

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**  
**Научный журнал**  
**№ 3(53)**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”  
**Основатели серии:** Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

**Ответственные секретари:** С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,  
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,  
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-  
лоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

**Адрес издателя:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1182

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2022

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK  
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO  
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA  
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal  
№ 3(53)**

**The Journal founder:** I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University  
**Founders of the series:** D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,  
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007  
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications  
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"  
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"  
(reg. No. 13109).

**Editor-in-chief:** B. G. Mironov

**Executive Editor:** Yu. N. Radayev

**Associate Editor:** N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

**Executive Secretary:** E. V. Murashkin, S. V. Matveev

**Editorial Board:** V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,  
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,  
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,  
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,  
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,  
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

**International Council:** V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

**Postal address::** ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

**Phone::** +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

**E-mail::** predel21@mail.ru

**Journal website::** <http://limit21.ru>

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

## РАЗРУШЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКИХ БАЛОК ВЗРЫВОМ В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Дано аналитическое решение задачи о гарантированном разрушении балки взрывом заряда конденсированного взрывчатого вещества (ВВ) в воде. Предполагается, что материал балки чувствителен к скорости деформации, используется критерий разрушения по максимальным нормальным напряжениям, эквивалентному при изгибе максимальному изгибающему моменту. Учитывается произвольное расположение заряда ВВ над балкой, эффекты отражения ударной волны и спутного потока воды от балки, глубина погружения конструкции и заряда в воду. Обнаружено существенное влияние величины коэффициента вязкости материала балки на величину заряда ВВ, необходимого для ее гарантированного разрушения.

**Ключевые слова:** упруго-вязкая балка, взрыв в воде, разрушение балочной конструкции.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.001

УДК: 531/534

В работе [1] получено определяющее уравнение при воздействии взрывной нагрузки на балку, свободно лежащую на идеальных (неразрушаемых взрывом) опорах в воде; материал балки принят упруго-вязким с известным из экспериментов коэффициентом вязкости. Найдены интервалы значений коэффициента вязкости, в которых определяется соответствующее решение, при этом расположение заряда ВВ предполагается в центре пролёта балки. В данной работе рассматривается произвольное расположение заряда ВВ над балкой, используется найденная в работе [2] формула для удельного импульса взрыва в воде, используется критерий разрушения, основанный на гипотезе о достижении в критическом поперечном сечении балки в момент разрушения максимального изгибающего момента и дополненный коэффициентом динамичности [3], [4]. Найдены для каждого возможного интервала значений коэффициента вязкости величины радиуса и массы сосредоточенного заряда ВВ, взрыв которого для его фиксированного расположения над балкой в воде, приводит к её гарантированному разрушению.

---

© Володин Г. Т., Кочергин Д. С., 2022

Володин Геннадий Тимофеевич

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Кочергин Денис Сергеевич

e-mail: sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 18.09.2022

Как известно [1], [2] в силу быстротечности взрывной нагрузки, действующей на упруго-вязкую балку в воде, её деформирование происходит в период её свободных колебаний, описываемых уравнением

$$(m_* + m_1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta J \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0, \quad (1)$$

где  $m_* = \rho_* b h$ ,  $m_1 = \frac{\pi}{4} \rho_1 b h$  – соответственно погонная [3] масса балки и присоединенная погонная [5] масса воды,  $b$  и  $h$  – соответственно ширина и высота прямоугольного поперечного сечения балки, постоянного по всей её длине;  $w(x, t)$  – прогиб балки в сечении с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ,  $E$  – модуль упругости материала балки,  $J$  – момент инерции,  $\eta$  – коэффициент вязкости, при этом нормальные напряжения  $\sigma$  в поперечных сечениях балки удовлетворяют соотношению [6], [7].

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – относительная деформация,  $\dot{\varepsilon}$  – скорость относительной деформации. Уравнение (1) должно удовлетворять для свободно опертой по концам балки граничным условиям

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0. \quad (4)$$

Соотношения (3) соответствуют отсутствию смещений граничных сечений балки, а условия (4) – отсутствию изгибающих моментов на концах балки. Начальные условия для уравнения (1) соответствуют взрывному нагружению балки в начальный момент времени, а именно: условие

$$w(x, 0) = 0 \quad (5)$$

соответствует отсутствию начальных смещений по всей длине балки; условие

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \frac{i_*(x)}{m_* + m_1} \quad (6)$$

соответствует импульсному (взрывному) характеру действующей нагрузки, согласно которому в начальный момент времени сечения балки получают начальные скорости, пропорциональные действующему распределенному импульсу [3], при этом эффекты сопротивления воды движению балки учитываются введением присоединенной массы воды [5], [8],  $i_*(x)$  – распределенный по всей длине балки погонный импульс, при этом

$$i_*(x) = K_1 \cdot b \cdot i(x), \quad (7)$$

где  $K_1$  – коэффициент формы [3], учитывающий расположение балки по отношению к фронту падающей на неё ударной волны,  $i(x)$  – удельный импульс, полученный каждым сечением  $x$  балки за время действия взрывной нагрузки, а удельный импульс  $i(x)$  вычисляется по формуле [2]

$$i(x) = 1,4 \cdot \frac{r_0}{a_{01}} \cdot \left( \frac{a}{r_0} \right)^{0,24} \cdot (\eta_*(x) \rho_2 u_2^2 - P_{01}), \quad (8)$$

где  $r_0$  – радиус заряда ВВ,  $a_{01}$  – скорость звука в воде,  $a$  – расстояние от центра взрыва до оси балки,  $\rho_2, u_2$  – соответственно плотность и скорость частиц на фронте падающей ударной волны,  $P_{01}$  – давление на поверхности водоёма. Отметим, что

значения  $\rho_2$  и  $u_2$  получены с использованием экспериментальных данных [2], [8], а

$$\eta_*(x) = \frac{a^2 [2a^2 + (x - x_*)^2]}{[a^2 + (x - x_*)^2]^2}, \quad (9)$$

где  $x_*$  – координата эпицентра взрыва.

Решение начально-краевой задачи (1), (3-6), ищем методом разделения переменных с выделением главного (низкочастотного) колебания в виде

$$w(x, t) = w_0(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (10)$$

где функция  $w_0(t)$  определяет в каждый момент времени  $t$  прогиб в центре пролёта балки. Выбор такого (главного) колебания объясняется тем, что вследствие краткосрочного действия взрывной нагрузки предполагается определить гарантированное разрушение балки уже при первом (низкочастотном) колебании. Функция (10) удовлетворяет всем краевым условиям задачи (3), (4).

Подставим функцию (10) в уравнение (1), в результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно искомой функции  $w_0(t)$ :

$$\frac{d^2 w_0}{dt^2} + \gamma_1 \frac{dw_0}{dt} + \gamma_2 w_0 = 0, \quad (11)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\eta J \pi^4}{l^4(m_* + m_1)}; \quad \gamma_2 = \frac{E J \pi^4}{l^4(m_* + m_1)} \quad (12)$$

Характеристическое уравнение для уравнения (11) запишем в виде

$$\lambda^2 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 = 0 \quad (13)$$

Дискриминант уравнения (13) равен

$$D = \gamma_1^2 - 4\gamma_2 \quad (14)$$

Поскольку коэффициент вязкости  $\eta$  не определен, а также неизвестен радиус заряда  $r_0$ , взрыв которого приводит к гарантированному разрушению балки, выразим искомую функцию  $w_0(t)$  через неизвестный радиус заряда  $r_0$  и коэффициент вязкости  $\eta$ , а затем воспользуемся критерием разрушения; тем самым получим дополнительное соотношение для нахождения искомого радиуса  $r_0$ , определяющего решение задачи в соответствующем интервале значений коэффициента вязкости  $\eta$ .

Как известно, знак и величина дискриминанта  $D$  определяет вид функции  $w_0(t)$ . Возможны случаи:  $D < 0$ ;  $D = 0$ ;  $D > 0$ .

*Случай 1.* Пусть  $D < 0$ , тогда должно выполняться соотношение

$$\gamma_1 < 2\sqrt{\gamma_2}, \quad (15)$$

откуда получим интервал для  $\eta$ :

$$0 < \eta < \frac{2l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{E}{J}(m_* + m_1)} \quad (16)$$

В интервале для коэффициента вязкости (16) получим решение

$$w_0(t) = \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{D_1}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2} t \right) \cdot e^{-\frac{\gamma_1}{2} t} \quad (17)$$

где  $D_1 = -D$ .

Из начального условия (5) найдем  $C_1 = 0$ . Следовательно, решение (17) примет вид

$$w_0(t) = C_2 \cdot e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t \quad (18)$$

Коэффициент  $C_2$  найдем из начального условия (6) при  $x = \frac{l}{2}$  так как  $w_0(t)$  – функция, определяющая прогиб в середине пролёта балки. В результате получим

$$C_2 = \frac{2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{(m_* + m_1)\sqrt{D_1}}; \quad (19)$$

тогда функция  $w_0(t)$  примет вид

$$w_0(t) = \frac{2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{(m_* + m_1)\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t \quad (20)$$

и решение  $w(x, t)$  можно записать в виде

$$w(x, t) = \frac{2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{(m_* + m_1)\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (21)$$

Максимальное значение прогиба балки будет в середине её длины в момент времени, определяемым из условия

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

Из уравнения (22) найдем

$$t_* = \frac{2}{\sqrt{D_1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{D_1}}{\gamma_1} + \frac{2\pi n}{\sqrt{D_1}}, \quad (23)$$

где  $n=0, 1, 2, \dots$

Таким образом, максимальные значения прогиба балка получает в середине пролёта в моменты времени  $t_*$ :

$$\max w = w\left(\frac{l}{2}, t_*\right) = \frac{2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{(m_* + m_1)\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_*} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t_* \quad (24)$$

Найдём теперь максимальное значение изгибающего момента, нужное для формулировки условия разрушения балки. Известно, [7] что формула для изгибающего момента в любом сечении  $x$  балки имеет вид

$$M(x, t) = -\frac{EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (25)$$

В работе [2] показано, что максимальный изгибающий момент соответствует максимальному прогибу балки. Следовательно,

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}, t_*\right) \quad (26)$$

Используем далее критерий гарантированного разрушения по достижению в критическом сечении максимального изгибающего момента [2]. Этот критерий модифицирован введением коэффициента динамичности  $\mu_3$ , а также коэффициента однородности

на гарантированное разрушение  $K_{0*}$  [3], [4] и имеет вид

$$\frac{M_{\max}}{W \cdot \delta_{*n}} - K_{0*} \mu_3 \geq 0, \quad (27)$$

где  $\delta_{*n}$  – нормированный браковочный минимум материала балки,  $W$  – осевой момент сопротивления сечения.

При этом согласно формулам (21), (23), (25)

$$M_{\max} = \frac{2\pi^2 EJ \cdot i_*(\frac{l}{2})}{l^2(m_* + m_1)\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_*} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2}t_*, \quad (28)$$

а  $t_*$  определяется формулой (23).

Левая часть неравенства (27) является функцией искомого радиуса  $r_0$  заряда ВВ. Решение этого трансцендентного неравенства определяет минимальное значение радиуса  $r_0$  сферического заряда ВВ при взрыве которого балка с указанными физическими и геометрическими характеристиками и известными (фиксированными) координатами расположения заряда относительно балки в воде будет гарантированно разрушена. Полученное значение для максимального изгибающего момента соответствует вязкостным характеристикам материала балки с коэффициентом вязкости в интервале, определяемым неравенствами (16). Для другого интервала получим другое решение.

*Случай 2.* Пусть теперь  $D = 0$ . Тогда

$$\gamma_1^2 = 4\gamma_2, \quad (29)$$

Из (29) найдём

$$\eta = \frac{2l^2}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{J}(m_* + m_1)} \quad (30)$$

и решение  $w_0(t)$  можно записать в виде

$$w_0(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \quad (31)$$

Подчинив решение (31) начальным условиям, соответствующим (5) и (6), получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{i_*(\frac{l}{2})}{m_* + m_1}, \quad (32)$$

при этом в момент времени  $t_*$ , определяемый формулой

$$t_* = \frac{2}{\gamma_1} = \frac{2l^4(m_* + m_1)}{\eta J \pi^4} \quad (33)$$

функция  $w_0(t)$  будет иметь максимальное значение

$$\max w_0(t) = w_0(t_*) \quad (34)$$

Итак, для величины  $\eta$ , определяемой формулой (30), получим решение

$$w_0(t) = \frac{i_*(\frac{l}{2})}{m_* + m_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \quad (35)$$

при этом

$$\max w_0(t) = w_0(t_*) = \frac{2 \cdot l^4 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{\eta J \pi^4 e} \quad (36)$$

Максимальное значение изгибающего момента наблюдается в момент времени  $t = t_*$  в середине пролёта балки. Согласно полученному решению

$$w(x, t) = \frac{i_*(\frac{l}{2})}{m_* + m_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (37)$$

и формулы (25) для изгибающего момента, найдём

$$M_{\max} = \frac{2 \cdot E \cdot l^2 \cdot i_*(\frac{l}{2})}{\eta \pi^2 e} \quad (38)$$

Далее, определяем минимальный радиус  $r_0$  заряда из трансцендентного неравенства (27), в которое вместо  $M_{\max}$  следует подставить выражение из формулы (38).

*Случай 3.* Рассмотрим теперь случай  $D > 0$ , которому соответствует диапазон

$$\eta > \frac{2l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{E}{J} (m_* + m_1)}. \quad (39)$$

Для этого случая решение  $w_0(t)$  примет вид

$$w_0(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma_1 + \sqrt{D}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\gamma_1 - \sqrt{D}}{2}t} \quad (40)$$

Подчинив найденное решение (40) начальным условиям, соответствующим (5) и (6), получим систему уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ (-\gamma_1 + \sqrt{D}) C_1 - (\gamma_1 + \sqrt{D}) C_2 &= 2i_*(\frac{l}{2}) \end{aligned} \right\}, \quad (41)$$

из которой находим

$$C_1 = \frac{i_*(\frac{l}{2})}{\sqrt{D}}; \quad C_2 = -\frac{i_*(\frac{l}{2})}{\sqrt{D}}; \quad (42)$$

Найдём момент времени  $t_*$ , в который прогиб в середине пролёта балки, а также изгибающий момент будут иметь максимальные значения. Для этого момента времени должно выполняться условие

$$\left. \frac{\partial w_0}{\partial t} \right|_{t=t_*} = 0 \quad (43)$$

Решение уравнения (43) определяет  $t_*$  в виде

$$t_* = \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \frac{(\gamma_1 + \sqrt{D})}{(\gamma_1 - \sqrt{D})} \quad (44)$$

Максимальный прогиб балки получим в её середине пролёта в момент времени  $t_*$ . Величина максимального прогиба выражается согласно (40) и (44) формулой

$$\max w = w_0(t_*) = C_1 e^{-\frac{\gamma_1 + \sqrt{D}}{2}t_*} + C_2 e^{-\frac{\gamma_1 - \sqrt{D}}{2}t_*}. \quad (45)$$

Максимальный изгибающий момент определяется также в середине пролёта балки в этот момент времени и выражается формулой

$$M_{\max} = M(\frac{l}{2}, t_*) = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left( C_1 e^{-\frac{\gamma_1 + \sqrt{D}}{2}t_*} + C_2 e^{-\frac{\gamma_1 - \sqrt{D}}{2}t_*} \right), \quad (46)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  определены формулой (42). Далее, для нахождения  $r_0$  используем соотношение (27).



На рисунках 1-2 в качестве примеров расчёта показано влияние коэффициента вязкости на величину радиуса заряда ВВ, гарантирующего при взрыве разрушение рассматриваемой балочной конструкции. На рисунке 3 показано изменение радиуса  $r_0$  заряда ВВ с учётом коэффициента вязкости в зависимости от смещения  $x_*$ . Все расчёты выполнены, исходя из следующих входных данных: длина балки  $l=2$ [м]; параметры сечения:  $b=0.20$  [м];  $h=0.30$  [м]; расстояние заряда от оси балки  $a=1$  [м]; глубина погружения  $H = 100$ [м], модуль упругости материала балки  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ [Па], коэффициент динамичности  $\mu_3 = 1.8$ , коэффициент однородности на гарантированное разрушение  $K_{0*} = 1.644$ , плотность материала балки (Ст.3)  $\rho_0 = 7800$ [кг/м<sup>3</sup>], нормированный браковочный минимум  $\delta_{*n} = 2.4 \cdot 10^8$ [Па], плотность воды  $\rho_1 = 1000$ [кг/м<sup>3</sup>], скорость звука в воде  $a_{01} = 1460$ [м/с], давление на поверхности  $P_{01} = 101325$ [Па], взрывчатое вещество – литой тротил, плотностью  $1620$  [кг/м<sup>3</sup>].

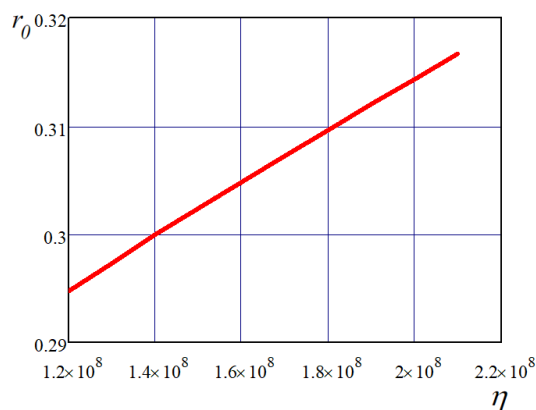


Рис.1 Зависимость радиуса  $r_0$ [м] заряда ВВ от коэффициента вязкости  $\eta$ [кг/м·с] ( $D < 0$ )

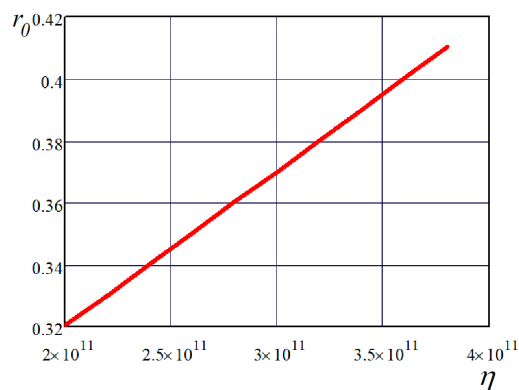


Рис.2 Зависимость радиуса  $r_0$ [м] заряда ВВ от коэффициента вязкости  $\eta$ [кг/м·с] ( $D > 0$ )

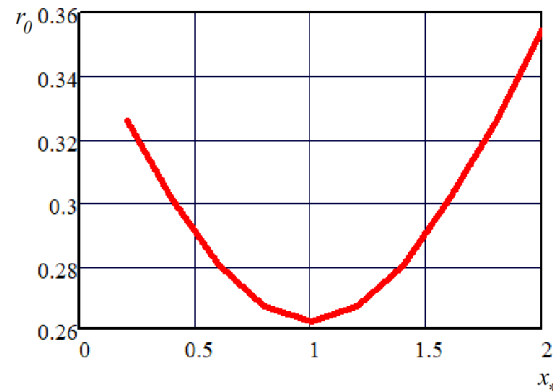


Рис.3 Зависимость радиуса  $r_0$ [м] заряда ВВ от смещения  $x_*$ [м] с учётом коэффициента вязкости  $\eta$ [кг/м · с] ( $D=0$ )

### Заключение.

Из представленных графиков (рис.1, рис.2) видно, что между коэффициентом вязкости и радиусом заряда ВВ существует зависимость, которая указывает на существенное влияние величины коэффициента вязкости материала балки на величину заряда ВВ, необходимого для её гарантированного разрушения. На рис.3 показана зависимость радиуса заряда ВВ от координаты эпицентра взрыва с учётом коэффициента вязкости, который является определенной фиксированной величиной. Таким образом, располагая информацией о геометрических и физических характеристиках материала балки и заряда ВВ, по предложенной в этой работе методике можно определить минимальный радиус заряда ВВ, взрыв которого, для его фиксированного расположения относительно материала балки в воде, приводит к её гарантированному разрушению.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Володин Г. Т., Кочергин Д. С. Деформирование упруго-вязких балок взрывной нагрузкой в воде. Чебоксары: Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 1(47), 2021. 56-63 с.
- [2] Володин Г. Т., Кочергин Д. С. Обобщенный анализ гарантированного разрушения взрывом балочных элементов конструкций в воде. № 2(52). Чебоксары, 2022. 62-71 с.
- [3] Саламахин Т. М. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.
- [4] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидких средах. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. Тула: Левша, 2005. 160 с.
- [5] Кочин Н.Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, часть 1. Москва: ГИФМЛ, 1963. 584 с.
- [6] Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности, ползучести. Москва: Высшая школа, 1968. 612 с.
- [7] Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 607 с.
- [8] Саламахин Т. М. Физические основы механического действия взрыва и методы определения взрывных нагрузок. Москва: ВИА, 1974. 255 с.

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

## GENERALIZED ANALYSIS OF GUARANTEED EXPLOSION DESTRUCTION OF BEAM STRUCTURAL ELEMENTS IN WATER

*Tula State University, Tula, Russia.*

**Abstract.** An analytical solution is given to the problem of guaranteed destruction of the beam by the explosion of a charge of a condensed explosive substance (BB) in water. It is assumed that the beam material is sensitive to the rate of deformation, the criterion of failure is used for maximum normal stresses equivalent to the maximum bending moment during bending. The arbitrary location of the explosive charge above the beam, the effects of the reflection of the shock wave and the satellite flow of water from the beam, the depth of immersion of the structure and the charge into the water are taken into account. A significant influence of the value of the viscosity coefficient of the beam material on the value of the explosive charge required for its guaranteed destruction was found.

**Keywords:** elastic-viscous beam, explosion in water, destruction of the beam structure.

### REFERENCES

- [1] Volodin G. T., Kochergin D. S. Deformation of elastic-viscous beams by explosive load in water. Cheboksary: Bulletin of the I. Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. No. 1(47), 2021. 56-63 p. (in Russian).
- [2] Volodin G. T., Kochergin D. S. A generalized analysis of the guaranteed destruction by explosion of beam structural elements in water. No. 2(52). Cheboksary: Bulletin of the I. Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state, 2022. 62-71 p. (in Russian).
- [3] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
- [4] Volodin G. T. The effect of explosion of charges of condensed explosives in gas and liquid media. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).
- [5] Kochin N. E., Kibel I. A., Rose N. V. Theoretical hydromechanics, part 1. Moscow: GIFML, 1963. 584 p. (in Russian).
- [6] Bezukhov N. I. Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity, creep. Moscow: High School, 1968. 612 p. (in Russian).
- [7] Belyaev N. M. Strength of materials. Moscow, 1976. 608 p. (in Russian).
- [8] Salamakhin T. M. Physical foundations of the mechanical action of an explosion and methods for determining explosive loads. Moscow: VIA, 1974. 255 p. (in Russian).

---

*Volodin Gennady Timofeevich*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia.

*Kochergin Denis Sergeevich*, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

М. М. Вислогузова<sup>1</sup>, А. В. Ковалев<sup>1,2</sup>

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКА С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭФФЕКТОВ

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

<sup>2</sup> Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия

**Аннотация.** В данной работе рассмотрено термоупругопластическое состояние тонкого кругового диска. Тепловой источник известного радиуса действует в центре диска. Поле температур центральной части диска является однородным. На внешней границе диска определены температура и давление. Напряженное состояние определено при использовании условия пластичности Мизеса с учетом независимости всех механических констант материала от температуры. Показана невозможность одновременного зарождения нескольких пластических зон. Приведены графики напряжений. Проведено сравнение полученных результатов с известными решениями.

**Ключевые слова:** пластичность, упругость, плоское напряженное состояние, термоупругопластичность.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.002

УДК: 539.3

Определению напряженно-деформированного состояния (НДС) посвящено большое число работ [1-10]. В части из них [1-5], [8-9] рассматривались задачи определения НДС в тонких дисках. В частности, в [2-5], [8-9] решались задачи о силовом и тепловом воздействии. В работе [2] определялось НДС в тонком упругопластическом диске с учетом предела текучести от температуры. При этом распределение температуры принималось стационарным.

**1. Постановка задачи.** В данной работе определялось напряженное состояние в тонком круговом диске радиуса  $b$ , находящемся под воздействием теплового

---

© Вислогузова М. М., Ковалев А. В., 2022

Вислогузова Мария Михайловна

e-mail: visloguzova99@mail.ru, студент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kav-mail@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.09.2022

источника и давления  $p_b$  на внешней границе. Задача решалась в рамках плоского напряженного состояния в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ .

Тепловой источник действует в центральной части диска  $0 \leq r \leq a$ . Поле температур, согласно [1] - [4], определено формулой:

$$T = T_a f, \quad f = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\ln(\frac{b}{r})}{\ln(\frac{b}{a})}, & \text{если } a \leq r \leq b. \end{cases} \quad (1)$$

Все искомые величины, вследствие осевой симметрии, зависят только от расстояния  $r$  до теплового источника. Механические константы материала приняты независимыми от температуры.

Все величины приведены к безразмерному виду с сохранением прежних обозначений. Масштаб для напряжений – предел пластичности  $k$ , масштаб длины- радиус  $a$ .

В рассматриваемой задаче, основные уравнения, описывающие поведение термоупругопластического диска взяты согласно [5]-[7] и включают в себя:

- уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \quad (2)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\theta$  - компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат;  
- соотношения Коши

$$e_r = \frac{du}{dr}, \quad e_\theta = \frac{u}{r}, \quad (3)$$

где  $e_r, e_\theta$  - компоненты тензора деформаций в цилиндрической системе координат,  $u$ -компонента вектора перемещений в цилиндрической системе координат;

В качестве условия пластичности было выбрано условие пластичности Мизеса:

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = k^2. \quad (4)$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука в форме:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} [e_r + \nu e_\theta - (1 + \nu)\alpha T], \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} [e_\theta + \nu e_r - (1 + \nu)\alpha T]$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $T$  – температура, которая определяется (1).

Граничные условия:

$$\sigma_r|_{r=b} = -p_b, \quad (6)$$

$$\sigma_r|_{r=c_i} = -p_i, \quad (7)$$

где  $c_i$  – радиус упругопластической границы,  $p_i$  – давление на границе раздела упругой и пластической зон.

Условие сопряжения:

$$[\sigma_\theta]|_{r=c_i} = 0. \quad (8)$$

**2. Решение и результаты.** Аналогично [2], при решении задачи, введены обозначения  $c_i$  и  $c_e$  – радиусы границы упругой области. Давление на этих границах:  $p_i$  и  $p_e$ .

Из (2), (3), (5), (6), (7) получим:

$$\sigma_r = -\frac{\alpha ET_a}{r^2} \int_{c_i}^r f r dr + \frac{c_i^2 p_i - b^2 p_b}{b^2 - c_i^2} + \frac{\alpha ET_a}{b^2 - c_i^2} \int_{c_i}^b f r dr - \frac{1}{r^2} \left( \frac{b^2 c_i^2 (p_i - p_b)}{b^2 - c_i^2} + \frac{c_i^2 \alpha ET_a}{b^2 - c_i^2} \int_{c_i}^b f r dr \right), \quad (9)$$

$$\sigma_\theta = \alpha ET_a \left( \frac{1}{r^2} \int_{c_i}^r f r dr - f \right) + \frac{c_i^2 p_i - b^2 p_b}{b^2 - c_i^2} + \frac{\alpha ET_a}{b^2 - c_i^2} \int_{c_i}^b f r dr + \frac{1}{r^2} \left( \frac{b^2 c_i^2 (p_i - p_b)}{b^2 - c_i^2} + \frac{c_i^2 \alpha ET_a}{b^2 - c_i^2} \int_{c_i}^b f r dr \right) \quad (10)$$

(9), (10) представляют собой выражения для определения напряжений в упругой области. Алгоритм решения подобной задачи подробно рассмотрен в книге [7]. Аналогичные выражения для напряжений в упругой области были получены в [2].

В пластической области, согласно [5], (4):

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -k. \quad (11)$$

Радиус  $b = b_k$ , при котором возможно одновременное зарождение пластических зон на внешней границе и центральной части диска, определен основываясь на [2]. Из (11) следует:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -2k. \quad (12)$$

Тогда, с учетом выражений (9), (10):

$$-\alpha ET_a f + 2 \frac{c_i^2 p_i - b^2 p_b}{b^2 - c_i^2} + 2 \frac{\alpha ET_a}{b^2 - c_i^2} \int_{c_i}^b f r dr = -2k. \quad (13)$$

Положив  $c_i = 0, c_e = b$ :

$$-\alpha ET_a f + 2 \frac{\alpha ET_a}{b^2} \int_0^b f r dr = 2p_b - 2k. \quad (14)$$

Отсюда температура:

$$T_a = \frac{2b^2(p_b - k)}{\alpha E \left( 2 \int_0^b f r dr - b^2 \right)}. \quad (15)$$

Температура, для которой на внешней границе выполнено (12) при  $r = b$ :

$$T_a = \frac{b^2 (p_b - k)}{\alpha E \int_0^b f r dr}. \quad (16)$$

Из (15), (16) следует, что радиус, при котором на внешней границе диска и на границе температурного источника зарождаются одновременно две пластические области:

$$b = b_k = 0. \quad (17)$$

Таким образом, одновременное зарождение пластических зон в центре и на внешней границе диска, в рамках решаемой задачи, невозможно, в отличие от [2].

Для определения радиуса границы раздела упругой и пластической зон, было использовано условие сопряжения окружного напряжения (8).

$$\alpha E T_a \left( \frac{2}{b^2 - c_i^2} \int_{c_i}^b \frac{\ln \left( \frac{b}{c_i} \right)}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)} r dr - \frac{\ln \left( \frac{b}{c_i} \right)}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)} \right) + \frac{2b^2 (p_i - p_b)}{b^2 - c_i^2} = 0. \quad (18)$$

Выражение (18) позволяет определить радиус упругопластической границы. Для значений параметров:

$$K = 1, \alpha E = 0.012, a = 1, b = 7, T_a = 330, p_b = 0, \\ c_i = 1.633. \quad (19)$$

**3. Результаты расчетов.** Для построения графиков, приведенных ниже, были приняты следующие значения параметров:

$$K = 1, \alpha E = 0.012, a = 1, b = 7, T_a = 330, p_b = 0, c_i = 1.633.$$

На рис. 1, приедены графики зависимостей компонент напряжения от радиуса диска без учета зависимости предела текучести от температуры, полученные по формулам (9), (10).

Аналогичные графики зависимости компонент напряжений от радиуса можно получить для условия пластичности Треска по результатам работы [2], но без учета зависимости предела текучести  $k$  от температуры (рис. 2).

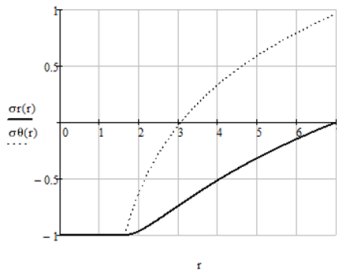


Рис. 1. Зависимость компонент напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  от радиуса  $r$  без учета зависимости предела текучести от температуры

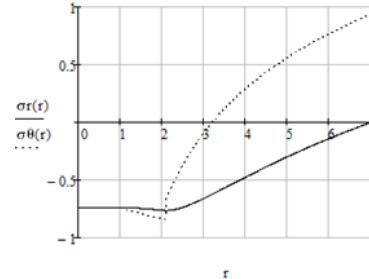


Рис. 2. Зависимость компонент напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  от радиуса  $r$  при учете зависимости предела текучести от температуры

Сравнение графиков рис. 1 с графиками на рис. 2 показало, что при учете зависимости предела текучести от температуры упругопластическая граница смещается в сторону внешней границы диска. Напряжения в пластической зоне не являются постоянными величинами.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Артемов М. А., Якубенко А. П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. №1. С. 30-38.
- [2] Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Переяславская И. И. О напряженном состоянии тонкого диска с учетом зависимости предела текучести от температуры // Инженерный вестник Дона.-науч. журн. 2017. № 3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-napryazhennom-sostoyanii-tonkogo-diska-s-uchetom-zavisimosti-predela-tekuchesti-ot-temperatury/viewer>
- [3] Артемов М. А., Барановский Е. С., Акиншин В. В., Скорняков Н. С., Фатхудинов Д. Б. Математическое моделирование состояния тонкого диска при тепловом и силовом воздействиях // Инженерный вестник Дона.-науч. журн. 2019. № 4. Режим доступа: [http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_28\\_Artemov.pdf\\_4c0401978b.pdf](http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_28_Artemov.pdf_4c0401978b.pdf). (Дата поступления статьи: 07.06.2019).
- [4] Бердзенишвили Г. Г., Артемов М. А., Барановский Е. С., Семка Э. В., Фатхудинов Д. Б. О поведении упругопластического диска под действием теплового источника [Сетевое издание] // Инженерный вестник Дона.-науч. журн. 2018. № 2. Режим доступа: [http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_190\\_Berdzeneshvili\\_N.pdf\\_45978b1390.pdf](http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_190_Berdzeneshvili_N.pdf_45978b1390.pdf) (Дата поступления статьи: 01.06.2018).
- [5] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 252 с.
- [6] Демидов С.П. Теория упругости/ С.П. Демидов – Москва: Высшая школа, 1979. – 432 с.
- [7] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости/С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер Москва : Наука, 1979. 560 с.
- [8] О механическом поведении упрочняющегося упругопластического диска под действием источника тепла / А.А. Афанасьев, К.К. Горностаев, А.В. Ковалев, А.С.Чеботарев // Вестник Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. 2017. № 50. С. 57–66.
- [9] Вислогузова М. М., Гоцев Д. В., Ковалев А. В., Шашкин А. И. Определение напряженного состояния упрочняющегося диска под действием температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 168-173.
- [10] Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е.В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Изв. РАН. МТТ. 2014. Т. 49. № 2. С. 124-131.

М. М. Visloguzova<sup>1</sup>, А. V. Kovalev<sup>1,2</sup>

### TO DETERMINE THE STRESS STATE OF THE DISK, TAKING INTO ACCOUNT TEMPERATURE INFLUENCES

<sup>1</sup> *Voronezh State University, Voronezh, Russia*

<sup>2</sup> *Military training and research center of the air force "Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia*

**Abstract.** In this paper, the thermoelastic state of a thin circular disk is considered. A heat source of known radius acts in the center of the disk. The temperature field of the central part is homogeneous. The temperature and pressure are determined at the outer boundary of the disk. The stress state is determined using the Mises plasticity condition, taking into account the independence of all mechanical constants of the material from temperature. The impossibility of simultaneous generation of several plastizones is shown. Stress graphs are given. The results obtained are compared with known solutions.



**Keywords:** plasticity, elasticity, plane stress state, thermoelasticity.

### Литература

- [1] Artemov M. A., Yakubenko A. P. Mathematical modeling of mechanical behavior of a rotating disk / M. A. Artemov, A. P. Yakubenko // Voronezh. state. UN-t-2014. no. 1. pp. 30-38.
- [2] Artemov M. A., Baranovsky E. S., Berdzenishvili G. G., Pereyaslavskaya I. I. On the stressed state of a thin disk taking into account the dependence of the yield strength on temperature [Online edition] // Engineering Bulletin of the Don.-scientific journal. 2017. No. 3. Access mode: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-napryazhennom-sostoyanii-tonkogo-diska-s-uchetom-zavisimosti-predela-tekuchesti-ot-temperature/viewer>
- [3] Artemov M. A., Baranovsky E. S., Akinshin V. V., Skorniyakov N. S., Fatkhudinov D. B. Mathematical modeling of the thin disk state under thermal and power effects [Online edition] // Engineering Bulletin of the don.- scientific journal-2019. No 4. Mode of delivery: [http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_28\\_Artemov.pdf\\_4c0401978b.pdf](http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_28_Artemov.pdf_4c0401978b.pdf) (date of receipt of the article: 07.06.2019).
- [4] Berdzenishvili G. G., Artemov M. A., Baranovsky E. S., Semka E. V., Fatkhudinov D. B. On the behavior of an elastic-plastic disk under the action of a heat source [Online edition] // Engineering Bulletin of the don. scientific journal. 2018. No 2. Access Mode: [http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_190\\_Berdzeneshvili\\_N.pdf\\_45978b1390.pdf](http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_190_Berdzeneshvili_N.pdf_45978b1390.pdf) (date of receipt of the article: 01.06.2018).
- [5] Parkus G. Unsteady temperature stresses. Moscow: State publishing house of physical and mathematical literature, 1963. 252 p.
- [6] Demidov S. P. Theory of elasticity. Moscow: Higher school, 1979. 432 p.
- [7] Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity Goodyer-Moscow: Nauka Publishing house, 1979. 560 p.
- [8] Afanasyev A. A. , Gornostaev K. K., Kovalev A. V., Chebotarev A. S. On the mechanical behavior of a hardening elastic-plastic disk under the action of a heat source // Bulletin of the Tomsk State University. Ser. Mathematics and Mechanics. 2017. No. 50 pp. 57-66.
- [9] Visloguzova M.M., Gotsev D.V., Kovalev A.V., Shashkin A.I. Determination of the stress state of a hardening disk under the influence of temperature // Bulletin of the I.Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the limit state. 2020. No. 3 (45). pp. 168-173.
- [10] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the field of residual stresses under local thermal influence // Izv. RAS. MTT. 2014. Vol. 49. No. 2. Pp. 124-131.

---

*Maria Mikhailovna Visloguzova*, student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Alexey Viktorovich Kovalev*, Professor, Doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh State University, Military training and research center of the air force “Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia.

С. Л. Субботин, А. А. Алексеев

## РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА СН-ЭВМ В РАСЧЕТАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ВИНТОВЫХ ТРАЕКТОРИЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ

*Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** В работе представлена реализация метода СН-ЭВМ, предложенного А.А. Ильюшиным для решения краевых задач, в расчетах процессов упругопластического деформирования по траекториям постоянной кривизны и кручения. Приведены расчетные уравнения теории упругопластических процессов для определения скоростей деформаций (производных по длине дуги траектории деформирования).

**Ключевые слова:** теория упругопластических процессов, пластичность, функционалы пластичности, краевая задача, метод СН-ЭВМ.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.003

УДК: 539.3

Для решения краевых задач теории упругопластических процессов А.А. Ильюшиным году был предложен экспериментально-теоретический метод СН-ЭВМ [1, 2]. Реализация этого метода требует использования испытательной установки на сложное нагружение (СН). Развитие и обоснование метода СН-ЭВМ в дальнейшем было рассмотрено в работах [3-11]. Идея метода лежит в основе численного решения краевых задач теории пластичности, в которых определяющие соотношения содержат функционалы. Выбор аппроксимирующих функций для функционалов пластичности выполняется по способу последовательных приближений. В начальном приближении задается некоторый частный вид функций по одной из теорий пластичности. В результате решения краевой задачи определяется совокупность траекторий напряжений и деформаций во всех точках тела. Эти траектории группируются по классам. Для каждого класса траекторий деформаций проводятся эксперименты на испытательной машине, реализующей сложное нагружение по заданной траектории. В результате

---

© Субботин С. Л., Алексеев А. А., 2022

*Субботин Сергей Львович*

**e-mail:** sbtn@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

*Алексеев Андрей Алексеевич*

**e-mail:** alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Поступила 10.10.2022

получаются экспериментальные траектории напряжений. Сопоставление расчетных траекторий напряжений с экспериментальными для одних и тех же траекторий деформации позволяет уточнить вид аппроксимирующих функций. Затем снова решается краевая задача с уточненными функциями процесса и находятся новые траектории напряжений и деформаций. Приближения повторяются до тех пор, пока расчетные и экспериментальные траектории не совпадут между собой с требуемой точностью. При экспериментах в пространстве напряжений процесс последовательных приближений организуется аналогично. Большое количество накопленных опытных данных позволяет применять метод СН-ЭВМ в численном эксперименте при решении краевых задач теории пластичности с проверкой на соответствие расчетных результатов эксперименту. Также, метод СН-ЭВМ можно применять для идентификации определяющих соотношений теории пластичности. Определяющие соотношения теории упругопластических процессов [12] в трехмерном изображающем девиаторном пространстве А.А. Ильюшина удобно принимать в виде [13-14]

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right), \\ \frac{dS_2}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right), \\ \frac{dS_3}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \left( \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $N, P, Q$  – функционалы пластичности, определяемые из экспериментов;

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$$

– модуль вектора напряжений;

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma} \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + S_2 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + S_3 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right)$$

– косинус угла отклонения вектора напряжений от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке;  $\sin \vartheta_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_1}$ .

В расчетах конструкций обычно процесс задается по нагрузкам (напряжениям), а деформации нужно определить. В этом случае определяющие соотношения (1) разрешаются относительно скоростей деформаций

$$\begin{aligned}N \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} &= \frac{dS_1}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma}, \\ -\frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + N \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} &= \frac{dS_2}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma}, \\ \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + N \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} &= \frac{dS_3}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma}.\end{aligned}$$

Скорости деформаций из этой системы уравнений можно найти методом определителей. Главный определитель

$$Det = N^3 + N \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1},$$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_1}{ds} &= \frac{1}{Det} \left[ b_1 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1^2}{\sigma^2} + N^2 \right) + b_2 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1 S_2}{\sigma^2} - N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_3 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} + N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \right) \right], \\ \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} &= \frac{1}{Det} \left[ b_1 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1 S_2}{\sigma^2} + N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \right) + b_2 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_2^2}{\sigma^2} + N^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_3 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_2 S_3}{\sigma^2} - N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \right) \right], \\ \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} &= \frac{1}{Det} \left[ b_1 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} - N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \right) + b_2 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_2 S_3}{\sigma^2} + N \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_3 \left( \frac{Q^2}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{S_3^2}{\sigma^2} + N^2 \right) \right],\end{aligned}$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{dS_1}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma}, \\ b_2 &= \frac{dS_2}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma}, \\ b_3 &= \frac{dS_3}{ds} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma}.\end{aligned}$$

В этих уравнениях значения  $\cos \vartheta_1$  и  $\sin \vartheta_1$  зависят от  $\frac{d\mathcal{E}_1}{ds}, \frac{d\mathcal{E}_2}{ds}, \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}$ , поэтому на каждом шаге по параметру нагружения величины  $\frac{d\mathcal{E}_1}{ds}, \frac{d\mathcal{E}_2}{ds}, \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}$  находятся по схеме прогноз-коррекция. Расчеты показали, что такой метод дает сходящийся вычислительный процесс.

Метод СН-ЭВМ позволяет на рассматриваемых траекториях проверить достоверность различных аппроксимаций функционалов пластичности и различных вариантов теорий пластичности (например, теории пластичного течения, деформационной теории пластичности и др.). Для реализации метода СН-ЭВМ для заданного процесса деформирования выполняются расчеты по какому либо варианту теорий пластичности и расчетные результаты сравниваются с результатами экспериментов. Принятый вариант теории пластичности корректируется, чтобы расчеты давали результаты, подтверждаемые экспериментально. Если корректировка выбранной теории пластичности не позволяет согласовать расчетные результаты с экспериментальными, то данная теория является не достоверной на данном классе траекторий.

При выполнении экспериментов в пространстве напряжений процесс ведется по длине дуги  $\Sigma$  траектории напряжений. Тогда в расчетных уравнениях вместо производных по длине дуги траектории деформации  $s$  нужно вычислить производные по  $\Sigma$ . Расчетные уравнения примут вид

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{ds} = \frac{d\mathcal{E}_1}{d\Sigma} \frac{d\Sigma}{ds}, \quad \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} = \frac{d\mathcal{E}_2}{d\Sigma} \frac{d\Sigma}{ds}, \quad \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} = \frac{d\mathcal{E}_3}{d\Sigma} \frac{d\Sigma}{ds},$$

$$\begin{aligned}
N \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\vartheta_2}{d\Sigma} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_1}{d\Sigma} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma} \frac{ds}{d\Sigma}, \\
-\frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} + N \frac{d\vartheta_2}{d\Sigma} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_2}{d\Sigma} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma} \frac{ds}{d\Sigma}, \\
\frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} - \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \frac{d\vartheta_2}{d\Sigma} + N \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_3}{d\Sigma} - (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma} \frac{ds}{d\Sigma}, \\
\cos \vartheta_1 &= \frac{1}{\sigma} \left( S_1 \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} + S_2 \frac{d\vartheta_2}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma} \right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{d\Sigma}},
\end{aligned}$$

где

$$\frac{ds}{d\Sigma} = \sqrt{\left( \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} \right)^2 + \left( \frac{d\vartheta_2}{d\Sigma} \right)^2 + \left( \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma} \right)^2}.$$

Аналогично преобразуются уравнения при выборе другого произвольного параметра нагружения  $t$  (обобщенного времени).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А.А. Метод СН-ЭВМ в теории пластичности // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 166–178.
- [2] Ильюшин А.А. Об одной модели, поясняющей аппроксимационный метод СН-ЭВМ в теории пластичности // Упругость и неупругость. М.: Издательство МГУ, 1971, вып. 1. С. 52–58.
- [3] Васин Р.А., Давранов Ю., Шешенин С.В. Метод последовательных приближений для сложного нагружения в плоской задаче теории пластичности // Механика деформируемых сред. МГУ, 1985. С. 90–94.
- [4] Васин Р.А., Широков Р.И. Применение метода СН-ЭВМ к решению краевой задачи при простом нагружении. // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1983, № 70, С.130–135.
- [5] Бабамуратов К.Ш. Некоторые вопросы решения краевых задач пластичности при сложных многопараметрических нагружениях // Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 1984, № 73. С. 3–15.
- [6] Бабамуратов К.Ш., Ильюшин А.А., Кабулов В.К. Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности. Ташкент: ФАН, 1987, 288 с.
- [7] Донской Д.Е. Сходимость метода СН-ЭВМ для вырожденной краевой задачи // Пластичность и устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Калинин: КПИ, 1984. С. 47–51.
- [8] Кравчук А. С. Метод А. А. Ильюшина для расчета конструкций из материалов с функциональными определяющими соотношениями // Упругость и неупругость: Материалы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рожд. А. А. Ильюшина, Москва, 20–21 янв. 2011 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2011. С. 165–171.
- [9] Моссаковский П.А., Васин Р.А., Антонов Ф.К. Развитие метода СН-ЭВМ Ильюшина применительно к краевым задачам динамической прочности // Упругость и неупругость: Материалы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рожд. А. А. Ильюшина, Москва, 20–21 янв. 2011 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2011. С. 210–216.

[10] Субботин С.Л. Проблема сходимости метода СН-ЭВМ в численном эксперименте // Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении: сборник научных трудов. ТвГТУ. Тверь, 1998. С. 68-75.

[11] Адилов Ф.Ф., Абиров Р.А. Исследование сходимости метода СН-ЭВМ для траекторий в виде трехзвенных ломаных // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 2020. С. 238-240.

[12] Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.

[13] Субботин С. Л., Алексеев А. А. Конкретизация обобщения гипотезы компланарности для упругопластических процессов в трехмерном изображающем пространстве А. А. Ильюшина // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. №1 (51). С. 84–94.

[14] Субботин С. Л., Алексеев А. А. Определяющие соотношения теории упругопластических процессов для решения краевых задач при плоском напряженном состоянии // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. №2 (52). С. 23–31

S. L. Subbotin, A. A. Alekseev

**IMPLEMENTATION OF THE CL-COMPUTER METHOD IN THE  
CALCULATIONS OF ELASTIC-PLASTIC PROCESSES ON HELICAL  
TRAJECTORIES OF DEFORMATION OF CONSTANT CURVATURE AND  
TORSION**

*Tver State Technical University, Tver*

**Abstract.** The paper presents the implementation of the CL-computer (complex loading) method proposed by A.A. Ilyushin for solving boundary value problems in the calculations of elastoplastic deformation processes along the trajectories of constant curvature and torsion. The constitutive equations of the theory of elastic-plastic processes for determining the strain rates (derivatives along the length of the arc of the strain trajectory) are given.

**Keywords:** theory of elastoplastic processes, plasticity, plasticity functionals, boundary value problem, CL-computer method

**REFERENCES**

- [1] Ilyushin A. A. The CL-computer method in the theory of plasticity // Problems of Applied Mathematics and Mechanics. M.: Nauka, 1971. pp. 166-178. (in Russian)
- [2] Ilyushin A. A. On a model explaining the CL-computer approximation method in the theory of plasticity. // Elasticity and inelasticity. M.: Publishing House of Moscow State University, 1971, issue 1. pp. 52-58. (in Russian)
- [3] Vasin R.A., Davranov Yu., Sheshenin S.V. The method of successive approximations for complex loading in a plane problem of the theory of plasticity // Mechanics of deformable bodies. Moscow State University, 1985, pp. 90-94. (in Russian)
- [4] Vasin R.A., Shirov R.I. Application of the CL-computer method to the solution of a boundary value problem under proportional loading. // Issues of Computational and Applied Mathematics. Tashkent, 1983, No. 70, pp. 130-135. (in Russian)
- [5] Babamuratov K.Sh. Some questions of solving boundary value problems of plasticity under complex multi-parameter loading // Issues of Computational and Applied Mathematics, Tashkent, 1984, No. 73. pp. 3-15. (in Russian)
- [6] Babamuratov K. Sh., Ilyushin A. A., Kabulov V. K., The SN-EVM Method and Its Applications to Problems in the Theory of Plasticity. Tashkent: FAN, 1987, 288 p. (in Russian)
- [7] Donskoy D.E. Convergence of the CL-computer method for a degenerate boundary value problem // Plasticity and stability in the mechanics of a deformable solid bodies. Kalinin: KPI, 1984. pp. 47-51. (in Russian)
- [8] Kravchuk A. S. A. A. Ilyushin's method for calculating structures made of materials with functional determining ratios // Elasticity and inelasticity: Materials of the International Scientific Symposium on the Problems of mechanics of deformable bodies,

---

*Subbotin Sergey Lvovich* Doctor of Technical Sciences, Professor, Tver State Technical University, Tver

*Alekseev Andrey Alekseevich* Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver

dedicated to the 100th anniversary of the birth of A. A. Ilyushin, Moscow, January 20-21, 2011. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 2011. pp. 165-171. (in Russian)

[9] Mossakovsky P.A., Vasin R.A., Antonov F.K. Development of the Ilyushin CH-computer method in relation to boundary value problems of dynamic strength // Elasticity and inelasticity: Materials of the International Scientific Symposium on the Problems of mechanics of deformable bodies, dedicated to the 100th anniversary of the birth of A. A. Ilyushin, Moscow, January 20-21, 2011. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 2011. pp. 210-216. (in Russian)

[10] Subbotin S.L. The problem of convergence of the CL-computer method in a numerical experiment // Stability, plasticity, creep under complex loading: collection of scientific papers. TvSTU. Tver, 1998. pp. 68-75. (in Russian)

[11] Adilov F.F., Abirov R.A. Investigation of convergence of the CL-computer method for trajectories in the form of three-link polylines // Control theory and mathematical modeling: materials of the All-Russian conference with international participation dedicated to the memory of Professor N. V. Azbelev and Professor E. L. Tonkov. Izhevsk, 2020. pp. 238-240. (in Russian)

[12] Zubchaninov V.G. Mechanics of processes in plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010, 352 p. (in Russian)

[13] Subbotin S. L., Alekseev A. A. Concretization of generalization of the coplanarity hypothesis for elastic-plastic processes in a three-dimensional space by A.A. Ilyushin // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2022. № 1 (51). pp. 84-94. (in Russian)

[14] Subbotin S. L., Alekseev A. A. Constitutive relations of the theory of elastoplastic processes for solving boundary problems under a plane stress state // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2022. № 2 (52). pp. 23-31. (in Russian)



С. Г. Жилин, Н. А. Богданова, О. Н. Комаров

## РАСЧЕТНОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТОЙ ПРЕССОВКИ ИЗ ПОРОШКОВОГО ВОСКООБРАЗНОГО МАТЕРИАЛА

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

**Аннотация.** Актуальной проблемой современного машиностроения является получение литья высокой размерной точности и неограниченной геометрии, обеспечиваемых за счет новых технологических процессов, позволяющих реализовать принципы ресурсо- и энергоэффективности. Высокий коэффициент использования материалов в таких процессах обеспечивается, в том числе, точностью получаемых изделий, благодаря чему снижается объем механической обработки литья. Одним из вариантов технологического решения отмеченной проблемы является применение процесса прессования однокомпонентных порошков воскообразных материалов при формировании точных пористых удаляемых моделей, поверхность которых не имеет тепловых усадочных дефектов. Соответствие обозначенным выше принципам эффективности данному процессу обеспечивает возможность комплексной реализации проблем литья, характерных для большей части технологических этапов. Малоизученным аспектом процесса уплотнения порошков модельных материалов является напряженно-деформированное состояние формирующихся прессовок, определяющее необходимость поиска вариантов устранения упругого отклика материала. В работе представлены результаты экспериментальных исследований влияния состава уплотняемого материала на величину остаточных напряжений, предназначенные для корректного расчета геометрии пресс-форм при их проектировании.

**Ключевые слова:** прессование, порошок технического парафина, пористость, деформация, остаточные напряжения, время релаксации, размерно-геометрическая точность, упругий отклик, двухпараметрическая зависимость Кольрауша, литье по выплавляемым моделям

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.004

УДК: 621.74.045:53.09

---

© Жилин С. Г., Богданова Н. А., Комаров О. Н., 2022

*Жилин Сергей Геннадьевич*

**e-mail:** sergeyzhilin1@ Rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

*Богданова Нина Анатольевна*

**e-mail:** joyful289@inbox.ru, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.

Поступила 20.09.2022

## Введение

В настоящее время в России и за рубежом одним из наиболее востребованных методов получения отливок сложной конфигурации с тонкими стенками и поднутрениями, с размерами, соответствующими 3-8-му классам точности, является литье по выплавляемым моделям [1, 2].

Последовательность технологических операций при осуществлении рассматриваемого процесса упрощенно можно свести к следующим этапам: формирование выплавляемой модели заливкой жидкой модельной массы в пресс-форму; формирование модельного блока и последовательное нанесение на него слоев огнеупорной керамической оболочковой формы и их сушка; выплавление материала модельного блока из керамики с последующей ее прокалкой; заливка оболочек расплавом металла; механическая обработка литья. Обширная номенклатура материалов, применяемых для осуществления рассматриваемого процесса, а также значительное количество операций в известной степени определяют недопустимость мероприятий, направленных на устранение ряда неблагоприятных результатов теплофизических явлений, сопровождающих процесс. К числу таких явлений следует отнести изменения объемов модельных материалов, сопровождающих их рост, или снижение температур на стадиях расплавления или охлаждения. Негативное влияние отмеченных факторов проявляется в появлении усадочных раковин на поверхности выплавляемых моделей (на стадии охлаждения модельной массы), а также снижении трещиностойкости керамических форм (в результате расширения модельной массы при выплавлении, приводящее к увеличению объема модельной массы до 10-14 %, а также при прокалке керамики). Отмеченное выше, в совокупности, определяет актуальность исследования и разработки методов сокращения затрат на механическую обработку заготовок при получении отливок повышенной размерно-геометрической точности, осуществляемого на протяжении продолжительного времени [3].

Поиск вариантов устранения отмеченных недостатков такого метода формирования литых изделий определил ряд перспективных направлений, активно развивающихся в последнее время. Значительная доля таких направлений связана, в первую очередь с осуществлением возможности получения выплавляемой модели сложной пространственной конфигурации посредством применения аддитивных подходов к формообразованию [4]. Безусловным достоинством отмеченного альтернативного подхода является то, что геометрия формируемых изделий ограничена лишь техническими параметрами и габаритами оборудования. Однако перспектива широкого применения таких методов для серийного получения изделий в настоящее время представляется весьма неопределенной ввиду длительности процесса, требований к оборудованию, определяющему узкий диапазон физических условий экструзии модельного материала и формирования слоев изделия. Кроме того, послойное формирование определяет шероховатость поверхности изделия и необходимость дополнительной обработки [5, 6].

Из отмеченного выше становится очевидным, что решение проблемы формирования поверхностных пороков и усадочных дефектов заключается преимущественно в

---

*Комаров Олег Николаевич*

e-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

соблюдении температурного режима, при котором модельный материал по ходу технологического процесса не нагревается выше температуры плавления. Такое условие может быть обеспечено в ходе реализации экспериментального процесса за счет формирования тела выплавляемой модели прессованием порошка модельной композиции без подведения внешних источников тепла [7]. В процессе уплотнения порошка воскообразной модельной композиции в результате давления происходит оплавление пограничных участков частиц деформируемого порошкового тела с достаточно скоротечным охлаждением зоны контакта, что обеспечивает каркасную структуру прессовки с распределенной внутри нее пористостью, величина которой достигает 14 %. Качество поверхности выплавляемых прессованных моделей в значительной степени определяется шероховатостью формообразующих элементов пресс-матрицы [8]. К технологическим преимуществам использования пористых моделей следует отнести повышение трещиностойкости керамических оболочковых форм ввиду отсутствия расширяющего воздействия на внутренние стенки керамики нагреваемой модельной массы при ее выплавлении.

При формировании прессовки простой геометрии, с соразмерными сторонами, как правило проявление внешних дефектов не наблюдается. Однако, при получения прессовок сложной конфигурации с разнотолщинными участками, возможно появление отклонений от заданной геометрии изделия в результате упругого разгрузки уплотненного модельного материала. Это обстоятельство стало препятствием для массового использования нового процесса в условиях производства, особенно для конфигураций изделий с наличием переменных сечений. В ходе серии экспериментов установлены значения упругого отклика воскообразного материала прессованной модели. Остаточные напряжения в материале прессовки приводят к увеличению ее размеров прессованной на 0,4-1,2 % [9]. При этом меньшие значения характерны для упругого последействия материала в направлении поперечном прессованию и, соответственно, более высокие значения этого показателя характерны для направления прессовки совпадающего с треком перемещения пресс-пуансона. Ясно, что на конечную геометрию прессовок влияют скорость деформирования материала и время его выдержки в уплотненном состоянии [10, 11], позволяющее завершиться процессам разгрузки напряжений.

В настоящее время как для отечественной, так и для зарубежной практики получения прессовок из п-порошковых систем характерны подходы, преимущественно основанные на описании процессов формоизменения материалов, обладающих заметно большей пластичностью в сравнении с порошками железоуглеродистых сплавов [12–14]. Безусловно, опираясь лишь на методики, применимые к описанию процессов пластификации порошков конструкционных материалов, достоверность прогнозирования конечных свойств прессовок из воскообразных порошков представляется затруднительной задачей, что определяет актуальность осуществления экспериментальных исследований, направленных на определение параметров процесса формирования из них пористой прессовки.

### **Цели и задачи**

Целью настоящей работы является определение совокупного влияния ряда параметров процесса прессования материала, состоящего из фракций порошков парафина, на величину остаточных напряжений и значения упругого последействия прессовки. Результаты цели настоящей работы достигались решением следующих задач: - определение условий получения прессовок с заданным диапазоном значений пористости

посредством регулирования фракции воскообразного материала деформируемого порошкового тела; - определение вариантов управления величиной остаточных напряжений материала прессовки посредством регулирования времени ее пребывания под нагрузкой.

**Методы и подходы** При формировании экспериментальных прессовок использован парафин очищенный технический марки Т1, согласно ГОСТ 23683-89 «Парафины нефтяные твердые. Технические условия» фракций 0,63 мм и 2,5 мм. Этот компонент является основой значительной части воскообразных материалов 1-ой классификационной группы [15]. ГОСТ 23683-89 для материала марки Т1 регламентирует температуру плавления 52-58 °С, однако, реальные характеристики используемого в исследовании материала отличны от значений ГОСТ и определены экспериментально. Температура плавления уточнена в ходе нагрева материала Т1 со скоростью 2 °С/мин дифференциально-термическим анализатором Shimadzu DTG-60H и составила 60 °С (температура окружающей среды в момент проведения эксперимента  $20 \pm 2$  °С) [16]. Определение такой физической характеристики материала Т1, как модуль Юнга (Е), осуществляли при помощи тестовой машины AG-Xplus фирмы SHIMADZU, достоверность экспериментальных значений которой обеспечивается значением отклонения от задаваемой нагрузки в интервале 0÷100 кН не более чем на 0,03 %. Для материала марки Т1 определен модуль Юнга  $E_{T1} = 81,91$  МПа [17]. Значение плотности материала, характерное для состояния его свободной заливки, составило  $\rho_{T1} = 0,86$  г/см<sup>3</sup>.

Технологически приемлемый диапазон размеров фракции применяемого воскообразного материала марки Т1 определен в ходе серии предварительных экспериментов, обусловлен особенностями формирования тонкостенных участков прессовок и составляет 0,63-2,5 мм. Частицы фракций Т1 получены рассевом стружки на ситах модели 026 и имеют хлопьевидную форму. Применение известных методов расчета конечных свойств прессовок, формирующихся из порошковых тел, предполагает сферическую форму составляющих их элементов, а также условное деление процесса уплотнения на этапы структурной деформации уплотняемой смеси, роста давления без увеличения плотности, с последующей пластической деформации [18, 19]. На рис.1 представлены условные стадии уплотнения порошкового тела, рассматриваемые в ходе настоящего исследования. В условиях реального эксперимента передача нагрузки от одного элемента порошкового тела другому в объеме будущей прессовки осуществляется неравномерно, а стадии уплотнения накладываются друг на друга. В этой связи в эксперименте регистрация нагрузки, возникающей при уплотнении порошкового тела, начинается с третьей стадии, когда в порошковом теле отсутствуют арки, а упаковка элементов условно представляет собой кубическую или гексагональную системы. Для организации такой упаковки элементов в уплотняемом теле материал Т1 в виде порошка загружали в стальную цилиндрическую пресс-матрицу диаметром  $d = 43,3$  мм, как показано на рис.1,а. После засыпки в пресс-матрицу порошка модельного состава, для устранения «воздушных арок», его подвергали предварительной механической утряске с частотой 3,5 Гц в течение 5 минут. Время утряски определено в ходе предварительных экспериментов. Как правило после 5 минут утряски высота порошкового тела в пресс-матрице, а следовательно и его плотность, не изменяется. Полученную высоту порошкового тела, характеризующегося пористостью  $P_{0i}$  (до прессования), обозначим  $h_{0i}$  и считаем начальной. Таким образом, горизонталь ограничивающая верхнюю часть порошкового тела, соответствующую высоте  $h_{0i}$ , представляет собой

Параметр	Фракция, мм	П <sub>Hi</sub>	
		0	12
h <sub>0i</sub> , мм	0,63	103,0	89,0
	2,5	116,2	103,1
Π <sub>0i</sub>	0,63	0,57	0,57
	2,5	0,63	0,63
Δh <sub>i</sub> , мм	0,63	58,7	44,7
	2,5	71,8	58,8
v <sub>i</sub> , мм/мин	0,63	59,68	50,02
	2,5	72,78	65,01
m <sub>i</sub> , г	0,63/ 2,5	54,8	48,2

Таблица 1. Параметры процесса получения прессовок из Т1

линию начала перемещения траверсы, как представлено на рис.1,б. Начальная высота h<sub>0i</sub> порошкового тела зависит от массы засыпки m<sub>i</sub>.

Массы образцов m<sub>i</sub> определяем из выражения (1):

$$m_i = V \rho_i = \frac{\pi d^2}{4} h \rho_{\text{лит}} \left( 1 - \frac{\Pi_{Hi}}{100\%} \right) = \frac{\pi d^2}{4} h \rho_{\text{max}} (1 - \Pi_i) \quad (1)$$

где V – конечный объем прессовки, см<sup>3</sup>; ρ<sub>i</sub> – плотность прессовки, г/см<sup>3</sup>; ρ<sub>лит</sub> – плотность материала в литом состоянии, г/см<sup>3</sup>; Π<sub>Hi</sub> – параметр «недопрессовки», определяющий значение экспериментальной пористости, выражаемый в % и показывающий, на сколько плотность ρ<sub>i</sub> прессовки меньше, чем ρ<sub>лит</sub> образца того же объема; ρ<sub>max</sub> – максимальное значение плотности материала марки Т1.

В ходе эксперимента получали пористые прессовки плотностью ρ<sub>i</sub> на 0÷12 % меньшей, чем плотность материала Т1 определенная для состояния свободной заливки: ρ<sub>лит</sub> = 0,86 г/см<sup>3</sup>. Максимальное значение плотности материала марки Т1 ρ<sub>max</sub> определяли в ходе компрессионного сжатия литого цилиндрического образца при нагрузке 12 МПа в течение 10 часов на универсальной испытательной машине AG-X plus Shimadzu. Для материала марки Т1 ρ<sub>max</sub> = г/см<sup>3</sup>. В результате перемещения пресс-пуансона с высоты h<sub>0i</sub> до высоты h = d порошковое тело уплотняется до требуемой величины. При этом пористость порошкового тела составляет Π<sub>i</sub>, как показано на рис. 1,в.

Пористость образца Π<sub>i</sub> определяли из выражения (2):

$$\Pi_i = 1 - \frac{\rho_{\text{лит}} \left( 1 - \frac{\Pi_{Hi}}{100\%} \right)}{\rho_{\text{max}}} \quad (2)$$

В таблице 1 представлены группы прессовок, полученные из фракций 0,63 мм и 2,5 мм материала марки Т1, их массы m<sub>i</sub> соответствовали параметру недопрессовки Π<sub>Hi</sub>, значение которого принадлежит интервалу 0% ≤ Π<sub>Hi</sub> ≤ 12%. Для эксперимента выбран шаг значений Π<sub>Hi</sub>, составляющий 2%.

При формировании прессовки скорость движения пресс-пуансона задается траверсой тестовой машины AG-X plus Shimadzu таким образом, чтобы обеспечить условия уплотнения порошкового тела, при которых значения пористости Π<sub>i</sub> уменьшаются на равную величину за единицу времени. В данном случае каждому значению h<sub>0i</sub>,

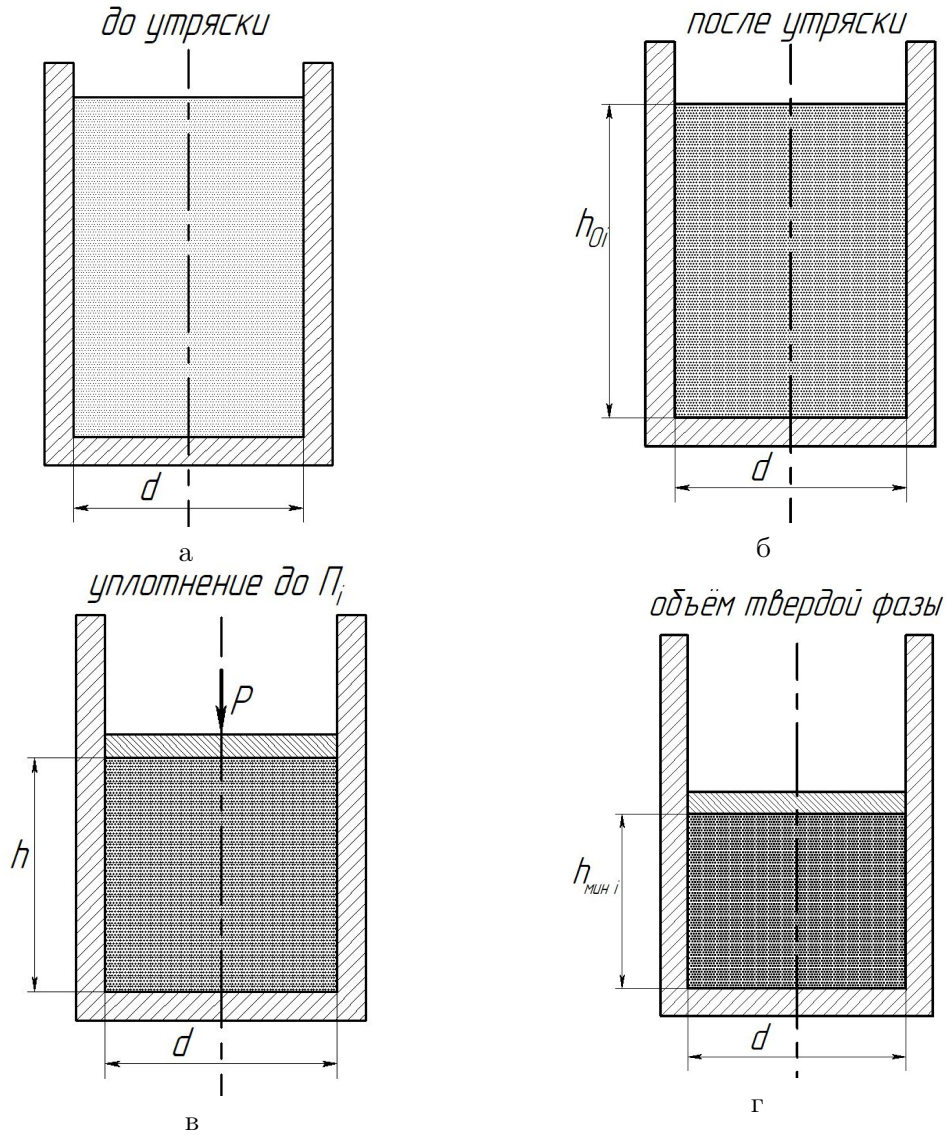


Рис. 1. Стадии уплотнения порошкового тела

будет соответствовать значению пористости  $\Pi_{0i}$ , а постоянная скорость перемещения траверсы тестовой машины при этом обеспечивает снижение пористости  $\Pi_i$  до 0 за время  $t = 60$  сек. Расчетная высота  $h_{\text{мин}i}$  для каждой навески порошкового материала, соответствует условию, когда его плотность составляет  $\rho_{\text{max}}$ , а значит  $\Pi_i = 0$ . Эти обстоятельства определяют массу навески материала, расчет которой производим согласно выражения (3):

$$h_{\text{мин}i} = \frac{m_i}{\rho_{\text{max}} S} \quad (3)$$

где  $S$  – площадь основания цилиндра формообразующей полости.

Таким образом скорость перемещения траверсы тестовой машины при уплотнении навески порошкового тела определим из условия:

$$v_i = \frac{h_{0i} - h_{\text{мини}i}}{t} = \frac{\Delta h_i}{t} \quad (4)$$

где  $\Delta h_i$  – перемещение траверсы с  $h_{0i}$  до  $h_{\text{мини}i}$ , мм.

Данные по значениям  $v_i$  для каждого  $\Pi_{Hi}$  представлены в табл.1.

При достижении траверсой положения  $h = d$  образцы выдерживались в нагруженном состоянии в течение 60 минут для релаксации напряжений, возникающих в порошковом теле при уплотнении. В течение указанного времени достигается равномерное распределение плотности в прессовке за счет завершения тепловых процессов в материале марки Т1. Результатом серии экспериментов являются графические зависимости напряжений, возникающих на траверсе тестовой машины при сжатии порошкового тела и напряжений разгрузки при релаксации материала от времени его выдержки под нагрузкой, а также величины упругого отклика прессовки  $O_{\Pi}$ . Величина  $O_{\Pi}$  определена по формуле:

$$O_{\Pi} = \frac{d_{\Pi} - d}{d_{\Pi}} 100\% \quad (5)$$

где  $O_{\Pi}$  – величина упругого отклика, %;  $d$  и  $d_{\Pi}$  – внутренний диаметр пресс-формы и внешний диаметр прессовки соответственно, полученные при помощи регистратора DIN863 Vogel с точностью измерения 0,001 мм.

### Результаты и обсуждение

На рис.2 в виде полиномов 3-го порядка представлены экспериментальные зависимости напряжений, регистрируемых при релаксации прессовок из материала марки Т1 фракций и 0,63 мм (кривые 1 и 2) и 2,5 мм (кривые 3 и 4) соответственно, от времени их выдержки в нагруженном состоянии, когда подвижные элементы пресс-формы сомкнуты. Кривые 1 и 3 характерны для прессовок, конечная пористость которых составляет  $\Pi_n=0\%$ . В свою очередь кривые 2 и 4 характерны для прессовок, конечная пористость которых составляет  $\Pi_n=12\%$ . На диаграмму помещены звичния величины достоверности аппроксимации  $R_2$  для каждого из рассматриваемых в эксперименте случаев.

Представленные на рис.2 экспериментальные зависимости падения напряжений при разгрузке от времени выдержки прессовки в нагруженном состоянии, соответствующие значениям  $0\% < \Pi_n < 12\%$  и полученные с шагом 2 %, из материала марки Т1 фракции 2,5 мм принадлежат области, ограниченной сплошными кривыми, а для материала и фракции 0,63 мм – области, ограниченной пунктирными кривыми.

Видно, что падение напряжения во всех случаях происходит по экспоненциальным кривым и к 20-ой минуте релаксации не превышают значений 0,15 МПа. Дальнейшая выдержка прессовок до 60 минут к существенному падению значений напряжений не приводит. При формировании прессовок из материала Т1 фракции 0,63 мм напряжения для случая формирования прессовки с  $\Pi_n = 0\%$  превышают таковые для прессовок из материала Т1 фракции 2,5 мм.

Экспериментально подтверждено, что со снижением  $\Pi_n$  разрыв значений напряжений, возникающих при уплотнении и релаксации материала, сокращается. Обозначим символами  $\sigma_{0,63}$  и  $\sigma_{2,5}$  напряжения начала разгрузки для прессовок из фракций 0,63 мм и 2,5 мм. Анализом напряжений  $\sigma_{0,63}$  и  $\sigma_{2,5}$ , соответствующих началу разгрузки,

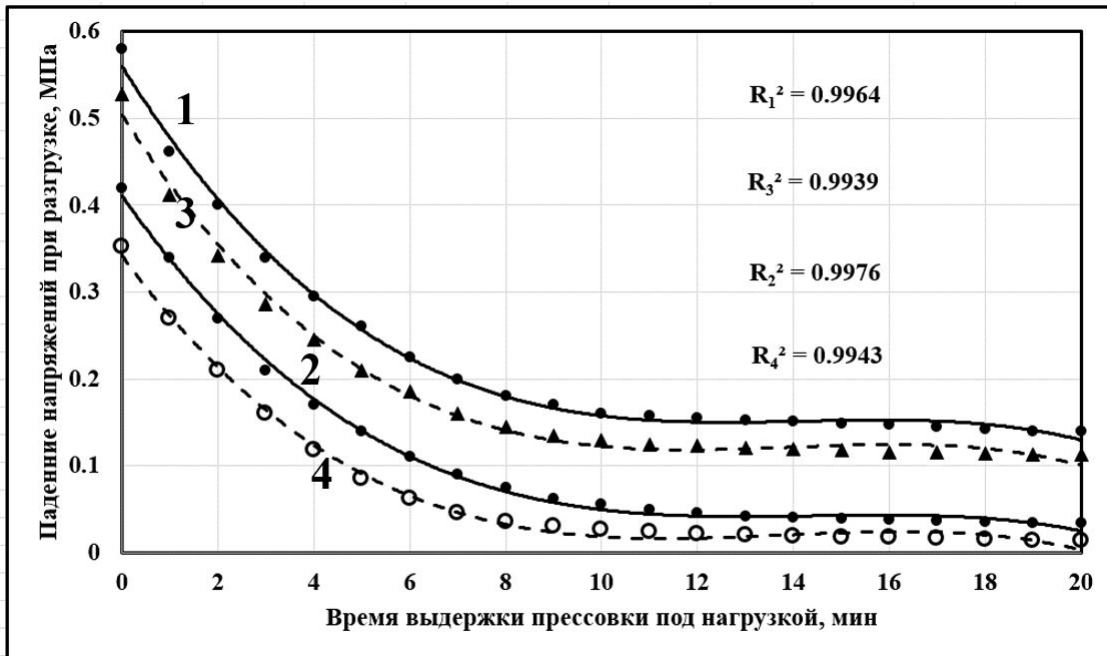


Рис. 2. Зависимости падения напряжений при релаксации уплотненных прессовок из материала марки Т1 от времени их выдержки под нагрузкой.

от  $P_n$ , установлено, что при  $P_n > 12\%$  фракция материала не оказывает влияния на величину  $\sigma$ .

Серией предварительных экспериментов установлено, что предел прочности на сжатие  $\sigma_v$  прессовок, выполненных из ряда воскообразных материалов 1-ой классификационной группы в значительной степени зависит от фракции материала. Согласно данным, представленным в [8] в интервале значений пористости сформированных прессовок  $0\% < P_n < 12\%$ , пределы прочности на сжатие  $\sigma_{v0,63}$  прессовок, полученных из воскообразных материалов фракций 0,63 мм больше таковых для  $\sigma_{v2,5}$ , полученных из материалов фракций 2,5 мм в среднем на  $19 \div 27\%$ . Значения  $O_n$ , характеризующие величину упругого отклика прессовки в направлении поперечном приложению давления не при всех вариантах  $P_n$  удовлетворяет задачам эксперимента. Выше отмечено, что в результате серии предварительных исследований установлены максимальные значения  $O_n$ , не превышающие 1,2% изменения габаритных размеров уплотненного порошкового тела в направлении вдоль оси прессования. В ходе эксперимента определено, что по завершении цикла выдержки материала под нагрузкой в течение 20 минут напряжения в прессовке хоть и остаются, но существенно не меняются в течение дальнейшего времени (до 60 минут), а максимальное значение  $O_{n1max} = 0,65\%$  для прессовки из материала марки Т1 фракции 0,63 мм  $P_n = 0,15\%$  и  $O_{n2max} = 0,64\%$  для прессовки из материала фракции 2,5 мм с  $P_n = 0\%$ . Отметим, что минимальными значениями  $O_n$  (менее 0,15 %) обладают прессовки при  $8\% < P_n < 12\%$ , полученные при значениях остаточных напряжений в материале  $\sigma_{ост} < 0,05$  МПа.

#### Заключение



Экспериментально определено влияние фракции порошкового воскообразного материала марки Т1 и времени выдержки под нагрузкой на величину остаточных напряжений и упругого последствия прессовки. Установлено время выдержки (до 20 минут) наиболее интенсивной релаксации материала. Напряжения, возникающие в ходе уплотнения порошкового воскообразного материала марки Т1 фракций 0,63 мм при  $P_n = 0\%$ , превышают таковые для прессовок из того же материала фракции 2,5. Экспериментально установлено, что минимальными значениями  $O_n \leq 0,15\%$  обладают прессовки соответствующие  $8\% < P_n < 12\%$ , полученные при алгоритме выбора скорости прессования, учитывающем параметр недопрессовки (пористости) из порошков воскообразного материала марки Т1 фракций 0,63 мм и 2,5 мм при значениях остаточных напряжений в материале  $\sigma_{ост} < 0,05$  МПа.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Получение отливок повышенной размерной точности по комбинированным литейным моделям из алюмотермитных и воскообразных смесей / С. Г. Жилин, О. Н. Комаров, А. А. Соснин [и др.] // Заготовительные производства в машиностроении. 2016. № 11. С. 6–11.
- [2] Kumar V., Mitra S. Development in investment casting // Journal of Critical Reviews. 2020. no. 7(10). P. 892–897.
- [3] Sapchenko I., Zhilin S., Evstigneev A. Investigation into the process of removing porous patterns from shell molds // Litejnoe Proizvodstvo. 2002. no. 7. P. 21–22.
- [4] Morsiya C., Pandya S. Recent Advancements in Hybrid Investment Casting Process // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2022. P. 817–831.
- [5] Shah M., Patel D., Pande S. Additive manufacturing integrated Casting // Materials Today: Proceedings. 2016. no. 62(P13). P. 7199–7203.
- [6] Mukhtarkhanov M., Shehab E., Ali M. H. Process Parameter Optimization for 3D Printed Investment Casting Wax Pattern and Its Post-Processing Technique // Applied Sciences (Switzerland). 2022. no. 12(14). p. 6847.
- [7] Способ изготовления выплавляемых моделей / С.Г. Жилин, О.Н. Комаров, А.А. Соснин [и др.] // Патент РФ № 2632051, Заявл. 13.05.2016; Опубли. 02.10.2017, Бюл. №288.
- [8] Decrease in the elastic response in compacting a paraffin–stearin powder composition / S. Zhilin, N. Bogdanova, O. Komarov et al. // Russian Metallurgy (Metally). 2021. no. № 4. P. 459–463.
- [9] Жилин С.Г., Комаров О.Н., Соснин А.А. Моделирование процессов обработки материалов давлением на основе оценки напряженно-деформированного состояния прессовок из полимерных модельных композиций с использованием метода конечных элементов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. 2017. № Т. 19. № 2. С. 48–66.
- [10] Modelling of Powder die compaction / P. Brewin, O. Coube, P. Doremus et al. Springer: London, 2008.
- [11] Bogdanova N., Zhilin S., Komarov O. Influence of the packing and compaction parameters of spherical waxy elements on the stress-strain state of the compact // Procedia Structural Integrity. 2021. no. 40(C). P. 70–74.
- [12] Прибытков Г.А., Коржова В.В., Коростелева Е.Н. Прочностные свойства и особенности разрушения композитов систем Al–Cr и Al–Cr–Si, полученных горячим уплотнением порошковых смесей // Деформация и разрушение материалов. 2013. № 8. С. 13–20.
- [13] Majer M., Fries J., Machac J. Review of aluminum chips recycling // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM. 2019. no. 19 (4.1). P. 771–778.
- [14] Direct recycling of aluminium chips into composite reinforced with in situ alumina enrichment / W. Abdullah, M. M. Sukri, L. M. Amri et al. // Materials Science Forum. 2020. no. 975 MSF. P. 165–170.
- [15] Литье по выплавляемым моделям / под ред. В.А. Озерова. Машиностроение: М., 1994.

- [16] Жилин С.Г., Н. А. Богданова О.Н. Комаров. Влияние гранулометрического состава и скорости выдавливания воскообразной композиции на геометрию длинномерной прессовки при мундштучном экструдировании // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4 (38). С. 54–64.
- [17] Finite element modeling of the stress-strain state of waxy compacts / A. Sosnin, N. Bogdanova, S.G.Zhilin et al. // AIP Conference Proceedings. Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, MRDMS 2019 - Proceedings of the 13th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures. 2019. p. 030017.
- [18] Цеменко В.Н., Фук Д.В., Ганин С.В. Определение реологических характеристик и моделирование процесса экструзии порошковых и пористых материалов. Часть 1. Порошковое тело // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2016. № 2 (243). С. 124–133.
- [19] Либенсон Г.А., Лопатин В.Ю., Комарницкий Г.В. Процессы порошковой металлургии. Т. 2. Формование и спекание. Москва: МИСИС, 2002. 320 с.
- [20] Bagliuk G., Kuryliuk S. Numerical Analysis of the Die Forging of Porous Blanks in a Die with the Implementation of Active Friction Forces // Russian Journal of Non-Ferrous Metals. 2021. no. 62(1). P. 119–124.

S. G. Zhilin, N. A. Bogdanova, O. N. Komarov

**CALCULATION AND EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE  
PARAMETERS OF THE PROCESS OF FORMING A POROUS COMPACT  
FROM A POWDERED WAXY MATERIAL**

*Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

**Abstract.** An urgent problem of modern mechanical engineering is the production of castings of high dimensional and accuracy and unlimited geometry, provided by new technological processes that make it possible to implement the principles of resource and energy efficiency. The high utilization rate of materials in such processes is ensured, among other things, by the accuracy of the products obtained, which reduces the amount of casting machining. One of the options for the technological solution of the noted problem is the use of the process of pressing single-component powders of waxy materials in the formation of accurate porous removable models, the surface of which does not have thermal shrinkage defects. Compliance with the principles of efficiency outlined above for this process provides the possibility of a comprehensive implementation of the casting problems that are characteristic of most of the technological stages. A little-studied aspect of the process of compaction of powders of model materials is the stress-strain state of the formed compacts, which determines the need to search for options to eliminate the elastic response of the material. The paper presents the results of experimental studies of the influence of the composition of the compacted material on the magnitude of residual stresses, designed to correctly calculate the geometry of molds during their design.

**Keywords:** pressing, technical wax powder, porosity, deformation, residual stresses, relaxation time, dimensional and geometric accuracy, elastic response, two-parameter Kohlrausch dependence, investment casting.

**REFERENCES**

- [1] Obtaining castings of increased dimensional accuracy by combined casting patterns from aluminothermic and waxy mixtures / S.G. Zhilin, O.N. Komarov, A.A. Sosnin [и др.] // *Zagotovitel'nyye proizvodstva v mashinostroyenii*. 2016. № 11. С. 6–11.
- [2] Kumar V., Mitra S. Development in investment casting // *Journal of Critical Reviews*. 2020. no. 7(10). P. 892–897.
- [3] Sapchenko I., Zhilin S., Evstigneev A. Investigation into the process of removing porous patterns from shell molds // *Litejnoe Proizvodstvo*. 2002. no. 7. P. 21–22.
- [4] Morsiya C., Pandya S. Recent Advancements in Hybrid Investment Casting Process // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2022. P. 817–831.
- [5] Shah M., Patel D., Pande S. Additive manufacturing integrated Casting // *Materials Today: Proceedings*. 2016. no. 62(P13). P. 7199–7203.

---

*Zhilin Sergey Gennadevich*, Ph. D. in Engineering sciences, associate professor, Leading Researcher. Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur.

*Bogdanova Nina Anatolievna*, Junior Researcher. Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur

*Komarov Oleg Nikolaevitsch*, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Director, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- [6] Mukhtarkhanov M., Shehab E., M.H.Ali. Process Parameter Optimization for 3D Printed Investment Casting Wax Pattern and Its Post-Processing Technique // *Applied Sciences (Switzerland)*. 2022. no. 12(14). p. 6847.
- [7] Method for manufacturing investment models / S.G. Zhilin, O.N. Komarov, A.A. Sosnin [и др.] // RF patent No. 2632051, Appl. 05/13/2016; Published 02.10.2017, Bull. №288.
- [8] Decrease in the elastic response in compacting a paraffin–stearin powder composition / S. Zhilin, N. Bogdanova, O. Komarov et al. // *Russian Metallurgy (Metally)*. 2021. no. № 4. P. 459–463.
- [9] Zhilin S.G., Komarov O.N., Sosnin A.A. Modeling of Processes of Machining Materials by Pressure Based on Evaluation of the Stress-Strain State of Compacts from Polymer Model Compositions Using the Finite Element Method // *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mashinostroyeniye, materialovedeniye*. 2017. № T. 19. 2. C. 48–66.
- [10] Modelling of Powder die compaction / P. Brewin, O. Coube, P. Doremus et al. Springer: London, 2008.
- [11] Bogdanova N., Zhilin S., Komarov O. Influence of the packing and compaction parameters of spherical waxy elements on the stress-strain state of the compact // *Procedia Structural Integrity*. 2021. no. 40(C). P. 70–74.
- [12] Bagliuk G., Kyryliuk S. Numerical Analysis of the Die Forging of Porous Blanks in a Die with the Implementation of Active Friction Forces // *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*. 2021. no. 62(1). P. 119–124.
- [13] Pribytkov G.A., Korzhova V.V., Korosteleva E.N. Strength Properties and Fracture Features of Al–Cr and Al–Cr–Si Composites Produced by Hot Compaction of Powder Mixtures // *Deformatsiya i razrusheniye materialov*. 2013. № 8. C. 13–20.
- [14] Majer M., Fries J., Machac J. Review of aluminium chips recycling // *International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM*. 2019. no. 19 (4.1). P. 771–778.
- [15] Direct recycling of aluminium chips into composite reinforced with in situ alumina enrichment / W. Abdullah, M. M. Sukri, L. M. Amri et al. // *Materials Science Forum*. 2020. no. 975 MSF. P. 165–170.
- [16] Investment casting / Ed. by O. V.A. Mashinostroyeniye: M., 1994.
- [17] Zhilin S., Bogdanova N., Komarov O. Influence of particle size distribution and extrusion rate of a waxy composition on the geometry of a long-length compact during die extrusion // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2018. no. 4 (38). P. 54–64.
- [18] Finite element modeling of the stress-strain state of waxy compacts / A. Sosnin, N. Bogdanova, S.G.Zhilin et al. // *AIP Conference Proceedings. Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, MRDMS 2019 - Proceedings of the 13th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures*. 2019. p. 030017.
- [19] Tsemenko V., Fook D., Ganin S. Determination of rheological characteristics and modeling of the process of extrusion of powder and porous materials. Part 1. Powder Body // *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*. 2016. no. 2 (243). P. 124–133.
- [20] Libenson G., Lopatin V., Komarnitsky G. Processes of powder metallurgy. Vol. 2. Forming and sintering. Moscow: MISIS, 2002. 320 p.

Д. К. Андрейченко<sup>1</sup>, К. П. Андрейченко<sup>2</sup>, Д. В. Мельничук<sup>1</sup>

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Россия

**Аннотация.** Исследована устойчивость сферического гидродинамического подвеса с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей жидкости от радиальной координаты в поддерживающем слое. Подвес с легким внутренним телом устойчив в большом диапазоне изменения относительного эксцентриситета, и при изменении перегрузок на величину порядка десятка ускорений свободного падения переходит из одного равновесного состояния в другое. Подвес с тяжелым внутренним телом неустойчив.

**Ключевые слова:** сферический гидродинамический подвес, вязкая несжимаемая жидкость, комбинированные динамические системы, частотный критерий устойчивости, краевые задачи.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.005

УДК: 532.516.5+531.36

### Введение

Гидродинамические подвесы [1–3] представляют собой чувствительные элементы высокоперегрузочных гидродинамических гироскопов. Ранее при умеренных значениях колебательного числа Рейнольдса на основе метода осреднения профиля скорости жидкости по толщине поддерживающего слоя [4] был сделан вывод о том, что сферический гидродинамический подвес с «легким» внутренним телом устойчив в малой

---

© Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., 2022

*Андрейченко Дмитрий Константинович*

**e-mail:** andreichenkodk@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

*Андрейченко Константин Петрович*

**e-mail:** kp\_andreichenko@renet.ru, доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия.

*Мельничук Дмитрий Вадимович*

**e-mail:** melnichukdv@sgu.ru, ассистент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Поступила 17.11.2022

окрестности центрального положения. В работе [2] строго показано, что цилиндрический гидродинамический подвес с легким внутренним телом достаточно быстро центрируется при возрастании колебательного числа Рейнольдса, и при возрастании внешней нагрузки остается устойчивым вплоть до значительных относительных эксцентриситетов. Экспериментальные данные [1] подтверждают эти эффекты для сферического гидродинамического подвеса. С учетом влияния кориолисовых сил инерции [5], их теоретическое объяснение требует детального компьютерного моделирования. Ставится задача исследования устойчивости абсолютно твердого сферического тела в сферическом гидродинамическом подвесе с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей жидкости от радиальной координаты. Используется частотный критерий устойчивости комбинированных динамических систем [6, 7].

### Модель гидродинамического подвеса

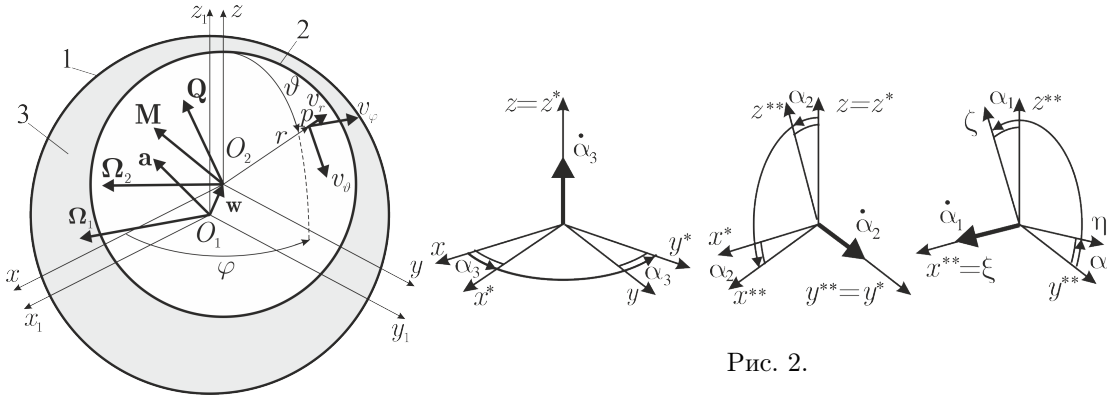


Рис. 1.

Рис. 2.

Внешняя недеформируемая сфера 1 радиуса  $R_1$  (рис. 1) движется поступательно с абсолютным ускорением  $\mathbf{a}$ , заданным проекциями на оси связанной с центром  $O_1$  сферы 1 поступательно движущейся (относительно некоторой инерциальной системы координат) системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  и вращается (относительно  $O_1x_1y_1z_1$ ) с абсолютной угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}_1$  [4]. Между внешней сферой 1 и внутренней недеформируемой сферой 2 (ротором) радиуса  $R_2$  залит поддерживающий слой вязкой несжимаемой жидкости 3 который приводится в движение из-за движения сферы 1 и приводит в движение сферу 2. Свяжем с центром масс внутренней сферы  $O_2$  систему координат  $O_2xyz$ , оси которой параллельны осям системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , т.е.  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ ,  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ ,  $\mathbf{\Omega}_1 = (\Omega_{1x}, \Omega_{1y}, \Omega_{1z})^T$ . Центр внутренней сферы получает смещение  $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$ , абсолютная угловая скорость вращения внутренней сферы суть  $\mathbf{\Omega}_2$ ,  $p$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}_1 \times \mathbf{r} + \mathbf{v}$  – давление в поддерживающем слое и скорость частиц жидкости относительно  $O_2xyz$ ,  $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)^T$  и  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$  – соответственно сила и момент сил, действующих со стороны поддерживающего слоя на внутреннее тело. Поворот от некоторой декартовой системы координат  $(x, y, z)$  к декартовой системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$  характеризуется набором углов  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$  в порядке  $\alpha_3 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_1$  (рис. 2), и вспомогательные матрицы суть

$$\begin{aligned}
 A(\boldsymbol{\alpha}) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \\
 B(\boldsymbol{\alpha}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad B_1(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (1)$$

Система координат  $O_1x_ky_kz_k$  жестко связана с внешним корпусом подвеса, а сфера 1 вращается относительно корпуса вокруг оси  $O_1x_k$  с угловой скоростью  $\omega_1$ . Углы  $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})^T$  характеризует повороты от координатных осей  $O_1x_1y_1z_1$  к координатным осям  $O_1x_ky_kz_k$ . Резалева система координат  $O_2x_r y_r z_r$  связана с ротором. Ось  $O_2x_r$  является главной центральной осью с максимальным моментом инерции, и ротор вращается относительно  $O_2x_r y_r z_r$  вокруг оси  $O_2x_r$  с угловой скоростью  $\omega_2$ . Углы  $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, \alpha_{22}, \alpha_{23})^T$  характеризуют повороты от координатных осей  $O_2x_ky_kz_k$  к осям  $O_2x_r y_r z_r$ . С декартовой системой координат  $O_2xyz$  связана сферическая система координат  $(\xi, \vartheta, \varphi)$  с единичными направляющими векторами  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad r = R_2 + \xi, \quad \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T \\
 \mathbf{e}_r &= (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T, \quad \mathbf{e}_\vartheta = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)^T
 \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть  $m, J_1, J_2$  – масса и моменты инерции внутренней сферы (ротора),  $J_1 > J_2$ ;  $\mathbf{g} = \text{Const}$ ,  $|\mathbf{g}| = g$  – ускорение свободного падения;  $k_{1a}$  и  $k_{2a}$  – коэффициенты демпфирования и упругой жесткости аксиального центрирующего устройства;  $\rho, \nu$  – плотность жидкости и ее кинематическая вязкость. При приведении модельных уравнений к безразмерным переменным полагаем  $\delta = R_1 - R_2$ ,  $\beta = \delta/R_2 \ll 1$ ,  $\xi = R_2\beta\xi^*$ ,  $r = R_2r^*$ ,  $r^* = 1 + \beta\xi^*$ ,  $x = R_2x^*$ ,  $y = R_2y^*$ ,  $z = R_2z^*$ ,  $h = \delta h^*$ ,  $\omega_1 = \Omega_h\omega_1^*$ ,  $\Omega_h$  – характерное значение угловой скорости вращения сферы 1 относительно корпуса подвеса;  $t = t^*/\Omega_h$ ,  $\rho_2 = m/(\frac{4}{3}\pi R_2^3)$ ,  $\gamma = g/(R_2\Omega_h^2)$  – характеризует нагруженность подвеса,  $\mathbf{w} = \delta\mathbf{w}^*$ ,  $\mathbf{g} = g\mathbf{g}^*$ ,  $\mathbf{g}^* = \text{Const}$ ,  $|\mathbf{g}^*| = 1$ ,  $\mathbf{a} = g\mathbf{a}^*$ ,  $\omega_2 = \Omega_h\omega_2^*$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_1 = \Omega_h\boldsymbol{\Omega}_1^*$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_2 = \Omega_h\boldsymbol{\Omega}_2^*$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^T = \boldsymbol{\Omega}_1 - \boldsymbol{\Omega}_2 = \Omega_h\boldsymbol{\Omega}^*$  – угловая скорость «скольжения» внутренней сферы,  $v_\vartheta = \Omega_h R_2 v_\vartheta^*$ ,  $v_\varphi = \Omega_h R_2 v_\varphi^*$ ,  $v_r = \beta\Omega_h R_2 v_r^*$ ,  $\mathbf{v}^* = \beta v_r^* \mathbf{e}_r + v_\vartheta^* \mathbf{e}_\vartheta + v_\varphi^* \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{v} = \Omega_h R_2 \mathbf{v}^*$ ,  $p = \rho\Omega_h^2 R_2^2 p^*$ ,  $J_{1,2} = mR_2^2 J_{1,2}^*$ ,  $\sigma = \Omega_h \delta^2/\nu$  – колебательное число Рейнольдса,  $\mathbf{Q} = \rho R_2^4 \Omega_h^2 \mathbf{Q}^*$ ,  $\mathbf{M} = \rho\nu R_2^4 \Omega_h \mathbf{M}^*/\delta$ ,  $k_{1a}^* = k_{1a}/(\rho R_2^4 \Omega_h)$ ,  $k_{2a}^* = k_{2a}/(\rho R_2^4 \Omega_h^2)$ . Далее символ  $(\cdot)^*$  над безразмерными переменными опущен. Начальные значения  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}|_{t=0}$ ,  $\omega_1^{(0)} = \omega_1|_{t=0}$ ,  $\alpha_1^{(0)} = \alpha_1|_{t=0}$  соответствуют равновесному состоянию, и

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \mu\mathbf{a}_1(t), \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} + \mu\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}(t), \quad \omega_1 = \omega_1^{(0)} + \mu\omega_1^{(1)}(t), \quad \boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} + \mu\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \\
 \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} &= \omega_1^{(0)} \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}), \quad \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} = B_1(\boldsymbol{\alpha}_1)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^{(1)} + \omega_1^{(1)} \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1) + \omega_1^{(0)} \mathbf{f}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}) \\
 \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}) &= A(\boldsymbol{\alpha})(1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{f}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(1)}) = \frac{1}{\mu}[\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)} + \mu\boldsymbol{\alpha}^{(1)}) - \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)})], \quad (\dot{\cdot}) = d(\cdot)/dt
 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\mu$  характеризует амплитуду изменения входного возмущения. Уравнения движения в безразмерных переменных следуют из [8] в пренебрежении сжимаемостью жидкости и некоторыми малыми порядков  $\beta^2$  и после редукции давления имеют вид

$$\begin{aligned}
 \beta(\rho_2/\rho - 1)\ddot{\mathbf{w}} &= \gamma(\rho_2/\rho - 1)(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \frac{3}{4\pi}\mathbf{Q} - ((k_{1a}\dot{\mathbf{w}} + k_{2a}\mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1))\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1) \\
 \frac{\rho_2}{\rho}(J\dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}^{(r)} \times J\boldsymbol{\Omega}_2) &= \frac{3}{4\pi}\frac{\beta}{\sigma}A^T(\boldsymbol{\alpha}_2)A^T(\boldsymbol{\alpha}_1)\mathbf{M}, \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_2) \\
 \boldsymbol{\Omega}_2 &= (\omega_2, 0, 0)^T + \boldsymbol{\omega}^{(r)}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(r)} = B(\boldsymbol{\alpha}_2)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \mu_1 A^T(\boldsymbol{\alpha}_2)B(\boldsymbol{\alpha}_1)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^{(1)}
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} h &= \beta^{-1} \{ [(1 + \beta)^2 + \beta^2 ((\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_r)^2 - \mathbf{w}^2)]^{1/2} - 1 \} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_r \\ \boldsymbol{\Omega} &= \omega_1 \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1) - A(\boldsymbol{\alpha}_1) [B_1(\boldsymbol{\alpha}_2) \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \omega_2 \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \beta v_r \mathbf{e}_r + \mathbf{v}_{\parallel}, \quad \mathbf{v}_{\parallel} = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_r = -(1 + \beta \xi)^{-2} \nabla^{(s)} \cdot \int_0^{\xi} (1 + \beta \xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi \\ \nabla^{(s)} \cdot \boldsymbol{\Phi}[\mathbf{v}_{\parallel}] &= 0, \quad \boldsymbol{\Phi}[\mathbf{v}_{\parallel}] = \int_0^h (1 + \beta \xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi + \frac{1}{2} (1 + \beta h)^2 [\dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{w}] \\ \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial t} &= -\frac{1}{1 + \beta \xi} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + \mathcal{F}_{\vartheta}[\mathbf{v}] \\ \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} &= -\frac{1}{1 + \beta \xi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \xi} \right) + \mathcal{F}_{\varphi}[\mathbf{v}] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{v}] &= \mathcal{F}_r[\mathbf{v}] \mathbf{e}_r + \mathcal{F}_{\vartheta}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\vartheta} + \mathcal{F}_{\varphi}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\varphi} = -\mu (1 + \beta \xi) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1^{(1)} \times \mathbf{e}_r - \\ &- \nabla^{(s)} (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}) - v_r \partial \mathbf{v} / \partial \xi - \beta v_r \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}_1 \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) + \\ &+ (1 - \beta \xi) [(\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \nabla^{(s)} (v_{\vartheta}^2 + v_{\varphi}^2)] + \frac{\beta^2}{\sigma} [\nabla^{(s)} (\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v}) - \\ &- \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)} (\nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}))] - \frac{\beta}{1 + \beta \xi} \nabla^{(s)} \int_0^{\xi} W d\xi, \quad W = v_{\vartheta}^2 + v_{\varphi}^2 - 2\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\vartheta}|_{\xi=0} &= -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_{\vartheta}|_{\xi=h(\vartheta, \varphi, t)} = -\beta [\dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{w}] \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} \\ v_{\varphi}|_{\xi=0} &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\vartheta}, \quad v_{\varphi}|_{\xi=h(\vartheta, \varphi, t)} = -\beta [\dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{w}] \cdot \mathbf{e}_{\varphi} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \beta \sigma^{-1} (\mathbf{e}_{\vartheta} (\partial v_{\vartheta} / \partial \xi)|_{\xi=0} + \mathbf{e}_{\varphi} (\partial v_{\varphi} / \partial \xi)|_{\xi=0}) - p|_{\xi=0} \mathbf{e}_r \right] \\ \mathbf{M} &= \frac{8}{3} \pi \beta \boldsymbol{\Omega} + \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \mathbf{e}_{\varphi} (\partial v_{\vartheta} / \partial \xi)|_{\xi=0} - \mathbf{e}_{\vartheta} (\partial v_{\varphi} / \partial \xi)|_{\xi=0} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

В качестве начальных условий для (4) и (6) задаются  $\mathbf{w}|_{t=0}$ ,  $\dot{\mathbf{w}}|_{t=0}$ ,  $\omega_2|_{t=0}$ ,  $\alpha_{22}|_{t=0}$ ,  $\dot{\alpha}_{22}|_{t=0}$ ,  $\alpha_{32}|_{t=0}$ ,  $\dot{\alpha}_{32}|_{t=0}$ ,  $v_{\vartheta}|_{t=0}$ ,  $v_{\varphi}|_{t=0}$ . Для скалярного  $f = f(\xi, \vartheta, \varphi)$  и векторного  $\mathbf{F} = F_r(\xi, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_r + F_{\vartheta}(\xi, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_{\vartheta} + F_{\varphi}(\xi, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_{\varphi}$  полей

$$\nabla^{(s)} f = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_{\vartheta} \sin \vartheta) + \frac{\partial F_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \quad (9)$$

Моделльные уравнения (4), (6)-(8) представляют собой связанную посредством граничных условий (7) и условий связи (8) систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4) динамики абсолютно твердого тела и уравнений в частных производных (6) – уравнения несжимаемости, уравнения баланса расхода жидкости и укороченных уравнений Навье-Стокса, т.е. комбинированную динамическую систему (КДС) [6]. Функции  $\mathbf{a}_1(t)$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}(t)$ ,  $\omega_1^{(1)}(t)$  являются входными, а функции  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_2(t)$ ,  $\omega_2(t)$  – выходными. При неограниченном возрастании угловой скорости вращения подвеса, т.е.  $\sigma \rightarrow \infty$ , безразмерный параметр  $\chi = (\rho_2/\rho - 1)\gamma\sigma^{-2} = \text{const} = \underline{\underline{Q}}(1)$ .

В равновесном состоянии величины  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^{(0)}$ ,  $h = h_0$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ ,  $p = p_0$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$  являются решением нелинейных краевых задач, которые следуют из (1)-(9) при  $\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)} = \omega_1^{(1)} = 0$ ,  $(\dot{\quad}) = 0$ ,  $\partial(\quad)/\partial t = 0$ . Их асимптотическим интегрированием в [9] показано, что при поперечных нагрузках с ростом колебательного числа Рейнольдса  $\sigma$  подвес быстро центрируется. При  $\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)} = (0, -\frac{1}{2}\pi, 0)^T$ ,  $\mathbf{g} = (0, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{a}_0 = (a_{0x}, a_{0y}, 0)^T$ ,  $\omega_1^{(0)} = 1$ ,  $\mathbf{w}_0 = -\frac{20}{9} (1 - \frac{20}{9}\beta) \chi (a_{0x}, 1 + a_{0y}, 0)^T \sigma^{-2} + \bar{o}(\sigma^{-2})$ ,  $\sigma \rightarrow \infty$ , что согласуется с результатами численного моделирования в [10].

#### Моделирование устойчивости

При выводе линейных уравнений возмущенного движения полагаем  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mu \mathbf{w}_1$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2^{(0)} + \mu \boldsymbol{\alpha}_2^{(1)}$ ,  $\omega_2 = \omega_2^{(0)} + \mu \omega_2^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^{(0)} + \mu \boldsymbol{\Omega}^{(1)}$ ,  $h = h_0 + \mu h_1$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mu \mathbf{v}^{(1)}$ ,  $p = p^{(0)} + \mu p^{(1)}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mu \mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mu \mathbf{M}_1$ ,  $\mu \rightarrow 0$ . Величины  $\mathbf{w}_1$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_2^{(1)}$ ,  $\omega_2^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$ ,  $h_1$ ,



$\mathbf{v}^{(1)}, p^{(1)}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{M}_1$  являются решением следующей системы линейных уравнений (на подвижной границе выполняется снесение граничных условий на невозмущенную стенку [11]), которая после преобразования Лапласа по времени  $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$  принимает вид (символ  $\tilde{}$  над изображениями Лапласа далее опущен)

$$\begin{aligned}
 & \beta(\rho_2/\rho - 1)\lambda^2 \mathbf{w} = -\gamma(\rho_2/\rho - 1)\mathbf{a}_1 + \frac{3}{4\pi} \mathbf{Q} - ((k_{1a}\lambda + k_{2a})\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}))\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}) - \\
 & - k_{2a} [((\partial \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}) \cdot \mathbf{w}_0] \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}) + (\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}))(\partial \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}] \\
 & \frac{\rho_2}{\rho} (J\lambda \boldsymbol{\Omega}_2 + \boldsymbol{\omega}^{(r)} \times J(\omega_2^{(0)}, 0, )^T) = \frac{3}{4\pi} \frac{\beta}{\sigma} A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}) \mathbf{M} \\
 & \boldsymbol{\Omega}_2 = (\omega_2, 0, 0)^T + \boldsymbol{\omega}^{(r)}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(r)} = \lambda [B(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})\boldsymbol{\alpha}_2 + A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})B(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}] \\
 & \boldsymbol{\Omega} = \omega_1^{(1)} \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}) - A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})[\omega_2 \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) + [B_1(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})\lambda + \omega_2^{(0)}(\partial \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})/\partial \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_2] + \\
 & + \omega_1^{(0)}(\partial \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)} - \omega_2^{(0)} \left[ \sum_{j=1}^3 (\partial A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})/\partial \alpha_j) \alpha_{1j} \right] \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 & h = -\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_r + \beta[(1 + \beta)^2 + \beta^2((\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_r)^2 - \mathbf{w}_0^2)]^{-1/2} [(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_r)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_0] \\
 & \mathbf{v} = \beta v_r \mathbf{e}_r + \mathbf{v}_{\parallel}, \quad \mathbf{v}_{\parallel} = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_r = -(1 + \beta\xi)^{-2} \nabla^{(s)} \cdot \int_0^{\xi} (1 + \beta\xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi \\
 & \boldsymbol{\Phi}^{(L)}[\mathbf{v}_{\parallel}] = \int_0^{h_0} (1 + \beta\xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi + \frac{1}{2} (1 + \beta h_0)^2 (\lambda \mathbf{w} - \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{w} - \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{w}^{(0)}) \\
 & \nabla^{(s)} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{(L)}[\mathbf{v}_{\parallel}] = 0, \quad \lambda v_{\vartheta} = -\frac{1}{1 + \beta\xi} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + \mathcal{F}_{\vartheta}^{(L)}[\mathbf{v}] \\
 & \lambda v_{\varphi} = -\frac{1}{1 + \beta\xi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \xi} \right) + \mathcal{F}_{\varphi}^{(L)}[\mathbf{v}] \\
 & \mathcal{F}^{(L)}[\mathbf{v}] = \mathcal{F}_r^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_r + \mathcal{F}_{\vartheta}^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\vartheta} + \mathcal{F}_{\varphi}^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\varphi} = \mathbf{F}^{(L)}[\mathbf{v}] - \lambda(1 + \beta\xi) \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{e}_r - \\
 & - \nabla^{(s)}(\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}^{(0)}) - 2\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{v}^{(0)} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}^{(0)}) + \\
 & + 2\beta(1 + \beta\xi)^{-1} \nabla^{(s)} \int_0^{\xi} \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_r d\xi \\
 & \mathbf{F}^{(L)}[\mathbf{v}] = F_r^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_r + F_{\vartheta}^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\vartheta} + F_{\varphi}^{(L)}[\mathbf{v}] \mathbf{e}_{\varphi} = \nabla^{(s)}(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) - v_r^{(0)} \partial \mathbf{v} / \partial \xi - \\
 & - v_r \partial \mathbf{v}^{(0)} / \partial \xi - \beta v_r^{(0)} \mathbf{v} - \beta v_r \mathbf{v}^{(0)} - 2\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) + \\
 & + (1 - \beta\xi)[(\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}^{(0)}) \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) + (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}^{(0)}) - \\
 & - \nabla^{(s)}(v_{\vartheta}^{(0)} v_{\vartheta} + v_{\varphi}^{(0)} v_{\varphi})] + \frac{\beta^2}{\sigma} [\nabla^{(s)}(\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)}(\nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}))] - \\
 & - \beta(1 + \beta\xi)^{-1} \nabla^{(s)} \int_0^{\xi} W^{(L)} d\xi, \quad W^{(L)} = 2(v_{\vartheta}^{(0)} v_{\vartheta} + v_{\varphi}^{(0)} v_{\varphi} - \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) \\
 & v_{\vartheta}|_{\xi=0} = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_{\varphi}|_{\xi=0} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} \\
 & v_{\vartheta}|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} = \beta(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{w} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{w}_0 - \lambda \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} - h(\partial v_{\vartheta}^{(0)} / \partial \xi) \Big|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} \\
 & v_{\varphi}|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} = \beta(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{w} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{w}_0 - \lambda \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_{\varphi} - h(\partial v_{\varphi}^{(0)} / \partial \xi) \Big|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} \\
 & \mathbf{Q} = \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \beta \sigma^{-1} (\mathbf{e}_{\vartheta}(\partial v_{\vartheta} / \partial \xi)|_{\xi=0} + \mathbf{e}_{\varphi}(\partial v_{\varphi} / \partial \xi)|_{\xi=0}) - p|_{\xi=0} \mathbf{e}_r \right] \\
 & \mathbf{M} = \frac{8}{3} \pi \beta \boldsymbol{\Omega} + \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \mathbf{e}_{\varphi}(\partial v_{\vartheta} / \partial \xi)|_{\xi=0} - \mathbf{e}_{\vartheta}(\partial v_{\varphi} / \partial \xi)|_{\xi=0} \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично [6], представим изображение реакций поддерживающего слоя в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= Q^{(\Omega, 1)}(\lambda) \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} + Q^{(w)}(\lambda) \mathbf{w} + Q^{(\Omega)}(\lambda) \boldsymbol{\Omega} \\
 \mathbf{M} &= M^{(\Omega, 1)}(\lambda) \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} + M^{(w)}(\lambda) \mathbf{w} + M^{(\Omega)}(\lambda) \boldsymbol{\Omega}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Подстановка (12) в (10) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно изображений Лапласа возмущений выходных функций  $\mathbf{w}(\lambda), \boldsymbol{\alpha}_2(\lambda), \omega_2(\lambda)$ , позволяющей линейно выразить их через изображения Лапласа возмущений входных функций  $\mathbf{a}_1(\lambda), \boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}(\lambda), \omega_1^{(1)}(\lambda)$ , т.е. найти передаточные функции. Ее определитель  $D(\lambda)$ , т.е. характеристический квазимногочлен КДС [2, 6, 7], имеет вид

$$\begin{aligned}
D(\lambda) &= \begin{vmatrix} B_{ww}(\lambda) & B_{w\alpha}(\lambda) \\ B_{\alpha w}(\lambda) & B_{\alpha\alpha}(\lambda) \end{vmatrix} \\
B_{ww}(\lambda) &= \beta(\rho_2/\rho - 1)\lambda^2 \text{diag}(1, 1, 1) + (k_{1a}\lambda + k_{2a})B^{(1)} - 3Q^{(w)}(\lambda)/(4\pi) \\
B_{w\alpha}(\lambda) &= 3Q^{(\Omega)}(\lambda)A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})B^{(3)}(\lambda)/(4\pi) \\
B_{\alpha w}(\lambda) &= -3\beta A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})M^{(w)}(\lambda)/(4\pi\sigma) \\
B_{\alpha\alpha}(\lambda) &= \frac{\rho_2}{\rho}[J_1\lambda \text{diag}(1, 0, 0) + (J\lambda^2 + J_1\omega_2^{(0)}B^{(2)}\lambda)B(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) \text{diag}(0, 1, 1)] + \\
&+ 3\beta A^T(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})A^T(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})M^{(\Omega)}(\lambda)A(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})B^{(3)}(\lambda)/(4\pi\sigma) \\
B^{(1)} &= \mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})[\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)})]^T; B^{(2)} = [b_{kj}^{(2)}], b_{kj}^{(2)} = \delta_k^2\delta_j^3 - \delta_k^3\delta_j^2, k, j = 1, 2, 3 \\
B^{(3)}(\lambda) &= A(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) \text{diag}(1, 0, 0) + (\lambda B_1(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)}) + \omega_2^{(0)}\partial\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2^{(0)})/\partial\alpha) \text{diag}(0, 1, 1)
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть  $\mathbf{e}_1^{(3)} = (1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{e}_2^{(3)} = (0, 1, 0)^T$ ,  $\mathbf{e}_3^{(3)} = (0, 0, 1)^T$ . Столбцы входящих в выражение (13) для характеристического квазимногочлена КДС матриц  $Q^{(w)}(\lambda)$ ,  $Q^{(\Omega)}(\lambda)$ ,  $M^{(w)}(\lambda)$ ,  $M^{(\Omega)}(\lambda)$  находятся решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}
h &= [\beta[(1 + \beta)^2 + \beta^2((\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_r)^2 - \mathbf{w}_0^2)]^{-1/2}[(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathbf{w}_0] - \mathbf{e}_r] \cdot \mathbf{e}_j^{(3)} \\
\mathbf{v} &= \beta v_r \mathbf{e}_r + \mathbf{v}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel} = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, v_r = -(1 + \beta\xi)^{-2} \nabla^{(s)} \cdot \int_0^{\xi} (1 + \beta\xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi \\
\Phi^{(\mathcal{L})}[\mathbf{v}_{\parallel}] &= \int_0^{h_0} (1 + \beta\xi) \mathbf{v}_{\parallel} d\xi + \{\frac{1}{2}(1 + \beta h_0)^2 (\lambda \mathbf{e}_j^{(3)} - \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{e}_j^{(3)}), 0\} \\
\nabla^{(s)} \cdot \Phi^{(\mathcal{L})}[\mathbf{v}_{\parallel}] &= 0, \lambda v_{\vartheta} = -\frac{1}{1 + \beta\xi} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + F_{\vartheta}^{(L)}[\mathbf{v}] \\
\lambda v_{\varphi} &= -\frac{1}{1 + \beta\xi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p|_{\xi=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \xi} \right) + F_{\varphi}^{(L)}[\mathbf{v}] \\
v_{\vartheta}|_{\xi=0} &= \{0, -\mathbf{e}_j^{(3)} \cdot \mathbf{e}_{\varphi}\}, v_{\varphi}|_{\xi=0} = \{0, \mathbf{e}_j^{(3)} \cdot \mathbf{e}_{\vartheta}\} \\
v_{\vartheta}|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} &= \{\beta(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{e}_j^{(3)} - \lambda \mathbf{e}_j^{(3)}) \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} - h(\partial v_{\vartheta}^{(0)}/\partial \xi)|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)}, 0\} \\
v_{\varphi}|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)} &= \{\beta(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{e}_j^{(3)} - \lambda \mathbf{e}_j^{(3)}) \cdot \mathbf{e}_{\varphi} - h(\partial v_{\varphi}^{(0)}/\partial \xi)|_{\xi=h_0(\vartheta, \varphi)}, 0\} \\
\{Q^{(w)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}, Q^{(\Omega)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}\} &= \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi [\beta\sigma^{-1}(\mathbf{e}_{\vartheta}(\partial v_{\vartheta}/\partial \xi)|_{\xi=0} + \\
&+ \mathbf{e}_{\varphi}(\partial v_{\varphi}/\partial \xi)|_{\xi=0}) - p|_{\xi=0} \mathbf{e}_r], \{M^{(w)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}, M^{(\Omega)}(\lambda)\mathbf{e}_j^{(3)}\} = \{0, \frac{8}{3}\pi\beta\mathbf{e}_j^{(3)}\} + \\
&+ \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi [\mathbf{e}_{\varphi}(\partial v_{\vartheta}/\partial \xi)|_{\xi=0} - \mathbf{e}_{\vartheta}(\partial v_{\varphi}/\partial \xi)|_{\xi=0}], j = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{14}$$

Как следует из результатов [11], при  $|\lambda| \gg 1$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$  элементы матриц  $Q^{(w)}(\lambda)$ ,  $Q^{(\Omega)}(\lambda)$ ,  $M^{(w)}(\lambda)$ ,  $M^{(\Omega)}(\lambda)$  являются аналитическими функциями. При  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\text{Re } \lambda > -\infty$  выполнялось асимптотическое интегрирование линейной краевой задачи (14) на основе метода сращиваемых разложений. В результате найдено

$$\begin{aligned}
Q^{(w)}\mathbf{e}_j^{(3)} &= -\lambda \mathbf{Q}^{(j)} + \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{Q}^{(j)}, \mathbf{Q}^{(j)}(\lambda) = \mathbf{A}_0^{(j)}\lambda + \mathbf{A}_1^{(j)}\lambda^{1/2} + \mathbf{A}_2^{(j)} + \underline{Q}(\lambda^{-1/2}), \\
j = 1, 2, 3, M^{(w)}(\lambda) &= \underline{Q}(\lambda^{1/2}), Q^{(\Omega)}(\lambda) = \underline{Q}(\lambda^{-1/2}), M^{(\Omega)}(\lambda) = \frac{8}{3}\pi[(\sigma\lambda)^{1/2} + \\
&+ 2\beta] \text{diag}(1, 1, 1) + \underline{Q}(\lambda^{-1/2}), \mathbf{A}_0^{(j)} = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta p_0^{(e)} \mathbf{e}_r, \mathbf{A}_1^{(j)} = \\
&= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta (p_1^{(e)} + 2\beta\sigma^{-1/2}p_0^{(e)}) \mathbf{e}_r, \mathbf{A}_2^{(j)} = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta (p_2^{(e)} + \\
&+ 2\beta\sigma^{-1/2}p_1^{(e)}) \mathbf{e}_r, \nabla^{(s)} \cdot [h_0 \nabla^{(s)} p_0^{(e)} + \frac{1}{2}(1 + \beta h_0)^2 \mathbf{e}_j^{(3)}] = 0 \\
\nabla^{(s)} \cdot [h_0 \nabla^{(s)} p_1^{(e)} - \beta\sigma^{-1/2}(1 + \beta h_0) \mathbf{e}_j^{(3)} - 2\sigma^{-1/2} \nabla^{(s)} p_0^{(e)}] &= 0 \\
\nabla^{(s)} \cdot [h_0 \nabla^{(s)} p_2^{(e)} + \mathbf{f} - 2\sigma^{-1/2} \nabla^{(s)} p_1^{(e)} - \beta\sigma^{-1} \nabla^{(s)} p_0^{(e)}] &= 0, p_{0,1,2}^{(e)} = p_{0,1,2}^{(e)}(\vartheta, \varphi) \\
\mathbf{f} &= -(h_0 + \beta h_0^2) \nabla^{(s)}(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{e}_r \cdot \nabla^{(s)} p_0^{(e)}) + \beta h_0 \boldsymbol{\Omega}_1^{(0)} \times (h_0 \mathbf{e}_r + \mathbf{w}_0) \Lambda p_0^{(e)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2h_0\Omega_1^{(0)} \times \nabla^{(s)} p_0^{(e)} - \frac{1}{2}[(1 + \beta h_0)\Omega_1^{(0)} \times \mathbf{e}_r \cdot \nabla^{(s)} h_0 - \Omega_1^{(0)} \times \mathbf{w}_0((1 + \beta h_0)\mathbf{e}_r - \\
 & - \beta \nabla^{(s)} h_0)](\beta \mathbf{e}_j^{(3)} + \nabla^{(s)} p_0^{(e)}) - \beta \int_0^{h_0} d\xi \nabla^{(s)} \int_0^\xi d\xi \nabla^{(s)} p_0^{(e)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} - \\
 & - \Lambda p_0^{(e)} \int_0^{h_0} d\xi (1 - 3\beta\xi) \mathbf{v}^{(0)} - \int_0^{h_0} d\xi (1 - \beta\xi) \nabla^{(s)} (\nabla^{(s)} p_0^{(e)} \cdot \mathbf{v}^{(0)}) + \\
 & + (\mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)} p_0^{(e)}) \int_0^{h_0} d\xi (1 - \beta\xi) \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}^{(0)}), \quad \Lambda() = \nabla^{(s)} \cdot \nabla^{(s)}()
 \end{aligned} \tag{15}$$

Из (13), (17) следует

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-11} D(\lambda) = \beta^3 (\rho_2/\rho - 1)^3 (\rho_2/\rho)^3 J_1 J_2^2 \cos \alpha_{22}^{(0)}, \quad \text{Re } \lambda > -\infty$$

Аналогично [7, 12], аналитичность  $Q^{(w)}(\lambda)$ ,  $Q^{(\Omega)}(\lambda)$ ,  $M^{(w)}(\lambda)$ ,  $M^{(\Omega)}(\lambda)$  при умеренных  $\lambda$  проверяется численно на основе принципа аргумента. При выполнении данного условия подвес асимптотически устойчив, если [6, 7, 12]

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega) = \frac{11}{2} \pi \tag{16}$$

### Проекционный метод

Численное интегрирование модельных краевых задач выполнялось на основе проекционного метода Галеркина [13]. После отображения области, занимаемой поддерживающим слоем, на параллелепипед  $[0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  посредством перехода к новой независимой координате  $x = \xi/h \in [0, 1]$  уравнения (6)-(8) принимают вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \beta v_r \mathbf{e}_r + \mathbf{v}_{\parallel}, \quad \mathbf{v}_{\parallel} = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_r = x(1 + \beta hx)^{-1} \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla^{(s)} h - \\
 & - (1 + \beta hx)^{-2} \int_0^x \nabla^{(s)} \cdot (h(1 + \beta hx) \mathbf{v}_{\parallel}) dx, \quad \nabla^{(s)} \cdot \Phi[\mathbf{v}_{\parallel}] = 0 \\
 \Phi[\mathbf{v}_{\parallel}] &= h \int_0^1 (1 + \beta hx) \mathbf{v}_{\parallel} dx + \frac{1}{2} (1 + \beta h)^2 (\dot{\mathbf{w}} - \Omega_1 \times \mathbf{w}) \\
 \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial t} &= \Psi_{\vartheta}[\mathbf{v}, p] = \frac{\dot{h}}{h} x \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial x} - \frac{1}{1 + \beta hx} \frac{\partial p|_{x=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{h} \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial x} \right) + \mathcal{F}_{\vartheta}[\mathbf{v}] \\
 \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} &= \Psi_{\varphi}[\mathbf{v}, p] = \frac{\dot{h}}{h} x \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{1 + \beta hx} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p|_{x=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{h} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial x} \right) + \\
 & + \mathcal{F}_{\varphi}[\mathbf{v}], \quad \mathcal{F}[\mathbf{v}] = -\mu_1 (1 + \beta hx) \dot{\Omega}_1^{(1)} \times \mathbf{e}_r + \nabla^{(s\xi)} (\Omega_1 \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) - h^{-1} v_r \partial \mathbf{v} / \partial x - \\
 & - \beta v_r \mathbf{v} - 2\Omega_1 \times \mathbf{v} + \Omega_1 \nabla^{(s\xi)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) + (1 - \beta hx) [(\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \nabla^{(s\xi)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) - \\
 & - \frac{1}{2} \nabla^{(s\xi)} (v_{\vartheta}^2 + v_{\varphi}^2)] + \beta^2 [\nabla^{(s\xi)} (\nabla^{(s\xi)} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s\xi)} (\nabla^{(s\xi)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}))] / \sigma - \\
 & - \beta h (1 + \beta hx)^{-1} [\nabla^{(s)} (h \int_0^x W dx) - x W \nabla^{(s)} h], \quad W = v_{\vartheta}^2 + v_{\varphi}^2 - 2\Omega_1 \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r \\
 v_{\vartheta}|_{x=0} &= -\Omega \cdot \mathbf{e}_{\varphi}, \quad v_{\vartheta}|_{x=1} = -\beta (\dot{\mathbf{w}} - \Omega_1 \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_{\vartheta}, \quad v_{\varphi}|_{x=0} = \Omega \cdot \mathbf{e}_{\vartheta} \\
 v_{\varphi}|_{x=1} &= -\beta (\dot{\mathbf{w}} - \Omega_1 \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_{\varphi}; \quad \nabla^{(s\xi)} = \nabla^{(s)} - (h^{-1} \nabla^{(s)} h) x \partial / \partial x
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi [\beta \sigma^{-1} h^{-1} (\mathbf{e}_{\vartheta} (\partial v_{\vartheta} / \partial x)|_{x=0} + \mathbf{e}_{\varphi} (\partial v_{\varphi} / \partial x)|_{x=0}) - p|_{x=0} \mathbf{e}_r] \\
 \mathbf{M} &= \frac{8}{3} \pi \beta \Omega + \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi h^{-1} [\mathbf{e}_{\varphi} (\partial v_{\vartheta} / \partial x)|_{x=0} - \mathbf{e}_{\vartheta} (\partial v_{\varphi} / \partial x)|_{x=0}] / h
 \end{aligned} \tag{18}$$

Дискретизация начально-краевой задачи (14) по независимым пространственным переменным выполнялась на основе проекционного метода Галеркина с использованием представлений

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\parallel} &= \nabla^{(s)} U - \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)} V, \quad p|_{x=0} = \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=-k}^k p_{km}(t) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) \\
 U(x, \vartheta, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{N_1+2} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=-k}^k U_{nkm}(t) T_n(2x-1) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) \\
 V(x, \vartheta, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{N_1+2} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=-k}^k V_{nkm}(t) T_n(2x-1) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad N_1 \geq \frac{7}{2} \sigma^{1/4} \\
 T_n(z) &= \cos(n \arccos z), \quad s_{km} = 2\pi (1 + \delta_m^0) (k+m)! [(2k+1)(k-m)!]^{-1} \\
 Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) &= s_{km}^{-1/2} P_k^{(m)}(\cos \vartheta) \cos m\varphi, \quad m = \overline{0, k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\
 Y_k^{(-m)}(\vartheta, \varphi) &= s_{km}^{-1/2} P_k^{(m)}(\cos \vartheta) \sin m\varphi, \quad m = \overline{1, k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$P_k^{(m)}(z) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_k(z)}{dz^m}, \quad P_k(z) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dz^k} (1 - z^2)^k, \quad N_2 \geq [3\sigma/(4\beta^2)]^{1/3}$$

Дискретизованные аналоги уравнений баланса расхода жидкости, Навье-Стокса и граничных условий (17) принимают вид

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi[\mathbf{v}_{\parallel}] \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0, \quad k = \overline{1, N_2}, \quad m = \overline{-k, k} \\ & \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x - 1) (\partial \mathbf{v}_{\parallel} / \partial t - \Psi[\mathbf{v}, p]) \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N_1+2} A_{nl}^{(0)} \dot{U}_{lkm} - \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x - 1) \Psi[\mathbf{v}, p] \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0 \\ & \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x - 1) \mathbf{e}_r \times (\partial \mathbf{v}_{\parallel} / \partial t - \Psi[\mathbf{v}, p]) \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N_1+2} A_{nl}^{(0)} \dot{V}_{lkm} - \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x - 1) \mathbf{e}_r \times \Psi[\mathbf{v}, p] \cdot \\ & \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0, \quad \Psi[\mathbf{v}, p] = \Psi_\vartheta[\mathbf{v}, p] \mathbf{e}_\vartheta + \Psi_\varphi[\mathbf{v}, p] \mathbf{e}_\varphi, \quad n = \overline{0, N_1}, \quad k = \overline{1, N_2}, \\ & m = \overline{-k, k}; \quad \sum_{n=0}^{N_1+2} (-1)^n U_{nkm} = 0, \quad \sum_{n=0}^{N_1+2} U_{nkm} = \beta S_{km}^{(r)}, \quad k = \overline{1, N_2}, \quad m = \overline{-k, k} \\ & \sum_{n=0}^{N_1+2} (-1)^n V_{nkm} = S_{km}^{(v)}, \quad \sum_{n=0}^{N_1+2} V_{nkm} = 0, \quad k = \overline{1, N_2}, \quad m = \overline{-k, k} \\ & (S_{1,1}^{(r)}, S_{1,-1}^{(r)}, S_{1,0}^{(r)})^T = (\frac{4}{3}\pi)^{1/2} (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{w} - \dot{\mathbf{w}}), \quad S_{km}^{(r)} = 0, \quad k = m = 0, \quad k = \overline{2, N_2}, \\ & m = \overline{-k, k}, \quad S_{km}^{(v)} = -\delta_k^1 (\frac{4}{3}\pi)^{1/2} (\delta_m^1 \Omega_x + \delta_m^{-1} \Omega_y + \delta_m^0 \Omega_z), \quad A_{nk}^{(0)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_k(x) dx \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом (19), уравнения (4), (5), (18), (20) представляют собой записанную в неявной форме систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}|_{t=0} = \mathbf{Y}_0, \quad \mathbf{Y} = (w_x, w_y, w_z, \dot{w}_x, \dot{w}_y, \dot{w}_z, \omega_2, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dot{\alpha}_{22}, \dot{\alpha}_{23}, \\ U_{nkm}, n = \overline{1, N_1}, k = \overline{1, N_2}, m = \overline{-k, k}, V_{nkm}, n = \overline{0, N_1}, k = \overline{1, N_2}, m = \overline{-k, k})^T \end{aligned}$$

которая интегрируется численно жестко устойчивым ФДН-методом [14]. При этом используется быстрый алгоритм [15] вычисления матрицы Якоби  $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) / \partial \mathbf{Y}$ . Начальные условия  $\mathbf{Y}_0$  соответствуют равновесному состоянию, в котором  $\mathbf{F}(-0, \mathbf{Y}_0) = 0$ .

После перехода к новой независимой пространственной переменной  $x = \xi/h_0 \in [0, 1]$  численное интегрирование линейной краевой задачи (14) выполняется аналогично (19), (20), и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно Фурье-коэффициентов.

Уравнения Лежандра (15) относительно соответствующих компонент давления на поверхности внутренней сферы можно представить в виде

$$\nabla^{(s)} \cdot (h_0 \nabla^{(s)} p + \mathbf{f}(\vartheta, \varphi)) = 0 \quad (21)$$

где  $\mathbf{f}(\vartheta, \varphi)$  – известная вектор-функция. Проекционный метод, позволяющий свести численное интегрирование (21) к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно Фурье-коэффициентов  $p_{km}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^N \sum_{m=-k}^k p_{km} Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) \\ \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi (h_0 \nabla^{(s)} p + \mathbf{f}(\vartheta, \varphi)) \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} &= 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad m = \overline{-k, k} \end{aligned}$$

### Результаты моделирования устойчивости

Полагаем, что ось вращения внешней сферы горизонтальна,  $\alpha_1^{(0)} = (0, -\frac{1}{2}\pi, 0)^T$ ,  $\mathbf{g} = (0, -1, 0)^T$ ,  $\omega_1^{(0)} = 1$ , т.е.  $\Omega_1^{(0)} = (0, 0, 1)^T$ , и подвес подвержен воздействию интенсивных поперечных перегрузок. Исследуем устойчивость подвеса в окрестности центрального положения, т.е. при малых относительных эксцентриситетах. Подвесу с легким внутренним телом и безразмерными параметрами

$$\beta = 0.12, \quad \chi = -1.62, \quad \rho_2/\rho = 0.471, \quad J_1 = 0.833, \quad J_2 = 0.584, \quad k_{1a} = k_{2a} = 1 \quad (22)$$

при  $\sigma = 18.26$  соответствуют размерные радиус внутренней сферы  $R_2 = 2.5 \cdot 10^{-2}$  м, зазор между внешней и внутренней сферами  $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$  м, угловая скорость вращения внешней сферы  $\Omega_h = 207$  рад/с, масса и моменты инерции ротора  $m = 5.86 \cdot 10^{-2}$  кг,  $J_1 = 3.05 \cdot 10^{-5}$  кгм<sup>2</sup>,  $J_2 = 2.14 \cdot 10^{-5}$  кгм<sup>2</sup>, плотность и кинематическая вязкость жидкости в поддерживающем слое  $\rho = 2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 1,02 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с [3]. При  $\mathbf{a}_0 = 0$  (без перегрузок) равновесное состояние характеризуется практически нулевым относительным эксцентриситетом  $|\mathbf{w}_0| = 0.005736 \ll 1$ . Частотный годограф представлен на рис. 3а. Здесь и далее частотные годографы показаны в специальном масштабе  $u + iv = |D(i\omega)|^{-1} D(i\omega) \ln(1 + |D(i\omega)|)$ .

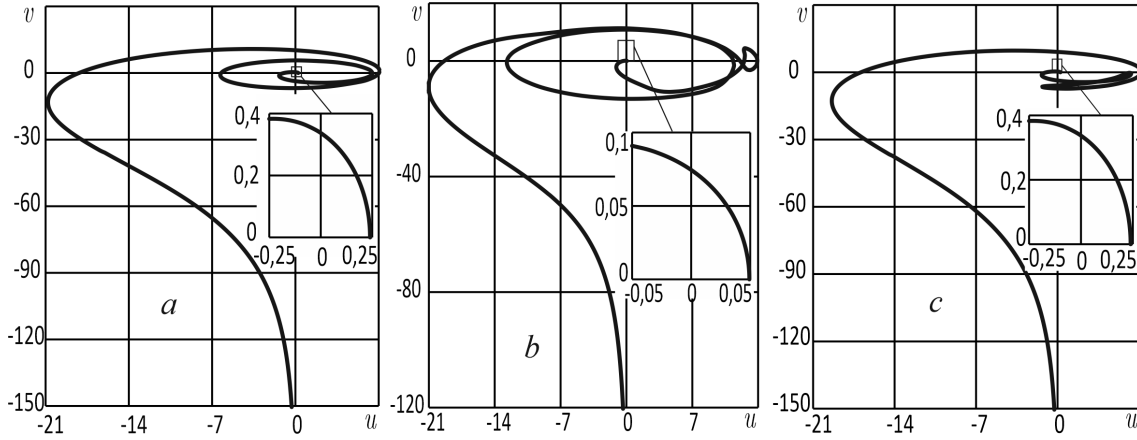


Рис. 3.

Приращение аргумента частотного годографа составляет  $\frac{11}{2}\pi$ , и в соответствии с (16) сферический гидродинамический подвес асимптотически устойчив.

Подвесу с легким внутренним телом и безразмерными параметрами

$$\begin{aligned}
 \beta = 0.02, \quad \chi = -6.94, \quad \rho_2/\rho = 0.448, \quad J_1 = 0.833 \\
 J_2 = 0.583, \quad \sigma = 160, \quad k_{1a} = k_{2a} = 1
 \end{aligned} \tag{23}$$

соответствуют размерные радиус внутренней сферы  $R_2 = 2 \cdot 10^{-2}$  м, зазор между внешней и внутренней сферами  $\delta = 4 \cdot 10^{-4}$  м, угловая скорость вращения внешней сферы  $\Omega_h = 1000$  рад/с, масса и моменты инерции ротора  $m = 3 \cdot 10^{-2}$  кг,  $J_1 = 10^{-5}$  кгм<sup>2</sup>,  $J_2 = 7 \cdot 10^{-6}$  кгм<sup>2</sup>, плотность и кинематическая вязкость жидкости в поддерживающем слое  $\rho = 2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с [1]. Равновесное состояние данного подвеса с повышенной угловой скоростью вращения при пятидесятикратной перегрузке  $\mathbf{a}_0 = (0, 50, 0)^T$  характеризуется относительно небольшим эксцентриситетом  $|\mathbf{w}_0| = 0.0257$ . Частотный годограф приведен на рис. 3б. Приращение аргумента частотного годографа составляет  $\frac{11}{2}\pi$ , и сферический гидродинамический подвес асимптотически устойчив.

Равновесному состоянию подвеса с параметрами  $\beta = 0.12, \sigma = 18.26, \gamma = 9.16 \cdot 10^{-3}, \rho_2/\rho = 1.5, J_1 = 0.833, J_2 = 0.584, k_{1a} = k_{2a} = 1$  (тяжелое внутреннее тело) также соответствует достаточно малое значение относительного эксцентриситета  $|\mathbf{w}_0| = 0.005733 \ll 1$ . Частотный годограф показан на рис. 3с. Приращение аргумента частотного годографа составляет  $\frac{7}{2}\pi$ , и в соответствии с (16) сферический гидродинамический подвес неустойчив.

Далее на рис. 4 приведены частотные годографы подвеса с параметрами (22) (легкое внутреннее тело) при десятикратной перегрузке  $\mathbf{a}_0 = (0, 10, 0)^T$  и последующем уменьшении колебательного числа Рейнольдса  $\sigma$ , чему соответствует увеличение относительного эксцентриситета  $|\mathbf{w}_0|$  в равновесном состоянии. При  $\sigma = 10$   $|\mathbf{w}_0| = 0.173$  (рис. 4a),  $\sigma = 7$   $|\mathbf{w}_0| = 0.299$  (рис. 4b),  $\sigma = 4$   $|\mathbf{w}_0| = 0.625$  (рис. 4c) приращение аргумента частотного годографа составляет  $\frac{11}{2}\pi$ , и сферический гидродинамический подвес устойчив. При  $\sigma = 3.06$  (найдено бинарным делением)  $|\mathbf{w}_0| = 0.790$  (рис. 4d) частотный годограф проходит через начало координат, что соответствует границе устойчивости. При  $\sigma = 3$   $|\mathbf{w}_0| = 0.801$  (рис. 4e)) приращение аргумента частотного годографа составляет  $\frac{7}{2}\pi$ , и подвес неустойчив. Потеря устойчивости происходит при больших эксцентриситетах, и подвес обладает значительным запасом устойчивости.

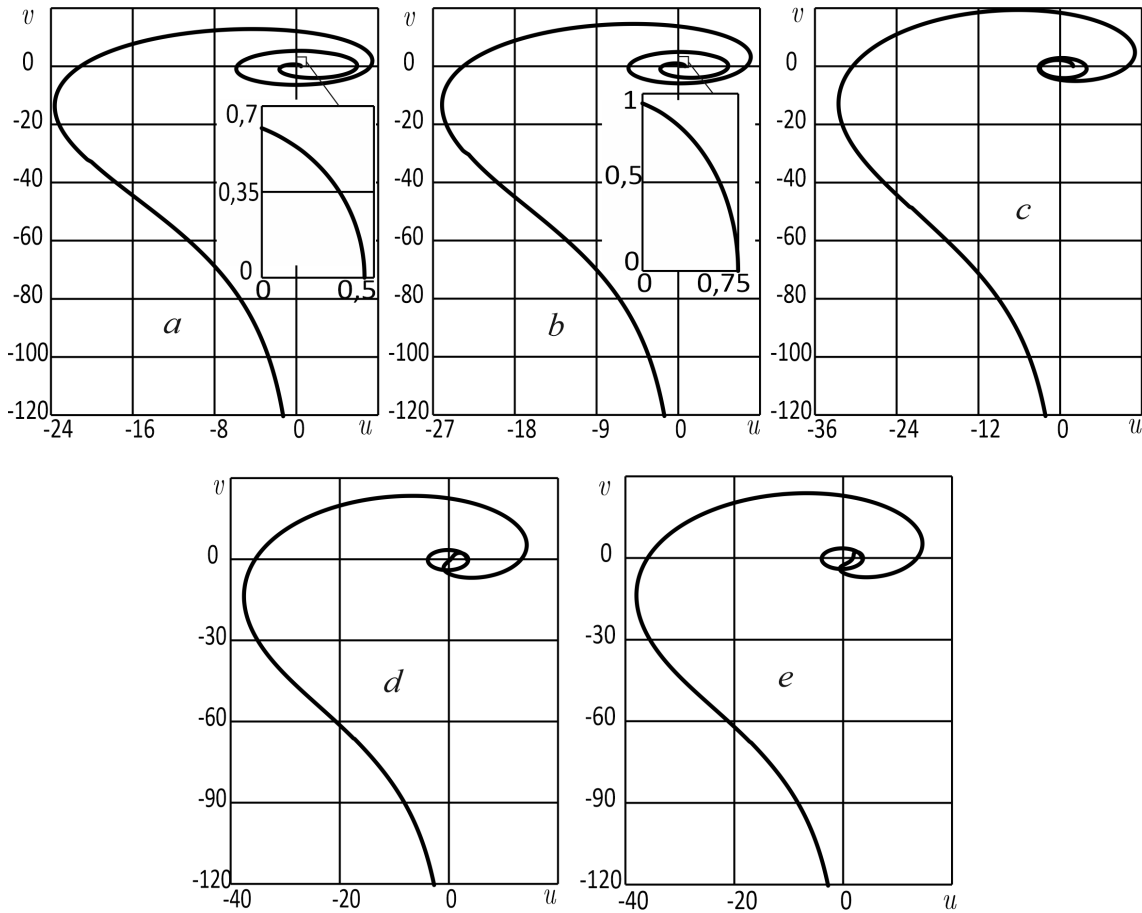


Рис. 4.

На рис. 5a для подвеса с легким внутренним телом и параметрами (22) при  $\sigma = 18.26$ ,  $\mathbf{a}_0 = 0$ ,  $\mu = 1$  и скачкообразном возрастании десятикратной перегрузки  $\mathbf{a}_1 = (0, 10 \cdot 1(t), 0)^T$ , где  $1(t)$  – функция единичного скачка Хевисайда, приведены зависимости от времени смещений центра масс ротора  $w_x(t)$ ,  $w_y(t)$ . Как показывают представленные данные, подвес в течение нескольких периодов вращения внешней сферы переходит из одного равновесного состояния в другое.

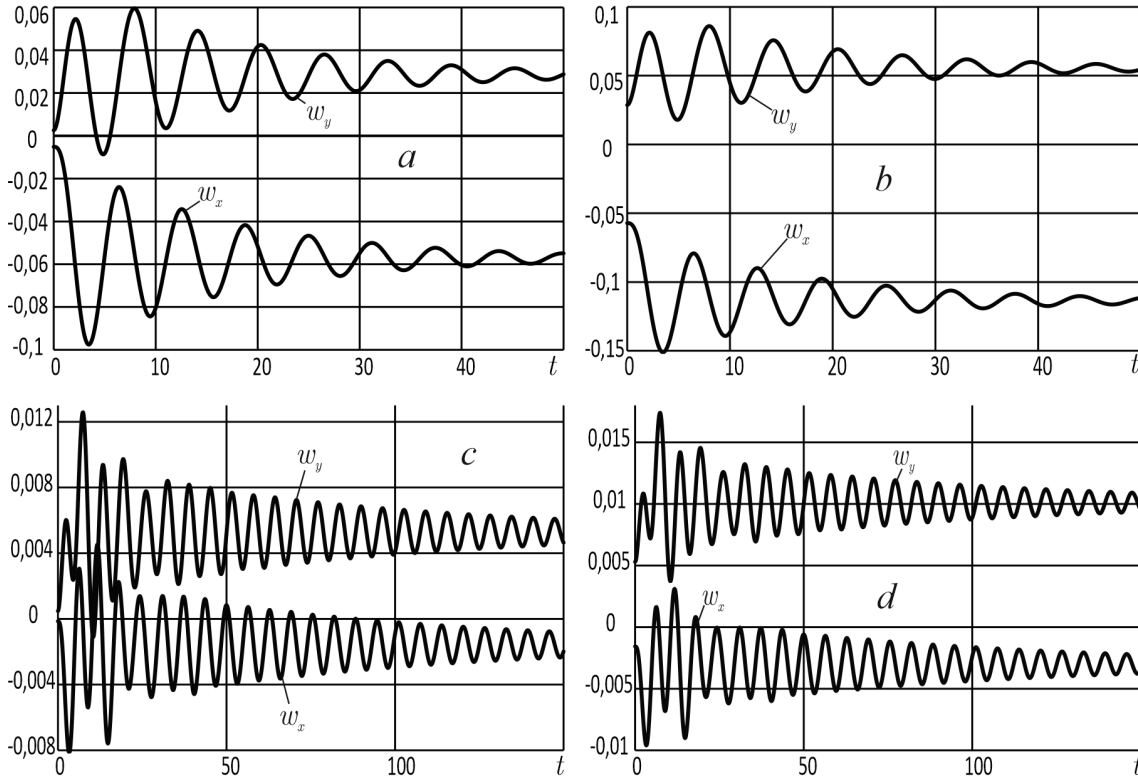


Рис. 5.

На рис. 5b для подвеса с легким внутренним телом и параметрами (22) при  $\sigma = 18.26$ , постоянной начальной десятикратной перегрузке  $\mathbf{a}_0 = (0, 10, 0)^T$ ,  $\mu = 1$  для дальнейшего скачкообразного возрастания перегрузки на десять единиц  $\mathbf{a}_1 = (0, 10 \cdot 1(t), 0)^T$  приведены зависимости от времени смещений центра масс ротора  $w_x(t)$ ,  $w_y(t)$ . Здесь также переход из одного равновесного состояния в другое занимает несколько периодов вращения внешней сферы.

На рис. 5c для подвеса с легким внутренним телом и параметрами (23) при  $\mathbf{a}_0 = 0$ ,  $\mu = 1$  и скачкообразном возрастании перегрузки на десять единиц  $\mathbf{a}_1 = (0, 10 \cdot 1(t), 0)^T$  приведены зависимости от времени смещений центра масс ротора  $w_x(t)$ ,  $w_y(t)$ . По сравнению с рис. 5a, увеличение колебательного числа Рейнольдса  $\sigma$  приводит к уменьшению на порядок характерной величины смещений центра масс ротора. Однако скорость затухания переходного процесса также уменьшается на порядок.

На рис. 5d для подвеса с легким внутренним телом и параметрами (23), постоянной начальной десятикратной перегрузке  $\mathbf{a}_0 = (0, 10, 0)^T$  для дальнейшего скачкообразного возрастания перегрузки на десять единиц  $\mathbf{a}_1 = (0, 10 \cdot 1(t), 0)^T$  и  $\mu_1 = 1$  приведены зависимости от времени смещений центра масс ротора  $w_x(t)$ ,  $w_y(t)$ . По сравнению с рис. 5b, здесь также на порядок уменьшается характерная величина смещений центра масс ротора и скорость затухания переходного процесса.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андрейченко К.П. Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров. Москва: Машиностроение, 1987. 128 с.
- [2] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. К теории устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 13–26.
- [3] Андрейченко Д.К., Смарунь А.Б. Моделирование аксиального гидромеханического эффекта в гироскопах со сферическим гидродинамическим подвесом // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 3. С. 27–33.
- [4] Андрейченко К.П. К теории слабонагруженного сферического гидродинамического подвеса // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 1. С. 17–24.
- [5] Rietord M., Valdetaro L. Axisymmetric inertial modes in a spherical shell at low Ekman numbers // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 844. P. 597–634.
- [6] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
- [7] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П., Мельничук Д.В. Расширенный алгоритм моделирования устойчивости комбинированных динамических систем // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 199. С. 7–17.
- [8] Мельничук Д.В., Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. Уточненная математическая модель сферического гидродинамического подвеса // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. Саратов: Наука, 2018. С. 264–268.
- [9] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Modeling the Effect Of Centering of a Spherical Hydrodynamic Suspension // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2020. no. 52. P. 13–21.
- [10] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П., Мельничук Д.В. Численное моделирование сферического гидродинамического подвеса // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. Саратов, 2021. С. 10–14.
- [11] Седов Л.И. Механика сплошной среды В 2 т. Т. 1. Москва: Наука, 1976. 536 с.
- [12] Портенко М.С., Мельничук Д.В., Андрейченко Д.К. Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. С. 208–217.
- [13] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.
- [14] Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Москва: Мир, 1999. 685 с.
- [15] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П., Мельничук Д.В. Быстрый алгоритм моделирования переходных процессов в нелинейных комбинированных динамических системах // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 19-й междунар. Саратов. Зимней школы. Саратов: Научная книга, 2018. С. 31–34.

*D. K. Andreichenko<sup>1</sup>, K. P. Andreichenko<sup>2</sup>, D. V. Melnichuk<sup>1</sup>*

## ON THE STABILITY OF SPHERICAL HYDRODYNAMIC SUSPENSION

<sup>1</sup>*Saratov State University, Saratov, Russia*

<sup>2</sup>*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia*

**Abstract.** The stability of a spherical hydrodynamic suspension is investigated with full consideration of the dependence of the fluid velocity distribution profile on the radial coordinate in the supporting layer. A suspension with a light internal body is stable over a large range of changes in relative eccentricity, and when the overloads change by an amount of about a dozen accelerations of free fall, it moves from one equilibrium state to another. Suspension with a heavy internal body is unstable.

**Keywords:** spherical hydrodynamic suspension, viscous incompressible fluid, hybrid dynamic systems, frequency stability criterion, boundary value problems.



## REFERENCES

- [1] Andreichenko K. Dynamics of float gyroscopes and accelerometers. Moscow: Mashinostroenie, 1987. 128 p. (in Russian).
- [2] Andreichenko D., Andreichenko K. On the theory of stability of a cylindrical hydrodynamic suspension // Fluid Dynamics. 2009. Vol. 44, no. 1. p. 10–21.
- [3] Andreichenko K., Smarun' A. Simulation of the axial hydromechanical effect in gyroscopes with a spherical hydrodynamic suspension // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2011. Vol. 40, no. 3. P. 216–221.
- [4] Andreichenko K. On the theory of a weakly loaded spherical suspension // Mechanics of Solids (Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela). 1977. Vol. 12, no. 1. P. 15–21.
- [5] Rietord M., Valdetaro L. Axisymmetric inertial modes in a spherical shell at low Ekman numbers // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 844. P. 597–634.
- [6] Andreichenko D., Andreichenko K. On the theory of hybrid dynamical systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2000. Vol. 39, no. 3. P. 383–398.
- [7] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Advanced algorithm for modeling the stability of hybrid dynamic systems // Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews. 2021. Vol. 199. P. 7–17. (in Russian).
- [8] Melnichuk D., Andreichenko D., Andreichenko K. Refined mathematical model of spherical hydrodynamic suspension // Computer Science and information Technology: Materials of the International Scientific Conference. Saratov: Nauka, 2018. (in Russian).
- [9] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Modeling the Effect Of Centering of a Spherical Hydrodynamic Suspension // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2020. no. 52. P. 13–21.
- [10] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Numerical simulation of spherical hydrodynamic suspension // Computer Science and information Technology: Materials of the International Scientific Conference. Saratov: Nauka, 2021. P. 264–268. (in Russian).
- [11] Sedov L. Continuum mechanics. In 2 vols . Vol . 1. Moscow: Nauka, 1976. 536 p. (in Russian).
- [12] Portenko M., Melnichuk D., Andreichenko D. Analyticity Conditions of Characteristic and Disturbing Quasipolynomials of Hybrid Dynamical Systems // Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2016. Vol. 16. P. 208–217. (in Russian).
- [13] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. Mir: Moscow, 1988. 352 p. (in Russian).
- [14] Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Moscow: Mir, 1999. 685 p. (in Russian).
- [15] Andreichenko D., Andreichenko K., Melnichuk D. Fast algorithm for modeling transients in nonlinear hybrid dynamical systems // Modern problems of the theory of functions and their applications: Materials of the 19th International Saratov Winter School. Saratov: Nauchnaya kniga, 2018. P. 31–34. (in Russian).

---

*Andreichenko Dmitry Konstantinovich*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Saratov State University, Saratov, Russia

*Andreichenko Konstantin Petrovich*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia

*Melnichuk Dmitry Vadimovich*, Assistant Professor, Saratov State University, Saratov, Russia

М. Ю. Соколова, Д. В. Христинич, Е. В. Артюх

## ОБРАЩЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В МОДЕЛИ МУРНАГАНА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** На основе термодинамических соотношений получена связь между тензорами упругости и тензорами упругих податливостей четвёртого и шестого рангов для изотропного материала. Это позволило провести обращение нелинейной связи между напряжениями и деформациями в частном случае гиперупругого изотропного материала при использовании потенциала Мурнагана. На примере полимера Ertalon проведена оценка диапазона деформаций, в котором полученное обращение является корректным.

**Ключевые слова:** конечные деформации, гиперупругий материал, упругие потенциалы, одноосное сжатие.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.006

УДК: 539.3

**Введение.** В современной механике широкое распространение получили модели нелинейных гиперупругих материалов. Одной из ключевых позиций таких моделей является введение упругого потенциала, через частные производные от которого находят напряжения или деформации. В настоящее время известны многочисленные варианты упругих потенциалов, обзоры которых приведены в работах [1–4]. Простейшие потенциалы второго порядка приводят к линейным соотношениям между напряжениями и деформациями, которые легко обращаются. Если связь между тензорами напряжений и деформаций является нелинейной, то обращение этих соотношений представляет собой проблему. В монографии [1] рассмотрен вопрос об обращении

---

© Соколова М. Ю., Христинич Д. В., Артюх Е. В., 2022

*Соколова Марина Юрьевна*

**e-mail:** m.u.sokolova@gmail.com,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

*Христинич Дмитрий Викторович*

**e-mail:** dmitrykhristich@rambler.ru,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

*Артюх Екатерина Викторовна*

**e-mail:** kate\_eva@mail.ru,

кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 01.11.2022

нелинейных соотношений между напряжениями и деформациями в изотропной среде, в том числе и при существовании упругого потенциала. Отмечается, что в общем случае нелинейной связи между напряжениями и деформациями задача об обращении этой связи не имеет решения, а в случае гиперупругих материалов задача решается через производящую функцию обратного преобразования — преобразования Лежандра.

В работах [5–8] упругий потенциал напряжений представляется разложением в ряд по степеням тензора деформаций. В статье [5] предлагается термодинамический подход к определению коэффициентов этого разложения. В работе [8] показано, что при некоторых условиях такое разложение в случае изотропного материала совпадает с известным потенциалом Мурнагана [9]. Работы [6, 7] посвящены определению связи между коэффициентами разложения потенциалов напряжений и деформаций для анизотропных материалов с кубической симметрией свойств.

В данной статье на основе термомеханических соотношений будет получена связь между тензорами упругости четвертого и шестого ранга, выражающимися через упругие постоянные второго и третьего порядков, и тензорами упругой податливости также четвертого и шестого рангов. Будет рассмотрен пример определения коэффициентов податливости второго и третьего порядков для полимерного материала, и установлен диапазон деформаций, в котором обращение нелинейных соотношений даёт удовлетворительный результат.

**1. Некоторые соотношения термомеханики.** Рассмотрим однородное упругое тело из изотропного материала. Пусть в результате механических и тепловых воздействий в теле возникает однородное напряженно-деформированное состояние. Конечные деформации описываются тензором деформаций Коши–Грина  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi}^T - \mathbf{E})$ , где  $\boldsymbol{\Phi}$  — тензор-аффинор деформаций [2],  $\mathbf{E}$  — единичный тензор. Напряженное состояние характеризуется тензором истинных напряжений Коши  $\mathbf{S}$ . Известно [1–3], что удельная (отнесенная к единице массы) мощность напряжений определяется выражением

$$N^{(i)} = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon},$$

$\rho_0$  — плотность материала в начальном состоянии,  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\Phi}^{-T} \cdot J \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1}$  — второй тензор Пиолы–Кирхгоффа (энергетический тензор напряжений),  $J = \frac{dV}{dV_0}$  — относительное изменение элементарного объёма. Двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров в ортонормированном векторном базисе  $\mathbf{e}_i$ :  $\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = T^{ij} \varepsilon^{ij}$ , так как  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ .

В термомеханике [1–3] вводятся термодинамические потенциалы: удельная внутренняя энергия

$$U = U(\boldsymbol{\varepsilon}, s); \quad (1.1)$$

удельная свободная энергия

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T); \quad (1.2)$$

потенциал Гиббса

$$G = G(\mathbf{T}, T), \quad (1.3)$$

удельная энтальпия

$$H = H(\mathbf{T}, s). \quad (1.4)$$

Потенциалы (1.1)–(1.4) отнесены к единице массы среды и рассматриваются как функции деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , напряжений  $\mathbf{T}$ , удельной энтропии  $s$  и абсолютной температуры среды  $T$ . Термодинамические потенциалы (1.1)–(1.4) связаны между собой известными соотношениями [2]:

$$\Psi = U - sT, \quad G = \Psi - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad H = U - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.5)$$

Рассмотрим равновесный обратимый процесс однородного деформирования среды, для которого справедливы законы изменения внутренней энергии и энтропии в виде [2]:

$$dU = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + d'Q^{(e)}, \quad d'Q^{(e)} = Tds. \quad (1.6)$$

Исключая из законов (1.6) внешнее тепловое воздействие  $d'Q^{(e)}$ , получим тождество Гиббса

$$dU = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + Tds, \quad (1.7)$$

из которого следуют выражения для напряжений и температуры

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial s}. \quad (1.8)$$

Из соотношений (1.5) и тождества Гиббса (1.7) получается основное термомеханическое соотношение

$$d\Psi = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - sdT, \quad (1.9)$$

из которого следуют выражения для напряжений и энтропии

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}. \quad (1.10)$$

Основное термомеханическое соотношение в форме Гиббса имеет вид

$$dG = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{T} - sdT, \quad (1.11)$$

из которого следуют выражения для деформаций и энтропии

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\rho_0 \frac{\partial G}{\partial \mathbf{T}}, \quad s = -\frac{\partial G}{\partial T}. \quad (1.12)$$

Наконец, на основании соотношений (1.5) и (1.7) получаем закон изменения энтальпии

$$dH = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{T} + Tds \quad (1.13)$$

и выражения для деформаций и температуры

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\rho_0 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{T}}, \quad T = \frac{\partial H}{\partial s}. \quad (1.14)$$

Одним из возможных подходов к конкретизации упругой среды является задание одной из функций (1.1)–(1.4) и дальнейшее определение параметров состояния по формулам (1.8), (1.10), (1.12) или (1.14).

Пусть рассматриваемый процесс является изотермическим, то есть происходит при постоянной температуре  $T = T_0$ . В этом случае из соотношений (1.9) и (1.11) следует, что

$$d\Psi|_{T=T_0} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad dG|_{T=T_0} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{T}. \quad (1.15)$$

Для изотермического процесса введём в рассмотрение упругие потенциалы

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \rho_0 \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T_0), \quad V(\mathbf{T}) = \rho_0 G(\mathbf{T}, T_0), \quad (1.16)$$

которые отнесены к единице начального объёма деформируемого тела. Из соотношений (1.5) следует, что между потенциалами (1.16) существует связь:

$$V(\mathbf{T}) = W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

На основании (1.15), (1.16) напряжения и деформации в изотермическом процессе определяются выражениями:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{T}}, \quad (1.17)$$

а вопрос о конкретизации среды заключается в задании вида потенциала  $W(\boldsymbol{\varepsilon})$  или  $V(\mathbf{T})$ .

Если рассматриваемый процесс является адиабатическим, то есть происходящим без теплообмена с окружающей средой, то в нём не происходит изменение энтропии  $s = s_0$ . В этом случае из соотношений (1.7) и (1.13) следует, что

$$dU|_{s=s_0} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad dH|_{s=s_0} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{T}. \quad (1.18)$$

В адиабатическом процессе могут быть введены упругие потенциалы

$$W_a(\boldsymbol{\varepsilon}) = \rho_0 U(\boldsymbol{\varepsilon}, s_0), \quad V_a(\mathbf{T}) = \rho_0 H(\mathbf{T}, s_0), \quad (1.19)$$

а напряжения и деформации определяются соотношениями

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W_a}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial V_a}{\partial \mathbf{T}}.$$

Следует отметить, что даже если потенциалы (1.16) и (1.19) совпадают по форме, входящие в них материальные константы или функции должны определяться из экспериментов, условия реализации которых обеспечивают неизменность температуры для потенциалов  $W(\boldsymbol{\varepsilon})$  и  $V(\mathbf{T})$  или неизменность энтропии для потенциалов  $W_a(\boldsymbol{\varepsilon})$  и  $V_a(\mathbf{T})$ . В первом случае обычно проводят квазистатические нагружения тела, а во втором случае — динамические.

**2. Упругий потенциал Мурнагана.** Одним из наиболее известных и часто применяемых для сжимаемых упругих материалов потенциалов является потенциал Мурнагана, предложенный в работе [9]. В терминах тензора деформаций Коши–Грина потенциал Мурнагана записан в работах [10, 11] в виде

$$W = \frac{1}{2} \lambda J_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + G J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{6} (\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3) J_1^3(\boldsymbol{\varepsilon}) - 2(\nu_2 + 2\nu_3) J_1(\boldsymbol{\varepsilon}) J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + 4\nu_3 J_3(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (2.1)$$

где  $\lambda$ ,  $G$  — константы упругости Ламе,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  — константы упругости третьего порядка,  $J_1(\boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $J_2(\boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $J_3(\boldsymbol{\varepsilon})$  — алгебраические инварианты тензора деформаций Коши–Грина.

Если обозначить  $\frac{1}{2}\nu_1 + \nu_2 = l$ ,  $\nu_2 + 2\nu_3 = m$ ,  $4\nu_3 = n$ , то выражение (2.1) принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\lambda J_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + G J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{3}(l + 2m)J_1^3(\boldsymbol{\varepsilon}) - 2mJ_1(\boldsymbol{\varepsilon})J_2(\boldsymbol{\varepsilon}) + nJ_3(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (2.2)$$

где  $l$ ,  $m$ ,  $n$  — константы Мурнагана.

В работах многих авторов [5–8] предлагалось разложение потенциала  $W(\boldsymbol{\varepsilon})$  в ряд по степеням  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Если в начальном состоянии напряжения и деформации в теле отсутствуют  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0$ ,  $T = 0$ , то первые два ненулевых члена такого разложения имеют вид

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\mathbf{N}^{IV} \dots \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{6}\mathbf{N}^{VI} \dots \dots \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Аналогичное представление может быть записано и для потенциала  $V(\mathbf{T})$ :

$$V(\mathbf{T}) = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{IV} \dots \cdot \mathbf{T}\mathbf{T} - \frac{1}{6}\mathbf{A}^{VI} \dots \dots \cdot \mathbf{T}\mathbf{T}\mathbf{T}. \quad (2.4)$$

Тензоры упругости  $\mathbf{N}^{IV}$ ,  $\mathbf{N}^{VI}$  и тензоры упругой податливости  $\mathbf{A}^{IV}$ ,  $\mathbf{A}^{VI}$  из соотношений (2.3), (2.4) являются постоянными тензорами упругих констант четвёртого и шестого рангов, для компонент которых в ортонормированном базисе выполняются условия симметрии

$$N^{ijkl} = N^{jikl} = N^{ijlk} = N^{klij}, \\ N^{ijklmn} = N^{jiklmn} = N^{ijlkmn} = N^{ijklnm} = N^{ijmnlk} = N^{klijmn}.$$

В работе [8] показано, что в изотропном материале потенциал (2.3) совпадает с потенциалом (2.1). При условии постоянства тензоров  $\mathbf{N}^{IV}$ ,  $\mathbf{N}^{VI}$  и  $\mathbf{A}^{IV}$ ,  $\mathbf{A}^{VI}$  из представлений (2.3) и (2.4) следуют их выражения через частные производные от упругих потенциалов:

$$\mathbf{N}^{IV} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}; \quad \mathbf{N}^{VI} = \left. \frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}; \quad \mathbf{A}^{IV} = - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} \right|_{\mathbf{T}=0}; \quad \mathbf{A}^{VI} = - \left. \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3} \right|_{\mathbf{T}=0}. \quad (2.5)$$

Запишем соотношения, определяющие связь между напряжениями и деформациями для гиперупругого материала. На основании представлений (2.3) и (2.4) из выражений (1.17) получим

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}^{IV} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\mathbf{N}^{VI} \dots \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{T} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^{VI} \dots \cdot \mathbf{T}\mathbf{T}. \quad (2.7)$$

Тогда тензоры упругости и тензоры упругой податливости можно выразить через производные от напряжений и деформаций в виде

$$\mathbf{N}^{IV} = \left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}; \quad \mathbf{N}^{VI} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}; \quad \mathbf{A}^{IV} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{\mathbf{T}=0}; \quad \mathbf{A}^{VI} = \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}^2} \right|_{\mathbf{T}=0}. \quad (2.8)$$

Будем считать, что соотношения (2.6) и (2.7) описывают связь между напряжениями и деформациями для одного и того же материала. С точки зрения общего подхода к обращению связи между тензорами, изложенному в монографии [1], соотношения (2.7) являются «обратными» по отношению к соотношениям (2.6). Тогда между тензорами  $\mathbf{N}^{IV}$ ,  $\mathbf{N}^{VI}$  и  $\mathbf{A}^{IV}$ ,  $\mathbf{A}^{VI}$  имеется связь. В работах [5–7] предложено устанавливать эту связь на основании приведенных выше термодинамических соотношений.

Для тензоров  $\mathbf{T}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , характеризующих однородное напряженно-деформированное состояние в материале, справедливо соотношение:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{I}^{IV}, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{I}^{IV}$  — единичный тензор четвёртого ранга [2].

В окрестности начального состояния, когда  $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ ,  $\mathbf{T} = 0$ , из соотношений (2.9) и (2.8) получим известную связь между тензорами  $\mathbf{N}^{IV}$  и  $\mathbf{A}^{IV}$ :

$$\mathbf{N}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{A}^{IV} = \mathbf{I}^{IV} = \mathbf{A}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{N}^{IV}. \quad (2.10)$$

Продифференцируем соотношение (2.9) по тензору напряжений  $\mathbf{T}$ :

$$\left( \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} (\cdot \cdot) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} \right) \cdot \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}^2} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

В этом выражении символом  $(\cdot \cdot)$  обозначена свёртка левой диады тензора четвёртого ранга со второй (средней) диадой тензора шестого ранга, которая выполняется по правилу:

$$\mathbf{N}^{VI}(\cdot \cdot) \mathbf{A}^{IV} = N^{ijklmn} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n (\cdot \cdot) A^{pqrs} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s = N^{ijqpmn} A^{pqrs} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n.$$

На основании соотношений (1.17) выражение (2.11) записывается через упругие потенциалы (1.16)

$$- \left( \frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3} (\cdot \cdot) \left( -\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} \right) \right) \cdot \cdot \left( -\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \cdot \cdot \left( -\frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3} \right) = \mathbf{0}.$$

С учетом определений (2.8), в окрестности начального состояния получим

$$(\mathbf{N}^{VI}(\cdot \cdot) \mathbf{A}^{IV}) \cdot \cdot \mathbf{A}^{IV} + \mathbf{N}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{A}^{VI} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Умножим (2.12) слева на тензор  $\mathbf{A}^{IV}$  и, учитывая (2.10), после преобразований получим выражение для тензора упругой податливости материала шестого ранга в виде

$$\mathbf{A}^{VI} = -\mathbf{A}^{IV} \cdot \cdot (\mathbf{N}^{VI}(\cdot \cdot) \mathbf{A}^{IV}) \cdot \cdot \mathbf{A}^{IV}. \quad (2.13)$$

Таким образом, если в потенциалах (2.3) и (2.4) тензоры  $\mathbf{N}^{IV}$ ,  $\mathbf{N}^{VI}$  и  $\mathbf{A}^{IV}$ ,  $\mathbf{A}^{VI}$  связаны соотношениями (2.10) и (2.13), то с их помощью можно описывать напряженно-деформированное состояние в одном и том же материале. Следует ожидать, что подобное «обращение» нелинейной связи между напряжениями и деформациями оказывается справедливым только в некотором диапазоне деформаций, поскольку определения тензоров упругости и тензоров упругой податливости (2.5) и (2.8) приведены в окрестности состояния, когда напряжения и деформации в материале отсутствуют. Рассмотрим пример «обращения» соотношений между напряжениями и деформациями в изотропном материале и для полимера Ertalon найдем, в каком диапазоне такое обращение даёт удовлетворительные результаты.

**3. Упругие константы второго и третьего порядков для изотропного материала.** В работе [2] предложено тензоры, входящие в потенциал (2.3), представлять разложениями по инвариантным относительно группы симметрии материала базисным тензорам. Для этого удобно определить тензорные базисы второго, четвёртого и шестого рангов:

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3); \quad (3.1)$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha); \quad (3.2)$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha). \quad (3.3)$$

В работах [2, 12] установлено, что для изотропного материала инвариантными относительно полной группы ортогональных преобразований являются тензоры

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0; \quad \boldsymbol{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^{00}, \quad \boldsymbol{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}; \\ \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \\ \mathbf{B}^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{I}^{111} - \frac{6}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + \frac{3}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + \frac{3}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244} + 2\mathbf{I}^{345}). \end{aligned}$$

Тогда тензоры четвертого ранга  $\mathbf{N}^{IV}$  и  $\mathbf{A}^{IV}$ , входящие в соотношения (2.6) и (2.7), представляются в виде

$$\mathbf{N}^{IV} = N_1\boldsymbol{\Omega}^{(1)} + N_2\boldsymbol{\Omega}^{(2)}, \quad \mathbf{A}^{IV} = A_1\boldsymbol{\Omega}^{(1)} + A_2\boldsymbol{\Omega}^{(2)}. \quad (3.4)$$

Разложения (3.4) совпадают с разложениями этих тензоров по собственным упругим состояниям изотропного материала [2]. Это обстоятельство в дальнейшем существенно облегчает проводимые преобразования. Коэффициенты  $N_1$  и  $N_2$  разложения (3.4) связаны с константами упругости изотропного материала:  $N_1 = 3K$ ,  $N_2 = 2G$ , где  $K = \lambda + \frac{2}{3}G$  — модуль объёмной упругости,  $G$  — модуль сдвига.

Аналогично записываются разложения для тензоров шестого ранга:

$$\mathbf{N}^{VI} = n_1\mathbf{B}^{(1)} + n_2\mathbf{B}^{(2)} + n_3\mathbf{B}^{(3)}, \quad \mathbf{A}^{VI} = a_1\mathbf{B}^{(1)} + a_2\mathbf{B}^{(2)} + a_3\mathbf{B}^{(3)}. \quad (3.5)$$

Входящие в (3.5) коэффициенты  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  связаны с константами упругости третьего порядка  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  и константами Мурнагана  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , входящими в потенциалы (2.1) и (2.2), соотношениями

$$\begin{aligned} n_1 = 3\sqrt{3}\nu_1 + 6\sqrt{3}\nu_2 + \frac{8}{\sqrt{3}}\nu_3 = 6\sqrt{3}l + \frac{2n}{\sqrt{3}}, \\ n_2 = 6\sqrt{3}\nu_2 + 8\sqrt{3}\nu_3 = 6\sqrt{3}m - \sqrt{3}n, \quad n_3 = 4\nu_3 = n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя тензоры (3.4) в соотношения (2.10) и учитывая, что  $\boldsymbol{\Omega}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Omega}^{(\alpha)}$ , получим выражения для коэффициентов упругой податливости

$$A_1 = \frac{1}{N_1}, \quad A_2 = \frac{1}{N_2}. \quad (3.7)$$

Подставляя разложения тензоров (3.4), (3.5) в соотношения (2.13), путём непосредственных вычислений получим выражения для коэффициентов упругой податливости третьего порядка:

$$a_1 = -A_1^3 n_1, \quad a_2 = -A_1 A_2^2 n_2, \quad a_3 = -A_2^3 n_3. \quad (3.8)$$

Для материала Ertalon известны упругие константы  $N_1 = 17,04\text{ГПа}$ ,  $N_2 = 2,74\text{ГПа}$ ,  $n_1 = -110,48\text{ГПа}$ ,  $n_2 = -755,35\text{ГПа}$ ,  $n_3 = -5,77\text{ГПа}$  [13], тогда по формулам (3.7) и (3.8) вычислим коэффициенты упругой податливости этого материала:  $A_1 = 0,059\text{ГПа}^{-1}$ ,  $A_2 = 0,0365\text{ГПа}^{-1}$ ,  $a_1 = 0,022\text{ГПа}^{-2}$ ,  $a_2 = 0,59\text{ГПа}^{-2}$ ,  $a_3 = 0,28\text{ГПа}^{-2}$ .

Рассмотрим одноосное нагружение призматического образца из материала Ertalon с тензором напряжений  $\mathbf{T} = \sigma\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$ . Решение задачи об одноосном растяжении (сжатии)



приведено в работе [13] и в случае связи между напряжениями и деформациями в виде соотношения (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{1}{3}(N_1 + 2N_2)\varepsilon_{11} + \frac{2}{3}(N_1 - N_2)\varepsilon_{22} + \frac{1}{6\sqrt{3}}n_1(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22})^2 + \\ & + \frac{1}{9\sqrt{3}}n_2(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22})(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + \frac{1}{9}\left(\frac{n_2}{\sqrt{3}} + 2n_3\right)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где поперечные деформации  $\varepsilon_{22}$  находятся из условия равенства нулю напряжений  $T^{22} = T^{33} = 0$  из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(N_1 - N_2)\varepsilon_{11}(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}) + \frac{1}{3}(2N_1 + N_2)\varepsilon_{22} + \frac{1}{6\sqrt{3}}n_1(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22})^2 - \\ & - \frac{1}{18\sqrt{3}}n_2(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22})(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + \frac{1}{9}\left(\frac{n_2}{\sqrt{3}} - n_3\right)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если напряжения и деформации связаны соотношением (2.7), то решение задачи об одноосном нагружении имеет более простой вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{3}(A_1 + 2A_2)\sigma + \frac{1}{54}\left(3\sqrt{3}a_1 + 4\sqrt{3}a_2 + 12a_3\right)\sigma^2, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{3}(A_1 - A_2)\sigma + \frac{1}{54}\left(3\sqrt{3}a_1 + \sqrt{3}a_2 - 6a_3\right)\sigma^2, \quad (3.12)$$

Связь между напряжениями и деформациями при одноосном растяжении (сжатии) имеет вид (3.9) или (3.11) при использовании определяющих соотношений (2.6) или «обратных» к ним соотношений (2.7). Корректность соотношений (3.7) и (3.8) можно проверить, построив графики зависимостей напряжений от деформаций (3.9) и (3.11). На рисунке 1 построены зависимости  $\sigma(\lambda)$ , где  $\lambda = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}$  — удлинение образца в осевом направлении, построенные по «прямым» соотношениям (3.9) (красная кривая) и по «обратным» соотношениям (3.11) (синяя кривая). На рисунке 2 приведены результаты расчета поперечных деформаций  $\varepsilon_{22}(\lambda)$  по соотношениям (3.10) (красная кривая) и (3.12) (синяя кривая).

Из рисунков видно, что построенные кривые практически полностью совпадают в диапазоне изменения удлинений от  $\lambda = 0,95$  при сжатии до  $\lambda = 1,05$  при растяжении. При больших деформациях между кривыми возникают различия, которые при удлинении  $\lambda = 0,91$  достигают 12%, а при  $\lambda = 1,08$  — 8%. При описании поперечных деформаций переход от соотношений (3.7) к соотношениям (3.8) является корректным в диапазоне удлинений от  $\lambda = 0,95$  при сжатии до  $\lambda = 1,09$  при растяжении. Таким образом, для рассмотренного материала диапазон деформаций, в котором «обращение» соотношений нелинейной упругости даёт удовлетворительный результат, составляет примерно 5% деформаций при сжатии и при растяжении.

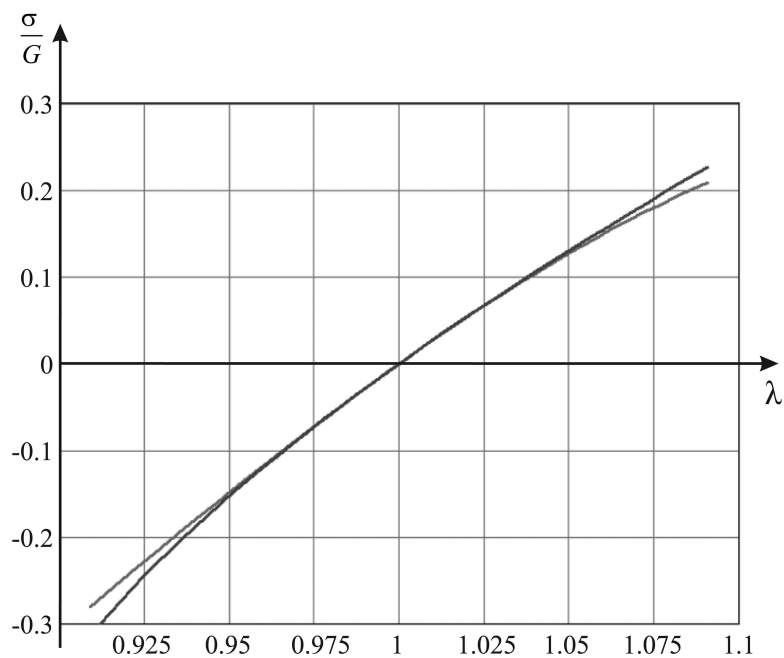


Рис. 1. Зависимость осевых напряжений от удлинения

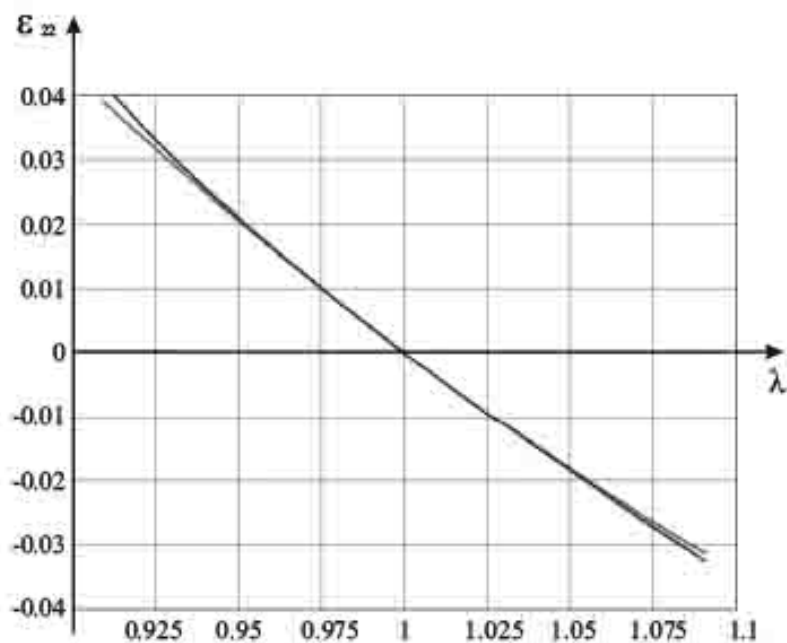


Рис. 2. Зависимость поперечных деформаций от удлинения

**Выводы.** В работе приведено решение задачи об «обращении» соотношений нелинейной упругости, основанное на применении термодинамического подхода к построению упругих потенциалов. Установлена общая форма связи между тензорами упругости и тензорами упругой податливости четвёртого и шестого рангов. Для изотропного материала найдены выражения коэффициентов упругой податливости второго и

третьего порядков через константы упругости второго и третьего порядков. На примере решения задачи об одноосном растяжении (сжатии) призматического образца из полимера Ertalon показано, что полученное «обращение» соотношений нелинейной упругости даёт удовлетворительное совпадение кривых  $\sigma(\lambda)$  и  $\varepsilon_{22}(\lambda)$ , построенных по обращенным моделям, в диапазоне изменения деформаций приблизительно  $\pm 0,05$ .

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.
- [2] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: Физматлит, 2013. 320 с.
- [3] Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.
- [4] Mihai L., Goriely A. How to characterize a nonlinear elastic material? A review on nonlinear constitutive parameters in isotropic finite elasticity // Proc. R. Soc. A. 2017. Vol. 473. P. 1–33.
- [5] Brugger K. Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients // Phys. Rev. 1964. Vol. 133. P. A1611–A1612.
- [6] Barsch G. Relation between third-order elastic constants of single crystals and polycrystals // Journal of Applied Physics. 1968. Vol. 39, no. 8. P. 3780–3793.
- [7] Lubarda V. New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1997. Vol. 45, no. 4. P. 471–490.
- [8] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 68–75.
- [9] Murnaghan F. Finite deformations of an elastic solid // American Journal of Mathematics. 1937. Vol. 59, no. 2. P. 235–260.
- [10] Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 270 с.
- [11] Козлов В.В., Маркин А.А. Анализ определяющих соотношений нелинейно-упругих сжимаемых материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Т. 1, № 1. С. 133–143.
- [12] The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals / Y. Astapov, D. Khristich, A. Markin et al. // International Journal of Applied Mechanics. 2017. Vol. 9, no. 6. P. 1750080–1–1750080–15.
- [13] Соколова М.Ю., Астапов Ю.В. Упругие волны в материале Генки–Мурнагана // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. Т. 3. С. 108–120.

*M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, E. V. Artyukh*

## REVERSAL OF THE RELATIONSHIP BETWEEN STRESSES AND STRAINS IN THE MURNAGHAN MODEL

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** On the basis of thermodynamic relations, the relationship between elasticity tensors and elastic compliance tensors of the fourth and sixth ranks for an isotropic material is obtained. This made it possible to invert the nonlinear relationship between stresses and deformations in the particular case of a hyperelastic isotropic material using the Murnaghan potential. Using the Ertalon polymer as an example, an assessment of the deformation range in which the obtained inversion is correct was carried out.

**Keywords:** finite deformations, hyperelastic material, elastic potentials, uniaxial compression.

### REFERENCES

- [1] Lurie A.I. Nonlinear elasticity theory. Moscow: Nauka, 1980. 512 c.
- [2] Markin A.A., Sokolova M.Yu. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 c.
- [3] Chernykh K.F. Nonlinear theory of elasticity in engineering. Leningrad: Mashinostroenie, 1986. 336 c.
- [4] Mihai L., Goriely A. How to characterize a nonlinear elastic material? A review on nonlinear constitutive parameters in isotropic finite elasticity // Proc. R. Soc. A. 2017. Vol. 473. P. 1–33.
- [5] Brugger K. Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients // Phys. Rev. 1964. Vol. 133. P. A1611–A1612.
- [6] Barsch G. Relation between third-order elastic constants of single crystals and polycrystals // Journal of Applied Physics. 1968. Vol. 39, no. 8. P. 3780–3793.
- [7] Lubarda V. New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1997. Vol. 45, no. 4. P. 471–490.
- [8] Markin A., Sokolova M. Variant of nonlinear elasticity relations // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1182–1188.
- [9] Murnaghan F. Finite deformations of an elastic solid // American Journal of Mathematics. 1937. Vol. 59, no. 2. P. 235–260.
- [10] Guz' A.N. Stability of elastic bodies in finite deformations. Kiev: Naukova dumka, 1973. 270 c.
- [11] Kozlov V.V., Markin A.A. The analyze of defining relationship for isotropic nonlinear-elastic compressible materials // Izvestiya TulGU. Natural sciences. 2014. T. 1, № 1. C. 133–143.
- [12] The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals / Y. Astapov, D. Khristich, A. Markin et al. // International Journal of Applied Mechanics. 2017. Vol. 9, no. 6. P. 1750080–1–1750080–15.
- [13] Sokolova M.Yu., Astapov Yu.V. Elastic waves in the Hencky-Murnaghan material // Vestnik ChGPU Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2020. T. 3. C. 108–120.

---

*Sokolova Marina Yurievna* Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.  
*Khristich Dmitrii Viktorovich* Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

*Artyukh Ekaterina Viktorovna* Cand. Sci. Phys. & Math., Assistant Professor, Tula State University, Tula, Russia.

А. А. Кривенко, К. С. Бормотин, А. А. Буренин

## ФОРМУЛИРОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ КРУПНОГАБАРИТНЫХ ОБШИВОК ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ В УСЛОВИЯХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРЕССОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

**Аннотация.** Для снижения материальных и временных затрат на разработку и внедрение технологии изготовления обшивок двойной кривизны с использованием процесса обтяжки листовых заготовок разработаны математические модели и методики, позволяющие производить цифровое моделирование процесса формообразования и корректировать его на раннем этапе разработки технологии. При разработке технологии изготовления окантовки двери на самолет SSJ-NEW применялись новые подходы к моделированию процесса формообразования, которые позволили определить наиболее оптимальную стратегию обтяжки крупногабаритной заготовки на пределе кинематических возможностей пресса FET-1500. Разработанная технология позволяет в рамках вычислительного эксперимента провести отработочные итерации с переходом на реальную обтяжку в оптимальных технологических параметрах.

**Ключевые слова:** формообразование обтяжкой, FET, кинематический анализ, прямая и обратная задачи кинематики, задача оптимизации, метод конечных элементов, натурный эксперимент.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.007

УДК: 539.3, 517.97, 621.7.043

### Введение

---

© Кривенко А. А., Бормотин К. С., Буренин А. А., 2022

*Кривенко Антон Александрович*

e-mail: baikal-190@yandex.ru, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

*Бормотин Константин Сергеевич*

e-mail: cvmi@knastu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Авиастроение», Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

*Буренин Анатолий Александрович*

e-mail: aab@imim.ru, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 21-11-00165.

Поступила 17.11.2022

В производстве деталей летательных аппаратов, составляющих внешние поверхности аэродинамических обводов планера, широко применяется процесс формирования листовых заготовок путем обтяжки. В процессе обтяжки плоская заготовка одновременно растягивается и изгибается по жесткому пуансону до полного её прилегания и достижения предела текучести в наименее растянутой зоне.

Технологическая подготовка производства листовых деталей летательных аппаратов переменной кривизны с применением современного обтяжного оборудования с числовым программным управлением (ЧПУ) включает [1]:

- выбор обтяжного оборудования;
- проектирование оснастки;
- разработку технологического процесса изготовления детали;
- разработку управляющих программ (УП) для ЧПУ обтяжного оборудования.

На начальном этапе разработки технологии, технологу необходимо предварительно проанализировать геометрию детали, разработать технологический процесс, с учетом специфических особенностей процесса обтяжки проработать геометрию пуансона, на основании которого разработать управляющую программу. Разработка УП для ЧПУ обтяжного оборудования фирмы АСВ выполняется с использованием САМ-системы S3F, которая выполняет моделирование процесса формообразования заготовки и транслирует траектории движения рабочих органов пресса в управляющий код для соответствующей модели пресса [2].

На траекторию движения рабочих органов пресса значительное влияние оказывают такие параметры как размеры заготовки и размещение пуансона на столе пресса. При проработке крупногабаритных деталей сложной пространственной формы, когда движение концов заготовки ограничено габаритами пресса, неправильно выбранные параметры размещения пуансона и размеров заготовки могут привести к тому, что для движения концов заготовки не хватит кинематических возможностей пресса. Также существует опасность контакта зажимов пресса с технологической подставкой под пуансон, что в системе S3F, при расчете УП, никак не учитывается. Данное явление возможно выявить только при отработке процесса обтяжки реальной детали на прессе и, в случае выявления коллизии зажима и оснастки, потребуются дополнительный пересчет УП с новыми параметрами размера заготовки или положения пуансона на столе пресса. Таким образом, при отработке технологии формообразования крупногабаритных деталей сложной пространственной формы, ключевыми параметрами, влияющими на процесс, являются геометрия заготовки и пуансона, а также положение пуансона относительно стола обтяжного оборудования.

Кроме того, при разработке управляющих программ в САМ-системе S3F необходимо учитывать следующие ограничения:

- независимо от формы детали применяется схема обтяжки — изгиб с последующим растяжением;
- отсутствует возможность определить необходимый уровень деформаций при калибрующем растяжении (она задается пользователем);
- отсутствует возможность определения остаточных напряжений в детали после разгрузки (явление пружинения);
- отсутствует возможность корректировки траектории перемещения управляющих органов пресса.

Существующие в S3F ограничения по оценке и корректировке процесса обтяжки затрудняет разработку УП для конструктивно и технологически сложных деталей.

Это может приводить к созданию неоптимального процесса обтяжки, в результате которого будут получаться детали, требующие большого объема доводочных работ. Разработка оптимальной технологии обтяжки листовых заготовок, опираясь только лишь на САМ-систему S3F, требует длительного много-итерационного поиска различных технологических параметров, включающего отработку на прессе и доработку оснастки. На качество проводимого технологом анализа результатов и корректировку технологических параметров влияют недостаточная полнота информации, получаемая от S3F, а также длительность проверки результатов изменений (отработка процесса обтяжки).

Существует множество работ, в которых рассматриваются вопросы поиска оптимальных параметров процесса формообразования заготовок на обтяжном оборудовании, где кинематические схемы формообразования приведены в виде плоских механизмов [3], [4], [5], [6], [7], [8]. Данные решения могут показать хороший результат при формообразовании относительно простых деталей с одинарной кривизной и симметрией в направлении обтяжки, но для более сложных деталей с двойной кривизной, не имеющих симметрии данные решения будут не столь эффективны [9], [10], [11].

Для снижения материальных и временных затрат на разработку и внедрение технологии изготовления обшивок двойной кривизны с использованием процесса обтяжки листовых заготовок предлагается в процесс разработки управляющих программ включить дополнительные инструменты численного моделирования, которые обеспечат технолога полным объемом информации на ранних этапах разработки технологии.

Для реализации предложенного подхода необходимо решить следующие задачи:

1. Произвести кинематический анализ обтяжного пресса FET и разработать математическую модель, позволяющую производить расчет УП для этого типа оборудования;
2. Разработать математическую модель процесса формообразования листовой заготовки методом обтяжки;
3. Произвести апробацию предложенных решений и внедрить их при разработке технологии изготовления окантовки двери.

#### **Кинематический анализ обтяжного пресса FET для моделирования процесса обтяжки**

В промышленности существует множество видов обтяжного оборудования с различной кинематикой, позволяющей реализовывать различные режимы деформирования заготовок. Одним из наиболее подвижных, и вместе с тем сложных в управлении, является гидравлический пресс поперечной обтяжки типа FET. Его параллельная кинематическая схема обеспечивает высокую подвижность зажимных устройств при высоких нагрузках (рис. 1). Пресс имеет два прямолинейных зажимных устройства, которые построены по типу пространственного механизма с замкнутой кинематической цепью. Позиционирование каждого зажимного устройства осуществляется за счет изменения длины четырех гидроцилиндров: двух горизонтальных и двух вертикальных. При условии симметрии проведен анализ кинематики одного зажимного устройства обтяжного пресса FET [12], [13].

Управление механизмов параллельной структуры невозможно без решения прямой и обратной задач кинематики зажимного устройства, которые решаются сложнее, чем для традиционных манипуляторов [14], [15]. Прямая задача кинематики определяет положение выходного звена (зажимного устройства) в пространстве при заданном положении обобщенных координат (длина гидроцилиндра или штанги), а обратная

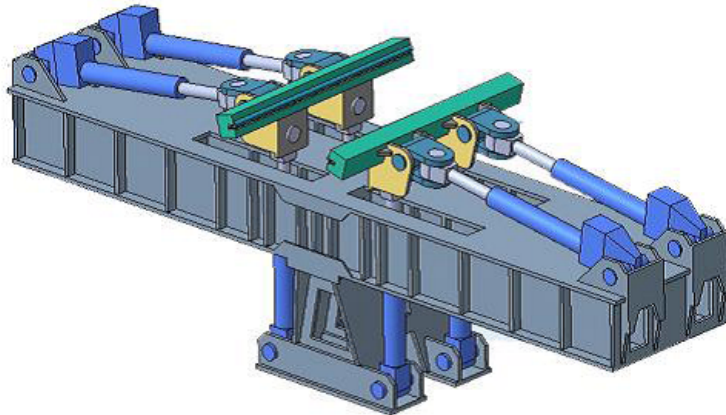


Рис. 1. Внешний вид обтяжного пресса поперечного действия типа FET

кинематическая задача определяет положение обобщённых координат при заданном положении зажимного устройства в пространстве.

Для позиционирования зажимного устройства пресса, с четырьмя активными гидроцилиндрами, решаются прямая и обратная задачи кинематики [16]. Решение обратной задачи, реализованное на основе матричного аппарата однородных преобразований, заключается в определении длины активных управляющих гидроцилиндров пресса по координатам положения зажимного устройства, реализованное на основе матричного аппарата однородных преобразований. На основе полученных кинематических зависимостей для определения положения рабочих органов обтяжного пресса FET и построенных решений прямой и обратной задач кинематики разработана программа для ПЭВМ FET-NCTrans с реализованной математической моделью системы управления зажимами пресса.

Численное моделирование процесса формообразования обтяжкой листовой заготовки выполняется методом конечных элементов [17] в САЕ-системе MSC.Marc [18]. При постановке задачи учитывается геометрическая, физическая и контактная нелинейность. Граничные условия задаются на основе траектории перемещений зажимов, рассчитанной в FET-NCTrans по заданной УП. FET-NCTrans позволяет определить траектории перемещения зажимов с учетом разного калибровочного растяжения.

Оптимизация траектории движения зажимов обтяжного пресса может быть выполнена численным методом решения задач оптимального управления процессом обтяжки листовой заготовки [19].

#### **Формулировка задачи оптимизации при формообразовании тонкостенных конструкций обтяжкой**

Обозначим через  $x_1, x_2, x_3$  — локальную систему координат панели заготовки, а через  $y_1, y_2, y_3$  — глобальную (исходную) систему координат, задающую расположение пуансона (центр данных систем координат и оси  $x_3, y_3$  совпадают). Таким образом, положение заготовки относительно пуансона определяется углом поворота  $\alpha$  осей  $x_1, x_2$  вокруг  $x_3$  (рис. 2). Задачи деформирования заготовки обтяжкой формулируются в глобальной системе координат  $y_1, y_2, y_3$ .

Пусть  $V(\alpha) \subset R^3$  — область деформируемого тела с границей  $S(\alpha)$ . Область задания краевых смещений —  $S_b(\alpha)$ . Контактная поверхность пуансона с деформируемым



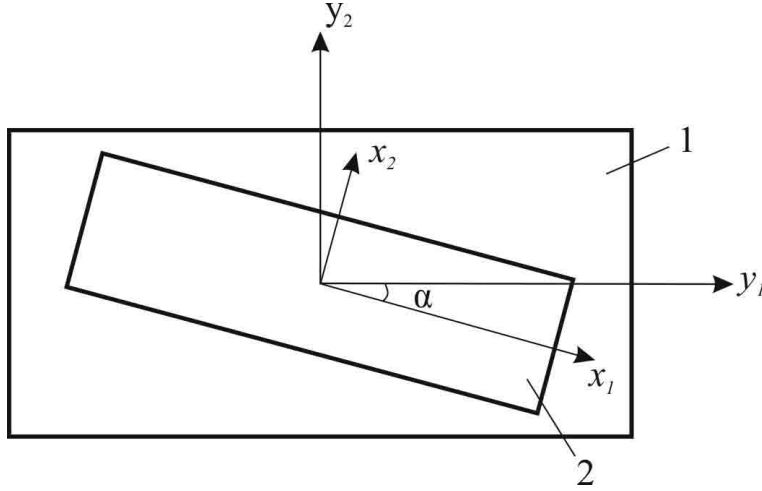


Рис. 2. Расположение детали относительно пуансона (1 — пуансон, 2 — деталь).

телом обозначается через  $S_c(\alpha)$  ( $S_c \subset S$ ). То есть в зависимости от угла поворота  $\alpha$  заготовки относительно пуансона для обеспечения необходимой заданной остаточной формы заготовки будут меняться размеры заготовки, геометрия пуансона и траектория перемещений зажимов (граничные условия на  $S_b(\alpha)$ ). Обозначим через  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$  — векторы текущих, остаточных перемещений деформируемого тела.

Моделирование процесса обтяжки включает решение задачи деформирования в пластичности и упругой разгрузки. Задачи механики могут формулироваться вариационными принципами с функционалами относительно скоростей (в общей Лагранжевой формулировке (TL) [20], [21]) с учетом параметра  $\alpha$ :

$$J_1(\dot{\mathbf{u}}) = W_c(\alpha) + a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}), \text{ при } \dot{\mathbf{u}}|_{S_b(\alpha)} = \dot{\mathbf{u}}^*(\alpha), J_2(\dot{\tilde{\mathbf{u}}}) = W_c(\alpha) + a(\dot{\tilde{\mathbf{u}}}, \dot{\tilde{\mathbf{u}}}) \quad (1)$$

где  $W_c$  — контактный потенциал [20], [21]; потенциальные формы  $a(\dot{\mathbf{u}}, \delta\dot{\mathbf{u}}) = \int_V \frac{\partial E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \delta \dot{u}_{i,j} dV$ ,  $a(\dot{\tilde{\mathbf{u}}}, \delta\dot{\tilde{\mathbf{u}}}) = \int_V \frac{\partial \tilde{E}(\dot{\tilde{u}}_{i,j})}{\partial \dot{\tilde{u}}_{i,j}} \delta \dot{\tilde{u}}_{i,j} dV$ ,  $E(\dot{u}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl}^p + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j}$ ,  $\tilde{E}(\dot{\tilde{u}}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{kl}^p + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \dot{\tilde{u}}_{k,i} \dot{\tilde{u}}_{k,j}$ ,  $c_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих констант;  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  — компоненты скоростей пластических деформаций ( $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ ,  $\lambda > 0$ , уравнение  $f = 0$  определяет поверхность текучести в пространстве компонент девiatorа тензора напряжений [20]),  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ,  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}$  — компоненты скорости текущих и остаточных деформаций Грина-Лагранжа,  $\sigma_{ij}$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}$  — компоненты текущего и остаточного второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа,  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ .

Задача оптимального деформирования заключается в поиске угла поворота заготовки относительно пуансона, при котором обеспечивались бы минимальные отклонения заготовки после обтяжки и разгрузки от необходимой заданной геометрии детали, вырезанной из заготовки. Данная задача включает уравнения механики деформируемого твердого тела, полученные из условий стационарности (1), функционал оптимизации

$$J_3 = \int_S \sqrt{(\tilde{u}_3(T) - \tilde{u}_3^*)^2} dS \rightarrow \text{inf} \quad (2)$$

и ограничения

$$\mathbf{u}^*(\alpha) \in \mathbf{U}^*, \alpha \in A^*, \quad (3)$$

где  $\tilde{u}_3^*$  — заданные компоненты остаточных перемещений листа по оси  $y_3$  после обтяжки и разгрузки,  $\mathbf{U}^*$  — область возможных функций перемещений зажимов прессового оборудования,  $A^*$  — множество рассматриваемых углов  $\alpha$ .

С учетом дискретизации вариации (1) формируются уравнения конечных элементов для решения контактной задачи [20], [21]

$${}^{t+dt}\mathbf{K}^{(r-1)} \Delta \mathbf{U}^{(r)} = {}^{t+dt}\mathbf{R}^{(r-1)}, {}^{t+dt}\hat{\mathbf{K}}^{(r-1)} \Delta \hat{\mathbf{U}}^{(r)} = {}^{t+dt}\hat{\mathbf{R}}^{(r-1)} \quad (4)$$

где  ${}^{t+dt}\mathbf{K}^{(r-1)}$ ,  ${}^{t+dt}\hat{\mathbf{K}}^{(r-1)}$  — матрицы касательной жесткости (в матрицах включены дополнительные элементы, образующиеся от контактных ограничений),  ${}^{t+dt}\mathbf{R}^{(r-1)}$ ,  ${}^{t+dt}\hat{\mathbf{R}}^{(r-1)}$  — вектор внешних и внутренних сил. Верхние индексы величин  $t + dt$  — значение параметра нагружения,  $(r - 1)$  — номер итерации метода Ньютона-Рафсона. Остаточные узловые перемещения определяются по формуле  $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{U}}$ .

Для решения задачи оптимизации наиболее удобно, с учетом применения комплексов программ, использовать методы поиска [22]. В данном случае итерационный алгоритм прямого поиска состоит в задании искомой переменной в виде

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \tau \cdot \Delta \alpha \quad (5)$$

(где  $\Delta \alpha$  — заданное значение изменения угла,  $\tau$  — параметр длины шага) и в выполнении следующих этапов расчета:

- Для каждого значения угла проектируется геометрия заготовки и пуансона, на основании которых выполняется разработка управляющих программ для ЧПУ обтяжного оборудования фирмы АСВ с использованием САМ-системы S3F. САМ-система S3F, рассчитав управляющую программу, определяет ее допустимость, т.е. выполняется проверка выполнения ограничений (3). Если управляющая программа не допустима, то происходит переход на следующую итерацию.

- Расчет траектории перемещений зажимов в FET-NCTrans по заданной УП (определяются граничные условия в (1)).

- Расчет задач деформирования в пластичности и упругой разгрузки в системе MSC.Marc (4).

- Расчет критерия (2). Если значение целевой функции улучшается на данной итерации, то ее старое значение заменяется на новое при последующих сравнениях, а итерационный процесс продолжается с данного значения угла. Иначе меняется длина шага и выполняется заново алгоритм.

На отдельных этапах решения возможно уточнение геометрии пуансона (с помощью решения обратной задачи формообразования [23]) и траектории деформирования (граничных условий с помощью решения задач оптимального деформирования [19]).

**Внедрение новых решений при разработке технологии изготовления окантовки двери самолета SSJ-NEW**

В рамках разработки технологии изготовления окантовки задней двери самолета SSJ-NEW из сплава 1163 проведено моделирование процесса формообразования листовой заготовки в несколько этапов. При решении данной задачи учитываются следующие свойства материала: модуль Юнга  $E = 7000 \text{ кг/мм}^2$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.34$ , предел текучести  $\sigma_T = 30 \text{ кг/мм}^2$ , упрочнение задается степенной функцией  $\sigma_T = A(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^g$  ( $\varepsilon_0$  — деформации, соответствующие начальному пределу текучести,  $\bar{\varepsilon}^p$  — интенсивность пластических деформаций,  $A, g$  — константы материала).

Геометрические характеристики детали: максимальная длина детали 3,6 м, ширина 1,44 м, толщина 2...8 мм, максимальный прогиб 0,9 м, угол оборачивания детали составляет  $58^\circ$ . На этапе первой итерации расчета управляющей программы предлагается процесс формообразования свежезакаленной заготовки из сплава 1163 толщиной 10 мм производить за один переход на обтяжном прессе FET-1500.

В связи с большими габаритами детали и особенностью кинематики пресса оптимальное положение детали для её обтяжки определяется методом (5). Большой угол оборачивания требует поднятия пуансона вверх при минимальных припусках, а загрузка заготовки в захватах требует уменьшение высоты пуансона и увеличения припусков. В связи с этим, при решении задачи оптимизации с множеством рассматриваемых углов  $\alpha$  в диапазоне  $[-2^\circ, 6^\circ]$ , с учетом ограничений на перемещения зажимов прессового оборудования, позиционирование детали в пространстве пресса варьировалось по следующим параметрам:

- перемещение по оси  $y_3$  в диапазоне 1500...1800 мм;
- углы поворота вокруг оси  $y_1$  в диапазоне  $\pm 2^\circ$ ;
- углы поворота вокруг оси  $y_2$  в диапазоне  $\pm 1^\circ$ .

В результате выбраны два наилучших варианта, по которым САМ-система S3F рассчитала УП с наименьшим количеством замечаний (рис. 3):

1. Пуансон №1 устанавливается на высоту 2 м, габариты заготовки  $4,8 \times 1,75 \times 0,01$  м;
2. Пуансон №2 устанавливается на высоту 1,85 м, габариты заготовки  $4,8 \times 2,0 \times 0,01$  м.

Результаты расчета УП для пресса FET-1500 приведены на рис. 4.

Для натурной отработки процесса изготовления окантовки задней двери был выбран вариант №2, как наиболее рациональный процесс. При натурной отработке технологии были обтянуты две заготовки с последующим фрезерованием внутренней гравировки, размерно-химическим травлением наружных поверхностей и контурной вырезкой деталей (рис. 5). В результате были получены 2-е окантовки двери самолета SSJ-NEW соответствующие требуемым геометрическим параметрам.

### **Заключение**

В работе рассмотрены основные этапы разработки технологии формообразования заготовки на обтяжном оборудовании. Предложенная методика анализа и корректировки процесса формообразования крупногабаритных листовых заготовок на обтяжном оборудовании позволяет еще на ранней стадии технологической подготовки производства определить оптимальные технологические параметры.

Применение современных средств численного моделирования позволяют получить более полную и точную информацию о напряженно-деформированном состоянии заготовки в процессе формообразования и после него.

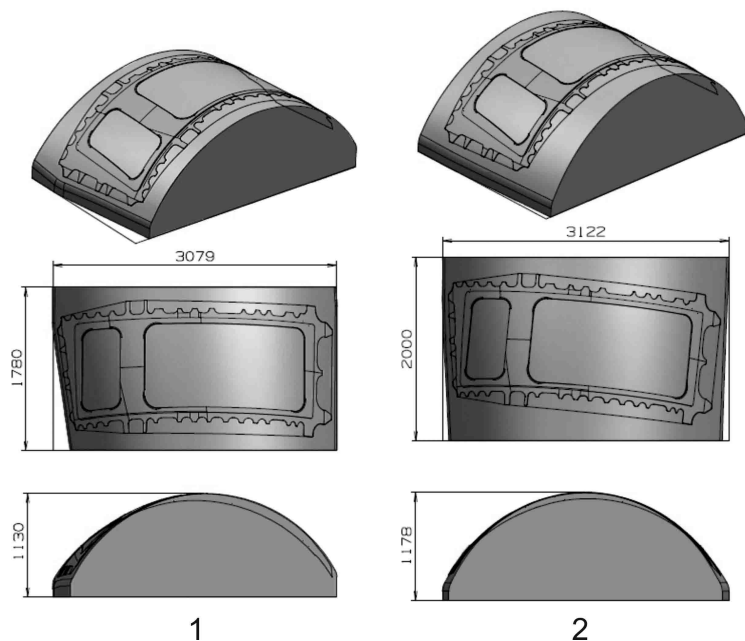


Рис. 3. Варианты обтяжного пуансона (мм)

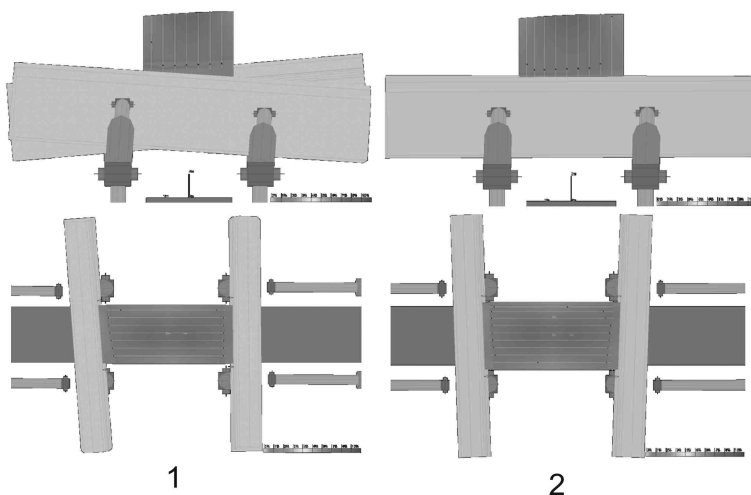


Рис. 4. Результат расчета в S3F процесса обтяжки заготовки на этапе калибровки (вид слева и сверху): 1 — заготовка  $4,8 \times 1,75 \times 0,01$  м, пуансон №1 установлен на высоте 2,0 м; 2 — заготовка  $4,8 \times 2,0 \times 0,01$  м, пуансон №2 установлен на высоте 1,85 м.

Разработанные решения позволили в рамках вычислительного эксперимента отработать технологический процесс обтяжки с оптимальными технологическими параметрами, которые, при натурной отработке, позволили получить детали высокого качества. Это позволило исключить затраты при дополнительной отработке процесса обтяжки общепринятым методом, включающим в себя корректировку и отработку на прессе управляющих программ, изменение размеров заготовки и доработку обтяжного пуансона.

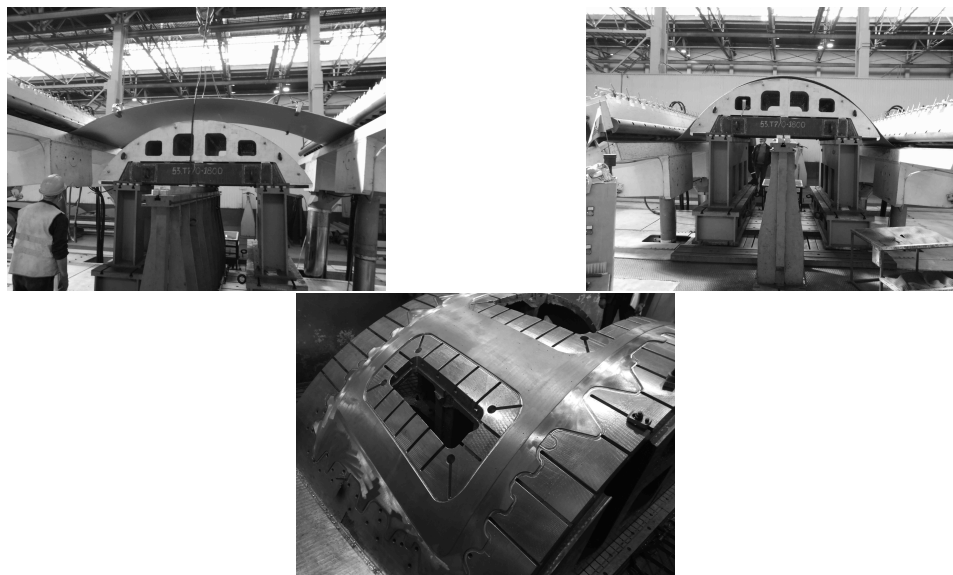


Рис. 5. Результат отработки технологии обтяжки крупногабаритной заготовки и механической обработки окантовки двери.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вайсбург В.А., Медведев Б.А., др. А.Н. Бакумский и. Автоматизация процессов подготовки авиационного производства на базе ЭВМ и оборудования с ЧПУ. Москва: Машиностроение, 1985. 216 с.
- [2] Pogartseva M., Feoktistov S. Technique for the development of the technological process for the tightening of aircraft parts on CNC presses // Materials Science Forum. 2019. no. 945. P. 839–844.
- [3] Моделирование кинетики движения рабочих элементов обтяжного прессы FET / Р.Ф. Крупский, А.А. Кривенко, А.В. Станкевич [и др.] // Вестник ИрГТУ. Механика и машиностроение. 2014. № 9 (92). С. 40–45.
- [4] Кинематический метод обеспечения подготовки управляющих программ ЧПУ обтяжных прессы фирмы АСВ-ALSTHOM / В.А. Михеев, С.В. Сурудин, И.В. Науменко [и др.] // Наука, теория, практика авиационно-промышленного кластера современной России: II Всероссийская научно-производственная конференция, приуроченная ко Дню науки. Ульяновск: Ульяновский государственный технический университет, 2017. С. 35–49.
- [5] Вепрев А.А., Завьялова В.И. Выбор схемы нагружения и скорости ведения процесса поперечной обтяжки // Авиационная промышленность. 1984. № 12. С. 10–11.
- [6] Формообразование профильных заготовок с помощью листового обтяжного прессы / А.А. Кривенко, А.В. Станкевич, С.И. Феоктистов [и др.] // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. 2013. № II–1(14). с. 4–8.
- [7] Михеев В.А. Особенности расчета процессов обтяжки деталей сложной формы. Куйбышев: Куйб. авиац. ин-т, 1981. 10 с.
- [8] Сурудин С.В. Сочетание конечно-элементного моделирования и расчета по аналитическим формулам процессов формообразования обтяжкой // НАЦИОНАЛЬНАЯ АССОЦИАЦИЯ УЧЕНЫХ (НАУ), Ежемесячный научный журнал. 2015. № 3 (8) ЧАСТЬ 3. с. 139–141.
- [9] Определение положения пуансона в рабочем пространстве обтяжного прессы FET в процессе технологической подготовки производства / С.В. Белых, А.А. Кривенко, В.В. Мироненко [и др.] // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2013. № 12(83). с. 36–41.

- [10] Моделирование кинематической схемы последовательной обтяжки оболочек двояковыпуклой формы на обтяжном прессе FEKD / В.А. Михеев, Ф.В. Гречников, С.Г. Дементьев [и др.] // Известия Самарского научного центра РАН. 2014. № 16(6). с. 172–179.
- [11] Исследование кинематической схемы последовательной обтяжки оболочек двояковыпуклой формы на обтяжном прессе FEKD / В.А. Михеев, Ф.В. Гречников, С.Г. Дементьев [и др.] // Известия Самарского научного центра РАН. 2014. № 16(6). с. 180–186.
- [12] Глазунов В.А., Колисков А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры: учебное пособие. Москва: Наука, 1991. 94 с.
- [13] Merlet J. P. Parallel Robots. 2nd ed. The Netherlands: Springer Dordrecht, 2006.
- [14] Разработка манипуляционных механизмов параллельно-перекрестной структуры / В.А. Глазуновой, С. Брю, В. Аракелян [и др.] // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 2. С. 90–100.
- [15] Yang D., Lee T. Feasibility study of a platform type of robotic manipulators from a kinematic viewpoint // Transactions of ASME Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in Design. 1984. no. 106. P. 191–198.
- [16] Krivenok A., Burenin A. On the parallel kinematics of the FET stretching press in the stretch forming operations in the manufacture of parts with complex spatial geometry // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. no. 14(6). p. 1–11.
- [17] Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Мир: Москва, 1984. 428 с.
- [18] Marc 2021, Vol A: Theory and User Information. MSC Software Corporation, 2021.
- [19] Бормотин К.С., Буренин А.А., Кривенок А.А. Об оптимизации кинематической схемы формообразования обтяжкой тонких упругопластических обшивок // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 2. С. 14–24.
- [20] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Изд-во СО РАН: Новосибирск, 2000. 262 с.
- [21] Wriggers P. Computational contact mechanics. Heidelberg: Springer, 2006.
- [22] Химмельблау Д.М. Прикладное нелинейное программирование. Издательство «Мир». Редакция литературы по новой технике: Москва, 1975.
- [23] Бормотин К.С., Вин А. Метод решения обратной задачи в процессе обтяжки панели // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 47–57.

*A. A. Krivenok, K. S. Bormotin, A. A. Burenin*

## FORMULATION AND SOLUTION OF THE OPTIMIZING PROBLEM THE SHAPING OF LARGE-SIZED DOUBLE CURVATURE SHEETS UNDER THE CONDITIONS OF PRESSING EQUIPMENT KINEMATIC LIMITATIONS

*Komsomolsk - on - Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

**Abstract.** To reduce material and time costs for the development and implementation of the technology for the manufacture of double-curvature sheets using the process of stretch-forming sheet workpieces, mathematical models and methods have been developed that allow digital modeling of the forming process and its correction at the early stage of technology development. When developing the technology for manufacturing the door edging on the SSJ-NEW aircraft, new approaches to modeling the forming process were used, which made it possible to determine the most optimal strategy for binding a large-sized workpiece at the limit of the kinematic capabilities of the FET-1500 press. The developed technology allows, within the framework of a computational experiment, to carry out working iterations with the transition to real binding in optimal technological parameters.

**Keywords:** stretch-forming, FET, kinematic analysis, direct and inverse kinematics problems, optimization problem, finite element method, full-scale experiment.

## REFERENCES

- [1] Automation of the processes of preparation of aviation production based on computers and equipment with CNC / V. Weissburg, B. Medvedev, A. Bakumsky et al. Moscow: Mashinostroenie, 1985. 216 p. (in Russian).
- [2] Pogartseva M., Feoktistov S. Technique for the development of the technological process for the tightening of aircraft parts on CNC presses // Materials Science Forum. 2019. no. 945. P. 839–844.
- [3] Modeling the kinetics of movement of the working elements of the FET tight press / R. Krupsky, A. Krivenok, A. Stankevich et al. // Bulletin of ISTU. Mechanics and engineering. 2014. no. 9 (92). P. 40–45. (in Russian).
- [4] Kinematic method for providing the preparation of control programs for CNC tight presses from ASV-ALSTHOM / V. Mikheev, S. Surudin, I. Naumenko et al. // Science, theory, practice of the aviation industrial cluster of modern Russia: II All-Russian scientific and production conference dedicated to the Day of Science. Ulyanovsk: Ulyanovsk State Technical University, 2017. (in Russian).
- [5] Veprev A., Zavyalova V. Selection of the loading scheme and the speed of the transverse stretching process // Авиационная промышленность. 1984. no. 12. P. 10–11. (in Russian).
- [6] Shaping of profile blanks using a sheet press / A. Krivenok, A. Stankevich, S. Feoktistov et al. // Uchenye zapiski Komsomol'skogo-on-Amur gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Sciences about nature and technology. 2013. no. II-1(14). p. 4–8. (in Russian).
- [7] Mikheev V. Peculiarities of calculation of the processes of tightening parts of complex shape. Kuibyshev: Kuib. aviation in-t, 1981. 10 p.
- [8] Surudin S. Combination of finite element modeling and calculation by analytical formulas of the formation processes of a close-fitting // NATIONAL ASSOCIATION OF SCIENTISTS (NAU), Monthly scientific journal. 2015. no. 3 (8) PART 3. p. 139–141. (in Russian).
- [9] Determining the position of the punch in the working space of the FET tight press in the process of technological preparation of production / S. Belykh, A. Krivenok, V. Mironenko et al. // Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2013. no. 12(83). p. 36–41. (in Russian).
- [10] Modeling of the kinematic scheme of sequential stretching of biconvex shells on the FEKD stretching press / V. Mikheev, F. Grechnikov, S. Dementiev et al. // Izvestiya of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2014. no. 16(6). p. 172–179. (in Russian).
- [11] Investigation of the kinematic scheme of sequential stretching of biconvex shells on the FEKD stretch press / V. Mikheev, F. Grechnikov, S. D. V. Samokhvalov et al. // Izvestiya of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2014. no. 16(6). p. 180–186. (in Russian).
- [12] Glazunov V., Koliskor A., Krainev A. Spatial mechanisms of a parallel structure: A Study Guide. Moscow: Nauka, 1991. 94 p.
- [13] Merlet J. P. Parallel Robots. 2nd ed. The Netherlands: Springer Dordrecht, 2006.
- [14] Development of manipulators with a parallel-cross structure / V. Glazunov, S. Briot, V. Arakelyan et al. // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2008. no. 2. P. 90–100. (in Russian).
- [15] Yang D., Lee T. Feasibility study of a platform type of robotic manipulators from a kinematic viewpoint // Transactions of ASME Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in Design. 1984. no. 106. P. 191–198.
- [16] Krivenok A., Burenin A. On the parallel kinematics of the FET stretching press in the stretch forming operations in the manufacture of parts with complex spatial geometry // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. no. 14(6). p. 1–11.
- [17] Gallagher R. Finite Element Method. Basics. Mir: Moscow, 1984. 428 p.

---

*Krivenok Anton Alexandrovich*, Candidate of technical sciences, Senior research associate, Komsomolsk - on - Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

*Bormotin Konstantin Sergeevich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Associate professor, Professor of the Department of Aircraft Engineering, Komsomolsk - on - Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

*Burenin Anatoly Alexandrovich*, Corresponding member of the RAS, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Chief researcher, Komsomolsk - on - Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- [18] Marc 2021, Vol A: Theory and User Information. MSC.Software Corporation, 2021.
- [19] Bormotin K., Burenin A., Krivenok A. On the optimization of the kinematic scheme for shaping thin elastoplastic coverings // *Mechanics of Solids*. 2022. no. 2. P. 214–222.
- [20] Korobeinikov S. Nonlinear deformation of solid bodies. Publishing House of SO RAN: Novosibirsk, 2000. 262 p.
- [21] Wriggers P. Computational contact mechanics. Heidelberg: Springer, 2006.
- [22] Himmelblau D. Applied nonlinear programming. Mir Publishing House. Edition of literature on new technology: Moscow, 1975.
- [23] Bormotin K., A.Win. Method of solving the inverse problem in the process of panel stretch-forming // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state*. 2018. no. 3(37). P. 47–57. (in Russian).



М. В. Гасанов

## ИССЛЕДОВАНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В настоящей работе проводится исследование некоторого класса дифференциальных уравнений с подвижными особенностями. Приводится обобщение полученных ранее результатов исследования, а именно, теоремы существования и единственности решения рассматриваемого класса уравнений на комплексную область. Получена структура аналитического приближенного решения и априорные оценки погрешности. Данные оценки были оптимизированы с помощью апостериорных. Теоретические положения были протестированы с помощью численного эксперимента.

**Ключевые слова:** Задача Коши, теорема существования и единственности, подвижные особые точки, априорные оценки.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.008

УДК: 517.957

**1. Введение.** Важную роль в описании различных физических явлений служат дифференциальные уравнения. Ввиду того, что явления, объекты и процессы, возникающие вокруг нас, имеют сложную структуру, чаще всего, для создания их математической модели, применяются нелинейные дифференциальные уравнения. Данный класс уравнений применяется, например, при исследовании волновых процессов в стержнях и балках [1], [2], в строительных конструкциях [3], [4]. Нелинейные дифференциальные уравнения имеют подвижные особые точки, что является условием, в общем случае, неразрешимости таких уравнений в квадратурах. Методы решения таких уравнений можно разделить на следующие варианты: подход в работах [1], [2] основывается на линеаризации рассматриваемых уравнений. Такой подход не учитывает

---

© Гасанов М. В., 2022

*Гасанов Магомедюсуф Владимирович*

e-mail: gasanovMV@mgsu.ru, преподаватель кафедры Высшей математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Автор выражает глубокую благодарность профессору кафедры Высшей математики НИУ МГСУ В. Н. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Поступила 15.11.2022

наличие разрывных решений в данных уравнениях, что является недостатком метода. В работах [5]-[12] дается теоретическое обоснование учета особенностей применяемого класса нелинейных дифференциальных уравнений и реализация авторского подхода исследования различных классов уравнений с подвижными особенностями. Отметим, что для нелинейных дифференциальных уравнений имеется возможность, в единичных случаях, разрешимости в квадратурах [13]-[16], а также имеет место быть анализ некоторых классов уравнений с помощью преобразования Шварца [17], асимптотического подхода [18]-[20]. В работе [22] автор пытается использовать нестандартный для классической теории метод, принцип фиксированной точки. Данный принцип используется для доказательства теоремы существования и единственности решения для уравнений с дробными производными. Рассматриваемое в статье [22] матричное уравнение Риккати было хорошо описано в работе [23], где было доказано существование подвижных особых точек, что не учитывает автор работы [22]. В публикации [24] автор приводит примеры точного решения нелинейных дифференциальных уравнений, не учитывая их специфику, получает гладкие функции, хотя при иллюстрации на графиках явно видны особые точки и линии. Если же поиск решения осуществляется в области аналитичности, то необходимо указать область поиска решения, что автором не было продемонстрировано.

В данной работе проводится обобщение результатов работы [6] на комплексную плоскость.

**2. Результаты исследования.** Рассмотрим класс нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$y''' = a_1(z)y^2 + a_2(z)y + a_3(z). \quad (1)$$

В работе [6] приводится замена, с помощью которой уравнение (1) сводится к виду

$$y''' = y^2 + r(z). \quad (2)$$

Рассматривается задача Коши

$$y''' = y^2 + r(z), \quad (3)$$

$$\begin{cases} y(z_0) = y_0, \\ y'(z_1) = y_1, \\ y''(z_2) = y_2. \end{cases} \quad (4)$$

### Теорема 1.

Пусть

- (1)  $z^*$  – подвижная особая точка для задачи Коши (3)-(4);
- (2)  $r(z) \in C'$  в области

$$|z - z^*| < \rho_1, \quad (5)$$

где  $0 < \rho_1 = \text{const}$ ;

- (3)  $\exists M_n : \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!} \leq M_n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $M_i = \text{const}$ ,

тогда решение задачи Коши (3)-(4) единственно, и представимо в виде мероморфной функции

$$y(z) = (z - z^*)^{-3} \sum_0^{\infty} C_n (z - z^*)^n, \quad (6)$$

в области

$$|z - z^*| < \rho_2, \quad (7)$$

где  $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}} \right\}$ ,  $M = \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!} \right\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

**Доказательство.** В общем случае, учитывая структуру (6) решения уравнения (3), в окрестности подвижной особой точки, для функции  $y(z)$ , получаем следующее представление в виде обобщенного степенного ряда:

$$y(z) = (z - z^*)^\rho \sum_0^\infty C_n (z - z^*)^n, \quad C_0 \neq 0.$$

С учетом условия 2, теоремы 1, функция  $r(z)$  представима в виде регулярного ряда

$$r(z) = \sum_0^\infty A_n (z - z^*)^n. \quad (8)$$

Подставив (6) и (8) в уравнение (3) получаем:

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty C_n (z - z^*)^{n+\rho-3} (n+\rho)(n+\rho-1)(n+\rho-2) = \\ (z - z^*)^{2\rho} \sum_0^\infty C_n^* (z - z^*)^n + \sum_0^\infty A_n (z - z^*)^n, \end{aligned}$$

где правая и левая часть тождественно равны, откуда получаем два условия:

$$n + \rho - 3 = n + 2\rho, \quad (9)$$

$$(n - 3)(n - 4)(n - 5)C_n = C_n^* + A_{n-6}. \quad (10)$$

Условие (9) позволяет определить значение  $\rho = -3$ , и характер подвижной особой точки. Из условия (10) однозначно определяем коэффициенты  $C_n$ . Однозначность коэффициентов разложения говорит о единственности разложения функции  $y(z)$  в ряд.

$$\begin{aligned} C_0 = -60, C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0, \\ C_6 = \frac{A_0}{126}, C_7 = \frac{A_1}{144}, C_8 = \frac{A_2}{180}, C_9 = \frac{A_3}{240}, C_{10} = \frac{A_4}{330}, C_{11} = \frac{A_5}{456}, \dots \end{aligned}$$

Предполагаем оценку для коэффициентов  $C_n$ :

$$\begin{aligned} |C_{6n}| &\leq \frac{1}{(6n-3)(6n-4)(6n-5)+120} (M+1)^n = V_{6n}, \\ |C_{6n+1}| &\leq \frac{1}{(6n-2)(6n-3)(6n-4)+120} (M+1)^n = V_{6n+1}, \\ |C_{6n+2}| &\leq \frac{1}{(6n-1)(6n-2)(6n-3)+120} (M+1)^n = V_{6n+2}, \\ |C_{6n+3}| &\leq \frac{1}{6n(6n-1)(6n-2)+120} (M+1)^n = V_{6n+3}, \\ |C_{6n+4}| &\leq \frac{1}{(6n+1)(6n-1)6n+120} (M+1)^n = V_{6n+4}, \\ |C_{6n+5}| &\leq \frac{1}{(6n+2)(6n+1)6n+120} (M+1)^n = V_{6n+5}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$M = \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Используя рекуррентное соотношение (10) докажем оценку для коэффициентов  $C_{6n+6}$ .

Путем сдвига индекса в рекуррентном соотношении (10) получаем:

$$(6n+3)(6n+2)(6n+1)C_{6n+6} = C_{6n+6}^* + A_{6n},$$

или

$$(6n+3)(6n+2)(6n+1)C_{6n+6} = \sum_1^{6n} C_i C_{6n-i} + A_{6n}. \quad (12)$$

Далее учитывая предполагаемые оценки для  $C_n$  и формулы (11) производим оценку:

$$\begin{aligned} |C_{6n+6}| &\leq \frac{1}{((6n+3)(6n+2)(6n+1) + 120)} \cdot \\ &\cdot \left( \sum_1^{6n} \frac{(M+1)^{\frac{i}{6}} (M+1)^{n-\frac{i}{6}}}{((i-3)(i-4)(i-5) + 120)(6n+3-i)(6n+2-i) + 120} + A_{6n} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1) + 120} (M+1)^n \cdot \left( \sum_1^{6n} \frac{1}{(i-3)(i-4)(i-5) + 120} \right) \times \\ &\times \frac{1}{(6n+3-i)(6n+2-i)(6n+1-i) + 120} + M) \leq \frac{(M+1)^{n+1}}{(6n+3)(6n+2)(6n+1) + 120}. \end{aligned}$$

Продельвая аналогичную операцию для остальных коэффициентов, убеждаемся в справедливости нашей гипотезы (9), аналогично случаю  $C_{6n+6}$ .

Далее, рассмотрим ряд:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} V_n |z - z^*|^n &= \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k} |z - z^*|^{6k} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+1} |z - z^*|^{6k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+2} |z - z^*|^{6k+2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+3} |z - z^*|^{6k+3} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+4} |z - z^*|^{6k+4} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+5} |z - z^*|^{6k+5}. \end{aligned}$$

Данный ряд является мажорирующим для правильной части ряда

$$Y(z) = |z - z^*|^{-3} \sum_0^{\infty} C_n |z - z^*|^n$$

при справедливости оценок (9). Применяя признак Даламбера, устанавливаем область сходимости рядов вида  $\sum_{k=1}^{\infty} V_{6k+i} |z - z^*|^{6k+i}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(M+1)^{k+1} (z - z^*)^{6k+6} ((6n-3)(6n-4)(6n-5) + 120)}{((6n+3)(6n+2)(6n+1) + 120) (M+1)^k (z - z^*)^{6k}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |(M+1)(z - z^*)^6| \leq 1, \\ |z - z^*| &\leq \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом убеждаемся сходимости ряда (6) в области (7).

Выбирая значение для  $\rho_2$ :  $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}} \right\}$ , убеждаемся в сходимости правильной части ряда (6) в области (7).

Следующая теорема позволяет получить априорную оценку для приближенного решения

$$y_N(z) = (z - z^*)^{-3} \sum_0^N C_n (z - z^*)^n \quad (14)$$

**Теорема 2.** При выполнении условий 1-3 теоремы 1, для приближенного решения (14), в области определяемой соотношением (7), имеет место оценка погрешности

$$\Delta y_N(z) \leq \Delta, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \cdot |z - z^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|z - z^*|^6} \left( \frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4) + 120} + \right. \\ & + \frac{|z - z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3) + 120} + \frac{|z - z^*|^2}{N(N-1)(N-2) + 120} + \\ & \left. + \frac{|z - z^*|^3}{(N+1)N(N-1) + 120} + \frac{|z - z^*|^4}{(N+1)(N+2)N + 120} + \frac{|z - z^*|^5}{(N+1)(N+3)(N+2) + 120} \right) \end{aligned}$$

в случае  $N+1 = 6n$ ,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{(M+1)^{\frac{N}{6}} \cdot |z - z^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|z - z^*|^6} \left( \frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4) + 120} + \right. \\ & + \frac{|z - z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3) + 120} + \frac{|z - z^*|^2}{N(N-1)(N-2) + 120} + \frac{|z - z^*|^3}{N(N+1)(N-1) + 120} + \\ & \left. + \frac{|z - z^*|^4}{N(N+2)(N+1) + 120} + \frac{|z - z^*|^5}{(N+1)(N+2)(Nn+3) + 120} \right) \end{aligned}$$

при  $N+1 = 6n+1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{(M+1)^{\frac{N-1}{6}} \cdot |z - z^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|z - z^*|^6} \left( \frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4) + 120} + \right. \\ & + \frac{|z - z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3) + 120} + \frac{|z - z^*|^2}{(N-1)N(N-2) + 120} + \frac{|z - z^*|^3}{(N-1)(N+1)N + 120} + \\ & \left. + \frac{|z - z^*|^4}{(N+2)(N+1)N + 120} + \frac{|z - z^*|^5}{(N+3)(N+2)(N+1) + 120} \right) \end{aligned}$$

для варианта  $N+1 = 6n+2$ ,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{(M+1)^{\frac{N-2}{6}} \cdot |z - z^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|z - z^*|^6} \left( \frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4) + 120} + \right. \\ & + \frac{|z - z^*|}{(N-2)(N-1)(N-3) + 120} + \frac{|z - z^*|^2}{(N-2)N(N-11) + 120} + \frac{|z - z^*|^3}{(N+1)N(N-1) + 120} + \\ & \left. + \frac{|z - z^*|^4}{(N+2)(N+1)N + 120} + \frac{|z - z^*|^5}{(N+3)(N+2)(N+1) + 120} \right) \end{aligned}$$

если  $N + 1 = 6n + 3$ ,

$$\Delta \leq \frac{(M+1)^{\frac{N-3}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)|z-z^*|^6} \left( \frac{1}{(N-3)(N-2)(N-4)+120} + \frac{|z-z^*|}{(N-3)(N-1)(N-2)+120} + \frac{|z-z^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{|z-z^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120} + \frac{|z-z^*|^4}{(N+2)(N+1)N+120} + \frac{|z-z^*|^5}{(N+3)(N+2)(N+1)+120} \right)$$

для  $N + 1 = 6n + 4$  и

$$\Delta \leq \frac{(M+1)^{\frac{N-4}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)|z-z^*|^6} \left( \frac{1}{(N-4)(N-2)(N-3)+120} + \frac{|z-z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \frac{|z-z^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{|z-z^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120} + \frac{|z-z^*|^4}{(N+2)(N+1)N+120} + \frac{|z-z^*|^5}{(N+3)(N+2)(N+1)+120} \right)$$

при  $N + 1 = 6n + 5$ .

При этом,  $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{M+1}} \right\}$ ,  $M = \max \left\{ \sup_n \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!} \right\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Докажем оценку для случая  $N + 1 = 6n$ . Имеем

$$\begin{aligned} |y(z) - y_N(z)| &= \left| \sum_0^\infty C_n(z-z^*)^n - \sum_0^N C_n(z-z^*)^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^\infty C_n(z-z^*)^n \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^\infty |C_n(z-z^*)^n| = \sum_{n=N+1}^\infty |C_n| |z-z^*|^n \leq \sum_{n=N+1}^\infty |C_n| |z-z^*|^n = \\ &= \sum_{k=\lfloor \frac{N}{6} \rfloor}^\infty \left( \sum_{i=1}^5 |C_{6k+i}| |z-z^*|^{6k+i} \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=\lfloor \frac{N+1}{6} \rfloor}^\infty \left( \sum_{i=0}^5 \frac{(M+1)^k}{(6k-3+i)(6k-4+i)(6k-5+i)+120} |z-z^*|^{6k+i} \right) \leq \\ &\leq \frac{(M+1)^k \cdot |z-z^*|^{6k}}{1-(M+1)|z-z^*|^6} \left( \sum_{i=0}^5 \frac{|z-z^*|^i}{(6k-3+i)(6k-4+i)(6k-5+i)+120} \right) \leq \\ &\leq \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)|z-z^*|^6} \left( \sum_{i=0}^5 \frac{|z-z^*|^i}{(6\frac{N+1}{6}-3+i)(6\frac{N+1}{6}-4+i)(6\frac{N+1}{6}-5+i)+120} \right) = \\ &= \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)|z-z^*|^6} \left( \left( \sum_{i=0}^5 \frac{|z-z^*|^i}{(N-2+i)(N-3+i)(N-4+i)+120} \right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta \leq \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}} \cdot |z-z^*|^{N+1}}{1-(M+1)|z-z^*|^6} \left( \frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \frac{|z-z^*|}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \frac{|z-z^*|^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{|z-z^*|^3}{(N+1)N(N-1)+120} + \frac{|z-z^*|^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{|z-z^*|^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120} \right)$$

Аналогичным образом получаем выражения оценок для вариантов  $N+1=6n+1$ ,  $N+1=6n+2$ ,  $N+1=6n+3$ ,  $N+1=6n+4$ ,  $N+1=6n+5$  соответственно, при этом  $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[6]{(M+1)}} \right\}$ ,

$$M = \max_n \sup \left\{ \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**3. Численный эксперимент.** Рассмотрим задачу Коши (3)–(4), где

$$r(z) = 0, \quad y(0) = 1/4, \quad y'(0) = i, \quad y''(0) = 1, \quad z^* = 2.652717$$

Результаты расчетов для задачи Коши (3)–(4) представлены в таблице 1.

**Таблица 1.** Результаты численного эксперимента.

$z_1$	$y_9(z_1)$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
2.6523	78.3005 + 12.2448i	0.001	0.0001

Таблица 1. Квадратичная аппроксимация

где  $y_9(z_1)$  – аналитически приближенное решение (13);  $\Delta_1$  – оценка погрешности по теореме 2;  $\Delta_2$  – апостериорная оценка. Для  $\Delta_2 = 0.001$  на основании теоремы 2 имеем  $N = 15$ . В структуре приближенного решения (13) Слагаемые с 10 по 15 в общей сумме не превышают требуемой точности –  $\varepsilon = 0.0001$ . Таким образом, при  $N = 9$  получаем значение  $y_9(z_1)$  с точностью  $\varepsilon = 0.0001$ .

**4. Вывод.** В данной работе представлено обобщение полученных ранее результатов для рассматриваемого класса уравнений в окрестности подвижной особой точки для комплексной области. Построено аналитическое приближенное решение, найдена априорная оценка погрешности. Представлены результаты численного эксперимента, подтверждающие теоретические результаты. Проиллюстрирован вариант оптимизации априорных оценок с помощью апостериорных.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. No 56. P. 2507–2514
- [2] Чугайнова А. П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. No 281. P. 204–212. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0371968513020179>

- [3] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // *Journal of Physics: Conf. Series.* 2020. No 1425. P. 012127
- [4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // *Materials Science and Engineering.* 2018. No 456. P. 012122
- [5] Орлов В. Н., Коллэ К. В. Аналитическое приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.* 2015. № 4(26). С. 96–108
- [6] Orlov V. N, Gasanov M. V. Exact Criteria for the Existence of a Moving Singular Point in a Complex Domain for a Nonlinear Differential Third-Degree Equation with a Polynomial Seventh-Degree Right-Hand Side // *Axioms* 2022. No 11. P. 222. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11050222>
- [7] Orlov V. N., Gasanov M. V. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // *Mathematics.* 2022, No 10. P. 3984. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10213984>
- [8] Orlov V., Gasanov M. Existence and Uniqueness Theorem for a Solution to a Class of a Third-Order Nonlinear Differential Equation in the Domain of Analyticity // *Axioms.* 2022. No 11. P. 203. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11050203>
- [9] Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // *Axioms.* 2022. No 11. P. 637. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11110637>
- [10] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2020. No 24. P. 174–186 DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1727>
- [11] Орлов В. Н., Захарова П. В. Об одном расширении класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с подвижной особой точкой // *Вестник Башкирского университета.* 2017. Т. 22. № 3. С. 607–612
- [12] Орлов В. Н., Кудряшова Н. В. Теорема существования решения одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с полиномиальной правой частью третьей степени в области аналитичности // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.* 2016. № 1(27). С. 141–149.
- [13] Соболевский С. Л. // Подвижные особые точки полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения.* 2004. № 40. С. 756–762. DOI: [doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e](https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e)
- [14] Соболевский С. Л. Подвижные особые точки алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения.* 2005. № 41. С. 1092–1099. DOI: [doi.org/10.1007/s10625-005-0260-9](https://doi.org/10.1007/s10625-005-0260-9)
- [15] Вересович П. П., Яблонский А. И. О подвижных особых точках систем дифференциальных уравнений третьего порядка // *Дифференц. уравнения.* 1977. № 13. С. 1932–1939
- [16] Писаренко В. П., Яблонский А. И. Дифференциальное уравнение, имеющее решения с алгебраическими подвижными особыми точками // *Дифференц. уравнения.* 1976. № 12. С. 928–930
- [17] Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models // *IOP Conf. Series: Journal of Physics.* 2020. No 1425. P. 012107. DOI: [10.1088/1742-6596/1425/1/0121074](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/0121074)
- [18] Astashova I. V. On the asymptotic classification of solutions to non-linear equations of the third and fourth orders with power non-linearity // *Differential and Difference Equations with Applications.* In Part of the Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Book Series; Springer: Cham, Switzerland, 2016. Vol. 164. pp 191–203.
- [19] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // *Springer Proc. Math. Stat.* 2016. No 164. P. 191–203. DOI: [10.1007/978-3-319-32857-7\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-319-32857-7_18)



- 
- [20] Kruskal M. D., Joshi N., Halburd R. Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis: a review and extensions of tests for the Painleve property // Integrability of Nonlinear Systems. pp 171–205. DOI: 10.1007/BFb011369616.
- [21] Caruntu B. Approximate Analytical Solutions for Systems of Fractional Nonlinear Integro-Differential Equations Using the Polynomial Least Squares Method // Fractal Fract. 2021. No. 5. P. 198. DOI: 10.3390/fractalfract5040198
- [22] Angelova V., Hached M., Jbilou K. Sensitivity of the Solution to Nonsymmetric Differential Matrix Riccati Equation // Mathematics. 2021. No 9. P. 855. DOI: 10.3390/math9080855
- [23] Орлов В. Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Чебоксары: Перфектум, 2012. 112 с.
- [24] Ahmed S. A., Qazza A., Saadeh R. Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations via the New Double Integral Transform Combined with Iterative Method // Axioms. 2022. 11. P. 247. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11060247>

M. V. Gasanov

**INVESTIGATION IN THE NEIGHBORHOOD OF A MOVING SINGULAR  
POINT OF A CERTAIN CLASS OF A THIRD-ORDER NONLINEAR  
DIFFERENTIAL EQUATION FOR A COMPLEX DOMAIN**

*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this paper, we study a certain class of differential equations with moving singularities. A generalization of the previously obtained results of the study, namely, the existence and uniqueness theorem for the solution of the considered class of equations, to the complex domain is given. The structure of the analytical approximate solution and a priori error estimates are obtained. These estimates were optimized using post hoc estimates. Theoretical provisions were tested using a numerical experiment.

**Keywords:** Cauchy problem, existence and uniqueness theorem, moving singular points, a priori estimates

## REFERENCES

- [1] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. No 56. P. 2507–2514
- [2] Chugainova A. P. Non-stationary solutions of the generalized Korteweg-de Vries-Burgers equation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. No 281. P. 204–212. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0371968513020179>
- [3] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Journal of Physics: Conf. Series. 2020. No 1425. P.012127
- [4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // Materials Science and Engineering. 2018. No 456. P. 012122
- [5] Orlov V. N., Kolle K. V. Analytical approximation solution of one non-linear differential equation of the third order with a polynomial right hand side of the second degree in neighborhood of a moving singular point // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. No. 4(26). P. 96–108
- [6] Orlov V. N., Gasanov M. V. Exact Criteria for the Existence of a Moving Singular Point in a Complex Domain for a Nonlinear Differential Third-Degree Equation with a Polynomial Seventh-Degree Right-Hand Side // Axioms 2022. No 11. P. 222. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11050222>
- [7] Orlov V. N., Gasanov M. V. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022, No 10. P. 3984. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10213984>
- [8] Orlov V., Gasanov M. Existence and Uniqueness Theorem for a Solution to a Class of a Third-Order Nonlinear Differential Equation in the Domain of Analyticity // Axioms. 2022. No 11. P. 203. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11050203>
- [9] Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // Axioms. 2022. No 11. P. 637. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11110637>
- [10] Orlov V. N., Leontieva T. Yu. On expanding the domain for the analytical approximate solution one class of nonlinear differential equations of the second order in the complex domain // Vestn. Myself. state tech. university Ser. Phys.-Math. science. 2020. No 24. P. 174–186 DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1727>

---

*Gasanov Magomedysuf Vladimirovich, Teacher, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

- [11] Orlov V. N., Zakharova P. V. On an extension of the class of nonlinear differential equations of the third order with a moving singular dot // Bulletin Bashkir University. 2017. Vol. 22. No. 3. pp. 607–612
- [12] Orlov V. N., Kudryashova N. V. Existence theorem for a solution of one nonlinear differential equation of the third order with polynomial right-hand side of the third degree in the field analyticity // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State 2016. No. 1(27). pp. 141–149.
- [13] Sobolevsky S. L. // Moving singular points polynomial ordinary differential equations // Differential equations. 2004. No. 40. S. 756–762. DOI: doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e
- [14] Sobolevsky S. L. Movable singular points of algebraic ordinary differential equations // Differ. equations. 2005. No. 41. S. 1092–1099. DOI: doi.org/10.1007/s10625-005-0260-9
- [15] Veresovich P. P., Yablonsky A. I. O moving singular points of systems of differential equations of the third order // Differ. equations. 1977. No. 13. S. 1932–1939
- [16] Pisarenok V. P., Yablonsky A. I. differential an equation that has solutions with algebraic movables singular points // Differ. equations. 1976. No. 12. S. 928–930
- [17] Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and linear differential equations of the fourth order arising in beam models // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. No. 1425. P. 012107. DOI:10.1088/1742 6596/1425/1/0121074.
- [18] Astashova I. V. On the asymptotic classification of solutions to non-linear equations of the third and fourth orders with powernon-linearity // Differential and Difference Equations with Applications. In part of the Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Book series; Springer: Cham, Switzerland, 2016. Vol. 164. pp 191–203.
- [19] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to linear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Springer Proc. Math. stat. 2016. No. 164. P. 191–203. DOI: 10.1007/978-3-319-32857-7\_18
- [20] Kruskal M. D., Joshi N., Halburd R. Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis: a review and extensions of tests for the Painleve property // Integrability of Nonlinear systems. pp 171–205. DOI: 10.1007/BFb011369616.
- [21] Caruntu B. Approximate Analytical Solutions for Systems of Fractional Nonlinear Integro-Differential Equations Using the Polynomial Least Squares Method // Fractal Fract. 2021. No. 5. P. 198. DOI: 10.3390/fractalfract5040198
- [22] Angelova V., Hached M., Jbilou K. Sensitivity of the Solution to Nonsymmetric Differential Matrix Riccati Equation // Mathematics. 2021. No 9. P. 855. DOI: 10.3390/math9080855
- [23] Orlov V. N. Approximate solution method for scalar and matrix Riccati differential equations. Cheboksary: Perfectum, 2012. 112 p.
- [24] Ahmed S. A., Qazza A., Saadeh R. Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations via the New Double Integral Transform Combined with Iterative Method // axioms. 2022. 11. P. 247. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11060247

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

## О ДВУХ ОСНОВНЫХ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФОРМАХ ПОТЕНЦИАЛА АСИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРОВ СИЛОВЫХ И МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕХАНИКЕ ГЕМИТРОПНЫХ ТЕЛ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В работе обсуждаются некоторые вопросы моделирования гемитропных упругих сред. Вводятся две основные квадратичные энергетические формы потенциала напряжений в терминах псевдотензоров. Указанные энергетические формы полагаются абсолютными инвариантами по отношению к произвольным преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях). В результате применения специальных координатных представлений полуизотропных (гемитропных) псевдотензоров четвертого ранга можно определить все 9 ковариантно постоянных определяющих псевдоскаляров, характеризующих гемитропную упругую среду. Выделены симметричные и антисимметричные части асимметричных тензоров и псевдотензоров деформаций и напряжений. Выполнено сравнение и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры и псевдоскаляры первой и второй основных естественных энергетических форм, в том числе, с конвенционально используемыми гемитропными псевдоскалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной (являющейся псевдоскаляром отрицательного веса, чувствительным к отражениям трехмерного пространства), и шестью безразмерными псевдоскалярами.

**Ключевые слова:** псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, квадратичная энергетическая форма, потенциал напряжений, определяющий псевдотензор, характерная микродлина, хиральная среда, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010

УДК: 539.374

---

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2022

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.09.2022

**1. Введение.** Модели механики упругого поведения гемитропных сред основываются на энергетических квадратичных формах микрополярных упругих потенциалов [1–3]. Представление упругих потенциалов, описывающих деформирование сплошных микрополярных сред, в общем случае, также требует привлечения формализма псевдотензорной алгебры [4–12]. Особенно актуальной она становится при моделировании процессов деформирования материалов, проявляющих полуизотропные (гемитропные, демитропные) свойства, определяющие тензоры и псевдотензоры которых обязаны быть чувствительными к зеркальным отражениям трехмерного пространства. Предполагается, что упругий потенциал является абсолютным инвариантом по отношению к произвольным преобразованиям пространства, в том числе к зеркальным отражениям. В общем анизотропном случае упругий потенциал характеризуется тремя определяющими псевдотензорами четвертого ранга и задается сбалансированной по псевдотензорным весам суммой абсолютных скаляров.

Аккуратное применение специальных координатных представлений без труда позволяют редуцировать линейное анизотропное микрополярное тело к гемитропному, характеризующемуся девятью определяющими псевдоскалярами. В конвенциональном случае, такими псевдоскалярами будут: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микродлина, и 6 псевдоскаляров, не имеющих физической размерности. Характерная микродлина оказывается псевдоскаляром отрицательного веса  $-1$ , и проявляет чувствительность к отражениям и инверсиям пространства.

Существуют различные варианты представлений энергетических форм потенциалов асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных сред. В настоящей работе проводится сравнение первой и второй основных естественных энергетических форм и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры и псевдоскаляры, в том числе, с конвенционально используемыми гемитропными псевдоскалярами.

**2. Необходимые понятия и уравнения из алгебры и анализа псевдотензоров в евклидовых пространствах заданной размерности.** Рассмотрим  $N$ -мерное евклидово пространство, параметризованное координатами  $x^k$ , с локальной базисной системой  $\mathbf{z}_1$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, \dots, N$ ). Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр  $e$  [10–12] и его целые степени играют первостепенную роль в геометрии многомерных пространств. В  $N$ -мерном пространстве он определяется как косое произведение [13, р. 63–65] ковариантных базисных абсолютных векторов

$$e = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N]. \quad (1)$$

Далее символом в квадратных скобках сверху корневого символа псевдотензора будем отмечать его вес, а символом в круглых скобках снизу — его ранг. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях. Вес будет опущен для фундаментальных символов, таких как фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, символы перестановки, и он также применим к абсолютным тензорам с нулевым весом. Ранг тензора (псевдотензора) будет опускаться, где это очевидно.

Псевдотензор  $T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r}$  веса  $g$  ранга  $n = s + r$  с помощью степеней фундаментального ориентирующего псевдоскаляра можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$T_{(n)}^{h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} = e^{-g} T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r}. \quad (2)$$

Легко показать, что в евклидовом пространстве справедливо следующее соотношение

$$e^2 = g > 0, \quad (3)$$

где  $g$  — детерминант метрического тензора  $g_{ij}$ :  $g = \det(g_{ij})$ . Условие  $g = 1$  ( $|e| = 1$ ) является фундаментальным для развития общей теории относительности [14] и, например, математической теории пластичности [15]. Важно отметить, что в этом случае абсолютные тензоры совпадают с псевдотензорами с точностью до знака, учитывая уравнение (2) получим

$$T_{(n)}^{h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} = (\text{sgn } e)^{-g} T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r}. \quad (4)$$

Откуда следует, что псевдотензоры меняют свой знак на противоположный при изменении ориентации координатного репера если их вес нечетный.

Ковариантная производная псевдотензорного поля  $T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r}$  была введена О. Вебленом [8, 9] и вычисляется согласно [6, 10]:

$$\begin{aligned} \nabla_p T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} &= \partial_p T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} + \Gamma_{qp}^{h_1} T_{(n)}^{[g]qh_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} + \dots + \Gamma_{qp}^{h_s} T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots q\dots k_1k_2\dots k_r} - \\ &- \Gamma_{k_1p}^q T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots qk_2\dots k_r} - \dots - \Gamma_{k_r p}^q T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots q} - g T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} \frac{\partial_p e}{e}. \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}.$$

Интересующийся читатель может ознакомиться с альтернативными реализациями ковариантного дифференцирования псевдотензоров (см., например, [16]).

Заданное псевдотензорное поле  $T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r}$  ранга  $n$  и веса  $g$  является ковариантно постоянным, если оно удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_p T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} = 0. \quad (6)$$

Заметим, что уравнению (6) удовлетворяют тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами.

**3. Тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами.** Тензором (псевдотензором) с постоянными компонентами [4, стр. 164] называется тензор (псевдотензор), сохраняющий (retain) неизменными (unaltered) все свои компоненты при любых линейных преобразованиях координатного репера: самые важные из них — повороты, преобразования масштабирования (scaling), центральная инверсия, зеркальные отражения.

В монографии [4, стр. 164–176] предлагается общий алгоритм построения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами для целых положительных (отрицательных) весов. Например, общий вид псевдотензора  $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$  с постоянными компонентами целого отрицательного веса представляется формулой

$$C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s} = \sum_{P=1}^{r!} \lambda_P \delta_{\{k_1}^{h_1} \delta_{k_2}^{h_2} \dots \delta_{k_s}^{h_s} \underbrace{\epsilon_{k_{s+1} \dots k_{s+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r-N+1} \dots k_r}^{[-1]}}_{|g|} \}_{P}, \quad (7)$$

где  $r$  — число ковариантных индексов,  $s$  — число контравариантных индексов,  $N$  — размерность пространства,  $g$  — вес, целое отрицательное число,  $\lambda_P$  ( $P = 1, 2, \dots, r!$ ) — произвольные постоянные (абсолютные инварианты),  $P$  — перестановка ряда индексов

$$k_1, \dots, k_s, \dots, k_{s+N}, \dots, k_{r-N+1}, \dots, k_r.$$

В формуле (7) по ковариантным индексам, заключенным в фигурные скобки производятся всевозможные перестановки. Число ковариантных, контравариантных индексов и вес псевдотензора должны удовлетворять ограничению

$$r = s + N|g|, \quad (8)$$

откуда

$$r \geq s. \quad (9)$$

Если условие (8) не выполняется, то псевдотензор  $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$  с постоянными компонентами будет равен нулю.

Отметим, что псевдотензорное поле  $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$  с постоянными компонентами является ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению (6) при условии

$$\nabla_s \lambda_P = 0. \quad (10)$$

Обратим внимание, что псевдотензоры вида (7) не составляют полного набора ковариантно постоянных абсолютных тензоров. Примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров подробно обсуждались в работах (см. [4, 6, 17–19]). Среди них фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр  $e$  и его алгебраические степени, обобщенные  $\delta$ -символы,  $\epsilon$ -символы,  $e$ -тензоры, метрические тензоры  $g^{kh}$ ,  $g_{hk}$  которые часто используются в микрополярных теориях механики сплошных сред [10–12, 20, 21].

Рассмотрим важный для приложений пример. Абсолютный тензор четвертого ранга  $C_{sm}^{il}$  с постоянными компонентами согласно (7) можно представить в виде

$$C_{sm}^{il} = a \delta_s^i \delta_m^l + c \delta_s^l \delta_m^i, \quad (11)$$

где  $a$  и  $c$  — абсолютные инварианты (абсолютные скаляры).

Уравнение (11), справедливое в любой системе координат в декартовых координатах можно представить следующим образом

$$C_{ilsm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + c\delta_{ls}\delta_{im}. \quad (12)$$

Пусть  $N = 3$ , тогда, воспользовавшись соотношением (8), для тензора четвертого ранга получим

$$\begin{cases} r - s = 3|g|, \\ r + s = 4. \end{cases} \quad (13)$$

Выражая  $r$  и  $s$ , получим

$$\begin{cases} 0 \leq 2r = 4 + 3|g|, \\ 0 \leq 2s = 4 - 3|g|. \end{cases} \quad (14)$$

Решениями системы (14) должны быть целые неотрицательные числа, откуда немедленно заключаем, что  $|g|$  должен быть четным неотрицательным целым числом, удовлетворяющим неравенству

$$|g| \leq \frac{4}{3}, \quad (15)$$

откуда следует, что  $|g| = 0$ , и, следовательно, невозможно построить в трехмерном пространстве псевдотензор четвертого ранга с постоянными компонентами. В пространствах большей размерности ситуация может измениться.

Сравнивая представление для абсолютного тензора четвертого ранга с постоянными компонентами (12) и представление полуизотропного тензора [22–27] в декартовой системе координат

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{il}\delta_{sm} + c\delta_{im}\delta_{sl}, \quad (16)$$

заметим, что

$$H_{islm} = C_{islm} + b\delta_{il}\delta_{sm}, \quad (17)$$

где  $C_{islm}$  обозначает абсолютный тензор четвертого ранга с постоянными компонентами.

Формула (17) в произвольной системе координат примет вид

$$H_{\cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot} = C_{\cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot} + b g^{il} g_{sm}, \quad (18)$$

где  $C_{\cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot}$  — тензор с постоянными коэффициентами в смысле Б.Г. Гуревича [4], являющийся к тому же ковариантно постоянным.

Ковариантно постоянные псевдотензорные поля четвертого ранга произвольного веса можно получить из абсолютных тензорных полей с помощью преобразования (2). Запишем представление полуизотропного (гумитропного, демитропного) псевдотензорного поля четвертого ранга веса  $g$  в виде:

$$H^{[g]ism} = a^{[g]} g^{is} g^{lm} + b^{[g]} g^{il} g^{sm} + c^{[g]} g^{im} g^{sl}, \quad (19)$$

где  $a^{[g]}$ ,  $b^{[g]}$ ,  $c^{[g]}$  — псевдоинварианты веса  $g$ .

Ковариантно постоянное псевдотензорное поле четвертого ранга должно удовлетворять уравнению:

$$\nabla_k^{[g]} H^{ism} = 0. \quad (20)$$

При этом необходимо выполнение следующих дифференциальных условий

$$\nabla_k^{[g]} a = 0, \quad \nabla_k^{[g]} b = 0, \quad \nabla_k^{[g]} c = 0. \quad (21)$$



Условия (21) можно записать, согласно (5), в виде дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \partial_k a - g a \frac{\partial_k e}{e} = 0, \\ \partial_k b - g b \frac{\partial_k e}{e} = 0, \\ \partial_k c - g c \frac{\partial_k e}{e} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

или

$$\begin{cases} \partial_k (\ln |a| - g \ln |e|) = 0, \\ \partial_k (\ln |b| - g \ln |e|) = 0, \\ \partial_k (\ln |c| - g \ln |e|) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Интегрируя полученные уравнения (23), заключаем, что

$$a = e^{g a}, \quad b = e^{g b}, \quad c = e^{g c}, \quad (24)$$

где  $a, b, c$  — абсолютные инварианты, более того, абсолютные постоянные.

Подставляя (24) в представление (19) получим

$$H^{ism} = e^{g a} g^{is} g^{lm} + e^{g b} g^{il} g^{sm} + e^{g c} g^{im} g^{sl} = e^{g} H^{ism}. \quad (25)$$

Последнее обстоятельство подтверждает тот факт, что ковариантно постоянные псевдотензорные поля четвертого ранга могут быть получены из ковариантно постоянных абсолютных тензорных полей обычным преобразованием (2) с помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра.

**4. Первая основная естественная форма потенциала силовых и моментных напряжений.** Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т.е. полуизотропны, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства. Введем микрополярный упругий потенциал  $\mathcal{U}$  [20, 21], рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с псевдотензорными аргументами

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \kappa^{[+1](ij)}, \varphi^{[+1]_i}, \kappa_i), \quad (26)$$

где

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \varphi^{[+1]_k}, \quad \varphi^{[+1]_i} = \phi^{[+1]_i} - \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \nabla_k u_l, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijs} \kappa^{[+1]_s}. \quad (27)$$

Обычно, аргументами упругого потенциала выступают абсолютные тензоры. Здесь существенным является использование формализма псевдотензоров, обеспечивающего чувствительность определяющих псевдоскаляров к преобразованиям инверсии пространства и зеркальным отражениям.

Упругий потенциал  $\mathcal{U}$  по физическому смыслу является объективной величиной и не может меняться при повороте осей системы координат. Поэтому он (также как и

его первая вариация  $\delta\mathcal{U}$ ) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется сбалансированной по весам суммой абсолютных скаляров

$$\delta\mathcal{U} = t^{(ij)}\delta\epsilon_{(ij)} + \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)}\delta\overset{[+1]}{\kappa}_{(ij)} + 2\overset{[-1]}{\tau}_i\delta\overset{[+1]}{\varphi}_i + 2\mu^i\delta\kappa_i, \quad (28)$$

где  $\overset{[-1]}{\tau}_j$  — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$2\overset{[-1]}{\tau}_j = -\epsilon_{jik}t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj}\overset{[-1]}{\tau}_j. \quad (29)$$

Ассоциированный (сопутствующий) абсолютный вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (29)

$$2\mu^i = \epsilon^{iks}\overset{[-1]}{\mu}_{[ks]}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = e_{isj}\mu^j. \quad (30)$$

В итоге, определяющие уравнения примут вид:

$$t^{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\epsilon_{(ij)}}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}_{(ij)}}, \quad 2\overset{[-1]}{\tau}_i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\overset{[+1]}{\varphi}_i}, \quad 2\mu^i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\kappa_i}. \quad (31)$$

В качестве потенциала  $\mathcal{U}$ , который как указывалось выше инвариантен относительно поворотов и трансляций пространства, а также — относительно преобразований инверсии пространства и зеркальных отражений. В дальнейшем, первой основной энергетической формой гемитропного тела будем называть форму:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & A_1 g^{is} g^{lm} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + \overset{[-2]}{A} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + A_3 g^{is} g^{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(sm)} + \\ & + \overset{[-2]}{A} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}_{(il)} \overset{[+1]}{\kappa}_{(sm)} + \overset{[-2]}{A} g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}_i \overset{[+1]}{\varphi}_s + A_6 g^{is} \kappa_i \kappa_s + \\ & + \overset{[-1]}{A} g^{is} g_{lm} \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + \overset{[-1]}{A} \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}_{(is)} + \overset{[-1]}{A} \kappa_i \overset{[+1]}{\varphi}_i, \quad (32) \end{aligned}$$

где определяющие псевдоинварианты  $\overset{[g]}{A}$  ( $\alpha = 1, \dots, 9$ ;  $g = 0, \pm 1, \pm 2$ ) с соответствующими весами собственно и задают модель гемитропной упругой среды. Только три из них, а именно  $\overset{[-1]}{A}_7$ ,  $\overset{[-1]}{A}_8$ ,  $\overset{[-1]}{A}_9$ , оказываются чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства.

Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений в терминах псевдотензоров в произвольной криволинейной системе координат получаются в виде

$$\left\{ \begin{aligned} t^{(is)} &= 2A_1 g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + 2A_3 g^{il} g^{sm} \epsilon_{(lm)} + \overset{[-1]}{A}_7 g^{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + \overset{[-1]}{A}_8 \overset{[+1]}{\kappa}_{(is)}, \\ \overset{[-1]}{\mu}_{(is)} &= 2\overset{[-2]}{A} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + 2\overset{[-2]}{A} g_{il} g_{sm} \overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + \overset{[-1]}{A}_7 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \overset{[-1]}{A}_8 \epsilon_{(is)}, \\ 2\overset{[-1]}{\tau}_i &= 2\overset{[-2]}{A} g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}_s + \overset{[-1]}{A}_9 \kappa_i, \\ 2\mu^i &= 2A_6 g^{is} \kappa_s + \overset{[-1]}{A}_9 \overset{[+1]}{\varphi}_i. \end{aligned} \right. \quad (33)$$

Вместо девяти определяющих псевдоскаляров  $\overset{[g]}{A}_a$ , появляющихся в выражении для упругого потенциала (32), удобнее ввести другие определяющие псевдоскаляры:

$$\begin{aligned} \overset{1}{A} &= G\nu(1-2\nu)^{-1}, & \overset{[-2]}{A}_2 &= G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} c_3, & \overset{3}{A} &= G, \\ \overset{[-2]}{A}_4 &= G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L}, & \overset{[-2]}{A}_5 &= 2G \overset{[-2]}{c}_1, & \overset{6}{A} &= G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+2]}{c}_2, \\ \overset{[-1]}{A}_7 &= G \overset{[-1]}{L} c_4, & \overset{[-1]}{A}_8 &= G \overset{[-1]}{L} c_5, & \overset{6}{A}_9 &= G \overset{[-1]}{L} c_6, \end{aligned} \quad (34)$$

с тем чтобы в итоге пришлось бы иметь дело с двумя размерными и семью безразмерными параметрами:

- $G$  — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений);
- $\nu$  — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности);
- $\overset{[-1]}{L}$  — характеристическая микродлина;
- $\overset{[-2]}{c}_1, \overset{[+2]}{c}_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — не имеющие физической размерности скаляры и псевдоскаляры.

В результате вместо (33) приходим к определяющим уравнениям гемитропной микрополярной среды:

$$\left\{ \begin{aligned} t^{(is)} &= 2G \left( \nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm} \right) \epsilon_{(lm)} + G \overset{[-1]}{L} (c_4 g^{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}^{(lm)} + c_5 \overset{[+1]}{\kappa}^{(is)}), \\ \overset{[-1]}{\mu}^{(is)} &= 2G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} (c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \overset{[+1]}{\kappa}^{(lm)} + G \overset{[-1]}{L} (c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}), \\ \overset{[-1]}{\tau}_i &= 2G \overset{[-2]}{c}_1 g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}^s + \frac{1}{2} G \overset{[-1]}{L} c_6 \kappa_i, \\ \mu^i &= G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+2]}{c}_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} G \overset{[-1]}{L} c_6 \overset{[+1]}{\varphi}^i. \end{aligned} \right. \quad (35)$$

**5. Вторая основная естественная форма потенциала силовых и моментных напряжений.** Введем далее в рассмотрение микрополярный упругий потенциал  $\mathcal{U}$ , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема  $d\tau$ <sup>1</sup> с естественными псевдотензорными асимметричными аргументами (пока нет разделения на симметричную и антисимметричную части)

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}_i \cdot s), \quad (36)$$

где  $\epsilon_{ij}$  — асимметричный тензор деформации;  $\overset{[+1]}{\kappa}_i \cdot s$  — псевдотензор деформации изгиба-кручения. Упругий потенциал полагается абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим в том числе от зеркальных отражений и центральной инверсии трехмерного пространства.

<sup>1</sup>По поводу инвариантных и псевдоинвариантных элементов объема см., например, публикации [?, ?].

Определяющие уравнения в этом случае примут вид

$$t^{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \mu_{\cdot k}^{[-1]i} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa_{i \cdot}^{[+1]k}}. \quad (37)$$

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела вторая основная энергетическая форма в произвольной системе координат записывается в виде:

$$2\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{[-2]islm} \kappa_{is}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[+1]} + H_3^{[-1]islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}^{[+1]}. \quad (38)$$

Отметим, что единственным определяющим псевдотензором четвертого ранга чувствительным к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства оказывается определяющий псевдотензор  $H_3^{[-1]islm}$  отрицательного веса  $-1$ .

Воспользовавшись определяющими соотношениями (37), получим

$$\begin{aligned} t^{is} &= H_1^{islm} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]isl \cdot [ + 1 ] \cdot m} \kappa_{l \cdot}^{[ + 1 ]}, \\ \mu_{\cdot s}^{[-1]i} &= H_2^{[-2]i \cdot l \cdot [ + 1 ] \cdot m} \kappa_{l \cdot}^{[ + 1 ]} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]lmi \cdot} \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (39)$$

Для определяющих полуизотропных тензоров и псевдотензоров координатные представления (19) получаются в форме [27]

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a g^{is} g^{lm} + b g^{il} g^{sm} + c g^{im} g^{sl}, \\ H_2^{[-2]islm} &= \frac{[-2]}{a} g^{is} g^{lm} + \frac{[-2]}{b} g^{il} g^{sm} + \frac{[-2]}{c} g^{im} g^{sl}, \\ H_3^{[-1]islm} &= \frac{[-1]}{a} g^{is} g^{lm} + \frac{[-1]}{b} g^{il} g^{sm} + \frac{[-1]}{c} g^{im} g^{sl}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь  $\frac{[g]}{a}$ ,  $\frac{[g]}{b}$ ,  $\frac{[g]}{c}$  ( $a = 1, 2, 3; g = 0, -1, -2$ ) — девять определяющих псевдоскаляров гемитропного микрополярного упругого тела. “Метаиндекс”  $\mathbf{a}$  — нумерует определяющие псевдоскаляры. С точки зрения тензорной алгебры  $\frac{[g]}{a}$ ,  $\frac{[g]}{b}$ ,  $\frac{[g]}{c}$ , как минимум, являются полуизотропными (гемитропными) инвариантами.

Подставив координатные представления (40) в определяющие соотношения (37), получим

$$\left\{ \begin{aligned} t^{is} &= (a g^{is} g^{lm} + b g^{il} g^{sm} + c g^{im} g^{sl}) \epsilon_{lm} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{[-1]}{a} g^{is} g^{lm} + \frac{[-1]}{b} g^{il} g^{sm} + \frac{[-1]}{c} g^{im} g^{sl} \right) \kappa_{lm}^{[+1]}, \\ \mu_{\cdot s}^{[-1]i} &= \left( \frac{[-2]}{a} g^{is} g^{lm} + \frac{[-2]}{b} g^{il} g^{sm} + \frac{[-2]}{c} g^{im} g^{sl} \right) \kappa_{lm}^{[+1]} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{[-1]}{a} g^{is} g^{lm} + \frac{[-1]}{b} g^{il} g^{sm} + \frac{[-1]}{c} g^{im} g^{sl} \right) \epsilon_{lm}. \end{aligned} \right. \quad (41)$$

Представим далее псевдотензоры напряжений и деформаций в виде суммы симметричной и антисимметричной частей

$$\begin{aligned} t^{is} &= t^{(is)} + t^{[is]}, & \mu^{[is]} &= \mu^{[is]} + \mu^{[is]}, \\ \epsilon_{is} &= \epsilon_{(is)} + \epsilon_{[is]}, & \kappa_{[is]} &= \kappa_{[is]} + \kappa_{[is]}. \end{aligned} \quad (42)$$

Выделяя симметричные и антисимметричные части в (41), получим

$$\begin{aligned} t^{is} &= \left( a g^{is} g^{lm} + \frac{1}{2} b (g^{il} g^{sm} + g^{sl} g^{im}) + \frac{1}{2} c (g^{im} g^{sl} + g^{sm} g^{il}) \right) \epsilon_{lm} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{[-1]}{a} g^{is} g^{lm} + \frac{1}{2} \frac{[-1]}{b} (g^{il} g^{sm} + g^{sl} g^{im}) + \frac{1}{2} \frac{[-1]}{c} (g^{im} g^{sl} + g^{sm} g^{il}) \right) \kappa_{lm} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( b (g^{il} g^{sm} - g^{sl} g^{im}) + c (g^{im} g^{sl} - g^{sm} g^{il}) \right) \epsilon_{lm} + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{[-1]}{b} (g^{il} g^{sm} - g^{sl} g^{im}) + \frac{[-1]}{c} (g^{im} g^{sl} - g^{sm} g^{il}) \right) \kappa_{lm}, \\ \mu^{[is]} &= \left( \frac{[-2]}{a} g^{is} g^{lm} + \frac{1}{2} \frac{[-2]}{b} (g^{il} g^{sm} + g^{sl} g^{im}) + \frac{1}{2} \frac{[-2]}{c} (g^{im} g^{sl} + g^{sm} g^{il}) \right) \kappa_{lm} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{[-1]}{a} g^{is} g^{lm} + \frac{1}{2} \frac{[-1]}{b} (g^{il} g^{sm} + g^{sl} g^{im}) + \frac{1}{2} \frac{[-1]}{c} (g^{im} g^{sl} + g^{sm} g^{il}) \right) \epsilon_{lm} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{[-2]}{b} (g^{il} g^{sm} - g^{sl} g^{im}) + \frac{[-2]}{c} (g^{im} g^{sl} - g^{sm} g^{il}) \right) \kappa_{lm} + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{[-1]}{b} (g^{il} g^{sm} - g^{sl} g^{im}) + \frac{[-1]}{c} (g^{im} g^{sl} - g^{sm} g^{il}) \right) \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (43)$$

Учитывая соотношения (42), можно также получить

$$\left\{ \begin{aligned} t^{(is)} &= a g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + (b + c) \epsilon^{(is)} + \frac{1}{2} \frac{[-1]}{a} g^{is} g^{lm} \kappa^{[+1]}_{(lm)} + \frac{1}{2} \left( \frac{[-1]}{b} + \frac{[-1]}{c} \right) \kappa^{[+1]}_{(is)}, \\ \mu^{[is]} &= \frac{[-2]}{a} g^{is} g^{lm} \kappa^{[+1]}_{(lm)} + \left( \frac{[-2]}{b} + \frac{[-2]}{c} \right) \kappa^{[+1]}_{(is)} + \frac{1}{2} \frac{[-1]}{a} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \frac{1}{2} \left( \frac{[-1]}{b} + \frac{[-1]}{c} \right) \epsilon_{(is)}, \\ t^{[is]} &= (b - c) \epsilon^{[is]} + \frac{1}{2} \left( \frac{[-1]}{b} - \frac{[-1]}{c} \right) \kappa^{[+1]}_{[is]}, \\ \mu^{[is]} &= \left( \frac{[-2]}{b} - \frac{[-2]}{c} \right) \kappa^{[+1]}_{[is]} + \frac{1}{2} \left( \frac{[-1]}{b} - \frac{[-1]}{c} \right) \epsilon_{[is]}. \end{aligned} \right. \quad (44)$$

Воспользовавшись соотношениями (27), (29) и (30) приходим к

$$\begin{aligned} 2 \tau^s &= 2e^{-2} (b - c) \varphi^s - \left( \frac{[-1]}{b} - \frac{[-1]}{c} \right) \kappa_s, \\ 2\mu^s &= 2e^2 \left( \frac{[-2]}{b} - \frac{[-2]}{c} \right) \kappa^s - \left( \frac{[-1]}{b} - \frac{[-1]}{c} \right) \varphi^s. \end{aligned} \quad (45)$$

Вместо определяющих псевдоскаляров  $\frac{[g]}{a}$ ,  $\frac{[g]}{b}$ ,  $\frac{[g]}{c}$  можно перейти к конвенциональным определяющим псевдоскалярам, таким как:  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент

Пуассона;  $L$  — характерная микродлина;  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — не имеющие физической размерности скаляры (см. [20, 21]). В этом случае характерная микродлина  $L$  будет псевдоскаляром отрицательного веса  $-1$ .

Сравнивая (44) и (45) с аналогичными формулами (33) и (34), получим

$$\begin{aligned} a_1 &= 2A_1, & b_1 + c_1 &= 2A_3, & b_1 - c_1 &= A_5, \\ \frac{[-2]}{2} a_2 &= 2 \frac{[-2]}{2} A_2, & \frac{[-2]}{2} b_2 + \frac{[-2]}{2} c_2 &= 2 \frac{[-2]}{4} A_4, & \frac{[-2]}{2} b_2 - \frac{[-2]}{2} c_2 &= \frac{[-2]}{6} A_6, \\ \frac{[-1]}{3} a_3 &= 2 \frac{[-1]}{7} A_7, & \frac{[-1]}{3} b_3 + \frac{[-1]}{3} c_3 &= 2 \frac{[-1]}{8} A_8, & \frac{[-1]}{3} b_3 - \frac{[-1]}{3} c_3 &= -\frac{[-1]}{9} A_9. \end{aligned} \quad (46)$$

Принимая обозначения для определяющих постоянных

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6. \quad (47)$$

динамические уравнения можно представить в форме

$$\begin{aligned} G[(1 + c_1)\nabla^s \nabla_s u^i + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i \nabla_k u^k + 2 \frac{[-2]}{c_1} \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l^{[+1]} + \\ + L \frac{[-1]}{c'_4} \nabla^i \nabla_k \phi^k + L \frac{[-1]}{c'_5} \nabla^k \nabla_k \phi^i] = -\rho(f^i - \partial..u^i), \\ G L \frac{[-1][-1]}{L} [(1 + c_2)\nabla^s \nabla_s \phi_i + (1 - c_2 + 2c_3)\nabla_i \nabla_k \phi^k + \\ + L \frac{[-1]}{c'_4} \nabla_i \nabla^k u_k + L \frac{[-1]}{c'_5} \nabla^k \nabla_k u_i + L \frac{[-1]}{c'_6} \epsilon_{isl} \nabla^s \phi^l] - \\ - 2G \frac{[-2]}{c_1} (2 \phi_i - e^2 \epsilon_{pqn} g^{ks} \nabla_s u^l) = -\rho( l_i - \mathfrak{I} \partial.. \phi_i), \end{aligned}$$

где  $f_i$  — вектор массовых сил,  $l_i$  — вектор массовых моментов.

**6. Заключение.** В работе рассматривается проблема представления и связь между двумя основными естественными формами упругих потенциалов гемитропных сред.

- (1) Обоснован выбор базисных параметров состояния и квадратичных термодинамических потенциалов.
- (2) В качестве термодинамического потенциала, выбрана внутренняя энергия. Предполагается абсолютная инвариантность, рассматриваемых потенциалов, по отношению к любым преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях).
- (3) Приведены две различные формы определяющих уравнений для гемитропного упругого тела.
- (4) В результате применения специальных координатных представлений полуизотропных (гемитропных) псевдотензоров четвертого ранга определены 9 ковариантно постоянных определяющих псевдоскаляров, характеризующих гемитропную упругую среду.

Таблица 1. Веса микрополярных гемитропных определяющих скаляров

Псевдоскаляры первой основной энергетической формы	Псевдоскаляры второй основной энергетической формы	Материальные псевдоскаляры
$A_1$	$\frac{1}{2}a_1$	$G\nu(1 - 2\nu)^{-1}$
$A_2^{[-2]}$	$\frac{1}{2}a_2^{[-2]}$	$G L L c_3^{[-1][-1]}$
$A_3$	$\frac{1}{2}(b_1 + c_1)$	$G$
$A_4^{[-2]}$	$\frac{1}{2}(b_2^{[-2]} + c_2^{[-2]})$	$G L L^{[-1][-1]}$
$A_5$	$b_1 - c_1$	$2Gc_1$
$A_6^{[-2]}$	$b_2^{[-2]} - c_2^{[-2]}$	$G L L c_2^{[-1][-1]}$
$A_7^{[-1]}$	$\frac{1}{2}a_3^{[-1]}$	$G L c_4^{[-1]}$
$A_8^{[-1]}$	$\frac{1}{2}(b_3^{[-1]} + c_3^{[-1]})$	$G L c_5^{[-1]}$
$A_9^{[-1]}$	$c_3^{[-1]} - b_3^{[-1]}$	$G L c_6^{[-1]}$

- (5) Выполнено сравнение первой и второй естественных энергетических форм потенциалов силовых и моментных напряжений. Получены соотношения, связывающие определяющие скаляры и псевдоскаляры, в том числе, с конвенционально используемыми гемитропными псевдоскалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной (являющейся псевдоскаляром отрицательного веса, чувствительным к отражениям трехмерного пространства), и шестью псевдоскалярами, не имеющие физической размерности.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.
- [2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5).
- [4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [5] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [6] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [7] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [8] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.

- [9] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.].
- [10] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [12] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [13] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [14] Korff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
- [15] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.
- [16] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 1(51). с. 17–26.
- [17] McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
- [18] Radaev Y. N., Murashkin E. GENERALIZED PSEUDOTENSOR FORMULATIONS OF THE STOKES' INTEGRAL THEOREM // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
- [19] Radaev Y. N., Murashkin E., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [20] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
- [21] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474.
- [22] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [23] Jeffreys H., Swirles B. Methods of mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. 712 p.
- [24] Spencer A. J. M. Continuum mechanics and theory of materials. New York: Courier Corporation, 2004. 192 p.
- [25] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [26] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–115.
- [27] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.



*E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev*

## ON TWO BASE NATURAL FORMS OF ASYMMETRIC FORCE AND COUPLE STRESS TENSORS OF POTENTIAL IN MECHANICS OF HEMITROPIC SOLIDS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper is devoted to some problems concerning modeling hemitropic elastic media. Two main quadratic energy forms of a stress potential are introduced in terms of pseudotensors. These energy forms are assumed to be absolute invariants with respect to arbitrary transformations of the three-dimensional Euclidean space (including mirror reflections). As a result of applying special coordinate representations of semi-isotropic (hemitropic) pseudotensors of the fourth rank, it is possible to determine 9 covariantly constant constitutive pseudoscalars characterizing a hemitropic elastic medium. Symmetric and antisymmetric parts of asymmetric tensors and pseudotensors of strains and stresses are discriminated. The first and second base natural energy forms are compared and equations are derived for constitutive scalars and pseudoscalars, including the conventional hemitropic pseudoscalars: shear modulus, Poisson's ratio, characteristic microlength (a pseudoscalar of negative weight, sensitive to reflections of three-dimensional space), and six dimensionless pseudoscalars.

**Keywords:** pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, quadratic energy form, potential detection, detecting pseudotensor, characteristic microlength, chiral medium, micropolar hemitropic continuum

### REFERENCES

- [1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.
- [2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5).
- [4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [5] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [7] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [8] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
- [9] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.

---

*Murashkin Evgenii Valeryevich*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

*Radayev Yuri Nikolaevich*, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

- [10] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [11] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [12] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [13] Kopff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
- [14] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.
- [15] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.].
- [16] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [17] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 1(51). с. 17–26.
- [18] McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
- [19] Radaev Y. N., Murashkin E. GENERALIZED PSEUDOTENSOR FORMULATIONS OF THE STOKES' INTEGRAL THEOREM // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
- [20] Radaev Y. N., Murashkin E., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [21] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474.
- [22] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [23] Jeffreys H., Swirles B. Methods of mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. 712 p.
- [24] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–115.
- [25] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.
- [26] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [27] Spencer A. J. M. Continuum mechanics and theory of materials. New York: Courier Corporation, 2004. 192 p.

---

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 20-01-00666.

Е. В. Мурашкин<sup>1</sup>, А. М. Буруруев<sup>1</sup>, В. А. Ковалев<sup>2</sup>

## ОБ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЯХ АРУТЮНЯНА В МЕХАНИКЕ РАСТУЩИХ ТЕЛ

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия

**Аннотация.** В статье рассматриваются вопросы моделирования процессов поверхностного наращивания тканых материалов. Выполнено обобщение модели, предложенной Н.Х. Арутюняном, на случай материалов чувствительных к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Показано, что последовательные положения поверхности наращивания можно интерпретировать как поверхность уровня псевдоскалярного поля. Вводится понятия фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и псевдоскалярного времени веса заданного целого веса. Обсуждаются вопросы вычисления единичного псевдовектора нормали к поверхности наращивания задающейся псевдоскалярным полем. Граничные условия для напряжений на поверхности роста, предложенные Г.И. Быковцевым, обобщены на случай псевдоскалярной геометрии. Приведены постановки простейших краевых задач, развиваемой теории и предложены методы их решения.

**Ключевые слова:** определяющая тензорная функция, псевдотензор, поверхность наращивания, тканый 3D-материал, микрополярная среда, псевдоскалярное время

DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.009

УДК: 539.374

---

© Мурашкин Е. В., Буруруев А. М., Ковалев В. А., 2022

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Буруруев Алексей Михайлович*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, ведущий инженер, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Ковалев Владимир Александрович*

e-mail: vlad\_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.09.2022

**1. Введение.** Традиционные способы изготовления изделий сложной формы подразумевают различные технологические процессы обработки, как связанные со съемом материала, так и основанные на синтезе изделий путем последовательного нанесения материала на граничную поверхность [1–3]. Все это стимулирует развитие механики выращивания твердых тел. Технологии аддитивного производства широко используются в современном промышленном производстве деталей сложной формы и конструкции. К таким методам относятся: лазерная стереолитография, селективное лазерное спекание, электронно-лучевое плавление, напыление, многоструйное моделирование, ламинирование, 3D-печать, компьютерная аксиальная литография, послойное бетонирование, производство тканых композитов.

Упомянутые выше методы основаны на известных естественных процессах роста поверхности: аккреции космических объектов, образовании лавин и ледников, процессах роста кристаллов. В то же время процессы роста биологических тканей и организмов связаны с процессами объемного роста; тем не менее среди них можно выделить и процессы поверхностного роста. Например, рост атеросклеротических бляшек [4–6], рост корневой системы, рост костей человека. Рост атеросклеротической бляшки можно описать как процесс первичной инфильтрации компонентов плазмы крови в тонкий подповерхностный слой внутренней стенки артерии. Рост зародыша кристалла происходит путем осаждения на его поверхность отдельных атомов или их групп.

Главной особенностью растущих твердых тел является образование твердых тел одновременно с процессом деформации. Это обстоятельство, безусловно, существенно усложняет математическое моделирование таких деформационных процессов по сравнению с твердыми телами постоянного состава. Достаточно упомянуть ситуацию, имеющую место в динамике абсолютно твердого тела переменной массы. Изменчивость массы, с одной стороны, приводит к усложнению математических задач, а с другой стороны, порождает качественно новые эффекты в поведении тел. Естественно ожидать, что обобщенная модель твердого тела и начально-краевые задачи усложнятся, а влияние параметров роста на отклик твердого тела станет более разнообразным.

Решение краевой задачи о растущих телах — очень трудоемкая задача. Важной особенностью краевых задач механики растущего тела является вывод граничных условий на движущейся растущей поверхности между основным телом и напыляемой частью. Дискуссии по проблемам граничных условий можно найти в работах [7,8]. Настоящая работа посвящена рассмотрению модели Арутюняна поверхностно-растущих тел [7] и нескольких вариантов определяющих соотношений на растущей поверхности, близких к простейшим соотношениям (см. известную книгу Г. И. Быковцев: [8, С. 288–292]). На протяжении всей статьи будут использоваться терминология и обозначения, принятые в публикациях [8–13].

**2. Основные уравнения модели Арутюняна поверхностно-растущих твердых тел.** Подробное исследование моделирования поверхностных растущих тел, предложенное Н. Х. Арутюняном, можно найти в книге [7]. Вернемся к основному уравнению этой модели. Уравнения равновесия для тензора напряжений Коши  $\sigma^{rs}$  могут быть представлены в терминах скоростей следующим образом:

$$\nabla_s(\partial_t \sigma^{sr}) = 0, \quad (1)$$

где  $\nabla_s$  — оператор Гамильтона (набла),  $\partial_t$  — производная по времени.

Граничные условия на нерастущей части поверхности (поверхность основных тел) читаются

$$n_s \partial \cdot \sigma^{sr} = \partial \cdot p_0^r \quad (2)$$

и (или)

$$v^s = \partial \cdot u_0^s. \quad (3)$$

где  $p_0^r$  — заданный вектор тяги,  $v^s$  — вектор скорости,  $u_0^s$  — заданные векторы перемещений,  $n_s$  — ковариантный вектор единичной нормали.

Условие на растущей поверхности  $\Sigma$  можно получить из решения контактной задачи между трехмерным телом и двумерной поверхностью в виде [14]

$$n_s \partial \cdot \sigma^{sr} = -c \sigma_{2d}^{kh} L_{hk} n_k, \quad (4)$$

где  $c$  — линейная скорость распространения растущей поверхности в нормальном направлении  $n_s$ ,  $\sigma_{2d}^{kh}$  — двумерный тензор заданного упругого поверхностного натяжения,  $L_{hk}$  — двумерный тензор кривизны поверхности.

Определяющие уравнения для скоростей деформации  $\varepsilon_{sr}$  и скоростей представлены

$$\varepsilon_{sr} = \frac{1}{2} (\nabla_s v_r + \nabla_r v_s), \quad (5)$$

а общий вид определяющих уравнений для тензора скоростей напряжений Коши можно принять в виде

$$\partial \cdot \sigma^{sr} = 2\mathcal{F}^{sr}(\varepsilon_{sr}, v_s). \quad (6)$$

где  $\mathcal{F}^{sr}$  — тензорная функция, определяемая экспериментально.

Уравнение движущейся растущей поверхности  $\Sigma(t)$  в неявном виде имеет вид

$$t = \tau_*(x^k), \quad (7)$$

Основные уравнения (1)–(7) должны быть дополнены правилами восстановления тензора напряжений и перемещений в соответствии с

$$\begin{aligned} \sigma^{sr}(x^k, t) &= \sigma_*^{sr}(x^k) + \int_{\tau_*(x^k)}^t \partial \cdot \sigma^{sr}(x^k, t') dt', \\ u^s(x^k, t) &= u_*^s(x^k) + \int_{\tau_*(x^k)}^t v^s(x^k, t') dt'. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\sigma_*^{sr} = \sigma^{sr}|_{t=\tau_*(x^k)}$ ;  $u_*^s(x^k) = u^s|_{t=\tau_*(x^k)}$ . Уравнения (8) представляют собой простое правило интегрирования примитивов.

Следует отметить, что краевая задача для растущего твердого тела может управляться нагрузками, напряжениями на распространяющейся растущей поверхности и скоростью выкладки материала.

**3. Дифференциальные ограничения на распространение растущей поверхности.** Граничные условия на распространяющейся поверхности роста требуют дополнительного внимания и обсуждения. Попытка получить граничные условия из уравнений равновесия была предпринята Г. И. Быковцевым (см. книгу [8, Рр. 288–292]) и позже обобщенные в работах [9–13] для случая микрополярных сред и предварительно деформированных сред.

Как показано ранее (см., например, [9–13]), преобразование уравнений равновесия (1) с использованием формулы для действительных компонент силового тензора напряжений  $\sigma^{ij}$

$$\sigma^{ij} = \int_{\tau+0}^t [\partial. \sigma^{ij}(x^s, t')] dt' + \mathcal{S}^{ji} + \sigma_*^{ij}(x^s), \quad (9)$$

$$\mathcal{S}^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial. \sigma^{ij}(x^s, t')] dt', \quad (10)$$

позволяет вывести уравнение на распространяющейся растущей поверхности в виде следующих дифференциальных ограничений

$$c[\nabla_j \sigma_*^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + X_*^i(x^s)] - n_j \partial. \sigma_*^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0), \quad (11)$$

где единичный вектор нормали  $n_i$  на распространяющейся растущей поверхности  $\Sigma$ , направленный в сторону ее распространения, связан с пространственным градиентом (7) уравнением

$$n_i = c \partial_i \tau, \quad c = |\nabla_* \tau|^{-1} \quad (t = \tau). \quad (12)$$

В уравнениях (9)–(11) используются обозначения, принятые в [9–11]:  $\mathcal{S}^{ji}$  - интеграл, связанный со скачком напряжения,  $\sigma_*^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$  - компоненты тензора напряжений соответственно в момент  $t = \tau(x^s) - 0$  непосредственно перед включением элемента в основное твердое тело  $X_*^i(x^s) = X^i(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$ . Момент  $t = \tau(x^s) + 0$  соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к растущей поверхности.

В общем случае напряжения сил  $\sigma_*^{ij}$  должны быть выражены через фактические напряжения и пары на распространяющейся растущей поверхности тензорными определяющими уравнениями следующим образом

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma^{ij}, n_i, \dots). \quad (13)$$

Определяющая тензорная функция  $\mathfrak{F}_{ij}$  может быть определена экспериментально. Функция  $\mathfrak{F}_{ij}$  означает возможные изменения параметров напряженно-деформированного состояния растущего материала на интервале времени от момента создания растущего элемента до момента его осаждения на основное твердое тело, то есть в интервале времени  $\tau - 0 \leq t \leq \tau + 0$ . В частности, определяющие тензорные функции  $\mathfrak{F}_{ij}$  при производстве тканых материалов будут зависеть от выбранных направлений, связанных с распространяющейся поверхностью роста и локализацией композиционных волокон. Важным ограничением на определяющие тензорные функции  $\mathfrak{F}_{ij}$  является нечувствительность их аргументов при поворотах подвижной системы координат вокруг единичного вектора нормали  $n_j$  к растущей поверхности. В этом случае необходимо выбрать систему совместных инвариантов тензоров  $\sigma^{ij}$ ,  $\mu_{.j}^{[-1]i}$  и векторов  $n_j, v_j$ , удовлетворяющих условию вращательной инвариантности относительно вектора  $n_j$ .

**4. Псевдоскалярная геометрия распространяющейся поверхности нарацивания.** В некоторых случаях может оказаться, что распространяющаяся растущая поверхность является поверхностью уровня псевдоскалярного поля. Например, в случае материалов (тканых композитов, хиральных материалов, метаматериалов, биологических тканей), проявляющих свойства чувствительности к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Базовый объект, чувствительный к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, представляет собой фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр веса  $+1$ , который может быть определен как тройное произведение ковариантных базовых векторов  $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3)$

$$e = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] = (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{z}_3. \quad (14)$$

Ряд подходов к развитию псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [16–21].

Пусть распространяющаяся поверхность  $\Sigma$  в трехмерном пространстве определяется как поверхность уровня псевдоскалярного поля  $f(x^i)$  веса  $W$ :

$$t = f(x^i), \quad (15)$$

где  $t$  псевдоскалярное время, и

$$t = e^W t. \quad (16)$$

Учитывая псевдоскалярный дифференциал времени  $t$  в силу (16) можно получить

$$d t = d(e^W t) = e^W dt + t W e^{W-1} de, \quad (17)$$

или

$$d t = e^W (dt + t e^{-1} \partial_s e dx^s). \quad (18)$$

Отметим важный в прикладных задачах случай [15]. Выберем систему координат с учетом условия:

$$\sqrt{g} = 1, \quad (19)$$

и используя следующее уравнение

$$e^2 = g \quad (20)$$

прийти к ограничению

$$e = \text{sgn } e. \quad (21)$$

Таких систем в трехмерном пространстве бесконечно много, например декартовы левая и правая системы координат.

Ограничение  $\sqrt{g} = 1$  часто используется не только в теории относительности [15], но и в механике твердого тела [22]. На страницах 135-142 монографии [15] условие  $\sqrt{g} = 1$  используется для вывода уравнения гравитации в 4-пространстве-времени, что значительно упрощает уравнения теории относительности.

Если в дополнение к уравнению (21) предположить, что система координат левая (т. е.  $e < 0$ ), то псевдоскалярный дифференциал времени принимает вид

$$d t = \begin{cases} dt, & \text{if } W \text{ is even weight;} \\ -dt, & \text{if } W \text{ is odd weight.} \end{cases} \quad (22)$$

Ковариантный вектор единичной нормали  $n_s$  к поверхности  $\Sigma$  можно определить с точностью до множителя по формуле

$$Nn_i = \partial_i(e^{-W} f^{[W]}). \quad (23)$$

Обратите внимание, что абсолютный скаляр  $a$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla_i a = \partial_i a. \quad (24)$$

Тогда уравнение (23), (24), преобразуется к виду

$$Nn_i = \partial_i(e^{-W} f^{[W]}) = \nabla_i(e^{-W} f^{[W]}) = e^{-W} \nabla_i f^{[W]}. \quad (25)$$

Вводя в рассмотрение нормальный псевдовектор по формуле

$$n_i^{[W]} = e^W n_i, \quad (26)$$

мы можем получить

$$N n_i^{[W]} = \nabla_i f^{[W]}. \quad (27)$$

Согласно уравнению

$$g^{ij} n_i^{[W]} n_j^{[W]} = e^{2W} \quad (28)$$

легко сделать вывод, что

$$N^2 e^{2W} = g^{ik} \nabla_i f^{[W]} \nabla_k f^{[W]}, \quad (29)$$

откуда для неизвестного множителя  $N$  можно вычислить по уравнению

$$\pm N = e^{-W} \sqrt{g^{ik} \nabla_i f^{[W]} \nabla_k f^{[W]}}, \quad (30)$$

Наконец, нормальный псевдовектор к поверхности уровня  $\Sigma$  псевдоскалярного поля  $f^{[W]}$  вычисляется по формуле

$$n_i^{[W]} = e^W \frac{\nabla_i f^{[W]}}{\sqrt{g^{ik} \nabla_i f^{[W]} \nabla_k f^{[W]}}} \quad (31)$$

Линейная скорость распространяющейся растущей поверхности в направлении нормального псевдовектора  $\mathbf{n}^{[W]}$  рассчитывается по формуле

$$c^{[-W]} = \left( \sqrt{g^{ik} \nabla_i f^{[W]} \nabla_k f^{[W]}} \right)^{-1}. \quad (32)$$

Абсолютный вектор нормали к поверхности уровня  $\Sigma$  псевдоскалярного поля  $f^{[W]}$  можно вычислить по формуле

$$n_i = c^{[-W]} \nabla_i f^{[W]}. \quad (33)$$



**5. Дифференциальные ограничения на распространение растущей псевдоскалярной поверхности.** Следуя обсуждениям в предыдущих разделах, мы можем получить дифференциальные ограничения на распространение растущей псевдоскалярной поверхности. В процессе роста максимальная интенсивность касательных напряжений может быть достигнута на контактной (растущей) поверхности между основным твердым телом и растущей частью. Определим растущую поверхность как поверхность уровня псевдоскалярной функции, как это было указано в § 3.

$$t = \underset{*}{\mathcal{T}}^{[W]}(x^i). \quad (34)$$

Соотношения (11) в случае распространяющейся растущей псевдоскалярной поверхности преобразуются следующим образом

$$\underset{c}{[-W]} [\nabla_j t^{ji}(x^k) + X^i(x^k)] - n_j \partial_t t^{ji}(x^k) \Big|_{t = \underset{*}{\mathcal{T}}^{[W]}(x^k)} = \underset{[-W]}{0}. \quad (35)$$

Уравнение восстановления для компонент тензора напряжений принимает вид

$$t^{ij} = \int_{\underset{*}{\mathcal{T}}^{[W]}}^{\underset{t}{[W]}} [\partial_t t^{ij}(x^k, t')] d t' + \underset{*}{t}^{ij}(x^k). \quad (36)$$

Уравнения (35) и (36) представляют собой обобщенные граничные условия на растущих поверхностях, которые можно использовать для широкого класса материалов, включая тканые композиты.

**6. Постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов.** Термин «тонкостенные детали» означает такие твердые тела, которые в процессе роста и деформации подвергаются большим перемещениям и малым деформациям. В этом случае мы можем использовать линейные определяющие уравнения (закон Гука), в то время как граничные условия все еще нелинейны, а поверхность наращивания неизвестна. В этом случае мы получаем краевую задачу в операторной форме

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\partial_t \boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{0}, \quad \partial_t \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} + \lambda \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{def}} + \mathbf{v}_{\text{gr}}, \\ \mathbf{x} \in \Sigma_1: \quad \mathbf{n} \cdot \partial_t \boldsymbol{\sigma} &= \partial_t \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_2: \quad \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x} \in \overset{*}{\Sigma}(t): \quad \mathbf{n} \cdot \partial_t \boldsymbol{\sigma} &= -s_n (\mathcal{T}_s : \mathbf{L}) \mathbf{n}, \quad s_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \quad t = \overset{*}{\mathcal{T}}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе. Отметим, что скорость распространения поверхности наращивания состоит из скорости, возникающей за счет выкладки нового материала, и скорости, возникающей за счет деформации твердых тел.

Рассмотрим теорию механического поведения растущих тел при бесконечно малых деформациях. Совершенно ясно, что речь идет о толстостенных конструкциях, деформация которых для классических конструкционных материалов в процессах выращивания и нагружения бесконечно мала. В этом случае можно исключить скорость роста поверхности, возникающую за счет деформации твердых тел  $\mathbf{v}_{\text{def}}$ , так как этот

член бесконечно мал по сравнению со скоростью распространения растущей поверхности. В этом случае мы можем упростить краевую задачу следующим образом

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\partial_t \boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{0}, \quad \partial_t \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{gr}}, \\ \mathbf{x} \in \Sigma_1: \quad \mathbf{n} \cdot \partial_t \boldsymbol{\sigma} &= \partial_t \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_2: \quad \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x} \in \Sigma^*(t): \quad \mathbf{n} \cdot \partial_t \boldsymbol{\sigma} &= -s_n(\mathcal{T}_s : \mathbf{L}) \mathbf{n}, \quad s_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \quad t = \tau^*(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнения (38) образуют общую краевую задачу для толстостенных тел. Эта краевая задача математически идентична краевой задаче теории упругости при малых деформациях и наиболее адекватные результаты получаются в рамках этого варианта теории.

Обе упрощенные теории для тонких (37) и толстых (38) растущих твердых тел, дают адекватные математические модели процессов роста для различных производственных процессов. Тем не менее, развитие общей нелинейной теории очень важно, особенно с точки зрения нового определяющего уравнения для материального описания сплошной среды с микроструктурой.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gardan, J. Additive manufacturing technologies: state of the art and trends. Additive Manufacturing Handbook, (2017). 149-168. Pub. Location Boca Raton Imprint CRC Press
- [2] Gibson, I., Rosen, D. W., Stucker, B., Khorasani, M., Rosen, D., Stucker, B., Khorasani, M. (2021). Additive manufacturing technologies (Vol. 17). Cham, Switzerland: Springer.
- [3] Alammari, A., Kois, J. C., Revilla-León, M., Att, W. (2022). Additive Manufacturing Technologies: Current Status and Future Perspectives. Journal of Prosthodontics, 31(S1), 4-12.
- [4] Murashkin E., Dats E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growing cylinder // Proceedings of The World Congress on Engineering and Computer Science 2019, 22-24 October, 2019, San Francisco, USA. — Lecture Notes in Engineering and Computer Science. — IAENG London, U.K, 2019. — P. 362–365. ISBN: 978-988-14048-7-9; ISSN: 2078-0958 (Print); ISSN: 2078-0966 (Online).
- [5] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2116. — P. 380013.
- [6] Murashkin, E. V., Dats, E. P., Stadnik, N. E. (2022). Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45(5), 3197-3212.
- [7] Arutyunyan, N. Kh., Drozdov, A. D., and Naumov, V. E., 1987, Mechanics of Growing Viscoelastoplastic Bodies, Nauka, Moscow 472 p (in Russian).
- [8] Bykovtsev G. I. Izbrannye problemnye voprosy mekhaniki deformiruemykh sred [Selected Problems from Solid Mechanics. Collection of papers]. Vladivostok, Dal'nauka, 2002, 566 pp. (In Russian)
- [9] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids, Mechanics of Solids, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1157–1164. doi: 10.3103/S0025654419080053.
- [10] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids, J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2019, vol. 23, no. 4, pp. 646–656. doi: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1696>.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface, Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost., 2019, no. 3(41), pp. 11–29. doi: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012.

- [12] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарско-го государственного технического университета. Серия “Физико-математические науки.” 2020.Т. 24, No 3. С. 424–444.
- [13] Murashkin E. V. On a system of independent arguments for constitutive tensor functions on the growing surface in micropolar continuum // Journal of Physics: Conference Series. — 2022. — Vol. 2231, no. 1. — P. 012019. [ DOI ]
- [14] Manzhairov A. V., Murashkin E. V., Parshin D. A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2116. — P. 380011.
- [15] Копф А. Основы теории относительности Эйнштейна. М.: ГТТИ, 1933. 175 с.
- [16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6\_2.
- [17] Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.
- [18] Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.
- [19] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. Vol. 5. Courier Corporation, 1978. 334 pp.
- [20] G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.
- [21] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp.373-377 <https://www.jstor.org/stable/1989146>
- [22] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

E. V. Murashkin<sup>1</sup>, A. M. Bururuev<sup>1</sup>, V. A. Kovalev<sup>2</sup>

## ON GENERALIZED HARUTYUNYAN'S MODELS IN THE MECHANICS OF GROWING SOLIDS

<sup>1</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Moscow City University of Management, Moscow, Russia*

**Abstract.** The article deals with the issues of modeling the processes of surface growth of woven materials. The generalization of the model proposed by N.Kh. Arutyunyan is carried out for the case of materials sensitive to specular reflections and inversions of three-dimensional space. It is shown that successive positions of the growth surface can be interpreted as a level surface of a pseudoscalar field. The concepts of fundamental orienting pseudoscalar and pseudoscalar time of the weight of a given integer weight are introduced. The issues of calculating the unit pseudovector of the normal to the growth surface given by the pseudoscalar field are discussed. The boundary conditions for stresses on the growth surface proposed by GI Bykovtsev are generalized to the case of pseudoscalar geometry. Statements of the simplest boundary value problems and the developed theory are given, and methods for their solution are proposed.

**Keywords:** pseudotensor, growing surface, 3D woven material, micropolar medium, woven material, pseudoscalar time

### Литература

- [1] Gardan, J. Additive manufacturing technologies: state of the art and trends. Additive Manufacturing Handbook, (2017). 149-168. Pub. Location Boca Raton Imprint CRC Press
- [2] Gibson, I., Rosen, D. W., Stucker, B., Khorasani, M., Rosen, D., Stucker, B., Khorasani, M. (2021). Additive manufacturing technologies (Vol. 17). Cham, Switzerland: Springer.
- [3] Alammari, A., Kois, J. C., Revilla-León, M., Att, W. (2022). Additive Manufacturing Technologies: Current Status and Future Perspectives. Journal of Prosthodontics, 31(S1), 4-12.
- [4] Murashkin E., Dats E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growing cylinder // Proceedings of The World Congress on Engineering and Computer Science 2019, 22-24 October, 2019, San Francisco, USA. — Lecture Notes in Engineering and Computer Science. — IAENG London, U.K, 2019. — P. 362–365. ISBN: 978-988-14048-7-9; ISSN: 2078-0958 (Print); ISSN: 2078-0966 (Online).
- [5] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol. 2116. — P. 380013.
- [6] Murashkin, E. V., Dats, E. P., Stadnik, N. E. (2022). Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45(5), 3197-3212.
- [7] Arutyunyan, N. Kh., Drozdov, A. D., and Naumov, V. E., 1987, Mechanics of Growing Viscoelastoplastic Bodies, Nauka, Moscow 472 p (in Russian).

---

*Murashkin Evgenii Valeryevich*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

*Bururuev Aleksei Mikhailovich* Leading Engineer of the Laboratory for Modeling in Mechanics of Solids IPMech RAS, Moscow, Russia.

*Kovalev Vladimir Alexandrovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia.

- [8] Bykovtsev G. I. *Izbrannye problemnye voprosy mekhaniki deformiruemykh sred* [Selected Problems from Solid Mechanics. Collection of papers]. Vladivostok, Dal'nauka, 2002, 566 pp. (In Russian)
- [9] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids, *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1157–1164. doi: 10.3103/S0025654419080053.
- [10] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids, *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2019, vol. 23, no. 4, pp. 646–656. doi: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1696>.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface, *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost.*, 2019, no. 3(41), pp. 11–29. doi: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012.
- [12] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // *Вестник Самарско-го государственного технического университета. Серия “Физико-математические науки.”* 2020.Т. 24, No 3. С. 424–444.
- [13] Murashkin E. V. On a system of independent arguments for constitutive tensor functions on the growing surface in micropolar continuum // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2022. — Vol. 2231, no. 1. — P. 012019. [ DOI ]
- [14] Manzhairov A. V., Murashkin E. V., Parshin D. A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // *AIP Conference Proceedings.* — 2019. — Vol. 2116. — P. 380011.
- [15] Копф А. Основы теории относительности Эйнштейна. М.: ГТТИ, 1933. 175 с.
- [16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: *Encyclopedia of Physics*. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6\_2.
- [17] Schouten J. A., *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.
- [18] Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.
- [19] Synge J. L. and Schild A. *Tensor calculus*. Vol. 5. Courier Corporation, 1978. 334 pp.
- [20] G. B. Gurevich, *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.
- [21] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp.373-377 <https://www.jstor.org/stable/1989146>

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна** ([maximova\\_ng@mail.ru](mailto:maximova_ng@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович** ([markin@tsu.tula.ru](mailto:markin@tsu.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович** ([sergio2100@mail.ru](mailto:sergio2100@mail.ru)) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович** ([ekc\\_05@mail.ru](mailto:ekc_05@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Минаева Надежда Витальевна** ([nminaeva@yandex.ru](mailto:nminaeva@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич** ([mbg.chspu@yandex.ru](mailto:mbg.chspu@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([mir-vagif@mail.ru](mailto:mir-vagif@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Мурашкин Евгений Валерьевич** ([evmurashkin@gmail.com](mailto:evmurashkin@gmail.com)) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович** ([nemiryury@mail.ru](mailto:nemiryury@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич** ([orlowvn@rambler.ru](mailto:orlowvn@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович** ([revuzhenko@yandex.ru](mailto:revuzhenko@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru) и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

**на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Володин Г. Т., Кочергин Д. С.</i> Разрушение упруго-вязких балок взрывом в воде.....	5
<i>Вислогузова М. М., Ковалев А. В.</i> К определению напряженного состояния диска с учетом температурных эффектов.....	14
<i>Субботин С. Л., Алексеев А. А.</i> Реализация метода СН-ЭВМ в расчетах упругопластических процессов на винтовых траекториях деформирования постоянной кривизны и кручения.....	20
<i>Жилин С. Г., Богданова Н. А., Комаров О. Н.</i> Расчетное и экспериментальное определение параметров процесса формирования пористой прессовки из порошкового воскообразного материала.....	27
<i>Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В.</i> Об устойчивости сферического гидродинамического подвеса .....	39
<i>Соколова М. Ю., Христич Д. В., Артюх Е. В.</i> Обращение связи между напряжениями и деформациями в модели Мурнагана .....	52
<i>Кривенок А. А., Бормотин К. С., Буренин А. А.</i> Формулировка и решение задачи оптимизации формообразования крупногабаритных обшивок двойной кривизны в условиях кинематических ограничений прессового оборудования.....	63
<i>Гасанов М. В.</i> Исследование в окрестности подвижной особой точки некоторого класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка для комплексной области .....	75
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел .....	86
<i>Мурашкин Е. В., Буруруев А. М., Ковалев В. А.</i> Об обобщенных моделях Арутюняна в механике растущих тел .....	101
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	112
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	115
СОДЕРЖАНИЕ .....	117

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2022. № 3 (53)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 30.12.2022. Выход в свет 31.12.2022.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>. Усл. печ. л. 14,5.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 2259

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного  
педагогического университета им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38