в различных системах координат.

История метода берет свое начало в 50-х годах прошлого века с работ А.И. Лурье, В.З. Власова и А.С. Малиева. В соответствии с этой методикой решение системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Основы МНФ можно найти в книге [1]. Достоинство МНФ заключается в том, что значительная часть непринципиальных, но громоздких промежуточных выкладок уже выполнена и включена в операторы МНФ. Метод до сих пор используется в проектных институтах и КБ при решении различных инженерных проблем прочностного характера [1–4]. В работе [3] приведен обзор публикаций, посвященных становлению и развитию МНФ.

В этой статье метод начальных функций применяется к решению краевой задачи для плоскости с горизонтальным разрезом, на котором задан разрыв продольных или поперечных перемещений (четно- и нечетно-симметричная деформации). МНФ используется не в классической форме, а в пространстве преобразований Фурье. Это делает его использование более простым и эффективным. Проблема рассматривается как задача о стыке верхней и нижней полуплоскостей, когда вдоль линии их склейки имеется разрыв перемещений. Для этого вводятся две функции, аналитические сверху и снизу от разреза. Окончательные решения всех задач имеют вид простых интегралов Фурье. Операторы МНФ в пространстве преобразований Фурье представляют собой алгебраические выражения, которые удобно использовать в символьных преобразованиях, например, в MathCad.

**2. Постановка краевой задачи.** Пусть в плоскости  $xOy$  на конечном разрезе  $\{\Gamma : y = 0, |x| \leq a\}$  (рис. 1) задан разрыв поперечных или продольных перемещений.

Обозначим  $U(x, y) = Gu(x, y)$ ,  $V(x, y) = Gv(x, y)$ ,  $Y(x, y) = \sigma_y(x, y)$ ,  $X(x, y) = \tau_{xy}(x, y)$ , как это принято в МНФ. Функции  $X_0 = \tau_{xy}(x, 0)$ ,  $Y_0 = Y(x, 0)$ , определенные при  $y = 0$ , будем рассматривать как начальные для полуплоскости. Здесь и далее  $u$  и  $v$  — соответственно перемещения по  $x$  (продольное) и по  $y$  (поперечное),  $G$  — модуль упругости при сдвиге.

Тогда основные зависимости МНФ для полуплоскости в пространстве преобразований Фурье примут вид [3]:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\lambda, y) &= L_{UY}^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + L_{UX}^0(\lambda, y)\tilde{X}_0, \\ \tilde{V}(\lambda, y) &= L_{VY}^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + L_{VX}^0(\lambda, y)\tilde{X}_0, \\ \tilde{Y}(\lambda, y) &= L_{YY}^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + L_{YX}^0(\lambda, y)\tilde{X}_0, \\ \tilde{X}(\lambda, y) &= L_{XY}^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + L_{XX}^0(\lambda, y)\tilde{X}_0, \\ \tilde{\sigma}_x(\lambda, y) &= A_Y^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + A_X^0(\lambda, y)\tilde{X}_0.\end{aligned}\tag{1}$$

---

*Никитин Андрей Витальевич*

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (филиал) Московского политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

*Самсонов Алексей Михайлович*

e-mail: sam\_polytech@mail.ru, старший преподаватель, Чебоксарский институт (филиал) Московского политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

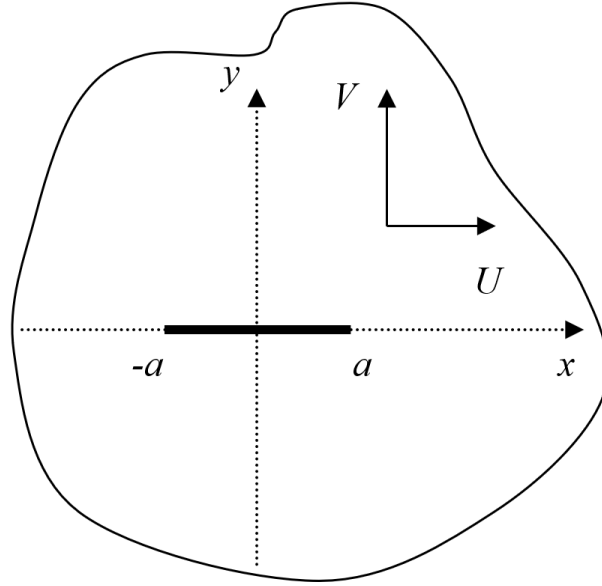


Рис. 1. Схема краевой задачи

Входящие сюда операторы МНФ в пространстве преобразований Фурье равны:

$$\begin{aligned}
 L_{UY}^0(\lambda, y) &= \frac{i}{2\lambda} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} - |\lambda|y \right) e^{-|\lambda|y}, \quad L_{UX}^0(\lambda, y) = - \left( \frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) e^{-|\lambda|y}, \\
 L_{VY}^0(\lambda, y) &= - \left( \frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} + \frac{1}{2}y \right) e^{-|\lambda|y}, \\
 L_{VX}^0(\lambda, y) &= - \frac{i}{2\lambda} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + |\lambda|y \right) e^{-|\lambda|y}, \\
 L_{YY}^0(\lambda, y) &= (1 + |\lambda|y) e^{-|\lambda|y}, \quad L_{YX}^0(\lambda, y) = L_{XY}^0(\lambda, y) = i\lambda y e^{-|\lambda|y}, \\
 L_{XX}^0(\lambda, y) &= A_Y^0(\lambda, y) = (1 - |\lambda|y) e^{-|\lambda|y}, \quad A_X^0(\lambda, y) = i \left( 2\frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) e^{-|\lambda|y},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Будем рассматривать последовательно четно- и нечетно-симметричную деформации плоскости.

### 3. Четно-симметричная деформация плоскости

3.1. *Разрыв поперечных перемещений.* Пусть на разрезе  $\Gamma$  задан разрыв поперечных перемещений

$$V^+(x, 0) - V^-(x, 0) = 2v(x), \tag{3}$$

где  $v(x)$  — четная функция.

Подставляя операторы (2) в формулы (1), на оси симметрии получим

$$\begin{aligned}
 \widetilde{U}_0 &= \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{i}{2\lambda} \widetilde{Y}_0 - \frac{1}{(1+\nu)|\lambda|} \widetilde{X}_0, \\
 \widetilde{V}_0 &= - \frac{1}{(1+\nu)|\lambda|} \widetilde{Y}_0 - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{i}{2\lambda} \widetilde{X}_0, \\
 \widetilde{\sigma}_x(\lambda, 0) &= \widetilde{Y}_0 + 2i \frac{|\lambda|}{\lambda} \widetilde{X}_0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Введем две функции:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -\tau_{xy}(x, 0) + i \left[ (1 + \nu) \frac{dU(x, 0)}{dx} - \frac{1 - \nu}{2} \sigma_y(x, 0) \right], \\ \Psi(x) &= (1 + \nu) \frac{dV(x, 0)}{dx} - \frac{3 + \nu}{2} \tau_{xy}(x, 0) + i \sigma_x(x, 0).\end{aligned}\quad (5)$$

Эти функции использовались в статьях [5–7] для решения различных задач с разрывами в бесконечной полосе. Тогда на разрезе  $\Gamma$  получим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 0, \quad \Psi^+(x) - \Psi^-(x) = 2(1 + \nu) \frac{dv(x)}{dx}.\quad (6)$$

Символами  $\pm$  обозначены значения функций соответственно сверху и снизу от разреза.

Воспользовавшись формулами (4) и подставляя их в преобразования Фурье формул (5), (6), после небольших преобразований получим систему из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}- \left( \frac{|\lambda|}{\lambda} + 1 \right) \widetilde{X}_0 &= 0, \\ \left( \frac{\lambda}{|\lambda|} + 1 \right) \left( i \widetilde{Y}_0 - 2 \widetilde{X}_0 \right) &= 2(1 + \nu) \widetilde{A}(\lambda),\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\widetilde{A}(\lambda) = \lambda \int_{-a}^a v(x) e^{i\lambda x} dx.\quad (8)$$

Разрешим систему (7) относительно  $\widetilde{X}_0$  и  $\widetilde{Y}_0$ :

$$\widetilde{X}_0 = 0, \quad \widetilde{Y}_0 = -2i(1 + \nu) \frac{|\lambda|}{\lambda + |\lambda|} \widetilde{A}(\lambda).\quad (9)$$

Подставляя найденные коэффициенты (9) в формулы (1), получим решение задачи в пространстве преобразований Фурье. Затем применяя к полученным выражениям обратное преобразование Фурье по формуле (см., например, [8])

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda,\quad (10)$$

найдем искомое решение:

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{UY}^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{VY}^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_Y^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{YY}^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{XY}^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Раскрывая подынтегральные выражения в (11), получим

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2\lambda} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} - |\lambda|y \right) \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (12)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|y) \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda y \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Это же решение (12) можно получить в классической постановке как решение для полуплоскости, если считать, что на ее прямолинейной границе заданы нулевое касательное напряжение и поперечное перемещение  $V(x, 0) = v(x)$ . В этом случае

$$\widetilde{X}_0 = 0, \quad \widetilde{Y}_0 = -(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda). \quad (13)$$

Подставляя коэффициенты (13) в формулы (1) и переходя к пространству оригиналов, получим

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2\lambda} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} - |\lambda|y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (14)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|y) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda y [-(1 + \nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tilde{v}(\lambda) = \int_{-a}^a v(x) e^{i\lambda x} dx.$$

В интегралах вида (14) можно избавиться от мнимой единицы, если учесть четность функции  $v(x)$  и воспользоваться формулой Эйлера. Тогда после упрощений соответственно получим

$$U(x, y) = -\frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}\lambda}{2} \left( \frac{1 - \nu}{1 + \nu} - |\lambda|y \right) \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \sin \lambda x d\lambda,$$

$$V(x, y) = -\frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{1}{1 + \nu} - \frac{1}{2}|\lambda|y \right) \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| - \lambda^2 y) \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda, \quad (15)$$

$$\sigma_y(x, y) = -\frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| + \lambda^2 y) \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y \operatorname{sgn}\lambda \lambda^2 \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \sin \lambda x d\lambda.$$

Рассмотрим три типа разрывов поперечных перемещений различной степени гладкости в окрестности концов разреза.

1. Пусть форма разрыва представлена функцией  $v_1(x) = 8(a^2 - x^2)^2$ . Преобразование Фурье этой функции имеет вид

$$\tilde{v}_1(\lambda) = 128(3 \sin a\lambda - 3a\lambda \cos a\lambda - a^2\lambda^2 \sin a\lambda)/\lambda^5. \quad (16)$$

2. Пусть форма разрыва в окрестности концов разреза имеет гладкость, меньшую чем в первом примере:  $v_2(x) = 2(a^2 - x^2)$ . В этом случае имеем

$$\tilde{v}_2(\lambda) = 8(\sin a\lambda - a\lambda \cos a\lambda)/\lambda^3. \quad (17)$$

3. Пусть контур разрыва вблизи его концов имеет гладкость, меньшую гладкости функций  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$ :  $v_3(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ . Пользуясь справочником [9], найдем

$$\tilde{v}_3(\lambda) = \pi a J_1(a|\lambda|)/|\lambda|, \quad (18)$$

где  $J_1(a|\lambda|)$  — функция Бесселя.

На рис. 2–4 показаны распределения нормальных и касательных напряжений вблизи разреза в зависимости от формы разрыва. Сплошные кривые соответствуют  $v_1(x)$ , штриховые кривые —  $v_2(x)$ , точечные кривые —  $v_3(x)$ .

3.2. *Разрыв продольных перемещений.* Будем считать, что на разрезе  $\Gamma$  задан разрыв продольных перемещений

$$U^+(x, 0) - U^-(x, 0) = 2u(x), \quad (19)$$

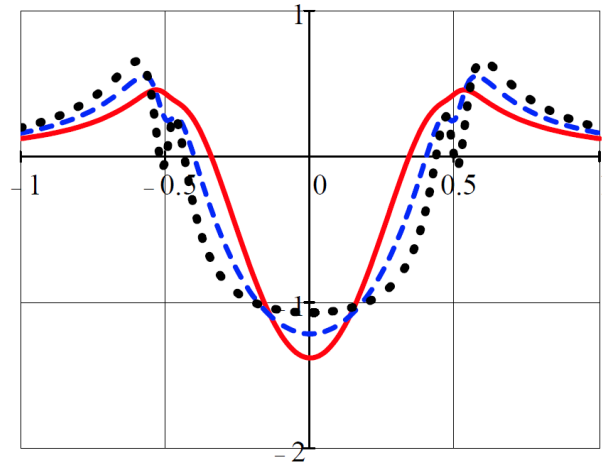


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x(x, y)$  в сечении  $y = 0.05$  для каждого типа разрыва

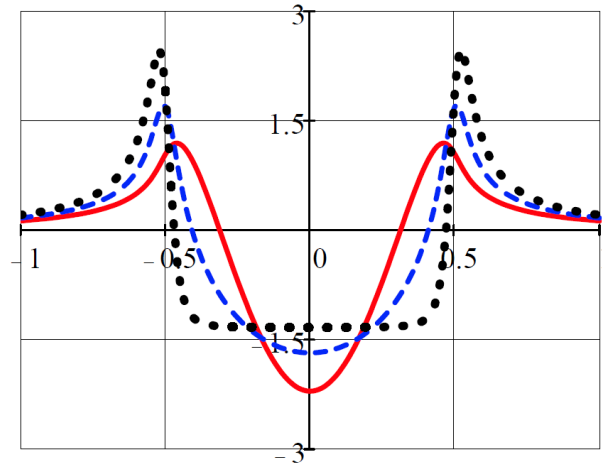


Рис. 3. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y(x, y)$  в сечении  $y = 0.05$  для каждого типа разрыва

причем функция  $u(x)$  нечетна. Здесь для удобства вместо функции  $\Psi(x)$  введем функцию

$$F(x) = 2\Phi(x) - \Psi(x) = - \left[ (1 + \nu) \frac{dV(x, 0)}{dx} + \frac{1 - \nu}{2} \tau_{xy}(x, 0) \right] - i\sigma_y(x, 0). \quad (20)$$

Очевидно, что на разрезе  $\Gamma$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 2i(1 + \nu) \frac{du(x)}{dx}, \quad F^+(x) - F^-(x) = 0. \quad (21)$$

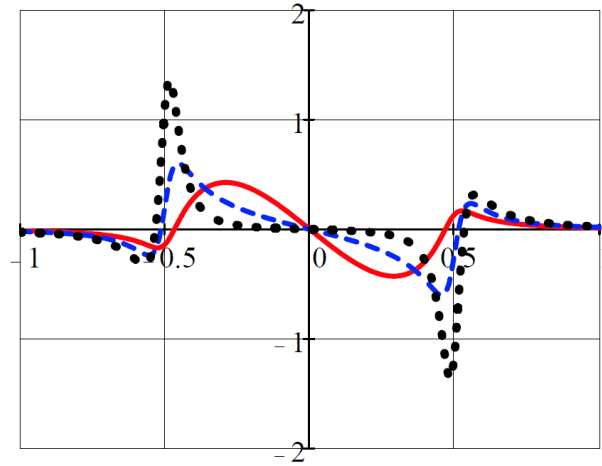


Рис. 4. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}(x, y)$  в сечении  $y = 0.05$  для каждого типа разрыва

Раскрывая выражения (21) для функций, стоящих слева, и пользуясь обозначениями (4), получим равенства, аналогичные равенствам (7):

$$\begin{aligned} -\left(\frac{|\lambda|}{\lambda} + 1\right) \widetilde{X}_0 &= 2i(1 + \nu) \widetilde{A}(\lambda), \\ -\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} + 1\right) i \widetilde{Y}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\widetilde{A}(\lambda) = \lambda \int_{-a}^a u(x) e^{i\lambda x} dx. \quad (23)$$

Решая систему (22) относительно  $\widetilde{X}_0$  и  $\widetilde{Y}_0$ , найдем:

$$\widetilde{X}_0 = -2i(1 + \nu) \frac{|\lambda|}{\lambda + |\lambda|} \widetilde{A}(\lambda), \quad \widetilde{Y}_0 = 0. \quad (24)$$

Подставим (24) в (1) и применим обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{UX}^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{VX}^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_X^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{YX}^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{XX}^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Раскрывая выражения для операторов, получим решение задачи:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} - \left( \frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{2\lambda} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + |\lambda|y \right) \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \left( 2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda y \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) \left( -2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \quad (26)$$

Полученное решение эквивалентно решению для полуплоскости с заданными на ее прямолинейной границе нулевым нормальным напряжением и продольным перемещением  $U(x, 0) = u(x)$ . В этом случае

$$\widetilde{X}_0 = -(1+\nu)|\lambda|\tilde{u}(\lambda), \quad \widetilde{Y}_0 = 0. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (1) и переходя к пространству оригиналов, получим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} - \left( \frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{2\lambda} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + |\lambda|y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \left( 2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda y [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tilde{u}(\lambda) &= \int_{-a}^a u(x) e^{i\lambda x} dx = i \int_{-a}^a u(x) \sin \lambda x dx = i \tilde{u}_s(\lambda). \end{aligned} \quad (28)$$



Учитывая нечетность функции  $u(x)$  и воспользовавшись формулой Эйлера, окончательно получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \nu} - \frac{1}{2} |\lambda| y \right) \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \sin \lambda x d\lambda, \\
 V(x, y) &= -\frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{2} \left( \frac{1 - \nu}{1 + \nu} + |\lambda| y \right) \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda, \\
 \sigma_x(x, y) &= \frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2\lambda - y \operatorname{sgn} \lambda \lambda^2) \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda, \\
 \sigma_y(x, y) &= \frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y \operatorname{sgn} \lambda \lambda^2 \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{1 + \nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| - \lambda^2 y) \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \sin \lambda x d\lambda.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, три типа разрывов продольных перемещений, которые отличаются гладкостью контура разрыва вблизи его концов.

1. Пусть форма разрыва имеет вид  $u_1(x) = 8x(a^2 - x^2)^2$ . Тогда получим

$$\tilde{u}_1(\lambda) = 128i(15 \sin a\lambda + a^3 \lambda^3 \cos a\lambda - 6a^2 \lambda^2 \sin a\lambda - 15a\lambda \cos a\lambda) / \lambda^6. \tag{30}$$

2. Пусть контур разрыва в окрестности концов разреза имеет гладкость, меньшую гладкости функции  $u_1(x)$ :  $u_2(x) = 2x(a^2 - x^2)$ . В этом случае будем иметь

$$\tilde{u}_2(\lambda) = -8i(a^2 \lambda^2 \sin a\lambda - 3 \sin a\lambda + 3a\lambda \cos a\lambda) / \lambda^4. \tag{31}$$

3. Пусть форма разрыва вблизи его концов имеет гладкость, меньшую гладкости двух предыдущих функций:  $u_3(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$ . Преобразование Фурье данной функции определяется по формуле [9]

$$\tilde{u}_3(\lambda) = \pi a^2 i \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{|\lambda|} \left( -J_0(a|\lambda|) + 2 \frac{J_1(a|\lambda|)}{a|\lambda|} \right). \tag{32}$$

На рис. 5–7 показаны графики, иллюстрирующие решения вблизи разреза в зависимости от формы разрыва. Сплошные кривые соответствуют  $u_1(x)$ , штриховые кривые —  $u_2(x)$ , точечные кривые —  $u_3(x)$ .

#### 4. Нечетно-симметричная деформация плоскости

4.1. *Разрыв поперечных перемещений.* Будем считать, что на разрезе  $\Gamma$  задан разрыв поперечных перемещений

$$V^+(x, 0) - V^-(x, 0) = 2v(x), \tag{33}$$

где  $v(x)$  — нечетная функция.

Повторяя предыдущие выкладки, получим выражения для перемещений и напряжений, которые совпадают с формулами (12).

Это решение совпадает с решением для полуплоскости, на прямолинейной границе которой заданы нулевое касательное напряжение и поперечное перемещение  $V(x, 0) = v(x)$ .

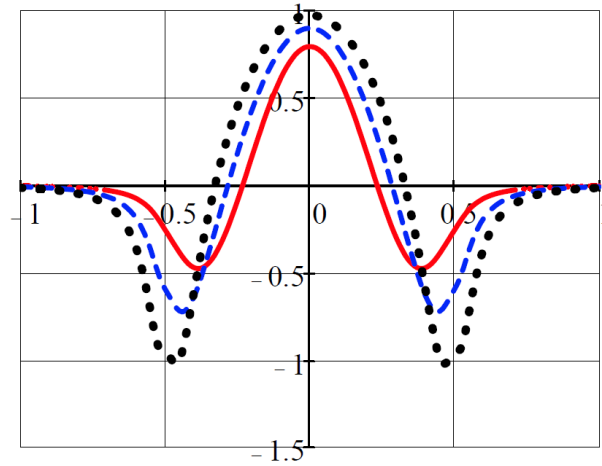


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x(x, y)$  в сечении  $y = 0.05$  для каждого типа разрыва

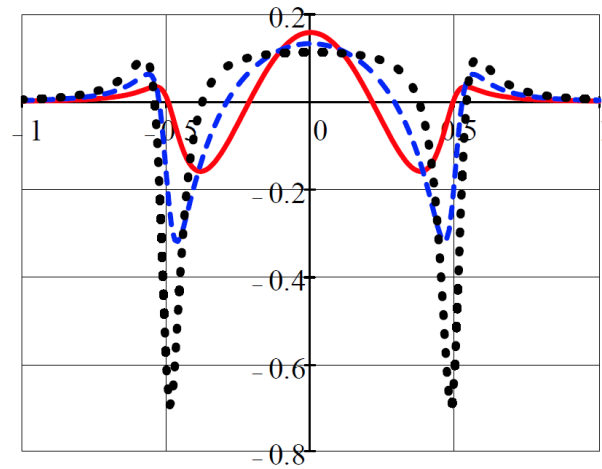


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y(x, y)$  в сечении  $y = 0.05$  для каждого типа разрыва

Формы разрыва поперечных перемещений возьмем те же, что и в пункте 3.2.

1. Пусть  $v_1(x) = 8x(a^2 - x^2)^2$ . В соответствии с (30) получим

$$\tilde{v}_1(\lambda) = 128i(15 \sin a\lambda + a^3 \lambda^3 \cos a\lambda - 6a^2 \lambda^2 \sin a\lambda - 15a\lambda \cos a\lambda) / \lambda^6. \quad (34)$$

2. Пусть  $v_2(x) = 2x(a^2 - x^2)$ . Тогда

$$\tilde{v}_2(\lambda) = -8i(a^2 \lambda^2 \sin a\lambda - 3 \sin a\lambda + 3a\lambda \cos a\lambda) / \lambda^4. \quad (35)$$

3. Пусть  $v_3(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$ . В этом случае

$$\tilde{v}_3(\lambda) = \pi a^2 i \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{|\lambda|} \left( -J_0(a|\lambda|) + 2 \frac{J_1(a|\lambda|)}{a|\lambda|} \right). \quad (36)$$

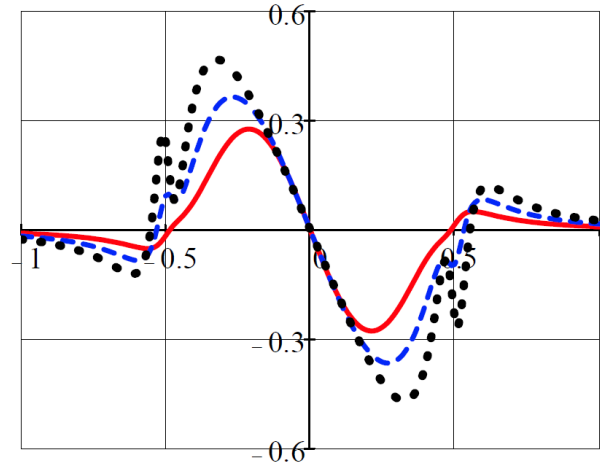


Рис. 7. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}(x, y)$  в сечении  $y = 0.05$  для каждого типа разрыва

4.2. *Разрыв продольных перемещений.* Пусть на разрезе  $\Gamma$  задан разрыв продольных перемещений

$$U^+(x, 0) - U^-(x, 0) = 2u(x), \quad (37)$$

причем функция  $u(x)$  четна.

Окончательные формулы для перемещений и напряжений имеют вид (26), совпадающий с решением для полуплоскости, когда на ее прямолинейной границе заданы нулевое нормальное напряжение и продольное перемещение  $U(x, 0) = u(x)$ .

Снова рассмотрим три типа разрывов продольных перемещений, отличающиеся гладкостью контура разрыва вблизи концов разреза.

1.  $u_1(x) = 8(a^2 - x^2)^2$ . По формуле (16) имеем

$$\widetilde{u}_1(\lambda) = 128(3 \sin a\lambda - 3a\lambda \cos a\lambda - a^2\lambda^2 \sin a\lambda)/\lambda^5. \quad (38)$$

2.  $u_2(x) = 2(a^2 - x^2)$ . Тогда получим

$$\widetilde{u}_2(\lambda) = 8(\sin a\lambda - a\lambda \cos a\lambda)/\lambda^3. \quad (39)$$

3.  $u_3(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ . В этом случае будем иметь

$$\widetilde{u}_3(\lambda) = \pi a J_1(a|\lambda|)/|\lambda|. \quad (40)$$

## 5. Заключение

1. В работе с помощью метода начальных функций построено решение краевой задачи теории упругости для плоскости с разрезом, на котором заданы разрывы продольных или поперечных перемещений. Рассмотрены три вида разрывов различной гладкости в окрестности концов разреза, и численно дано сравнение решений. В первом случае, когда гладкость контура разрыва максимальна, что соответствует точке возврата, напряжения конечны при приближении к вершине разреза, во втором случае, когда кончик контура разрыва острый, напряжения растут как  $\ln r$ , а в третьем случае, когда вершина контура разрыва имеет характер эллиптической кривой, напряжения возрастают как  $r^{-0.5}$ . Здесь  $r \rightarrow 0$  — координата, отсчитываемая от вершины разреза.

2. Добавляя к полученному решению решение для полуплоскости, снимающее нормальные и касательные напряжения на прямолинейной границе  $y = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ), можно получить решение для полуплоскости со свободной границей и с разрывом, ось которого параллельна границе полуплоскости. Аналогично можно получить решение для полуплоскости со свободной границей и разрывом, ось которого перпендикулярна границе полуплоскости.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. Москва: Стройиздат, 1975. 224 с.
- [2] Агарев В. А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 203 с.
- [3] Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity / A. V. Matrosov, M. D. Kovalenko, I. V. Menshova et al. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71, no. 1. Art. 24. DOI: 10.1007/s00033-019-1247-3.
- [4] Меньшова И. В., Кержаев А. П., Никитин А. В. Метод начальных функций и преобразование Фурье в задаче для разномодульной полосы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 41–49.
- [5] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 121–144.
- [6] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69, no. 5. Art. 121. DOI: 10.1007/s00033-018-1013-y.
- [7] Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, A. P. Kerzhaev et al. // Acta Mechanica. 2018. Vol. 229, no. 11. P. 4339–4356. DOI: 10.1007/s00707-018-2244-x.
- [8] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 544 с.
- [9] Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. Москва: Наука, 1977. 288 с.

*A. P. Kerzhaev<sup>1</sup>, I. V. Menshova<sup>1,2</sup>, A. V. Nikitin<sup>3</sup>, A. M. Samsonov<sup>3</sup>*

## METHOD OF INITIAL FUNCTIONS AND INTEGRAL FOURIER TRANSFORM IN THE PROBLEM FOR A PLANE WITH DISPLACEMENT DISCONTINUITIES

<sup>1</sup>*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

<sup>3</sup>*Cheboksary Institute (Branch) of the Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The article considers the application of the method of initial functions in the space of Fourier transforms to solving problems for a plane with a displacement discontinuity. Even-symmetric and odd-symmetric deformations relative to the crack axis are considered. The final solutions to all the problems are represented in the form of improper integrals. Examples are given in which three types of discontinuities are considered, differing in the smoothness of the discontinuity contour near its ends. The solutions are obtained quickly, simply and, unlike the classical solution, without using the theory of functions of a complex variable.

**Keywords:** method of initial functions, plane, displacement discontinuity, integral Fourier transform.

## REFERENCES

- [1] Vlasov V. V. Method of initial functions in problems of the theory of elasticity and structural mechanics. Moscow: Stroiizdat, 1975. 224 p. (in Russian).
- [2] Agarev V. A. Method of initial functions for two-dimensional boundary value problems of the theory of elasticity. Kiev: Izd. Akad. Nauk USSR, 1963. 203 p. (in Russian).
- [3] Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity / A. V. Matrosov, M. D. Kovalenko, I. V. Menshova et al. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71, no. 1. Art. 24. DOI: 10.1007/s00033-019-1247-3.
- [4] Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Nikitin A. V. Method of initial functions and Fourier transform in the problem for a multi-modulus strip // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2016. no. 3 (29). P. 41–49. (in Russian).
- [5] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadde–Papkovich functions: examples of solutions in a half-strip // Izv. RAN. MTT. 2013. no. 5. P. 121–144. (in Russian).
- [6] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69, no. 5. Art. 121. DOI: 10.1007/s00033-018-1013-y.
- [7] Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, A. P. Kerzhaev et al. // Acta Mechanica. 2018. Vol. 229, no. 11. P. 4339–4356. DOI: 10.1007/s00707-018-2244-x.
- [8] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1976. 544 p. (in Russian).
- [9] Brychkov Y. A., Prudnikov A. P. Integral transforms of generalized functions. Moscow: Nauka, 1977. 288 p. (in Russian).

---

*Kerzhaev Alexander Petrovich*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.  
*Menshova Irina Vladimirovna*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.  
*Nikitin Andrey Vitalievich*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Cheboksary Institute (Branch) of the Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.  
*Samsonov Alexey Mikhailovich*, Senior Lecturer, Cheboksary Institute (Branch) of the Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.

А. Н. Спорыхин

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

**Аннотация.** На основе модели упрочняющегося упругопластического тела исследовано напряженно-деформированное состояние кусочно-неоднородного сферического тела под действием нагрузок, постоянной внешней, и зависящей от времени внутренней. Получены точные аналитические решения для полей напряжений и перемещений в упругой, вязкой и пластической областях сферического тела. .

**Ключевые слова:** сферическое тело, упругость, вязкость, пластичность, упрочнение, динамическая нагрузка.

DOI: 10.37972/chgru.2022.51.1.010

УДК: 539.3

Известно [1-3], что сферические оболочки являются элементами различных конструкций, используемых в технологических сооружениях, которые могут быть подвержены воздействию динамических нагрузок. Потому расчет их поведения при воздействии динамических нагрузок имеет большое значение.

В настоящей работе в квазистатической постановке рассматривается деформирование сферической вязкоупругой оболочки с упругопластическим наполнителем [4] толщины  $h$ . по контуру полости радиуса  $a$ , равномерно распределена нагрузка  $P$ , а по внешнему контуру радиуса  $b$ , нагрузка  $p$ , выражения для которых имеют вид:

$$P = P_0 e^{\hat{a}}$$

где  $\hat{a}$  – известная константа.

Напряженно деформированное состояние наполнителя в упругой области в осесимметричном случае ( $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$ ) в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  определяется уравнением равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

---

© Спорыхин А. Н., 2022

Спорыхин Анатолий Николаевич

e-mail: vasya@mathd.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 17.04.2022

закон Гука, условием несжимаемости и соотношениями Коши. Решая эту систему уравнений находим:

$$w = \frac{A_1}{r^2}, \sigma_r = -4\mu_1 \frac{A_1}{r^3} + A_2, \sigma_\theta = 2\mu_1 \frac{A_1}{r^3} + A_2 \quad (2)$$

Из условия отсутствия объемного расширения в пластической области включения и соотношений Коши получаем:

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{dw}{dr} + 2\frac{w}{r} = 0$$

откуда

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_r}{2}, w = \frac{B_1}{r^2} \quad (3)$$

Из ассоциированного закона пластического течения [2,3]

$$e_{ij}^p = (S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p) \quad (4)$$

следует

$$S_\theta = S_\varphi, S_\theta = -\frac{S_r}{2}$$

Функция нагружения [2,3]:

$$(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p)(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p) = k^2 \quad (5)$$

принимает вид:

$$(S_r - c\varepsilon_r^p)^2 = k^{*2}, k^* = \sqrt{\frac{2}{3}}k \quad (6)$$

Из соотношений

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r - \varepsilon_r^p; \varepsilon_r = \frac{dw}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{w}{r}, S_r = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p)$$

получаем

$$S_r = 2\mu \left( \frac{2B_1}{r^3} + \varepsilon_r^p \right) \quad (7)$$

Из соотношений (6) и (7) имеем

$$\varepsilon_r^p = \frac{1}{2\mu + c} \left( k^* + \frac{4\mu B_1}{r^3} \right) \quad (8)$$

Вычисляя

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = -3\mu \left( \frac{2B_1}{r^3} + \varepsilon_r^p \right)$$

из уравнения (1) находим поле напряжений в пластической области включения

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -2\mu \left[ 3k^* \frac{1}{2\mu + c} \ln(r) + 2B_1 \left( 1 - \frac{2\mu}{2\mu + c} \right) \frac{1}{r^3} \right] + B_2 \\ \sigma_\theta &= -3\mu k^* \frac{1}{2\mu + c} (1 + 2 \ln(r)) + 2\mu B_1 \left( 1 - \frac{2\mu}{2\mu + c} \right) \frac{1}{r^3} + B_2\end{aligned}\quad (9)$$

Напряженно-деформированные состояния несжимаемой вязкоупругой оболочки модели тела Кельвина-Фойхта [5] в осесимметричном случае, определяется уравнением равновесия и соотношениями Коши. Решая эту систему уравнений находим:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{4(\mu_2 C_1 + \eta_2 \dot{C})}{r^3} + C_2, \quad \sigma_\theta = \frac{2(\mu_2 C_1 + \eta_2 \dot{C})}{r^3} + C_2, \\ w &= \frac{C_1}{r^2}, \quad \varepsilon_r = -\frac{2C_1}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{C_1}{r^3}, \quad \dot{C} = \frac{dC_1}{dt}\end{aligned}\quad (10)$$

для определения неизвестных интегрирования  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  и радиуса  $\gamma$  поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования заполнителя имеем:

– граничные условия

$$\begin{aligned}\sigma_r^p &= -P_0 e^{\hat{a}} \\ \sigma_r^b &= -p_0, \quad \text{при } r = b\end{aligned}\quad (11)$$

– условия сопряжения

$$w^e = w^p, \quad \sigma_r^e = \sigma_r^p, \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p \quad \text{при } r = \gamma \quad (12)$$

– условия контакта (жесткое сцепление) оболочка – включение

$$w^b = w^e, \quad \sigma_r^b = \sigma_r^e \quad \text{при } r = a + h \quad (13)$$

– начальные условия

$$\gamma = a, \quad \varepsilon_r^b = 0 \quad \text{при } t = t_* \quad (14)$$

Откуда находим:



$$\begin{aligned}
 C_1 = A_1 = B_1 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{P_0 e^{\hat{a}t}}{4\mu_2(\alpha_1 + \hat{a})} + C_1^* e^{-\alpha_1 t} \\
 \alpha_1 &= \frac{1}{\eta_2} \left\{ \mu_2 + \left[ \mu_1 \left( \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) + \mu(1-2\mu E) \left( \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3} \right) \right] \right\} \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{4\eta_2} \{ p_0 + 6\mu k^* E (\ln(a) - \ln(\gamma)) \}, \quad E = \frac{1}{2\mu + c} \\
 C_1^* &= \left( -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{P_0 e^{\hat{a}t_*}}{4\mu_2(\alpha_1 + \hat{a})} \right) e^{\alpha_1 t_*}, \quad C_2 = -p_0 + \frac{C_0}{b^3} \\
 A_2 &= -\frac{C_0}{(a+h)^3} - \frac{4\mu_1}{(a+h)^3} A_1 + C_2 \\
 B_2 &= 2\mu \left[ 3k^* E \ln(a) + 2C_1 (1-2\mu E) \frac{1}{a^3} \right] - P_0 e^{\hat{a}t} \\
 C_0 &= 4 \left( \mu_2 C_1 + \eta_2 \dot{C} \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

и уравнение для определения радиуса упругопластической границы  $\gamma$ .

$$\begin{aligned}
 \alpha_3^* \dot{C} + \left\{ \frac{m\mu_2}{\nu_2} \alpha_3^* - \frac{4\mu_1}{(a+h)^3} - 4\mu(1-2\mu E) \frac{1}{a^3} - \right. \\
 \left. - \frac{2}{\gamma^3} [\mu_1 - \mu(1-2\mu E)] \right\} C_1 + 3\mu k^* E (1 + 2 \ln(\gamma)) - 6\mu k^* E \ln(a) - p_0 - P_0 e^{\hat{a}t} = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\alpha_3^* = 4\eta_2 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right)$$

Полагая в уравнении (16)  $\gamma = a$  при  $t = t_*$ , приходим к уравнению

$$\alpha_2^* \alpha_3^* + \left[ 1 + \frac{\alpha_3^* (\hat{a} - \alpha_1^*)}{4\mu_2 (\hat{a} + \alpha_1^*)} \right] P_0 e^{\hat{a}t_*} - p_0 + \frac{3\sqrt{\frac{2}{3}} \mu k^*}{2\mu + c} = 0$$

определяющему нагрузки, при заданных геометрических и физикомеханических параметрах, при которых возникает на внутренней поверхности сферического тела пластическое состояние.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики и горных пород. М: Физматлит, 2004. 232 с.
- [2] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. №4 (42). С. 21-24
- [3] Спорыхин А. Н. Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. 372 с.
- [4] Ивлев Д. Д., Быковцев Т.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
- [5] Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.

A. N. Sporihin

## DYNAMIC DEFORMATION OF A PIECEWISE INHOMOGENEOUS SPHERICAL BODY

*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

**Abstract.** Based on the model of a hardening elastic-plastic body, the stress-strain state of a piecewise inhomogeneous spherical body under the action of constant external and time-dependent internal loads is investigated. Exact analytical solutions for stress and displacement fields in elastic, viscous and plastic regions of a spherical body are obtained.

**Keywords:** spherical body, elasticity, viscosity, plasticity, hardening, dynamic load.

### REFERENCES

- [1] Sporykhin A. N. , Shashkin A. I. Stability of equilibrium of spatial bodies and problems of mechanics and rocks. M: Fizmatlit, 2004, 232 p.
- [2] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a half-space with a spherical cavity. Bulletin of the I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. 2019. No.4 (42). pp. 21-24
- [3] Sporykhin A. N. Nonconservative problems of the three-dimensional theory of inelastic stability in geomechanics. Voronezh: VSU Publishing House, 2015. 372 p.
- [4] Ivlev D. D., Bykovtsev T. I. Theory of hardening plastic body. M.: Nauka, 1971. 231 p.
- [5] Rainer M. Rheology. M.: Nauka, 1965. 223 p.

Л. В. Левина, В. Б. Пеньков, Е. А. Новиков

## СТРОГИЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ

*Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия*

**Аннотация.** Рассматриваются краевые задачи для линейной термоупругой изотропно-однородной среды. Состояние среды подчинено уравнениям Дюамеля-Неймана. В случае, когда характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС) на поверхности тела не связаны в граничных условиях (ГУ) с температурными факторами, задача декомпозируется на последовательность неоднородных задач теплопроводности и теории упругости с известной коррекцией объемных сил в уравнениях равновесия. Особое внимание обращено на способ построения частного решения задачи теплопроводности. Метод функций Грина представляет частные решения таких задач в сингулярной форме, что при произвольной геометрической конфигурации тела не позволяет выписывать строгое аналитическое решение. Предложен подход, позволяющий при регулярном описании тепловых источников многочленом конечного порядка получать частное решение строго. След такого решения на границе позволяет скорректировать ГУ задачи теплопроводности и построить численно-аналитическое решение средствами метода граничных состояний (МГС). Аналогичный подход реализован для строгого частного решения задачи линейной упругости. Построенное температурное поле вносит регулярную добавку в объемные силы второго шага – задачу теории упругости. Ее решение также эффективно строится применением МГС. Совокупность двух этих шагов позволяет выписывать строго частное решение для задач линейной термоэластостатики. .

**Ключевые слова:** термоупругость, декомпозиция задачи термоупругости, строгое решение, частное решение уравнения Пуассона, частное решение неоднородной краевой задачи, метод граничных состояний, МГС, опорный базис.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.011

УДК: 539.3

---

© Левина Л. В., Пеньков В. Б., Новиков Е. А., 2022

*Левина Любовь Владимировна*

e-mail: satalkina\_lyubov@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,

*Пеньков Виктор Борисович*

e-mail: vbrenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003.

Поступила 10.05.2022

### Введение

Реальные процессы деформирования упругих тел сопровождаются изменением поля температуры из-за рассеяния механической энергии и наоборот: изменение температуры порождает удлинением упругих волокон, вызывая дополнительные составляющие в тензорах деформаций и напряжений [1, 2]. В общем случае параметры упругости являются функциями температуры. Поэтому характеристики упругого состояния (перемещения  $\mathbf{u}$ , деформации  $\hat{\varepsilon}$ , напряжения  $\hat{\sigma}$ ) и температурное поле  $T$  связаны между собой в определяющих соотношениях среды и составляют в целом нелинейную задачу определения термоупругого внутреннего состояния  $\xi = \xi^T \cup \xi^E$ ,  $\xi^T = \{T, \nabla T\}$ ,  $\xi^E = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$  тела  $V$  при различных вариантах граничных условиях на его поверхности  $\partial V$ .

При решении практических задач уровень температуры  $T$  удобно отсчитывать не от абсолютного нуля, а от некоторого значения  $T_0$ , полагая, что диапазон изменения температуры в окрестности  $T_0$  невелик. В этом случае удобно пренебречь слабым изменением параметров определяющих соотношений термоупругой среды, считая их постоянными. При таком подходе возможна декомпозиция общей постановки на задачу теплопроводности о восстановлении состояния  $\xi^T$  и затем состояния  $\xi^E$  в соответствии с граничными условиями. При этом предполагается также, что ГУ в каждой из этих задач между собой “не завязаны”.

Основные современные вычислительные методы (метод конечных элементов – МКЭ, метод граничных элементов – МГЭ) реализованы во многих формах в вычислительных системах, опираются на традиционный объект распространенных вычислительных средств – “число”. Они эффективно используются и в настоящее время, но требуют пересчета разрешающей системы уравнений и его решения при изменении любого параметра исследуемого объекта (ресурсозатратность). Даже в линейных случаях результаты решений не гарантируют истинность, поэтому на уровне тестовых задач приходится выполнять сопоставление с решениями, полученными иными средствами.

Метод граничных состояний [3] по определению дает решение, тождественно удовлетворяющее определяющим соотношениям среды, а о погрешности решения можно судить по величине невязки ГУ с соответствующими характеристиками построенного граничного состояния. Подход Треффца [4] при формировании базиса аппроксимирующих функций в разрешающем уравнении с дальнейшей минимизацией некоторого функционала по границе тела может дать похожий эффект, но требует затем восстановления напряженно-деформированного состояния (НДС) через граничное состояние. Это предполагает дополнительные действия, связанные с вычислением поверхностного интеграла при определении перемещения в каждой точке внутри тела и т. д. (см. формулу Соммильяна), поскольку изоморфизм состояний внутри тела и базисных элементов на границе не обеспечивается. В МГС изоморфизм установлен изначально и НДС тела определяется тривиально. Также весьма существенным является факт, состоящий в том, что для постановки краевой задачи не требуется строить разрешающее уравнение относительно какой-либо разрешающей функции (вектора функций).

---

*Новиков Евгений Александрович*

e-mail: 89513027802@mail.ru, аспирант, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

ГУ формируются непосредственно в терминах номинальных характеристик граничного состояния: перемещения, поверхностные усилия, их комбинации. В нелинейных случаях основным средством анализа напряженно-деформированного состояния трехмерных тел является метод конечных элементов. Для выписывания приближенных аналитических решений используются методы аппроксимации, коллокаций [5]. Некоторые результаты в этой области достигнуты для состояний и тел, описываемых меньшим количеством переменных (симметрия, плоские задачи, оболочки [6]. Делаются попытки модификации моделей нелинейной теории [7].

В МГС понятие внутреннего состояния среды является определяющим, ориентирующемся на современные вычислительные средства, оперирующие компьютерными алгебрами и позволяющие выписывать решения в численно-аналитической и даже аналитической форме, содержащей все параметры задачи [8]. Поэтому целью работы является построение метода, реализующего решение задач теплопроводности и термоупругости при заданном регулярном распределении теплоисточников  $Q(x)$  и объемных сил  $\mathbf{X}(x)$ ,  $x = \{x_i\}_3 \in R^3$  по области тела  $V$  в строгой конечной форме, тождественно удовлетворяющей уравнению теплопроводности. "Регулярность" означает описание соответствующей функции многочленом конечного порядка.

Далее, при решении задачи упругого равновесия полученное распределение температуры  $T(x)$  также регулярное, корректирует неоднородную составляющую в определяющих уравнениях линейной изотропной теории упругости однородного тела. Эффективные алгоритмы построения частного решения этой задачи существуют [9,10].

Отметим также, что для учета слабого изменения параметров термоупругой среды от температуры эффективна модификация МГС до уровня МГСВ [11,3].

### 1. Линейная изотропная термоупругость в классической постановке.

Линейное упругое состояние среды предполагает наличие малых деформаций (тензор  $\hat{\varepsilon}$ ), связанных с вектором перемещения  $\mathbf{u}$  соотношениями Коши:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T], \quad (1)$$

где "набла"  $\nabla$  символизирует взятие градиента.

В предположении об изотропии материала, относительно малом изменении температуры и, как следствие, о постоянстве параметров упругости Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$ , теплопроводности  $\kappa$  и температурного расширения  $\alpha$  тензор напряжений  $\hat{\sigma}$  выражается через тензор деформаций  $\hat{\varepsilon}$  и температуру  $T$  в соответствии с законом Дюамеля – Неймана [12]

$$\hat{\sigma} = \lambda \theta \hat{\mathbf{E}} + 2\mu \hat{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T \hat{\mathbf{E}}, \quad (2)$$

где  $\hat{\mathbf{E}}$  – единичный тензор,  $\theta = I_1(\hat{\varepsilon})$  - первый инвариант тензора деформаций.

Распределение температуры отвечает уравнению теплопроводности

$$\Delta T = -\frac{1}{\kappa} Q(x), \quad x \in V \subset R^3. \quad (3)$$

Распределение тепловых источников  $Q(x)$  по области  $V$  предполагаем имеющим регулярный характер, т.е. оно описывается полиномом от декартовых координат  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$  и продолжимо на границу  $\partial V$  тела.

Упругое равновесие деформируемой среды подчинено уравнению равновесия

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} + \mathbf{X} = 0, \quad (4)$$

где объемная сила  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(x)$  также имеет регулярный характер.

Совокупность определяющих соотношений (1)–(4) составляет линейный оператор над элементами пространства  $\Xi$  внутренних состояний термоупругой равновесной среды. Под внутренним состоянием удобно понимать избыточный набор характеристик

$\xi = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}, T, \nabla T\} \in \Xi$  согласованных в определяющих соотношениях. След внутреннего состояния  $\xi$  на границе  $\partial V$  тела  $V$  понимаем как граничное состояние  $\gamma = \{\mathbf{u}, \mathbf{p}, T, \frac{dT}{dn}\} \in \Gamma$ , где  $\mathbf{p}$  – есть поверхностное усилие, отвечающее  $\hat{\sigma}$ .

Изоморфизм состояний  $\xi \leftrightarrow \gamma$  порождает изоморфизм соответствующих пространств состояний  $\Xi \leftrightarrow \Gamma$ . Эти пространства полные, всюду плотные. Введение скалярных произведений

$$(\xi^1, \xi^2)_{\Xi} = \int_V (\hat{\sigma}^1 \cdot \hat{\varepsilon}^2 + \rho^2 \nabla T^1 \cdot \nabla T^2) dV, \quad (5)$$

$$(\gamma^1, \gamma^2)_{\Gamma} = \int_V (\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{u}^2 + \rho^2 T^1 \frac{dT^2}{dn}) dS, \quad (6)$$

где  $\rho^2$  – любое положительное число, характеризует оба пространства как гильбертовы. Коммутативность обеих составляющих скалярного произведения и их равенство

$$(\xi^1, \xi^2)_{\Xi} = (\gamma^1, \gamma^2)_{\Gamma} \quad (7)$$

обеспечиваются принципом возможных перемещений и свойствами гармонических функций. Аппарат теории гильбертовых пространств применяется для определения однородной составляющей решения операторного уравнения после построения частного решения неоднородного уравнения при произвольных граничных условиях и соответствующей компенсации граничных условий.

В общем случае постановки линейных краевых задач термоупругости составляющие граничного состояния  $\gamma$  могут быть “завязаны” в ГУ между собой. Тогда декомпозиция краевой задачи на последовательность задач о теплопроводности (3) и затем о напряженно-деформированном состоянии (1), (2), (4) становится невозможной. Решение  $\xi$  в целом складывается из двух составляющих

$$\xi = \xi^{\circ} + \xi^* \quad , \quad (8)$$

где  $\xi^*$  есть частное решение неоднородной краевой задачи, компенсирующее заданные воздействия  $Q(x)$ . След  $\gamma^*$  состояния  $\xi^*$  на границе учитывается далее в качестве поправки в ГУ при построении решения однородной краевой задачи относительно  $\xi^{\circ}$ .

Эффективным аппаратом решения второй задачи является метод граничных состояний, при использовании которого формируется счетный ортонормированный базис пространства  $\Xi$  (следовательно и  $\Gamma$ )

$$\{\xi^{(i)}\} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(k)}, \dots) \subset \Xi, \quad (\xi^{(i)}, \xi^{(j)})_{\Xi} = (\gamma^{(i)}, \gamma^{(j)})_{\Gamma} = \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Решение ищется в виде ряда Фурье

$$\xi^{\circ} = \sum_{j \in N} c_j \xi^{(j)}, \quad c_j = (\gamma^{\circ}, \gamma^{(j)})_{\Gamma}. \quad (9)$$

В классических вариантах задач, когда ГУ являются элементами состояния  $\gamma^0$ , коэффициенты Фурье вычисляются рутинно через интегралы в (6). В случае смешанных задач существуют способы построения бесконечной системы уравнений (БСУ)

относительно коэффициентов Фурье, в которой содержимое матрицы коэффициентов определяется только элементами базисов  $\{\xi^{(i)}\}$ ,  $\{\gamma^{(i)}\}$  и типом ГУ, а правые части еще несут информацию о ГУ.

Представим состояние  $\xi$  в виде объединения внутреннего температурного состояния  $\xi^T = \{T, \nabla T\}$  и напряженно-деформированного состояния  $\xi^E = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$ :  $\xi = \xi^E \cup \xi^T$ .

Соответственно разложим и изоморфные внутренним граничные состояния

$$\gamma = \gamma^E \cup \gamma^T, \quad \gamma^E = \{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}, \quad \gamma^T = \{T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\}.$$

Если составляющие  $\gamma^E$  и  $\gamma^T$  в ГУ не “завязаны”, то общая краевая задача декомпозируется на последовательность задач 1° и 2°.

1°. **Задача теплопроводности** для уравнения Пуассона (3) при заданных температурных ГУ (вообще произвольного вида) ее решение  $\xi^T = \xi^{T^0} + \xi^{T^*}$  складывается из частного решения  $\xi^{T^*}$  уравнения Пуассона (безотносительно к характеру ГУ) и решения уравнения Лапласа с ГУ, скорректированных относительно изначально заданных на величину поправки от  $\xi^{T^*}$ .

Построение  $\xi^{T^0}$  средствами МГС кратко указано выше. Отличие состоит в том, что под скалярными произведениями здесь надо понимать свертки

$$\left(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}\right)_{\Xi} \equiv \int_V \nabla T^{(i)} \cdot \nabla T^{(j)} dV = \int_{\partial V} T^{(i)} \frac{dT^{(j)}}{d\mathbf{n}} dS \equiv \left(\gamma^{(i)}, \gamma^{(j)}\right)_{\Gamma}. \quad (10)$$

Сложности связаны с выписыванием частного решения  $\xi^{T^*}$  в аналитической форме. Известный результат [13] выражает температуру в произвольной точке области  $V$  в сингулярной форме через функции Грина. В общем случае это позволяет вычислить значение в сетке точек и использовать его для вычислений посредством компьютерных алгебр весьма неудобно. Ниже будет показан подход, позволяющий выписывать строгое аналитическое решение в конечной форме для регулярного типа распределения теплоисточников  $Q(x)$  по области  $V$  произвольной формы.

2°. **Задача термоупругого состояния** при заданном распределении температуры  $T(x)$  по области  $V$  тела. Уравнение Дюамеля-Неймана преобразуется в форму уравнения Ламе

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \lambda \theta \hat{\mathbf{E}} + 2\mu \hat{\varepsilon}, \\ \hat{\mathbf{s}} &= \hat{\sigma} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T(x) \hat{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответствующим образом корректируется уравнение равновесия (4)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{F} &= 0, \\ \mathbf{F}(x) &= \mathbf{X}(x) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \nabla T(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Набор соотношений (1), (1.10), (1.11) совпадает по форме с традиционными определяющими соотношениями линейной изотропной теории упругости. Из него вытекают уравнения Ламе, общее решение которых позволяет строить решение краевых задач средствами МГС.

Таким образом, важным этапом в решении задачи термоупругости является построение строгого решения уравнения Пуассона безотносительно к граничным условиям.

**2. Строгая форма частного решения уравнения теплопроводности при полиномиальных тепловых источниках.** Полином произвольного порядка  $K$  есть линейная комбинация мономов порядка  $k \in \{0, 1, \dots, K\}$ . Решение уравнения (3)

безотносительно к условиям на границе равно сумме решений для однородных многочленов для каждого  $k$ :

$$\xi^{T^*} = \sum_{k=0}^K \chi_k \xi^{T^*k}. \quad (13)$$

В силу однородности оператора Лапласа решение, отвечающее порядку  $k$  правой части уравнения является однородным многочленом порядка  $k+2$ . Перебирая конечный набор многочленов этого порядка, выписываем все им соответствующие правые части уравнения Пуассона. Линейно-зависимые однородные многочлены следует отбросить, формируя базис. Этому базису соответствует “опорный базис” решения, который эффективно строить, используя сортировочный алгоритм [10].

Соотношение между опорным базисом и базисом мономов порядка  $k$  можно представить в матричной форме через невырожденную матрицу коэффициентов  $[c_{ij}]$ . Ее обращение ставит в соответствие каждому моному правой части линейную комбинацию мономов порядка  $k+2$ , отвечающих за соответствующее решение уравнения Пуассона. Линейная комбинация с коэффициентами, описывающими однородный многочлен через мономы порядка  $k$  формирует решение, отвечающее однородному многочлену  $P_k(x_1, x_2, x_3,)$  этого порядка в правой части.

Частное решение, отвечающее правой части уравнения и форме (13) есть

$$T^* = \sum_{k=0}^K \kappa_k P_k(x_1, x_2, x_3,). \quad (14)$$

Далее выписываются состояния  $\xi^{T^*}$ ,  $\gamma^{T^*}$  и готовится информация по корректировке ГУ в соответствии с постановкой краевой задачи.

В качестве *примера* рассмотрим правую часть вида

$$-\frac{1}{\kappa} Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1(x_2 + x_3)^3 + 2x_1^3,$$

составленную из мономов порядка 3:  $x_1^3, x_1 x_2^2, x_1 x_3^2, x_1 x_2 x_3$ .

Сортировочный алгоритм подготовил опорный базис [5-]

$$T_i^* \in \{x_2^5, x_2^4 x_3, x_2 x_3^4, x_3^5, x_1 x_3^4, x_1^4 x_3, x_1^5, x_1 x_2^4, x_1^4 x_2, x_1 x_2^3 x_3\}.$$

Понятно, что этот список однозначно определяет соответствующие внутренние состояния:  $T_i^* \rightarrow \xi_i^*$ . 10 элементов опорного базиса выражаются через 10 многочленов третьего порядка. Обращение матрицы, связывающей эти мономы с мономами третьего порядка выполнялось в вычислительной системе Mathematica. Линейная комбинация опорных частных решений дала для температуры выражение в строгой форме

$$T^* = \frac{1}{2} x_1^3 x_2^2 + \frac{1}{2} x_1^3 x_3^2 + x_1^3 x_2 x_3.$$

По цепочке  $T^*$ ,  $\nabla T^* \rightarrow \gamma^*$  формируются выражения, отвечающие ГУ любого вида на границе тела, имеющего произвольную форму. Это позволяет внести коррекцию в ГУ, решить далее задачу теплопроводности относительно  $T^\circ$  и выписать соответствующее внутреннее состояние  $\xi^T$ .



**3. Строгая форма частного решения несвязанной задачи изотропной термоэластостатики.** Пусть известно температурное поле  $T(x_1, x_2, x_3)$  в уравновешенном линейно-упругом однородном изотропном теле, занимающем область  $V \in R^3$  с границей  $\partial V$ . Упругое внутреннее состояние  $\xi^E$  определяется в соответствии с законом Дюамеля-Неймана (2) и по форме совпадает с обобщенным законом Гука в формулировке Ламе:

$$\hat{\mathbf{s}} \equiv \hat{\sigma} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \hat{\mathbf{E}} = \lambda \theta \hat{\mathbf{E}} + 2\mu \hat{\varepsilon}. \quad (15)$$

После представления уравнений равновесия через тензор упругих составляющих напряжений  $\hat{\mathbf{s}}$  из уравнения равновесия получается аналогичная по форме зависимость:

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{s}} = -\mathbf{X} + (3\lambda + 2\mu) \alpha \nabla T \equiv \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3). \quad (16)$$

Будем полагать правую часть соотношения (16) конечным многочленом порядка  $K$ , являющимся линейной комбинацией векторов  $\mathbf{P}_k$  из однородных многочленов порядков  $k \in \{0, 1, \dots, K\}$ :

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^K \kappa_k \mathbf{P}_k(x_1, x_2, x_3).$$

Эти “приведенные” объемные силы регуляры в  $V$  вплоть до границы  $\partial V$ .

Решение системы уравнений, связывающих тензоры деформации, упругой составляющей напряжений  $\hat{\mathbf{s}}$  и уравнения равновесия (16) можно искать средствами МГС. Под внутренним состоянием тела понимается набор  $\xi^E = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\mathbf{s}}\}$ , раскладываемый на сумму  $\xi^E = \xi^{E*} + \xi^{E0}$ , где символом “\*” помечено какое-нибудь частное решение, отвечающее неоднородной краевой задаче, а “0” соответствует однородной составляющей уравнений Ламе, являющихся следствием определяющих соотношений при ГУ, скорректированных с учетом “следа” на  $\partial V$  от  $\xi^{E*}$ .

Весьма важным и заслуживающим особого внимания является отыскание состояния  $\xi^{E*}$  в конечной аналитической форме. Проблема состоит в том, что общие решения Папковича–Нейбера, а также Аржаных–Слободянского [1, 12] неоднородной системы дифференциальных уравнений Ламе выписаны в конечном виде только для потенциальных функций  $\mathbf{F}$ . Способ построения численно-аналитического решения найден [9]. Ниже демонстрируется подход, позволяющий выписывать строгое аналитическое решение  $\xi^{E*}$  при полиномиальном описании вектора правой части.

Кратко, идея в построении опорного базиса для выписывания строгого решения состоит в следующем. Любой моном  $w = x_1^\gamma x_2^\delta x_3^\beta$ ,  $\gamma + \delta + \beta = k + 2$  может быть помещен в любую позицию одноомного вектора перемещений  $\mathbf{u} \in \{\{w, 0, 0\}, \{0, w, 0\}, \{0, 0, w\}\}$ . По цепочке  $\mathbf{u} \rightarrow \hat{\varepsilon} \rightarrow \hat{\mathbf{s}}$  выписывается соответствующее варианту внутреннее состояние  $\xi^{E*} = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\mathbf{s}}\}$ . Набор всех возможных вариантов составляет “кластер  $k$ ”. Сортировочный алгоритм [10] позволяет рационально назначить базис мономов  $w$ , однозначно отвечающий базису мономов порядка  $k$ , участвующих в  $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$ . Связь базисов осуществляется через невырожденную матрицу, обращение которой позволяет выписывать внутреннее состояние, отвечающее конкретному моному порядка  $k$ , помещенному в любую позицию вектора правых частей. Поскольку любой полиномиальный вектор  $\mathbf{F}$  можно представить в виде линейной комбинации векторов, в каждом из которых моном помещен в какую-либо позицию, и каждому из таких вариантов соответствует уже известное внутреннее состояние, то соответствующая линейная комбинация позволяет выписать строгое решение для  $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$ .

Это и есть частное решение, не учитывающее никаких ограничений как на граничные условия, так и на форму границы.

Далее восстанавливается соответствующее  $\xi^{E^*}$  граничное состояние  $\gamma^{E^*} = \{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}$ , где  $\mathbf{p}$  – поверхностное усилие, отвечающее тензору  $\hat{\mathbf{s}}$ . Это состояние позволяет внести корректировку в ГУ, соответствующую исходной постановке краевой задачи. Решение краевой задачи относительно  $\xi^{E0}$  эффективно проводится средствами МГС. А именно, в соответствии с известными общими решениями однородной системы уравнений Ламе генерируется базис  $\xi^j$  пространства внутренних состояний  $\Xi = \{\xi | \xi = \mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$  и выполняется его ортогонализация на основе скалярных произведений

$$(\xi^1, \xi^2)_{\Xi} \equiv \int_V \hat{\sigma}^1 \cdot \hat{\varepsilon}^2 dV = \int_{\partial V} \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{u}^2 dS \equiv (\gamma^1, \gamma^2)_{\Gamma}. \quad (17)$$

Решение корректной краевой задачи представляется рядом Фурье

$$\xi = \sum_{j \in N} c_j \xi^j.$$

В частном случае основных задач коэффициенты Фурье  $c_j$  вычисляются рутинно. В первой основной задаче, когда на границе заданы поверхностные усилия  $\mathbf{p}$  это  $c_j = (\mathbf{p}^0, \mathbf{u}^j)_{\Gamma}$ . В случае второй основной задачи (на границе удержаны перемещения  $\mathbf{u}^0$ ) это  $c_j = (\mathbf{p}^j, \mathbf{u}^0)_{\Gamma}$ . В общем случае постановка сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно  $c_j$ , в которой структура невырожденной матрицы коэффициентов и их значения определяются типом ГУ и набором базисных элементов, а вектор правых частей несет конкретную информацию о значениях параметров ГУ.

В рассматриваемом случае после определения коэффициентов Фурье выписывается состояние  $\xi^{E0} = \{\mathbf{u}^0, \hat{\varepsilon}^0, \hat{\mathbf{s}}^0\}$ , а следом – реальное значение тензора напряжений

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{s}}^0 - (3\lambda + 2\mu) \alpha T \hat{\mathbf{E}}.$$

Совокупность характеристик внутреннего состояния  $\xi = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$  и составляет решение задачи теории упругости при заданном распределении температуры по области  $V$ .

Рассмотрим *пример* на предмет построения частного решения. Пусть распределение температуры по области  $V$ , занятой телом подчинено закону

$$T = -\frac{1}{2\alpha(3\lambda + 2\mu)}(x_1^2 + x_2^2)$$

и объемные силы имеют характер

$$\mathbf{X} = \{0, 0, (x_1^2 + x_2^2)(1 + x_3)\}.$$

Эти выражения для вектора  $\mathbf{F}$  дают представление

$$\mathbf{F} = \{x_1, x_2, (x_1^2 + x_2^2)(1 + x_3)\}.$$

Полиномиальные приведенные объемные силы имеют максимальный порядок  $K = 3$ . Для описания состояния рассматривались кластеры  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$  и для каждого из них строились опорные базисы порядков  $\{3, 9, 18, 30\}$  соответственно при помощи

сортировочного алгоритма. Вектор  $\mathbf{F}$  декомпозирован на мономные слагаемые

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2 x_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2^2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Для каждого мономного базисного вектора получено внутреннее состояние (использована компьютерная алгебра системы Mathematica. Из-за необозримости выражений промежуточные выкладки не приводятся). Линейная комбинация состояний, отвечающих векторам  $\mathbf{f}_i$ , дала внутреннее состояние

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18}x_1^3 + \frac{1}{90}x_1^5 \\ -\frac{1}{18}x_2^3 + \frac{1}{90}x_2^5 \\ -\frac{1}{12}(x_1^3 + x_2^3) - \frac{1}{12}(x_1^4 + x_2^4)x_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{18}x_1^4 & 0 & -\frac{1}{6}x_1^3(1+x_3) \\ 0 & -\frac{1}{6}x_2^2 + \frac{1}{18}x_2^4 & -\frac{1}{6}x_2^3(1+x_3) \\ -\frac{1}{6}x_1^3(1+x_3) & -\frac{1}{6}x_2^3(1+x_3) & -\frac{1}{12}(x_1^4 + x_2^4) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{s}}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{6}x_2^2 + \frac{1}{12}x_1^4 - \frac{1}{36}x_2^4 & 0 & -\frac{1}{3}x_1^3(1+x_3) \\ 0 & -\frac{1}{6}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{36}x_1^4 + \frac{1}{12}x_2^4 & -\frac{1}{3}x_2^3(1+x_3) \\ -\frac{1}{3}x_1^3(1+x_3) & -\frac{1}{3}x_2^3(1+x_3) & -\frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{7}{36}(x_1^4 + x_2^4) \end{pmatrix}$$

Тензор истинных напряжений  $\hat{\sigma}^*$  отличается от  $\hat{\mathbf{S}}^*$  тем, что в соответствии с определением (15) из диагональных элементов следует вычесть величину  $(3\lambda + 2\mu) \alpha T = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ . Результат имеет более компактный вид:

$$\hat{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{12}x_1^4 - \frac{1}{36}x_2^4 & 0 & -\frac{1}{3}x_1^3(1+x_3) \\ 0 & \frac{1}{3}x_1^2 - \frac{1}{36}x_1^4 + \frac{1}{12}x_2^4 & -\frac{1}{3}x_2^3(1+x_3) \\ -\frac{1}{3}x_1^3(1+x_3) & -\frac{1}{3}x_2^3(1+x_3) & \frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{7}{36}(x_1^4 + x_2^4) \end{pmatrix}$$

Подстановки характеристик состояния  $\xi$  в определяющие соотношения показывает их тождественное равенство, что свидетельствует о строгости выписанного решения.

### Заключение

1. В случае ГУ для задачи линейной изотропно-однородной термоупругости выполнена декомпозиция любой линейной краевой задачи для тела произвольной геометрической формы на последовательность задач теплопроводности и теории упругости со скорректированными объемными силами. Построение решения предписано средствами МГС в численно-аналитической форме.

2. При регулярном распределении теплоисточников по области, занятой телом, описываемым полиномом произвольного конечного порядка, предложен метод построения частного решения в строгой аналитической форме, опирающийся на базис опорных состояний. Метод не использует информации о конкретном содержании ГУ.

3. Метод построения частного решения продемонстрирован на конкретном варианте распределения теплоисточников по области, занятой телом, описываемым многочленом третьего порядка. Решение тождественно удовлетворяют уравнению Пуассона.

4. В случае регулярного характера объемных сил, имеющих полиномиальное представление, предложен способ явного выписывания строгого аналитического решения

задачи о восстановлении поля напряжений, основанный на построении опорного базиса пространства внутренних состояний и строгом выписывании внутреннего состояния, соответствующего любому одномоному вектору объемных сил. Линейная комбинация состояний для одномоных сил, отвечающая объемной силе (учитывающая и температурную поправку) дает строгую форму записи частного решения. Корректировка тензора напряжений вычитанием уже известной диагональной поправки от температурных напряжений восстанавливает тензор механических напряжений. Построение решения, отвечающего однородной составляющей уравнений Ламе со скорректированными ГУ трудностей не составляет, поскольку при корректной постановке краевой задачи находится эффективно средствами МГС. Приведен конкретный пример.

В будущем подход, основанный на формировании опорного базиса пространства состояний можно применить для обеспечения выписывания частного решения различных задач механики с регулярными неоднородными составляющими в строгой аналитической форме. Перспективным шагом развития изложенного подхода является также расширение класса задач на неоднородные и нелинейные постановки с привлечением метода возмущений.

Значительный интерес для исследователей представляют также задачи, в которых параметры термоупругой среды зависят от температуры. Применение МГСВ [7] сводит процесс построения поля к последовательности линейных задач термоупругости. При этом на границе могут формулироваться условия смешанного типа. Разложение по вводимому малому параметру позволяет смешанные условия учитывать на начальном приближении. Для последующих приближений возникает возможность использования ГУ основных типов, что существенно снижает объем вычислений. На каждом шаге итераций проводить процесс ортогонализации базиса нет необходимости: это достаточно выполнить единожды. Но самым важным фактором в контексте настоящей работы является то, что при формировании соотношений для каждого последующего шага МГСВ возникают искусственные объемные силы именно полиномиального характера.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости; М.: Наука, 1976. 664 с.
- [2] Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. Киев: "Наукова Думка", 1970. 308 с.
- [3] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости. Germany: LAP LAMBERT. Academic Publishing GmbH & Co., 2012. 108 с.
- [4] Guannan Wang, Leiting Dong, Satya N. Atluri. A Trefftz collocation method (TCM) for three-dimensional linear elasticity by using the Papkovitch-Neuber solutions with cylindrical harmonics //Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 88. 2018, pp. 93–103.
- [5] Grigoriev Yu. M., Gürlebeck K., Legatiuk D. Interpolation problem for the solutions of linear elasticity equations based on monogenic functions //Conference: Conference: proceedings of the 3rd international conference on construction and building engineering (iconbuild) 2017.
- [6] Chirag Sachdeva, Srikant Sekhar Padhee Functionally graded cylinders: Asymptotically exact analytical formulations//Applied Mathematical Modelling 10/2017.
- [7] Azarov D. A., Zubov L. M. Mechanical-Geometrical Modelling in Non-Linear Theory of Elasticity January 2016
- [8] Новикова О.С. Построение полнопараметрических аналитических решений задач теории упругости на основе метода граничных состояний: дисс. . . канд. физ.- мат. наук : 01.02.04 / Новикова Ольга Сергеевна; науч. рук. В.Б. Пеньков; Липецк, 2019. 77 с.

- [9] Кузьменко В. И., Кузьменко Н. В., Левина Л. В., Пеньков В. Б. Способ решения задач изотропной теории упругости с объемными силами в полиномиальном представлении // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 1. С. 84-94.
- [10] Пеньков В. Б., Левина Л. В., Новикова О. С. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 1. С. 56-73.
- [11] Саталкина Л. В. Метод граничных состояний в задачах теории упругости неоднородных тел и термоупругости: дисс. ... канд. физ.- мат. наук: 01.02.04 / Саталкина Любовь Владимировна; науч. рук. В.Б. Пеньков; Липецк, 2010. 108 с.
- [12] Лурье А. И. Теория упругости М.: Наука, 1970. 940 с.
- [13] Тихонов А. И., Самарский А. А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1972. 763 с.

*L. V. Levina, V. B. Penkov, E. A. Novikov*

### STRICT PARTICULAR SOLUTIONS OF HEAT CONDUCTIVITY AND THERMOELASTICITY PROBLEMS

*Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia*

**Abstract.** Boundary value problems for a linear thermoelastic isotropically homogeneous medium are considered. The state of the medium is subject to the Duhamel-Neumann equations. In the case when the characteristics of the stress-strain state (SSS) on the surface of the body are not related to temperature factors in the boundary conditions (BC), the problem is decomposed into a sequence of inhomogeneous problems of heat conduction and elasticity theory with a known correction of body forces in the equilibrium equations. Particular attention is paid to the method of constructing a particular solution to the problem of heat conduction. The Green's function method presents particular solutions of such problems in a singular form, which, for an arbitrary geometric configuration of the body, does not allow us to write out a rigorous analytical solution. An approach is proposed that makes it possible to obtain a particular solution rigorously in the case of a regular description of heat sources by a polynomial of finite order. The trace of such a solution at the boundary makes it possible to correct the BC of the heat conduction problem and construct a numerical-analytical solution by means of the method of boundary states (MBS). A similar approach is implemented for a rigorous particular solution of the linear elasticity problem. The constructed temperature field makes a regular addition to the volume forces of the second step - the problem of the theory of elasticity. Its solution is also effectively built using the MBS. The combination of these two steps makes it possible to write out a strictly particular solution for problems of linear thermoelastics.

**Keywords:** thermoelasticity, decomposition of the problem of thermoelasticity, rigorous solution, particular solution of the Poisson equation, particular solution of an inhomogeneous boundary value problem, method of boundary states, MBS, support basis.

---

*Levina Lyubov Vladimirovna*, Ph.D., Associate Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,

*Penkov Viktor Borisovich*, Dr. Sci. Phys. and Math, Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,

*Novikov Evgeny Aleksandrovich*, Graduate Student, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

**REFERENCES**

- [1] Kupradze V. D., Gegelia T. G., Basheleyshvili M. O., Burchuladze T. V. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity. M.: Nauka, 1976. 664 p.
- [2] Kovalenko A. D. Fundamentals of thermoelasticity. Kiyev: «Naukova Dumka», 1970. 308 p.
- [3] Penkov V. B., Satalkina L. V. Perturbed boundary state method: inhomogeneous and nonlinear problems of the theory of elasticity and thermoelasticity. Germany: LAP LAMBERT. Academic Publishing GmbH & Co., 2012. 108 p.
- [4] Guannan Wang, Leiting Dong, Satya N. Atluri. A Trefftz collocation method (TCM) for three-dimensional linear elasticity by using the Papkovitch-Neuber solutions with cylindrical harmonics // Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 88. 2018, pp. 93–103.
- [5] Grigoriev Yu. M., Gürlebeck K., Legatiuk D. Interpolation problem for the solutions of linear elasticity equations based on monogenic functions // Conference: Conference: proceedings of the 3rd international conference on construction and building engineering (iconbuild) 2017.
- [6] Chirag Sachdeva, Srikant Sekhar Padhee Functionally graded cylinders: Asymptotically exact analytical formulations // Applied Mathematical Modelling 10/2017.
- [7] Azarov D. A., Zubov L. M. Mechanical-Geometrical Modelling in Non-Linear Theory of Elasticity January 2016
- [8] Novikova O. S. Construction of full-parametric analytical solutions of problems of the theory of elasticity based on the method of boundary states. Sciences: 01.02.04 / Novikova Olga Sergeevna; scientific director V. B. Penkov; Lipetsk, 2019. – 77 p.
- [9] Kuzmenko V. I., Kuzmenko N. V., Levina L. V., Penkov V. B. Method for solving problems of isotropic elasticity theory with volumetric forces in polynomial representation // Applied Mathematics and Mechanics. 2019. V. 83. No 1. pp. 84-94.
- [10] Penkov V. B., Levina L. V., Novikova O. S. Analytical solution of problems of elastostatics of a simply connected body loaded with non-conservative body forces. Theoretical and algorithmic support // Journal of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. No 1. pp. 56-73.
- [11] Satalkina L. V. The method of boundary states in problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies and thermoelasticity. Sciences: 01.02.04 / Satalkina Lyubov Vladimirovna; scientific director V. B. Penkov; Lipetsk, 2010. – 108 p.
- [12] Lurie A. I. Theory of elasticity M.: Nauka, 1970. 940 p.
- [13] Tikhonov A. I., Samara A. A. Equation of mathematical physics. M.: Nauka, 1972. 763 p.

<sup>1</sup>Д. А. Чернышов, <sup>1,2</sup>А. В. Ковалев

## ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЕ СПЛОШНОГО ШАРА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ВИДОМ ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

<sup>2</sup>Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия  
имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия

**Аннотация.** В работе в аналитическом виде определяется напряженно-деформированное состояние сплошного шара, подвергнутого равномерному тепловому воздействию, и вводятся предположения о характере влияния на него зависимости предела текучести от температурного поля. В качестве материала шара рассматривается модель сплошной среды, предложенная А. Н. Спорыхиным (модель упрочняющегося упруговязкопластического материала). Решение задачи представляет собой обобщение уже известного подхода на случай полиномиальной зависимости предела текучести от температуры. В результате расчетов получены численные значения основных величин, и проведено сравнение материалов, предел текучести которых определяется постоянной, линейной и квадратичной функциями.

**Ключевые слова:** температурные напряжения, упругость, пластичность, вязкость, предел текучести, сплошной шар.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.012

УДК: 539.374, 539.389

### Введение

Изучению различных реологических моделей сплошных сред посвящено большое количество работ [1–6]. Важной областью подобных исследований является рассмотрение в рамках одной задачи сразу нескольких механизмов деформирования: упругого, пластического, вязкого и др. Так, введение в модель фактора вязкости, согласно [1], наделяет ее свойствами внутренней неконсервативности, что приводит к значительному усложнению самой модели и, как следствие, возникновению дополнительных

---

© Чернышов Д. А., Ковалев А. В., 2022

*Чернышов Данил Алексеевич*

e-mail: chernyshov.danil@gmail.com, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

*Ковалев Алексей Викторович*

e-mail: kav-mail@mail.com, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.05.2022

вычислительных сложностей. В [2] был предложен подход к решению задач с учетом вязких свойств материала, предел текучести которого линейно зависит от температуры. В данной работе рассматривается более общий случай — полиномиальный вид зависимости. Его исследование позволит более детально подходить к анализу различного рода материалов (например, хромоникелевых коррозионностойких сталей аустенитного класса 12X18H12M3TЛ и 03X16H9M2 [7]), а также рассматривать кусочно-заданный предел текучести с полиномами высших порядков.

### Построение математической модели

Постановка задачи, аналогичная рассматриваемой, приводилась в [2, 3]. Поверхность сплошного шара радиуса  $R$  подвержена равномерному нагреву со стороны окружающей среды, температура которой равна  $T_m$ , таким образом, что в каждый момент выполнено условие

$$\frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt}, \quad (1)$$

где  $T(r, t)$  — распределение температуры шара по радиусу;  $r$  — длина радиус-вектора точки;  $t$  — время;  $x$  — скорость нагрева поверхности;  $T_0$  — начальная температура тела. Массовыми и поверхностными силами пренебрегают. Требуется определить напряженно-деформированное состояние шара.

Уравнение теплопроводности вместе с краевыми условиями в случае сферической симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} &= \vartheta \left( \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} \right), \\ T(r, 0) &= T_0, \\ \frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} &= 1 - e^{-xt}, \\ T(0, t) &\neq \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\vartheta$  — коэффициент температуропроводности.

Согласно [2], решение (2) в безразмерных переменных имеет вид

$$\Theta(\xi, t) = \frac{T(\xi, t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \frac{x}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \left[ e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta t} - e^{-xt} \right], \quad (3)$$

где  $\xi = r/R$  — безразмерный радиус.

В условиях сферической симметрии уравнения, входящие в полную систему уравнений механики твердого тела, могут быть записаны в следующем виде:

- уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad (4)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$  — компоненты тензора напряжений;

- условие пластичности (условия Треска и Мизеса в эквивалентном виде)

$$\left| (\sigma_r - c e_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - c e_\varphi^p - \eta \dot{e}_\varphi^p) \right| = 2k(r, t), \quad (5)$$

где  $e_r^p, e_\varphi^p, e_\theta^p$  — компоненты тензора пластических деформаций;  $k(r, t)$  — предел текучести;  $c$  — коэффициент упрочнения;  $\eta$  — коэффициент вязкости;



- условие пластической несжимаемости (следствие ассоциированного закона пластического течения)

$$de_r^p + 2de_\varphi^p = 0; \quad (6)$$

- закон Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta (r, t), \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta (r, t), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $e_r^e, e_\varphi^e, e_\theta^e$  — компоненты тензора упругих деформаций;  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе;

$$\Delta (r, t) = \alpha (T (r, t) - T_0);$$

$\alpha$  — коэффициент температурного расширения;

- выражения для полных деформаций и соотношения Коши

$$\begin{aligned} e_r^e + e_r^p &= e_r = u_{r,r}, \\ e_\varphi^e + e_\varphi^p &= e_\theta^e + e_\theta^p = e_\varphi = e_\theta = \frac{u_r}{r}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $e_r, e_\varphi, e_\theta$  — компоненты тензора полных деформаций;  $u_r$  — радиальная компонента перемещений.

В отличие от [2], где дальнейшее рассмотрение проводилось только на основании вида решения (3), в данной работе учитывается вид зависимости предела текучести от температуры. Было выдвинуто предположение о полиномиальной форме зависимости:

$$k (r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta^l (r, t), \quad (9)$$

где  $\beta_0 = 1, \beta_l (l = \overline{1, m})$  — коэффициенты, определяемые таким образом, чтобы  $k (r, t)$  оставалась монотонно убывающей функцией температуры.

Очевидно, что

$$\Delta (r, t) = \Delta_m \Theta \left( \frac{r}{R}, t \right), \quad (10)$$

где  $\Delta_m = \alpha (T_m - T_0)$ . Тогда (9) с учетом (3) примет вид

$$k (r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta_m^l \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \Theta [n, 1] (r) e^{-h[n, 1]t} + \Theta [n, 2] (r) e^{-h[n, 2]t} \right) \right]^l. \quad (11)$$

где  $h [n, 1] = \frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta, h [n, 2] = x$ . Здесь и далее в квадратных скобках будут записываться индексы членов ряда.

После преобразования (11) было получено выражение

$$k (r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \beta_l \Delta_m^l \prod_{q=1}^l \Theta [n_q, j] (r) e^{-h[n_q, j]t} \right\}. \quad (12)$$

Суммирование по  $n_1, n_2, \dots, n_l$  ведется в том смысле, что при  $l = 0$  выражение в фигурных скобках равно 1.

Таким образом, исходя из вида зависимостей (3) и (12) отыскание неизвестных величин будет проводиться в форме

$$F(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F[n, j](r) e^{-h[n, j]t} + \sum_{l=2}^m \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F[l, n_1, n_2, \dots, n_l, j](r) \prod_{q=1}^l e^{-h[n_q, j]t}, \quad (13)$$

где  $F$  — искомая величина. Суммирование по  $l$  во втором слагаемом ведется в том смысле, что при  $m < 2$ , т. е. в случае постоянного или линейно зависящего от температуры предела текучести, оно равно 0.

Очевидно, что каждое из уравнений (4)–(8) может быть сведено к виду, аналогичному (13). Тогда уравнения (5) и (7) для всех членов ряда примут вид (14) и (15) соответственно:

$$(\sigma_r - (c - \eta \bar{h}) e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta \bar{h}) e_\varphi^p) = 2\kappa k(r), \quad (14)$$

где  $\kappa = \text{sign}((\sigma_r - (c - \eta \bar{h}) e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta \bar{h}) e_\varphi^p))$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r), \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r). \end{aligned} \quad (15)$$

Для каждого слагаемого в разложениях искомых величин будет справедлива система (4), (6), (8), (14), (15). Для удобства здесь и далее индексы были опущены. В (14) величина  $\bar{h}$  принимается равной не только отдельным коэффициентам  $h[n, j]$  из первого слагаемого соотношения (13), но и суммам их произведений из второго слагаемого.

Дальнейшее рассмотрение проводилось для случая, когда в теле последовательно возникают и развиваются следующие состояния: идеально упругое деформирование; область пластического течения при  $\kappa = 1$  (момент возникновения  $t = t_p$ ); зона разгрузки материала (момент возникновения  $t = t_u$ ); область повторной пластичности при  $\kappa = -1$  (момент возникновения  $t = t_r$ ). Также предполагалось существование момента вырождения первой пластической зоны ( $t = t_k$ ), после которого зона разгрузки имеет общую упругопластическую границу с областью идеальной упругости. Кроме того, процесс деформирования является конечным и завершается при полном нагреве тела (момент завершения нагрева  $t = t_m$ ).

Выражения для членов разложений напряжений и перемещений в каждой из зон шара имеют вид:

- упругая область:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_1 + \frac{B_1}{r^3} \right\} \\
 \sigma_\varphi &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_1 - \frac{B_1}{2r^3} \right\} \\
 u &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r A_1}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_1}{4\mu r^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{16}$$

- области первого и повторного пластического течения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + A_i + \frac{B_i}{r^3} \right\} + \\
 &+ \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - \bar{h})} \left[ -4 \int_y^r \frac{\kappa k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^3} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{B_i}{r^3} \right] \\
 \sigma_\varphi &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_i - \frac{B_i}{2r^3} \right\} + \\
 &+ \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - \bar{h})} \left[ -4 \int_y^r \frac{\kappa k(\rho)}{\rho} d\rho - 2\kappa k(r) - \frac{2\omega}{r^3} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + 2\omega \Delta(r) + \frac{B_i}{2r^3} \right] \\
 u &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + \frac{r A_i}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_i}{4\mu r^2} \right\} + \\
 &+ \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - \bar{h})(3\lambda + 2\mu)} \left[ -4r \int_y^r \frac{\kappa k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{B_i}{r^2} \right]
 \end{aligned} \tag{17}$$

- область разгрузки:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_3 + \frac{B_3}{r^3} \right\} + \left[ 2\omega \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \\
 \sigma_\varphi &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_3 - \frac{B_3}{2r^3} \right\} + \left[ 2\omega \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + 2\omega \hat{e}_r^p(r) \right] \\
 u &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r A_3}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_3}{4\mu r^2} \right\} + \left[ \frac{2\omega}{3\lambda + 2\mu} r \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right]
 \end{aligned} \tag{18}$$

В (16)–(18) константы  $\omega$  и  $\Omega$  равны соответственно

$$\omega = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad \Omega = \frac{2\omega + 3c}{3\eta}$$

Функция  $\hat{e}_r^p(r)$  в выражении (18) представляет собой уровень накопленных деформаций в точке  $r$  и определяется величиной пластических деформаций в этой точке при прохождении через нее упругопластической границы  $b$ .

Для перехода к области первого пластического течения в (17) следует приравнять  $y = a$  и  $i = 2$ , а для перехода к области повторного пластического течения —  $y = c$  и  $i = 4$ .

Константы  $A_i$  и  $B_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) определяются из условий свободной от нагрузки внешней поверхности шара и отсутствия перемещений в его центре, а также условий сопряжений на упругопластических границах.

Аналитический вид (16)–(18) для каждого из членов разложений напряжений и перемещений совпадает с выражениями, приведенными в [2], с точностью до величины  $\bar{h}$ , функций  $\Delta(r)$  и  $k(r)$ , а также констант интегрирования.

Поскольку процесс нагрева является нестационарным, упругопластические границы раздела зон, возникающих в теле, находятся в движении от поверхности шара к центру вплоть до своих предельных положений:

- Положение границы  $a(t)$ , разделяющей упругую и пластическую зоны, может быть определено из эквивалентных условий равенства нулю на ней пластических деформаций, непрерывности окружной компоненты напряжений или выполнения условия пластичности для напряжений из упругой области.
- Положение границы  $b(t)$ , разделяющей пластическую область и зону разгрузки, согласно ассоциированному закону пластического течения, определяется равенством скорости пластических деформаций нулю.
- Положение границы  $c(t)$ , разделяющей область разгрузки и зону повторной пластичности, может быть определено из эквивалентных условий равенства на ней уже имеющейся и новой пластических деформаций, непрерывности окружной компоненты напряжений или выполнения условия пластичности для напряжений из области разгрузки.

#### Анализ решения

В качестве примера было проведено сравнение материалов с постоянным, линейным и квадратичным пределами текучести. Величинам, относящимся к указанным случаям, были присвоены верхние индексы *const*, *I* и *II* соответственно. Параметры  $\beta_l$  ( $l = \overline{1, m}$ ) подбирались таким образом, чтобы было выполнено условие

$$0 \leq \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta_m^l \leq 1 \quad (19)$$

Численные значения моментов возникновения областей с отличающимися реологическими свойствами приведены в таблице 1. Анализ показал, что при прочих равных физико-механических параметрах материалов выбор предела текучести оказывает существенное влияние на скорость деформирования сплошного шара. Распределение остаточных напряжений в теле после полного нагрева и последующего его охлаждения до начальной температуры, приведенных к пределу текучести, представлено на

рис. 1. Нетрудно заметить, что все три случая отличаются друг от друга не только величиной возникающих напряжений, но и глубиной проникания областей вглубь шара. Аналогичный вывод можно сделать, анализируя рис. 2, демонстрирующий изменение положения упругопластических границ  $a(t)$  и  $b(t)$  во времени вплоть до момента вырождения первой зоны пластичности.

Момент времени	Вид предела текучести		
	<i>const</i>	<i>I</i>	<i>II</i>
$t_p$	0,41298	0,35202	0,34730
$t_u$	2,85907	3,05806	3,18484
$t_k$	43,33826	11,82847	6,86689
$t_r$	14,59790	25,38286	31,83741

Таблица 1. Значения моментов возникновения зон (в секундах)

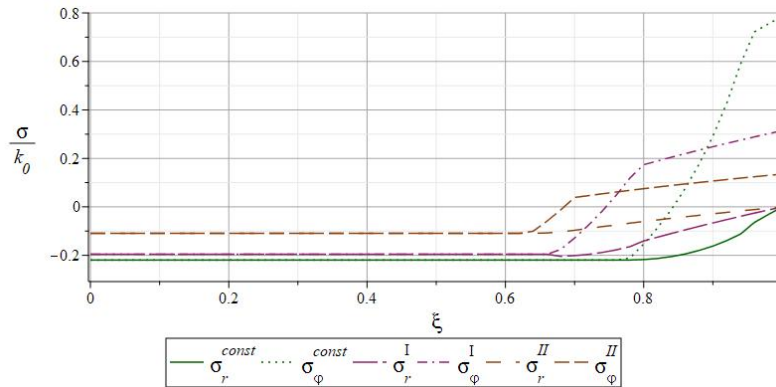


Рис. 1. Остаточные напряжения в теле после полного остывания

### Выводы

В работе было получено обобщение решения, приведенного в [2], на случай полиномиальной зависимости предела текучести от температуры. Анализ численных значений основных величин позволил сделать следующие выводы:

- Введение в модель зависимости предела текучести от температуры приводит к изменению скорости деформирования и времени, необходимого на зарождение и развитие областей с отличающимися свойствами.
- Глубина проникания зон, возникающих при нагреве тела, вглубь шара может существенно изменяться (в частности, увеличиваться) с увеличением скорости изменения предела текучести.
- Следствием уменьшения предела текучести по мере роста температуры является уменьшение остаточных напряжений в теле по абсолютной величине после полного его охлаждения.

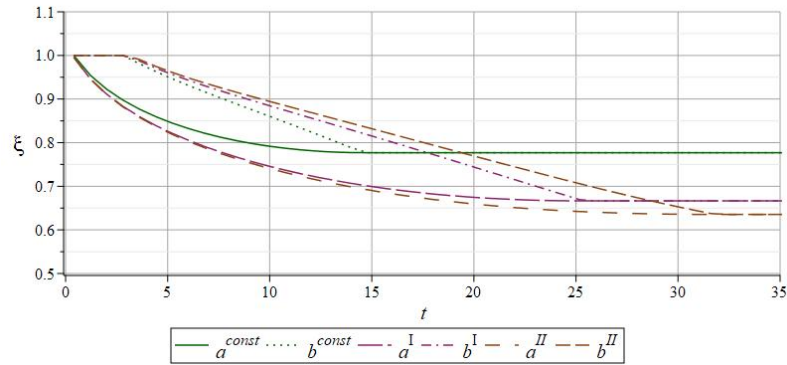


Рис. 2. Зависимость положения упругопластических границ от времени

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Издательство ВГУ, 1997. 361 с.
- [2] Чернышов Д. А., Ковалев А. В. Термодеформирование тела со сложной реологией в условиях сферической симметрии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 4. С. 70–87.
- [3] Дац Е. П. Неустановившиеся температурные напряжения в условиях зависимости предела текучести от температуры. Ph.D. thesis: Комсомольск-на-Амуре государственный технический университет. 2017.
- [4] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
- [5] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Издательство ВГУ, 2004. 218 с.
- [6] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Лушпей А. В. Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий // Прикладная математика и механика. 2009. № 4. С. 663–669.
- [7] ПНАЭ Г-7-002-86 Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. 1987.

<sup>1</sup>D. A. Chernyshov, <sup>1,2</sup>A. V. Kovalev

## THERMAL DEFORMATION OF A SOLID BALL WITH A POLYNOMIAL TYPE OF DEPENDENCE OF THE YIELD STRENGTH ON TEMPERATURE

<sup>1</sup>Voronezh State University, Voronezh, Russia

<sup>2</sup>Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin, Voronezh, Russia

**Abstract.** In this work, the stress-strain state of solid ball subjected to uniform thermal action is determined in an analytical form and assumptions about of the influence of the dependence of the yield strength on the temperature field on it are introduced. The continuous medium model proposed by A. N. Sporykhin (a model of a hardening elastoviscoplastic material) is considered as the ball material. The solution of the problem is a generalization of the already known approach to the case of a polynomial dependence of the yield strength on temperature. As a result of computation, numerical values of the basic quantities were obtained, and a comparison was made of materials whose yield strength is determined by constant, linear and quadratic functions.

**Keywords:** thermal strain, elasticity, plasticity, viscosity, yield strength, solid ball.

## REFERENCES

- [1] Sporykhin A. N. Metod vozmushchenij v zadachah ustojchivosti slozhnyh sred [Perturbation Method in Problems of Stability of Complex Medium]. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 1997. 361 c.
- [2] Chernyshov D. A., Kovalev A.V. Thermal Deformation of a Body with Complex Rheology Under Conditions of Spherical Symmetry // *Mechanics of Solids*. 2022. № 4. С. 70–87.
- [3] Dats E. P. Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya v usloviyah zavisimosti predela tekuchesti ot temperature [Unsteady Thermal Stresses under the Dependence of the Yield Strength on Temperature]. Ph.D. thesis: Komsomolsk-on-Amur State Technical University. 2017.
- [4] Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the Theory of Plasticity]. Moscow: Nauka Publ., 1969. 420 c.
- [5] Sporykhin A. N., Kovalev A.V., Shcheglova Y. D. Neodnomernye zadachi uprugovyzkoplastichnosti s neizvestnoj granicej [Non-one-dimensional elastic-viscoplastic problems with unknown boundary]. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 2004. 218 c.
- [6] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Lushpei A. V. The Transient Retardation of a Rectilinear Viscoplastic Flow when the Loading Stresses are Abruptly Removed // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. № 4. С. 478–482.
- [7] PNAE G-7-002-86 Normy rascheta na prochnost' oborudovaniya i truboprovodov atomnyh energeticheskikh ustanovok [PNAE G-7-002-86 Standards for calculating the strength of equipment and pipelines of nuclear power plants]. 1987.

---

*Chernyshov Danil Alekseevich*, Student of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Kovalev Alexey Victorovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia, Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Voronezh, Russia.

Л. В. Кирьянова

## ОЦЕНКА ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В данной работе численными методами получены оценки для первого собственного числа краевой задачи модельного дробного дифференциального уравнения, описывающего колебания фрактального осциллятора. Представлены две эмпирические формулы для максимального собственного числа рассматриваемой модели: как функции параметра уравнения и через максимальную и минимальную сумму элементов строк матрицы специального вида. Оценена погрешность.

**Ключевые слова:** дробное дифференциальное уравнение, оператор дробного дифференцирования, собственные числа матрицы, собственные числа краевой задачи.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.013

УДК: 519.673

**Введение. Актуальность исследуемой проблемы.** Механико-математическое моделирование с использованием дробного исчисления приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. Наиболее полно современное состояние теории дробного исчисления можно найти в 8-томном издании [1]. В настоящее время уравнения с производными дробного порядка повсеместно применяются, например, в физике [2] - [4] и гидродинамике [5] - [6]. В механике можно отметить использование дробных дифференциальных уравнений при построении моделей процессов с аномальным режимом [7] - [8] или моделей аномальной диффузии [9]. В частности, в физике, механике, химии и инженерных науках при механико-математическом моделировании широко применяется уравнение вида:

$$D^\alpha u(t) + c \cdot D^\beta u(t) + f(t, u(t)) = 0; \quad 0 < t < T$$

где  $D^\alpha$  и  $D^\beta$  дробные производные (операторы дробного дифференцирования) порядка  $1 < \alpha \leq 2$  и  $1 < \beta \leq 2$ ;  $c$  – некоторая действительная постоянная,  $f(t, u)$  –

---

© Кирьянова Л. В., 2022

*Кирьянова Людмила Владимировна*

e-mail: KiryanovaLV@mgsu.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Автор выражает глубокую благодарность профессору кафедры Высшей математики НИУ МГСУ Т.С. Алерову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Поступила 01.06.2022



заданная действительная функция двух аргументов, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям.

Рассмотрим модельное дробное дифференциальное уравнение из [10], описывающее колебания фрактального осциллятора:

$$D^{1+\gamma}u(t) + \lambda u(t) = 0, \quad 0 < \gamma < 1.$$

В рассматриваемом уравнении оператор дробного дифференцирования определен следующим образом:

$$D^{1+\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau.$$

Данное уравнение также является одним из основных уравнений для моделирования случайного блуждания точечной частицы, которая начинает двигаться в начале координат в момент времени  $t=0$  на самоподобном фрактальном множестве.

Как правило, для практических задач наибольшее значение имеет первое собственное число.

Таким образом, изучается первое собственное число задачи

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau + \lambda u(t) = 0, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (2)$$

Известно [10], что эта задача эквивалентна уравнению:

$$\cdot \left[ \int_0^t (t-\tau)^{1-\gamma} u(\tau) d\tau - \int_0^1 t^{1-\gamma} (1-\tau)^{1-\gamma} u(\tau) d\tau \right] = \frac{\Gamma(2-\gamma)u(t)}{\lambda}.$$

Согласно [11], исследование собственных значений данного уравнения сводится к изучению предельного поведения (при неограниченном возрастании порядка матрицы) собственных чисел матриц вида  $\cdot \frac{1}{n} T_{n-1}(\mu)$ , где:

$$T_{n-1}(\mu) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu - \left(\frac{0}{n}\right)^\mu & \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-2}{n}\right)^\mu & \cdots & \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \\ \left(\frac{2}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu - \left(\frac{1}{n}\right)^\mu & \left(\frac{2}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-2}{n}\right)^\mu & \cdots & \left(\frac{2}{n}\right)^\mu \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu - \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu & \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-2}{n}\right)^\mu - \left(\frac{n-3}{n}\right)^\mu & \cdots & \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \end{pmatrix}$$

где  $\mu = 1$ .

В силу того, что параметр исходной задачи  $\gamma \in (0;1)$ , то и параметр матрицы  $\mu \in (0;1)$ .

Основные свойства матриц вида  $n^\mu T_{n-1}(\mu)$ ,  $T_{n-1}(\mu)$  и  $\frac{1}{n} T_{n-1}(\mu)$  исследованы в [11]. Отметим, что свойства матрицы  $n^\mu \cdot T_{n-1}(\mu)$  в случае  $\mu = 1$  приведены в [12]. В работах [11] и [12] не изучались собственные числа этих матриц.

Далее рассмотрим максимальное собственное значения матриц вида  $T_{n-1}(\mu)$  и  $\frac{1}{n} T_{n-1}(\mu)$ .

**Методы исследования и результаты.** Найдем с помощью пакета прикладных программ МАТЛАВ максимальное собственное значение матриц вида  $T_{n-1}(\mu)$  при различных значениях параметра  $\mu \in (0;1)$  в зависимости от размерности  $n$ . Результат вычислений визуализированы и приведены на рисунке 1. Очевидна линейная связь между максимальным собственным числом и размерностью матрицы.

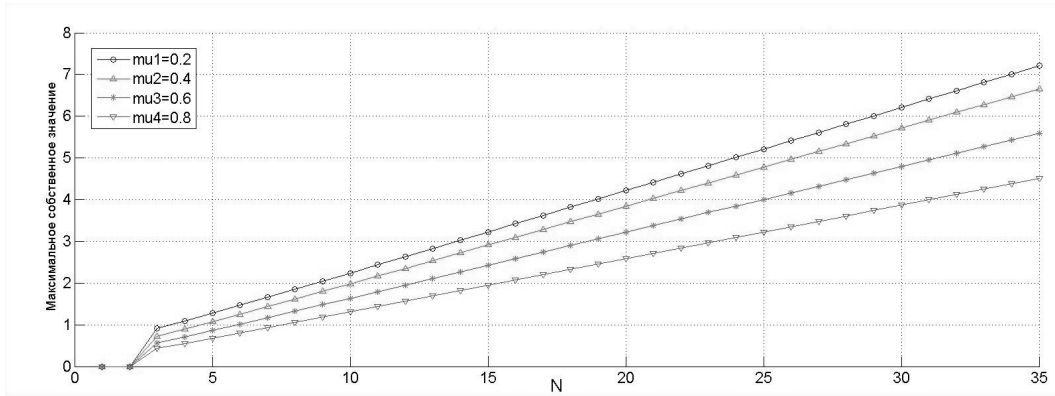


Рис. 1. Максимальное собственное значение матрицы  $T_{n-1}(\mu)$  для четырех значений параметра  $\mu \in (0;1)$  в зависимости от размерности матрицы.

Далее найдем для матрицы  $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$  максимальное собственное значение  $\lambda_{max}(n)$  при различных значениях параметра в зависимости от размерности, которое при возрастании  $n$  имеет предельное значение. Соответствующие результаты представлены на рисунке 2.

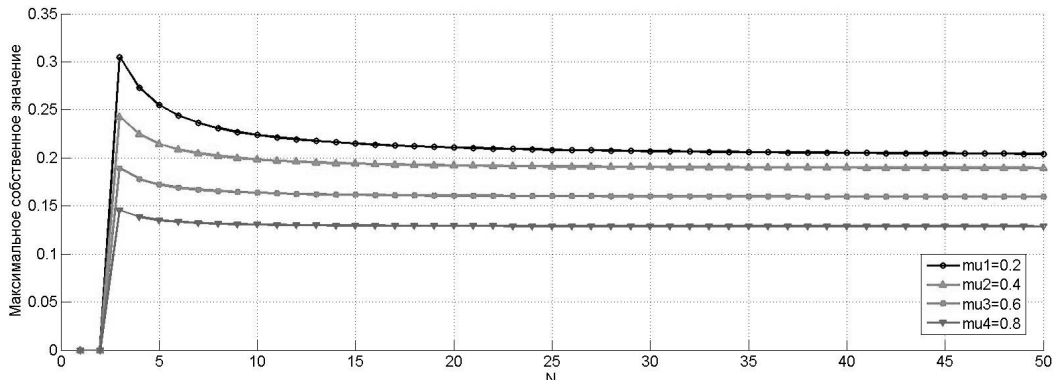


Рис. 2. Максимальное собственное значение  $\lambda_{max}(n)$  матрицы  $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$  при различных значениях параметра  $\mu \in (0;1)$  в зависимости от размерности.

Расчетные значения предельного максимального собственного значения  $\lambda_{max}$  матриц вида  $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$  при различных значениях параметра  $\mu \in (0;1)$  приведены в таблице 1.

Зависимость максимального собственного значения  $\lambda_{max}$  от значения параметра  $\mu$  можно выразить аналитически с помощью приложения *cftool* пакета MATLAB (была использована простейшая модель Фурье):

$$\lambda_{max}(\mu) \approx 0.154 + 0.033 \cos(3.717\mu) + 0.035 \sin(3.717\mu). \quad (3)$$

Коэффициент детерминации составил  $R^2 = 0.997$ .

$\mu$	0.1	0.15	0.17	0.2	0.21	0.25	0.3	0.4
$\lambda_{max}$	0.1924	0.2013	0.2031	0.2043	0.2044	0.2037	0.2005	0.1895
$\mu$	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
$\lambda_{max}$	0.1752	0.1596	0.1439	0.1362	0.1287	0.1215	0.1145	0.1078

Таблица 1. Предельное максимальное собственное значение  $\lambda_{max}$  матриц вида  $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$  при различных значениях параметра  $\mu \in (0;1)$  при  $n \rightarrow \infty$  с точностью 4 знака после запятой.

Далее, для более точного анализа собственных значений матрицы  $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$  с элементами  $t_{ij}(\mu, n-1)$ , рассмотрим максимальную и минимальную суммы элементов строк матрицы:

$$Z_{max}(\mu, n-1) = \max_{j=1, n} \sum_{i=1}^n t_{ij}(\mu, n-1),$$

$$Z_{min}(\mu, n-1) = \min_{j=1, n} \sum_{i=1}^n t_{ij}(\mu, n-1).$$

Численно, с помощью пакета прикладных программ MATLAB построим зависимость величин  $Z_{max}$ ,  $Z_{min}$  и  $\lambda_{max}$  от размера  $n$  матрицы  $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$ . Результат для  $\mu = 0.2$  представлен на рисунке 3.

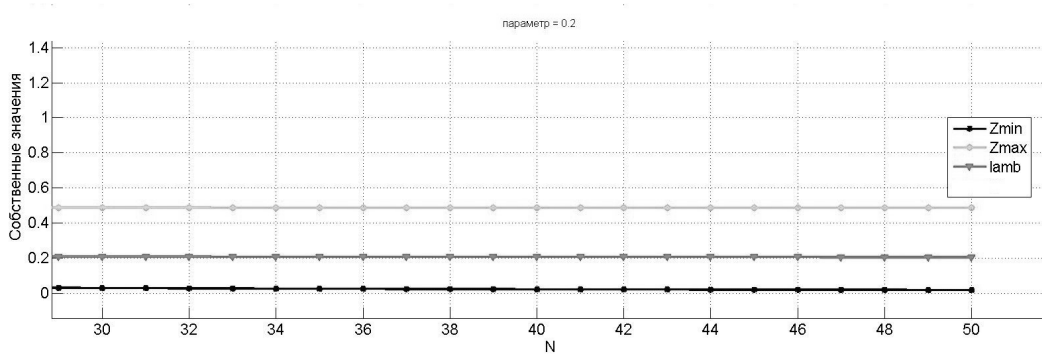


Рис. 3. Зависимость величин  $Z_{max}$ ,  $Z_{min}$  и  $\lambda_{max}$  от размера  $n$  матрицы  $\frac{1}{n}T_{n-1}(0.2)$ .

Можно показать, что максимальное собственное значение матрицы  $\frac{1}{n}T_{n-1}(0.2)$ , не зависимо от размера матрицы  $n$ , делит отрезок между  $Z_{max}$  и  $Z_{min}$  в одном и том же соотношении, которое зависит от значения параметра  $\mu$ :

$$\lambda_{max} = \frac{Z_{max} + k(\mu) \cdot Z_{min}}{1 + k(\mu)} \quad (4)$$

Проверим формулу (4) численно. На рисунке 4 визуализированы зависимости  $Z_{max}$ ,  $Z_{min}$ ,  $\lambda_{max}$  и  $k(\mu)$  от значения параметра  $\mu$ , полученные в результате соответствующих вычислений.

Зависимость коэффициента  $k(\mu)$  от значения параметра  $\mu$  можно выразить аналитически с помощью приложения *cftool* пакета MATLAB. Будем использовать дробно

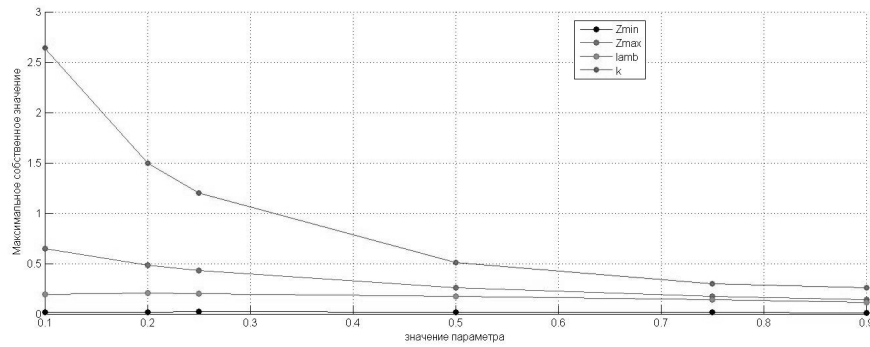


Рис. 4. Зависимость  $Z_{max}$ ,  $Z_{min}$ ,  $\lambda_{max}$  и  $k(\mu)$  от значения параметра  $\mu$ .

– линейную функцию. Графический результат работы приложения представлен на рисунке 5.

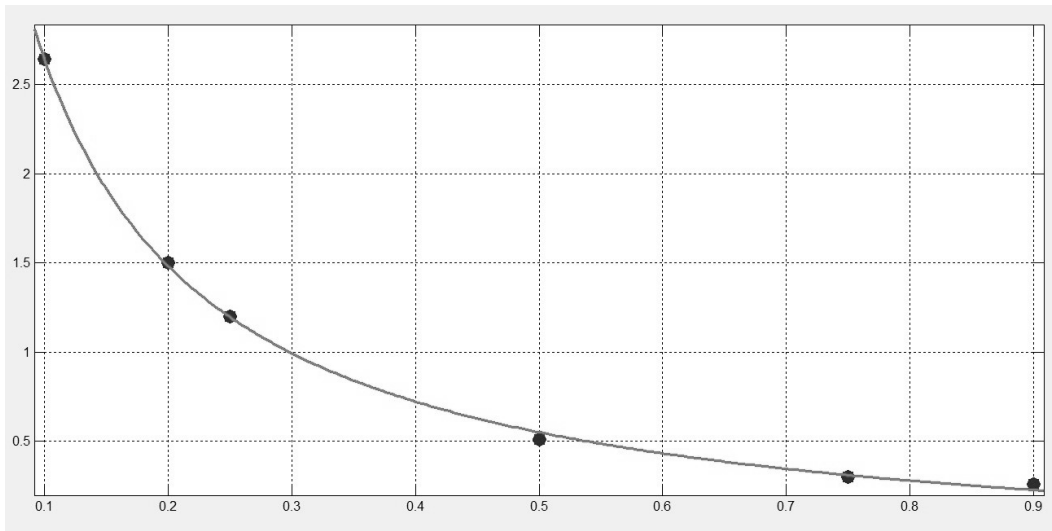


Рис. 5. Зависимость коэффициента  $k(\mu)$  от значения параметра  $\mu$  в виде дробно – линейной функции.

Аналитический вид дробно – линейного приближения зависимости коэффициента  $k(\mu)$  от значения параметра  $\mu$  следующий:

$$k(\mu) = \frac{0.41 - 0.22\mu}{0.05 + \mu}. \quad (5)$$

Коэффициент детерминации составил  $R^2 = 0.99$ .  
Теперь оценим точность формулы (3).

В таблице 2 приведены значения максимального собственного значения и его оценок, рассчитанных по формулам (4) – (5) в зависимости от значений параметра  $\mu$ :

$$\hat{\lambda}_{max} = \frac{(0.05 + \mu)Z_{max} + (0.41 - 0.22\mu)Z_{min}}{0.46 + 0.78\mu}. \quad (6)$$

При верификации были использованы такие значения параметра  $\mu$ , которые не вошли в Таблицу 2.

Последняя строка Таблицы 2 содержит относительную погрешность  $\delta$  оценки максимального собственного значения в %, то есть

$$\delta = \left| \frac{\lambda_{max} - \hat{\lambda}_{max}}{\lambda_{max}} \right| \cdot 100\%.$$

$\mu$	0.15	0.21	0.3	0.4	0.6	0.8	0.95
$\lambda_{max}$	0.201	0.204	0.201	0.190	0.160	0.129	0.108
$\hat{\lambda}_{max}$	0.205	0.207	0.200	0.186	0.156	0.129	0.112
$\delta, \%$	0.020	0.015	0.005	0.021	0.025	0.000	0.037

Таблица 2. Значения  $\lambda_{max}$ , его оценки  $\hat{\lambda}$  и погрешности оценки  $\delta$  в зависимости от значения параметра  $\mu$ .

**Выводы.** Таким образом, использованный в работе метод сведения изучения собственных значений краевой задачи (1) – (2) к изучению предельного поведения собственных чисел матрицы специального вида, позволил численно подтвердить полученные формулы (3) и (6) для максимального собственного значения краевой задачи (1) – (2), как функции порядка дробной производной модельного дробного дифференциального уравнения. Коэффициенты детерминации при аналитическом сглаживании функции, найденной таблично, составили 0.99 и 0.997. Максимальная относительная погрешность, как следует из Таблицы 2, равна 0.037 %.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Handbook of Fractional Calculus with Applications; Tenreiro, J. A., De Gruyter, M. (Eds.) GmbH: Berlin, Germany; Boston, MA, USA, V. 1–8. 2019.
- [2] Herrmann R. Fractional Calculus: An Introduction for Physicists, 2nd ed.; World Scientific: Singapore, 2014.
- [3] Sandev T., Tomovski Z. Fractional Equations and Models: Theory and Applications; Springer: Berlin, Heidelberg, Germany, 2019.
- [4] Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. // Phys. Rep. 2002. V. 371. pp. 461–580.
- [5] Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Huang J. F., Nie N. M., Tang Y. F., Zhang S. Y. Features of seepage of a liquid to a chink in the cracked deformable layer // Int. J. Model. Simul. Sci. Comput. 2010. V.1. pp. 333–347.
- [6] Jiang X.; Yu X.M. Analysis of fractional anomalous diffusion caused by an instantaneous point source in disordered fractal media. Int. J. Non-Linear Mech. 2006. V. 41. pp. 156–165.
- [7] Meerschaert M. M., Metzler R. and Klafter J. Fractional Calculus, Anomalous Diffusion, and Probability, Fractional Dynamics // Eds., World Scientific, Singapore. 2012. pp. 265–284.
- [8] Datsko B. Pattern formation in fractional reaction-diffusion systems with multiple homogeneous states // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. V.22. pp. 1250087.

- [9] Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, waves and stability in continuous media // Ser. adv. math. appl. sci. 1994. V.23. pp. 246. 251.
- [10] Aleroev T. S., Aleroeva H. T. Problems of Sturm-Liouville type for differential equations with fractional derivatives, In: Kochubei, A., Luchko Y. Editors, Handbook of Fractional Calculus with Applications. V 2: Fractional Differential Equations, Berlin, Boston: De Gruyter, 2019
- [11] Aleroev M., Aleroeva T., Kirane M., Tang Y. F. On one class of persymmetric matrices generated by boundary value problems for differential equations of fractional order // Applied Mathematics and Computation. 2015. V.268. pp. 151–163
- [12] Gantmacher F. R., Krein M. G. Oscillatory Matrices and Kernels, and Small Oscillations of Mechanical Systems // AMS Chelsea Publishing, 2002. Revised version, 310 pp.

L. V. Kirianova

**ESTIMATION OF THE FIRST EIGENVALUE OF THE BOUNDARY VALUE  
PROBLEM OF THE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION**

*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this paper, numerical methods are used to obtain estimates for the first eigenvalue of the boundary value problem of a model fractional differential equation describing oscillations of a fractal oscillator. Two empirical formulas are presented for the maximum eigenvalue of the model under consideration: as a function of the equation parameter and in terms of the maximum and minimum sum of row elements of a matrix of a special form. There is an error estimate.

**Keywords:** fractional differential equation, fractional differentiation operator, matrix eigenvalues, boundary value problem eigenvalues

**REFERENCES**

- [1] Handbook of Fractional Calculus with Applications; Tenreiro, J. A., De Gruyter, M. (Eds.) GmbH: Berlin, Germany; Boston, MA, USA, V. 1–8. 2019.
- [2] Herrmann R. Fractional Calculus: An Introduction for Physicists, 2nd ed.; World Scientific: Singapore, 2014.
- [3] Sandev T., Tomovski Z. Fractional Equations and Models: Theory and Applications; Springer: Berlin, Heidelberg, Germany, 2019.
- [4] Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. // Phys. Rep. 2002. V. 371. pp. 461–580.
- [5] Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Huang J. F., Nie N. M., Tang Y. F., Zhang S. Y. Features of seepage of a liquid to a chink in the cracked deformable layer //Int. J. Model. Simul. Sci. Comput. 2010. V.1. pp. 333–347.
- [6] Jiang X.; Yu X.M. Analysis of fractional anomalous diffusion caused by an instantaneous point source in disordered fractal media. Int. J. Non-Lin. Mech. 2006. V. 41. pp. 156–165.
- [7] Meerschaert M. M., Metzler R. and Klafter J. Fractional Calculus, Anomalous Diffusion, and Probability, Fractional Dynamics // Eds., World Scientific, Singapore. 2012. pp. 265–284.
- [8] Datsko B. Pattern formation in fractional reaction-diffusion systems with multiple homogeneous states // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. V.22. pp. 1250087.
- [9] Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, waves and stability in continuous media // Ser. adv. math. appl. sci. 1994. V.23. pp. 246. 251.
- [10] Aleroev T. S., Aleroeva H. T. Problems of Sturm-Liouville type for differential equations with fractional derivatives, In: Kochubei, A., Luchko Y. Editors, Handbook of Fractional Calculus with Applications. V 2: Fractional Differential Equations, Berlin, Boston: De Gruyter, 2019
- [11] Aleroev M., Aleroeva T., Kirane M., Tang Y. F. On one class of persymmetric matrices generated by boundary value problems for differential equations of fractional order //Applied Mathematics and Computation. 2015. V.268. pp. 151–163
- [12] Gantmacher F. R., Krein M. G. Oscillatory Matrices and Kernels, and Small Oscillations of Mechanical Systems // AMS Chelsea Publishing, 2002. Revised version, 310 pp.

---

*Kirianova Lyudmila Vladimirovna*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.



**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (ekc\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin\_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru) и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

**на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Мурашкин Е. В., Тихонов С. В.</i> К 60-летию со дня рождения проф. Юрия Николаевича Радаева.....	5
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам.....	19
<i>Володин Г. Т., Кочергин Д. С.</i> Колебания элементов балочных конструкций под действием взрыва в воде.....	29
<i>Петров Н. И.</i> О влиянии различных форм уравнений равновесий и граничных условий на определение критических усилий в теории неупругой устойчивости..	37
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Центральное растяжение физически нелинейного составного стержня.....	42
<i>Володин Г. Т., Кочергин Д. С.</i> Колебания и условия гарантированного разрушения балочных элементов конструкций взрывом в воде.....	59
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Исследование особенностей деформирования и разрушения бетонных слоистых стержней.....	65
<i>Субботин С. Л., Алексеев А. А.</i> Конкретизация обобщения гипотезы компланарности для упругопластических процессов в трехмерном изображающем пространстве А. А. Ильюшина.....	85
<i>Кержаев А. П., Меньшова И. В., Никитин А. В., Самсонов А. М.</i> Метод начальных функций и интегральное преобразование Фурье в задаче для плоскости с разрывами перемещений.....	96
<i>Спорыхин А. Н.</i> Динамическое деформирование кусочно-неоднородного сферического тела.....	110
<i>Левина Л. В., Пеньков В. Б., Новиков Е. А.</i> Строгие частные решения задач теплопроводности и термоупругости.....	115
<i>Чернышов Д. А. Ковалев А. В.</i> Термодеформирование сплошного шара с полиномиальным видом зависимости предела текучести от температуры.....	127
<i>Кирьянова Л. В.</i> Оценка первого собственного значения краевой задачи дробного дифференциального уравнения.....	136
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	144
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	147
СОДЕРЖАНИЕ.....	149

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2022. № 1 (51)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 05.10.2022. Выход в свет 07.10.2022.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>. Усл. печ. л. 18,7.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного  
педагогического университета им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38