

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 4(54)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2022

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 4(54)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

Н. Ю. Зайко, О. Н. Любимова

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СООСНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ С РАЗНОЙ СТЕПЕНЬЮ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПО ГРАНИЦЕ КОНТАКТА

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Температурные напряжения в сопряженных системах, выполненных из разных материалов и в слоистых конструкционных материалах, даже при условии равномерного распределения температуры являются в первую очередь следствием разных механических свойств материалов, из которых выполнены сопряженные элементы или слои. В тоже время существенное влияние на общую картину температурных напряжений оказывают свойства сопряжения разнородных материалов и тип полученного соединения: склейка, сварка, или горячая посадка; идеальный контакт, свободное или частичное проскальзывание в разных направлениях. Предложено условие и метод совместного деформирования соосных цилиндров при разных условиях сопряжения по боковым поверхностям при неоднородных термомеханических характеристиках с учетом стесненного перемещения вдоль образующей для разных качественных условий взаимодействия на границе сопряжения. Метод позволяет существенно упростить задачу при условии термоупругого деформирования слое, а в случае вязкоупругого поведения с простыми ядрами релаксации позволяет получить аналитическое решение. Практическая значимость метода заключается в возможности моделирования технологических и остаточных напряжений в слоистых конструкционных цилиндрических системах, работающих в условиях циклического нагрева - охлаждения до высоких температур.

Ключевые слова: термонапряженное состояние, контактная задача, соосные цилиндрические системы, слоистые композиционные материалы.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.001

УДК: 531.534

Введение Производственные и исследовательские системы в отраслях промышленности связанных с синтезом композиционных материалов являются особенно

© Зайко Н. Ю., Любимова О. Н., 2022

Зайко Надежда Юрьевна

e-mail: golobokovanyu@dvfu.ru, старший преподаватель, Политехнический институт Дальневосточного федерального университета, г. Владивосток, Россия..

Любимова Ольга Николаевна

e-mail: berms@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Политехнический институт Дальневосточного федерального университета, г. Владивосток, Россия.

Поступила 01.12.2022

сложными. Математическое моделирование множества технологий получения композитов, среди которых, осаждение матрицы плазменным напылением на упрочнитель и сдавливанием их в последствии; холодное ужатие составляющих частиц с дальнейшим спеканием; диффузионная сварка пакетной технологией монослойных лент компонентов; объединенная прокатка укрепляющих элементов с матрицей, направлено на поиск и оптимизацию технологических параметров процесса. Многопараметричность, и актуальность теоретических и экспериментальных исследований многих не до конца изученных физико-химических и механических процессов в технологии получения композиционных материалов оставляет актуальным поиск моделей позволяющих адекватно оценивать основные технологические параметры, которые оказывают доминирующее влияние на конечные эксплуатационные и физико-механические свойства материала. В слоистых композитах, полученных методами температурной обработки, соседние слои выполняются из разных материалов, или же из одного. Прочность связи по границе стыковки слоев устанавливается за счет диффузии через границу раздела в процессе термической обработки либо за счет механического сцепления при термомодеформировании в зоне пластичности [1, 2]. Если технологические параметры подобраны не точно, то зона контакта может содержать промежуточные хрупкие слои по границе их раздела или дефекты в виде неплотного прилегания материалов, что влияет на напряженно-деформируемое состояние при следующих циклах охлаждения. Дискретность контакта вызывает значительные изменения величин контактных напряжений как в крайних поверхностных слоях сопрягаемых слоев так и в объеме композиционных материалов и деталей. Контактное взаимодействие двух поверхностей с дискретным типом контакта рассмотрено, например, в работах [3–5]. Одним из современных направлений развития механики дискретного контакта является использование методов теории вероятностей [6], при котором неизвестные характеристики: фактическая площадь касания, нагрузка в зависимости от сближения, наибольшее контактное давление на единичной неровности рассматриваются как реализация случайного поля. Рассмотрение задач о внутреннем сжатии круговых цилиндров близких радиусов впервые было начато И.Я. Штаерманом [7], внешняя нагрузка, действующая на внутренний и внешний цилиндры по их поверхностям, осуществляется в виде нормального давления, диаметрально противоположного давлению контакта [7–9]. В работе [8] установлено, что полученная теоретическая оценка имеет существенную разницу с экспериментальными данными, теоретическое перемещение превышает экспериментальное в 3 раза. В какой-то мере эту разницу возможно с помощью ввода коэффициента перехода от трехмерной задачи к плоской [9]. В механике многослойных систем можно выделить два основных подхода к моделированию контактных задач [10–14]. Первый подход заключается в том, что контактное взаимодействие между слоями рассматривается как взаимодействие слоистых структур при соблюдении условий непрерывности векторов смещений при переходе через межфазную границу (идеальный контакт) [12, 13], однако, это условие не позволяет оценить разные соединения с неоднородной межфазной границей, которая может сама являться причиной снижения адгезионного сцепления между слоями, в следствии неоднородности своей структуры и расслоений внутри себя по границам различных фаз, что хорошо заметно, например, на фотографиях Рисунка 1 при микроскопических исследованиях зоны соединения стекла и стали в исследованиях [15–17]. К этим задачам относятся задачи для упругих покрытий на твердом теле рассмотренные в работах [11, 12], часто покрытия моделируются с использованием гипотез Кирхгофа-Лява теории оболочек,

которые в случае температурного расширения и существенной разницы не только в коэффициентах линейного температурного изменения, но и в модулях упругости между покрытием и подложкой могут приводить к существенным отклонением от экспериментально наблюдаемых явлений, например, покрытие на практике может отслаиваться, в то время как расчеты показывают обратное [12]. Моделирование покрытий с дефектами, неполным контактом или неоднородными свойствами в зоне соединения а также, наличие зон с ослабленным межфазным контактом на поверхностях раздела смежных слоев приводит к значительному повышению уровня сложности задачи [5]. Поэтому актуальным остается поиск методов и моделей для качественного анализа контактной задачи с учетом сред со сложной реологией. Для описания качества распределения случайного поля, также приходится опираться на аналитические решения полученные для тел простой геометрии, качественные приближения и результаты феноменологических линейных теорий. Необходимо уточнить, что, несмотря на наличие определенного экспериментального материала проверка адекватности предлагаемых математических моделей достаточно трудная и как правило используется лишь для качественной оценки. Поэтому развитие линейных моделей, позволяющих решать контактные задачи как следствие поведения под нагрузкой всей совокупности контактов, оправдано и остается актуальной задачей механики контактных взаимодействий.

Целью работы является разработка метода, позволяющего качественно оценить сцепление на границе сопряжения разных слоев в соосных цилиндрических слоистых композитах с разной реологией, деформирующихся в условиях повышенных температур [18]. В работе решена задача термомодеформирования соосного цилиндрического двухслойного композиционного элемента в упругом приближении при условии зависимости механических свойств от температуры. Практическая значимость работы связана с моделированием параметров технологического процесса получения стеклометаллического слоистого композита цилиндрической формы (стеклометаллокомпозита) и конструктивного элемента на его основе -стеклометаллокомпозитного стержня (Рис.1) [19–21].

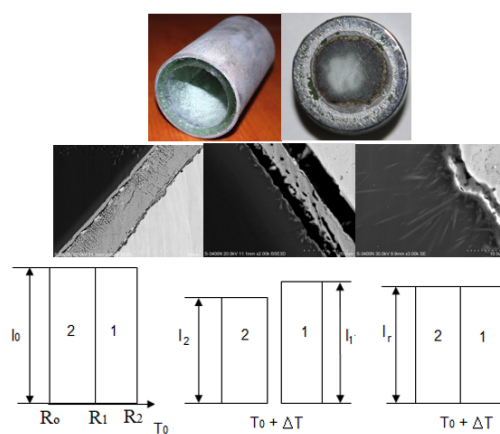


Рис. 1. Фотографии экспериментальных образцов стеклометаллокомпозита и некоторых особенностей в межфазном слое (оксидный слой, отслоение по межфазному слою, кристаллические фазы в межфазном слое).Схема изменения вдоль образующей плоского сая

Модель и метод определения термоупругих напряжений при разных условиях сцепления на границе сопряжения слоев.

В цилиндрической системе координат при условии осесимметричного изменения температуры в сопряжённой цилиндрической системе типа вал-цилиндр (стержень - цилиндрическая оболочка, цилиндр-цилиндр), где торцы цилиндров не закреплены, особенность на границе сопряжения будет заключаться в возможности разной деформации вдоль оси образующей (Рис. 1). Если температурное поле равномерно по всему объёму, напряженно-деформируемое состояние будет следствием разницы механических свойств материалов и их зависимости от температуры.

При условии плоского обобщенного состояния и свободного проскальзывания в направлении образующей предположим, что

$$\Delta\epsilon_z(t) = \epsilon_z^{(1)} - \epsilon_z^{(2)} \neq 0 \quad (1)$$

и достигает своего максимального значения, здесь $\epsilon_z^{(1)}(t)(R_1 \leq r \leq R_2)$ и $\epsilon_z^{(2)}(t)(R_0 \leq r \leq R_1)$, $\Delta T(t) = T(t) - T_0$ - температура, при условии идеального контакта (1) примет вид:

$$\Delta\epsilon_z(t) = 0 \text{ или } \epsilon_z^{(1)} = \epsilon_z^{(2)} \quad (2)$$

Тогда условие дискретного контакта, можно рассматривать, как условие частичного проскальзывания введя в (1) феноменологический коэффициент ξ , так что

$$\epsilon_z^{(1)} - \epsilon_z^{(2)} = \xi \Delta\epsilon_z(t) \text{ при } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3)$$

здесь ξ характеризует часть от $\Delta\epsilon_z(t)$ полученную при свободном проскальзывании ($\xi = 1$). Термоупругая осесимметричная задача для систем сопряженных цилиндров с условием (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} u_r &= u(r, t), u_\phi = 0, u_z = w(z, t), \\ \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \epsilon_{\phi\phi} = \frac{u}{r}, \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z(t), \epsilon_{r\phi} = \epsilon_{rz} = \epsilon_{\phi z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} &= 0, \\ s_r &= 2Ge_r, s_\phi = 2Ge_\phi, s_z = 2Ge_z, \\ \sigma(r, t) &= 3K\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma_{rr} = \sigma_r(r, t)$, $\sigma_{\phi\phi} = \sigma_\phi(r, t)$, $\sigma_{zz} = \sigma_z(r, t)$, $\sigma = (\sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z)/3$, $\epsilon = (\epsilon_r + \epsilon_\phi + \epsilon_z)/3$, $\theta = 3\epsilon - \int_{T_0}^T \alpha(T)dT$, $s_r = \sigma_r - \sigma$, $s_\phi = \sigma_\phi - \sigma$, $s_z = \sigma_z - \sigma$, $e_r = \epsilon_r - \epsilon$, $e_\phi = \epsilon_\phi - \epsilon$, $e_z = \epsilon_z - \epsilon$, G - модуль сдвига, K - модуль объемной деформации. Краевые условия определяют из условий отсутствия нагрузки на внешних поверхностях и свободных от нагрузки торцов:

$$\begin{aligned} \sigma_r(R_0, t) &= 0, \sigma_r(R_2, t) = 0, \\ \int_{R_0}^{R_1} \sigma_z(r, t)rdr + \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z(r, t)rdr &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

а условия на границах контакта (3) дополняются условиями

$$u(R_1-, t) = u(R_1+, t), \sigma_r(R_1-, t) = \sigma_r(R_1+, t). \quad (6)$$

Задача (3)-(6) имеет на каждом временном слое аналитическое решение, определяемое двумя аналитическими итерациями:

1. Определяется $\Delta\epsilon_z$ по формуле (1) при этом в задаче (4)-(6), последнее уравнение в условиях (5) заменяется на $\int_{R_0}^{R_1} r\sigma_z(r,t)dr = 0$ и $\int_{R_1}^{R_2} r\sigma_z(r,t)dr = 0$.

2. Далее на каждом временном слое для определенного коэффициента ξ и для найденного значения $\Delta\epsilon_z$ решается задача (3)-(6).

При термоупругом деформировании обоих слоев несложно получить аналитическое решение, заметим также, что в случае термоупругого деформирования возможно и нет особенной нужды в конструкции упрощающих предположений позволяющих понизить размерность задачи, возможно здесь нужно пользоваться уже развитыми подходами в механике контактных взаимодействий, и учитывать силы трения, например, в рамках закона Амонтона-Кулона, когда модуль касательного напряжения в точках контактной поверхности меньше либо равен произведению коэффициента трения (трения скольжения) на модуль нормального напряжения и в дальнейшем решать задачу численно. Однако для случая сложного реологического поведения материалов, как в рассматриваемом случае совместного деформирования вязкоупругих стеклюющихся материалов с упругопластическими, предлагаемый подход к возможному учету сцепления (прилипания) представляется разумным. При усложнении реологии слоев методы численно - аналитических расчетов предложенные, например, в работах [18,22-24] метод учета сцепления разных слоев не вносит усложняющих конструкций, кроме дополнительного определения на каждом временном шаге $\Delta\epsilon_z$.

На графиках Рис. 2-3 приведены отдельные результаты расчета напряжений для цилиндрических систем (Рис. 2-3)- стержень (вал)-цилиндр ($R_0 = 0$) и (Рис. 4)- двух-слойный цилиндр; для различных значений ξ , физико-механические параметры были выбраны соответствующими материалам: для слоя (1)- сталь; (2)- кварцевое стекло, $k = \frac{2R_1}{R_2 - R_1}$.

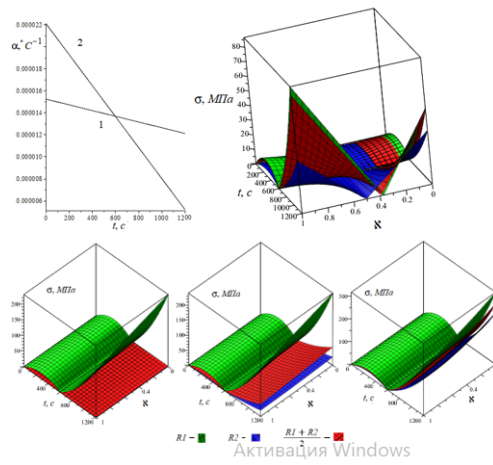


Рис. 2. Изменение во временно-температурном режиме коэффициентов линейного расширения для разных слое (слева) и интенсивность напряжений (справа) для (2) слоя (сверху), для (1) слоя (снизу) при $k=0,1; 1; 10$ (слева -направо).

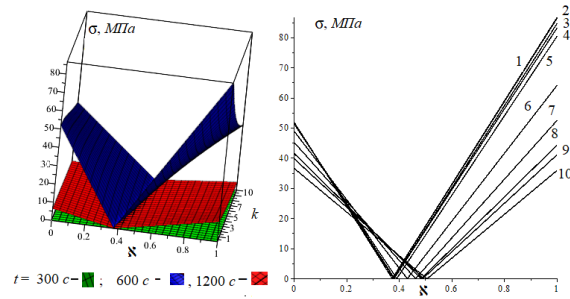


Рис. 3. Изменение интенсивности напряжений во (2) слое в фиксированные моменты времени (слева) и для конечного момента времени (интенсивность, характеризующая остаточные напряжения) для разных значений k : 1-0,1; 2-0,2; 3-0,5; 4-0,7; 5-0,8; 6-1; 7-3; 8-7; 9-8; 10-10

Из графиков Рис.2-3 заметны особенности напряженного состояния в точке пересечения коэффициента линейного температурного расширения для двух слоев и интервала значений $0,35 < \xi < 0,55$ для (2) слоя. Интенсивность напряжений во (2) слое максимальная при $\xi = 1$, что связано прежде всего с незначительными значениями σ_z значительной разницей между ним и $\sigma_r = \sigma_f i$.

При построении аналогичных графиков для двухслойного цилиндра (Рис. 4) замечено изменение графика интенсивности во (2)-м слое в сторону полного сглаживания интенсивности напряжений в интервале значений $0,35 < \xi < 0,55$.

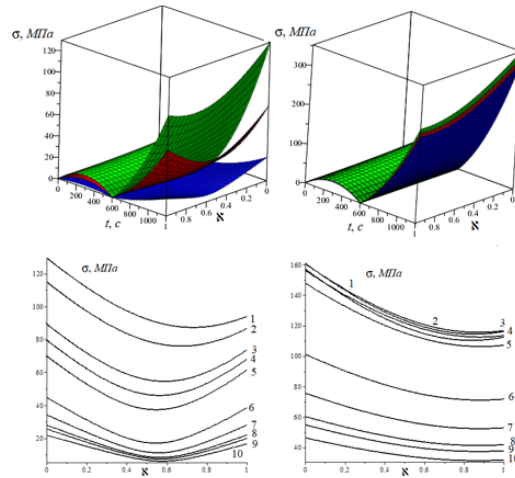


Рис. 4. Изменение во временно-температурном режиме интенсивности напряжений(сверху):для (1) слоя (справа); для (2) слоя (слева) при $k = 0,1$ -зеленый, 1 -красный, 10 -синий.Изменение интенсивности напряжений во (2) слое для конечного момента времени (интенсивность, характеризующая остаточные напряжения) в разных точках (снизу) по радиусу при R_0 (слева) и R_1 (справа) для разных значений k : 1-0,1; 2-0,2; 3-0,5; 4-0,7; 5-0,8; 6-1; 7-3; 8-7; 9-8; 10-10.

Заключение Предложен метод совместного деформирования соосных цилиндров при разных условиях сопряжения по боковым поверхностям: от свободного проскальзывания вдоль оси до идеального контакта, с учетом частичного (ограниченного) проскальзывания. Практическая значимость метода заключается в возможности моделирования технологических и остаточных напряжений не только в стеклометаллокомпозите, но и в слоистых конструкционных цилиндрических системах, работающих в условиях циклического нагрева - охлаждения до высоких температур. Предлагаемый подход обоснован для случая сложного реологического поведения материалов, например, для случая совместного деформирования вязкоупругих стеклующихся материалов с упругопластическим.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ю. П. Трыков Л. М. Гуревич Д. В. Проничев. Композиционные переходники // ВолгГТУ, РПК «Политехник»-Волгоград. 2007. 328 с.
- [2] Ю. П. Трыков Л. М. Гуревич В. Г. Шморгун. Титаностальные композиты и соединения // Монография. ВолгГТУ.-Волгоград. 2013. 344 с.
- [3] Л. А. Агловян Р. С. Геворкян. О действии дискретной нагрузки на слоистые пластины, состоящие из чередующихся упругих и реологических слоев. Москва: Наука, 1996. С. 71–81.
- [4] И. Г. Горячева И. В. Фельдштейн. Анализ влияния внутренней системы дефектов на напряженное состояние упругих тел // Изв. РАН МТТ. 1996. № 5. С. 55–61.
- [5] И. Г. Горячева Е. В. Торская. Напряженное состояние двуслойного упругого основания при неполном сцеплении слоев // Трение и износ. 1998. № 19(3). С. 289–296.
- [6] А. И. Свириденко С. А. Чижик М. И. Петроковец. Механика дискретного фрикционного контакта. 1990. 289-296 с.
- [7] Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. 1949. 270 с.
- [8] Милов А. Б. О вычислении контактной жесткости цилиндрических соединений. 1973. С. 70–72.
- [9] Теплый М. И. Контактные задачи для тел с круговыми границами. Львов: Выща школа, 1980. 176 с.
- [10] И. Г. Горячева А. П. Горячев Ф. Садеги. Контактное взаимодействие упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения или скольжения // Прикл. матем. и мех. № 59(4).
- [11] В. В. Можаровский В. Е. Старжинский. Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи // Наука и техника. 1988.
- [12] Б. Л. Пелех А. В. Максимук И. М. Коровайчук. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций. Киев: Наук. Дум., 1988.
- [13] Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1983. 260 с.
- [14] Xiao Yi Wang Wen-Xue Takao Yoshihiro. . Two dimensional contact stress analysis of composite laminates with pinned - joint. № 81.
- [15] Любимова О. Н. Моделирование параметров температурного режима при изготовлении стеклометаллокомпозита // Теплофизика и аэромеханика. 2017. № 24(1). С. 127–135.
- [16] Любимова О. Н. Особенности структуры зоны соединения стекла и стали в технологии получения стеклометаллокомпозита // Материаловедение. 2017. № 4. С. 3–7.
- [17] Любимова О. Н. Моделирование поведения несогласованного спая стекла с металлом с учетом свойств зоны соединения // Физическая мезомеханика. 2016. № 19(2). С. 114–120.
- [18] Галин Л. А. Развитие теории контактных задач // Наука. 1976. 494 с.
- [19] Pikul V. V. A Cylindrical Shell Made of Glass-Metal Composite // Applied Mechanics and Materials. 2015. № 24(1). С. 230–235.
- [20] Пикун В. В. Перспективы создания слоистого композита на основе стекломатериалов // Перспективные материалы. 1999. № 1. С. 34–42.
- [21] Lyubimova O. N. Characterisation of the mechanical and corrosive properties of newly developed glass-steel composites // Materials in Technologies. 2016. № 50(1). С. 95–100.
- [22] Галанин М. П. Математическое моделирование термоупругопластического контактного взаимодействия системы тел // Mathematica Montisnigri. 2014. № 30. С. 99–114.

- [23] Burenin A. A. Stress relaxation in cylindrical glass-to-metal junctions with account for the quality of a junction region // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2018. № 59(6). С. 1095–1103.
- [24] Любимова О. Н. Метод расчета эволюции напряжений в стеклометаллокомпозите с учетом структурных и механических релаксационных процессов // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2019. № 12(2). С. 215–229.

N. Yu. Zaiko, O. N. Lubimova

TEMPERATURE STRESSES IN COAXIAL COUPLED CYLINDRICAL SYSTEMS AND COMPOSITE MATERIALS WITH VARYING DEGREES OF SLIPPAGE ALONG THE CONTACT BOUNDARY

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

Abstract. Temperature stresses in conjugate systems made of different materials and in layered structural materials, even under the condition of uniform temperature distribution, are primarily a consequence of the different mechanical properties of the materials from which the conjugate elements or layers are made. At the same time, the coupling properties of dissimilar materials and the type of joint obtained have a significant impact on the overall picture of temperature stresses: gluing, welding, or hot fit; ideal contact, free or partial slippage in different directions. The condition and method of joint deformation of coaxial cylinders under different conditions of coupling along the lateral surfaces with inhomogeneous thermomechanical characteristics, taking into account the constrained movement along the generatrix for different qualitative conditions of interaction at the interface, are proposed. The method makes it possible to significantly simplify the problem under the condition of thermoelastic deformation of the layer, and in the case of viscoelastic behavior with simple relaxation nuclei, it allows to obtain an analytical solution. The practical significance of the method lies in the possibility of modeling technological and residual stresses in layered structural cylindrical systems operating under conditions of cyclic heating and cooling to high temperatures.

Keywords: thermally stressed state, contact problem, coaxial cylindrical systems, layered composite materials.

REFERENCES

- [1] Yu. P. Trykov L. M. Gurevich D. V. P. Composite adapters. 2007. 328 p. (in Russian).
- [2] Yu. P. Trykov L. M. Gurevich V. S. Titanostal composites and compounds. 2013. 344 p. (in Russian).
- [3] L. A. Aglovyan R. S. G. On the effect of a discrete load on layered plates consisting of alternating elastic and rheological layers. Moscow: Science, 1996. P. 71–81. (in Russian).
- [4] And .G. Goryacheva I. V. F. Analysis of the effect of the internal system of defects on the stress state of elastic bodies. 1996. P. 55–61. (in Russian).
- [5] I. G. Goryacheva E. V. T. Stress state of a two-layer elastic base with incomplete adhesion of layers. 1998. P. 289–296. (in Russian).
- [6] A. I. Sviridenok S. A. Chizhik M. I. P. Mechanics of discrete friction contact. 1990. 289-296 p. (in Russian).
- [7] Shtaerman I. Ya. Contact problem of elasticity theory. 1949.
- [8] Milov A. B. On calculating the contact stiffness of cylindrical joints. 1973. P. 70–72. (in Russian).

Zaiko Nadezhda Yurevna, senior lecturer of the Polytechnic Institute of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

Lubimova Olga Nikolaevna, Dr. Sci. Phys. and Math., Professor of the Polytechnic Institute of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

-
- [9] Teply M. I. Contact problems for bodies with circular boundaries. Lviv: Vyshcha school, 1980. (in Russian).
- [10] I. G. Goryacheva A. P. Goryachev F. S. Contact of elastic bodies with thin viscoelastic coatings under conditions of rolling or sliding friction. (in Russian).
- [11] V. V. Mozharovsky V. E. S. Applied mechanics of layered bodies from composites: Plane contact problems. 1988. (in Russian).
- [12] B. L. Pelekh A. V. Maksimuk I. M. K. Contact problems for layered structural elements. Kiev: Science. Doom., 1988. (in Russian).
- [13] Sargsyan V. S. Contact problems for half-planes and strips with elastic overlays. Yerevan: Yerevan University Publishing House, 1983. 260 p. (in Russian).
- [14] Xiao Yi Wang Wen-Xue T. Y. . Two dimensional contact stress analysis of composite laminates with pinned - joint. No. 81. (in Russian).
- [15] Lyubimova O. N. Modeling of the parameters of the temperature regime in the manufacture of glass-metal composite. 2017. P. 127–135. (in Russian).
- [16] Lyubimova O. N. Features of the structure of the glass-steel junction zone in the technology of glass-metal composite production. 2017. P. 3–7. (in Russian).
- [17] Lyubimova O. N. Modeling the behavior of an inconsistent glass-metal junction, taking into account the properties of the junction zone. 2016. P. 114–120. (in Russian).
- [18] Lyubimova O. Glass-metal composite: mechanical properties, structural mechanisms of deformation at elevated temperatures, modeling of the processes of formation of structure and properties: dis. d. phys.-mat.Sciences : 01.02.04 / Lyubimova Olga Nikolaevna. 2020. P. 289–294. (in Russian).
- [19] Pikul V. V. A Cylindrical Shell Made of Glass-Metal Composite. 2015. P. 230–235. (in Russian).
- [20] Pikul V. V. Prospects for creating a layered composite based on glass materials. 1999. P. 34–42. (in Russian).
- [21] Lyubimova O. Characterisation of the mechanical and corrosive properties of newly developed glass-steel composites. 2016. P. 95–100. (in Russian).
- [22] Galin L. A. Development of the theory of contact problems. 1976. 494 p. (in Russian).
- [23] Galanin M. P. Mathematical modeling of thermoelastic plastic contact interaction of a system of bodies. 2014. P. 99–114. (in Russian).
- [24] Burenin A. A. Stress relaxation in cylindrical glass-to-metal junctions with account for the quality of a junction region. 2018. P. 1095–1103. (in Russian).
- [25] Lyubimova O. N. Method for calculating the evolution of stresses in a glass-metal composite taking into account structural and mechanical relaxation processes. 2019. P. 215–229. (in Russian).

В. Н. Зимин, Г. Н. Кувыркин, Д. Р. Рахимов

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВЫСОКОЭФФЕКТИВНОГО МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНОГО БАЛЛОНА ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва,
Россия

Аннотация. Статья содержит результаты проектирования металлокомпозитного баллона высокого давления сферической формы. Предложена методика проведения поверочного расчета с использованием эндохронной теории пластичности для учета нелинейных свойств как материала силовой оболочки, так и материала лайнера. По результатам поверочного расчета предложены рекомендации по улучшению конструкции и оценено влияние нелинейного поведения силовой оболочки из углепластика на общее напряженно-деформированное состояние баллона давления.

Ключевые слова: Металлокомпозитный баллон высокого давления, эндохронная теория пластичности, нелинейное деформирование, композитные материалы, проектировочный расчет, прочностной расчет, напряженно-деформированное состояние.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.002

УДК: 621.642

Введение

В настоящее время в мире широко применяют современные композитные баллоны давления с металлическим лайнером. Они обладают рядом преимуществ: высокая удельная прочность, превышающая удельную прочность стали и титановых сплавов, безосколочное разрушение и взрывобезопасность при экстремальных воздействиях, стойкость к коррозии и массовое совершенство. В связи с этим создание таких баллонов давления является актуальной прикладной задачей [1].

© Зимин В. Н., Кувыркин Г. Н., Рахимов Д. Р. 2022

Зимин Владимир Николаевич

e-mail: zimmin@bmstu.ru, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Космические аппараты и ракеты носители", Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Кувыркин Георгий Николаевич

e-mail: fn2@bmstu.ru, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Прикладная математика", Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Рахимов Даниэль Рустамович

e-mail: danrus1996@gmail.com, аспирант, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Поступила 11.11.2022

Экспериментальные исследования металлокомпозитных баллонов высокого давления (МКБВД) свидетельствуют о нелинейном деформировании конструкции [2]. Для обеспечения надежности и безопасности в эксплуатации таких баллонов давления на этапе проектирования необходимо рассматривать нелинейное поведение как лайнера, так и композитного материала силовой оболочки. Учет пластической деформации также необходим для некоторых технологических операций, таких как предварительная опрессовка давлением [3]. В статье для этих целей предлагаем использовать эндохронную теорию пластичности, позволяющую учитывать нелинейные свойства изотропных и ортотропных материалов.

По результатам проведенного исследования был спроектирован высокоэффективный МКБВД сферической формы объемом $2,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$ с эксплуатационным давлением $p_e = 34 \text{ МПа}$ и коэффициентом запаса $n = 2$.

Особенности конструкции

Металлокомпозитный баллон высокого давления (МКБВД) состоит из сферического лайнера, выполненного из нержавеющей стали 12Х18Н10Т, обмотанного слоем композитных лент из углепластика [4]. Лейнер баллона с одной стороны имеет горловину с резьбой, а с противоположной стороны — технологический фланец.

Проведение проектировочного расчета

При проведении проектировочного расчета приняты следующие предпосылки [5,6]:

- Методика проектирования основана на безмоментной теории тонкостенных оболочек вращения, нитяной модели композитного материала, а также условия равнопрочности;
- При изготовлении МКБВД реализуется зонная непрерывная геодезическая намотка двойными спиральными слоями. Для разграничения в обозначении "двойных спиральных слоев" и "всех слоев зон" будем использовать i и j индексы соответственно. Здесь под термином "зона" подразумевается элемент оболочки баллона давления, расположенный в диапазоне $r_{0i-1} \leq r \leq r_{0i}$;
- Металлический лайнер считаем несжимаемым изотропным материалом и рассматриваем его как первый слой композитного пакета.

Основные расчетные зависимости

Введем следующие безразмерные величины

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{r}_{0i} = \frac{r_{0i}}{R}, \quad \bar{b} = \frac{b}{R}, \quad (1)$$

где r — текущий радиус, \bar{r}_{0i} — радиус полюсного отверстия i -го слоя, R — радиус баллона на экваторе, $b = \sqrt{1,5} \cdot r_{01}$ — радиус точки перегиба.

Углы армирования i -го слоя в произвольном сечении φ_i и на экваторе φ_{Ri} определяются из условия геодезической намотки

$$\varphi_i = \arcsin \frac{\bar{r}_{0i}}{\bar{r}}, \quad \varphi_{Ri} = \arcsin \bar{r}_{0i} \quad (2)$$

Толщину силовой оболочки i -го слоя в произвольном сечении h_i и на экваторе h_{Ri} определяют из соотношений

$$h_i = h_{Ri} \frac{\sqrt{1 - \bar{r}_{0i}^2}}{\sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_{0i}^2}}, \quad h_{Ri} = \frac{pR/2 - \sigma_m h_m}{F_{1+} \sum_{i=1}^k (1 - \bar{r}_{0i}^2)}, \quad (3)$$

где $p = n \cdot p_e$ — расчетное давление, σ_m — предел текучести материала лейнера, h_m — толщина лейнера, F_{1+} — предел прочности материала силовой оболочки, k — число слоев.

Форму меридиана баллона $y(r)$ определяют из решения дифференциального уравнения (4) для участка $b < r \leq R$ и (5) для участка $r_{01} \leq r \leq b$. На стыке при $r = b$ профиль меридиана $y(r)$ и первая производная $y'(r)$ непрерывны.

$$y' = \frac{dy}{dr} = \frac{p\bar{r}^3 R}{\sqrt{\left(2\sigma_m h_m \bar{r}^2 + 2F_{1+} \sum_{i=1}^k h_{Ri} \sqrt{1 - \bar{r}_{0i}^2} \cdot \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_{0i}^2}\right)^2 - \bar{r}^6 p^2 R^2}} \quad (4)$$

$$y' = \frac{dy}{dr} = \frac{\bar{r} (\bar{r}^2 - \bar{r}_{01}^2)}{\sqrt{\left(\frac{F_{1+} \sum_{i=1}^k h_{Ri} \sqrt{1 - \bar{r}_{0i}^2} \cdot \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_{0i}^2} \cdot (\bar{b}^2 - \bar{r}_{01}^2)}{\frac{p\bar{b}^2 R}{2} - \sigma_m h_m \bar{b} \sin \theta_b}\right)^2 - \bar{r}^2 (\bar{r}^2 - \bar{r}_{01}^2)^2}}, \quad (5)$$

$$\sin \theta_b = \frac{pR\bar{b}^3}{2\sigma_m h_m \bar{b}^2 + 2F_{1+} \sum_{i=1}^{k_b} h_{Ri} \sqrt{1 - \bar{r}_{0i}^2} \cdot \sqrt{\bar{b}^2 - \bar{r}_{0i}^2}},$$

где θ_b — угол наклона профиля меридиана при $r = b$, k_b — число слоев при $r = b$.

Вторую производную меридиана баллона $y''(r)$, необходимую для нахождения внутренних силовых факторов, определяют из уравнения (6) для участка $b < r \leq R$ и уравнения (7) для участка $r_{01} \leq r \leq b$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dr^2} = \frac{Ry'(1 + y'^2)}{\bar{r}} \left(2 - \frac{\sigma_m h_m + F_{1+} \sum_{i=1}^k h_{Ri} \frac{\sqrt{1 - \bar{r}_{0i}^2}}{\sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_{0i}^2}} \cdot \bar{r}_{0i}^2}{\sigma_m h_m + F_{1+} \sum_{i=1}^k h_{Ri} \sqrt{1 - \bar{r}_{0i}^2} \cdot \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_{0i}^2}} \right) \quad (6)$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dr^2} = \frac{Ry'(1 + y'^2)}{\bar{r}} \left(\frac{2\bar{r}^2}{\bar{r}^2 - \bar{r}_{01}^2} - \frac{\sum_{i=1}^k h_{Ri} \frac{\sqrt{1 - \bar{r}_{0i}^2}}{\sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_{0i}^2}} \cdot \bar{r}_{0i}^2}{\sum_{i=1}^k h_{Ri} \sqrt{1 - \bar{r}_{0i}^2} \cdot \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_{0i}^2}} \right) \quad (7)$$

Толщину силовой оболочки h_i в произвольном сечении i -го слоя с учетом ширины наматываемой ленты t определяют из соотношений [7].

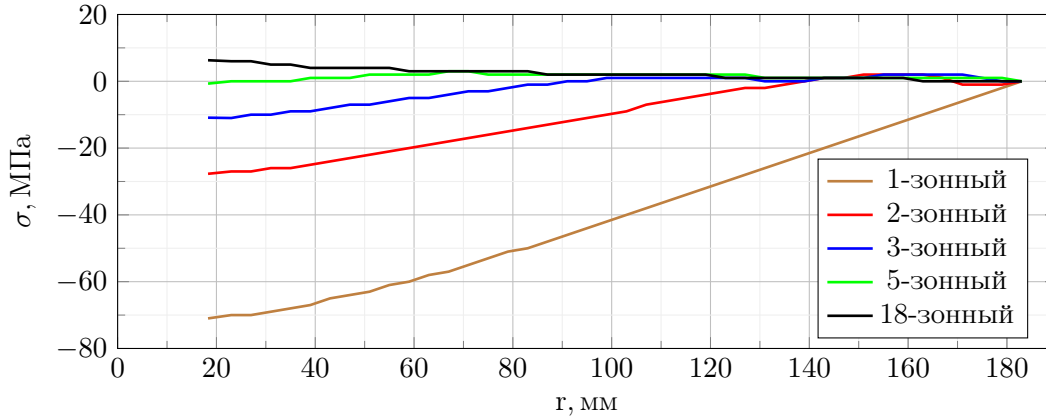


Рис. 1. Зависимость отклонения формы меридиана от окружности для баллонов с различным количеством зон

$$\varphi_t = \begin{cases} \pi/2, & \bar{r} \leq \bar{r}_{0i} + \frac{t}{R\sqrt{1+y'^2}} \\ \arcsin\left(\frac{1}{\bar{r}}\left(\bar{r}_{0i} + \frac{t}{R\sqrt{1+y'^2}}\right)\right), & \bar{r} > \bar{r}_{0i} + \frac{t}{R\sqrt{1+y'^2}} \end{cases} \quad (8)$$

Уточненную толщину силовой будем использовать для проведения поверочного расчета методом конечных элементов.

Анализ проектных параметров баллона

Определим необходимое число слоев и радиусы полюсных отверстий для сферического МКБВД. В качестве исходных данных будем использовать требования, предъявляемые к баллонам давления разгонного блока «Фрегат» [8]: $p = 68$ МПа, $r_{01} = 18,3$ мм, $R = 183$ мм. Толщину лайнера и ширину наматываемой ленты примем равными 0,5 мм и 14 мм соответственно.

Известно, что для управления формой меридиана баллона, необходимо определенным образом располагать слои оболочки. Так для получения баллона строго сферической формы необходимо предположение о бесконечном количестве тонких слоев, а также о существовании непрерывной зависимости между толщиной слоев на экваторе и радиусами полюсных отверстий (9). В данной работе используем приближенную аппроксимацию зависимости из-за ограниченного числа слоев, а также вводим условие равенства толщин слоев на экваторе [1]

$$\bar{h}_R(\bar{r}_{0i}) = \frac{h_R(\bar{r}_{0i}) F_{1+}}{pR} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-\bar{r}_{0i}^2}}{\sqrt{1-\bar{r}_{01}^2}}\right) \right) \quad (9)$$

Оценим отклонение формы меридиана от окружности для баллонов с различным количеством зон (рис. 1).

Из данного графика видим, что для создания баллона давления сферической формы необходимо использовать более 5 зон намотки. Расчет на прочность показывает, что такое малое число зон приводит к разрушению волокон силовой оболочки, связанного с неравномерным распределением толщины материала вдоль меридиана. Для обеспечения равенства толщины будем проектировать баллон с 18-ю зонами намотки, радиусы полюсных отверстий вычислены согласно зависимости (9) и представлены в табл. 1.

№ слоя	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r_{0i} , мм	18,3	30,5	43,6	57,8	72,0	86,0	99,5	112,5	124,4
№ слоя	10	11	12	13	14	15	16	17	18
r_{0i} , мм	135,5	145,6	155,0	162,5	169,0	174,6	179,0	181,5	182,8

Таблица 1. Радиусы полюсных отверстий

После определения число зон и радиусов полюсных отверстий по формулам (1)–(8) находим форму профиля меридиана, углы армирования и толщины i -х слоев баллона давления.

Эндохронная теория пластичности

Эндохронная теория является одним из вариантов теории пластичности, в которой, как и в теории течения, устанавливается связь между приращениями деформации и приращениями напряжений, но в отличие от теории течения в ней не используют понятие поверхности нагружения, а также нет деления деформации на упругую и пластическую составляющие. Для учета истории нагружения материала в эндохронной теории пластичности вводят неубывающую скалярную величину — меру внутреннего времени $d\xi$, являющуюся аналогом параметра Удквиста для классических теорий пластичности.

Обобщив результаты работ для изотропного и ортотропного материалов соответственно [9, 10], запишем в матричном виде определяющее соотношение эндохронной теории пластичности для монослоя композитного пакета

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{d\xi}{1 + \beta\xi} \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12})^T$ — векторы напряжений и деформаций, β — параметр упрочнения, определяемый из экспериментальных данных материала.

Из-за того что нелинейные эффекты в изотропном и ортотропном материале имеют различную физическую природу, вид вспомогательной матрицы \mathbf{A} и зависимости для меры внутреннего времени $d\xi$ отличаются для этих материалов.

Для изотропного материала матрица жесткости \mathbf{D} , вспомогательная матрица \mathbf{A} в уравнение (10) принимают следующий вид:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \frac{a}{3} \begin{bmatrix} \frac{2-\nu}{1-\nu} & -\frac{1-2\nu}{2-\nu} & 0 \\ -\frac{1-2\nu}{1-\nu} & \frac{1-\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

где E, ν — характеристики упругости изотропного материала; a — материальный параметр модели для изотропного материала, характеризующий нелинейные свойства материала.

Мера внутреннего времени ξ изотропного материала определена следующей формулой [9]:

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{22})^2 + (d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{33})^2 + (d\varepsilon_{33} - d\varepsilon_{22})^2 + \frac{3}{2} d\gamma_{12}^2}, \\ d\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{\nu - 1} (d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22}) - \frac{a(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{3(1 - \nu)} \cdot \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{1 + \beta\xi} d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

Для ортотропного материала матрица жесткости \mathbf{D} , вспомогательная матрица \mathbf{A} в уравнение (10) принимают следующий вид:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3) \quad (13)$$

где $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$ — характеристики упругости ортотропного материала; a_1, a_2, a_3 — материальные параметры модели для ортотропного материала, характеризующие нелинейные свойства материалов.

Выражение для меры внутреннего времени ξ ортотропного материала представим в следующем виде [10]:

$$d\xi = \sqrt{d\varepsilon^T \cdot \mathbf{R} \cdot d\varepsilon} \quad (14)$$

где \mathbf{R} — положительно определенная матрица материальных параметров

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Используя соотношение (10) и допущение о совместном деформировании слоев, получим уравнение для композитного материала, состоящего из n элементарных слоев, каждый из которых характеризуется углом армирования φ_j и относительной толщиной δ_j

$$d\varepsilon_c = \mathbf{S}_c \cdot \left(d\sigma_c + \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_{1j} \cdot \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{T}_{1j}^{-1} \cdot \sigma_j \delta_j \frac{d\xi_j}{1 + \beta_j \xi_j} \right) \quad (16)$$

где $\varepsilon_c = (\varepsilon_{11c}, \varepsilon_{22c}, \gamma_{12c})^T$, $\sigma_c = (\sigma_{11c}, \sigma_{22c}, \sigma_{12c})^T$ — векторы деформации и напряжений композитного пакета, $\mathbf{S}_c = \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{T}_{1j} \cdot \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{T}_{1j}^T \delta_j \right)^{-1}$ — матрица податливости пакета, матрицу поворота \mathbf{T}_{1j} определяют как

$$\mathbf{T}_{1j} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_j & \sin^2 \varphi_j & 2 \sin \varphi_j \cos \varphi_j \\ \sin^2 \varphi_j & \cos^2 \varphi_j & -2 \sin \varphi_j \cos \varphi_j \\ -\sin \varphi_j \cos \varphi_j & \sin \varphi_j \cos \varphi_j & \cos^2 \varphi_j - \sin^2 \varphi_j \end{bmatrix} \quad (17)$$

В задаче о нагружении баллона внутренним давлением компоненты вектора напряжений пакета σ_c определяют как

$$\sigma_{11c} = \frac{T_1}{\sum_{j=1}^n h_j}, \quad \sigma_{22c} = \frac{T_2}{\sum_{j=1}^n h_j}, \quad \sigma_{12c} = 0 \quad (18)$$

где меридиональные и окружные погонные усилия T_1 и T_2 равны

$$T_1 = \begin{cases} \frac{pR\bar{r}\sqrt{1+y'^2}}{2} \frac{y'}{y'}, & \bar{r} \geq \bar{b} \\ \sigma_m h_m - \frac{p\bar{b}^2 R - 2\bar{b}\sigma_m h_m \sin \theta_b \bar{r}^2 - \bar{r}_{01}^2}{\bar{b}^2 - \bar{r}_{01}^2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\bar{r}} \frac{y'}{y'}, & \bar{r} < \bar{b} \end{cases} \quad (19)$$

$$T_2 = \begin{cases} -\frac{pR\bar{r}\sqrt{1+y'^2}}{2} \frac{y'}{y'} \left(2 - \frac{\bar{r}Ry''}{y'(1+y'^2)} \right), & \bar{r} \geq \bar{b} \\ \sigma_m h_m - \frac{p\bar{b}^2 R - 2\bar{b}\sigma_m h_m \sin \theta_b \bar{r}\sqrt{1+y'^2}}{\bar{b}^2 - \bar{r}_{01}^2} - \frac{\bar{r}Ry''T_1}{y'(1+y'^2)}, & \bar{r} < \bar{b} \end{cases} \quad (20)$$

Алгоритм численного интегрирования

Приведенную систему уравнений (10)–(20) решаем с помощью метода последовательных приближений. При интегрировании шаг по напряжениям будем задавать, то есть

$$\Delta\sigma_{c(p)} = \Delta\sigma_{c(p=0)}$$

где p — номер шага нагружения.

Запишем соотношение (16) в разностной постановке

$$\Delta\epsilon_{c(p)} = \mathbf{S}_c \cdot \left(\Delta\sigma_{c(p)} + \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_{1j} \cdot \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{T}_{1j}^{-1} \cdot \sigma_{j,(p-1)} \delta_j \frac{\Delta\xi_{j,(p)}}{1 + \beta_j \xi_{j,(p-1)}} \right)$$

Здесь

$$\Delta\xi_{j,(p)} = f(\mathbf{T}_{1j}^T \cdot \Delta\epsilon_{c(p)})$$

где функцию $f(\mathbf{T}_{1j}^T \cdot \Delta\epsilon_{c(p)})$ определяют из уравнений (12) или (14).

На p -м шаге итерационная процедура имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta\epsilon_{c(p)}^{(q+1)} = \mathbf{S}_c \cdot \left(\Delta\sigma_{c(p)} + \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_{1j} \cdot \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{T}_{1j}^{-1} \cdot \sigma_{j,(p-1)} \delta_j \frac{\Delta\xi_{j,(p)}^{(q)}}{1 + \beta_j \xi_{j,(p-1)}} \right) \\ \Delta\xi_{j,(p)}^{(q)} = f(\mathbf{T}_{1j}^T \cdot \Delta\epsilon_{c(p)}^{(q)}) \end{cases}$$

где q — номер итерации. При $q = 1$ принимаем $\Delta\epsilon_{c(p)}^{(q=1)} = \Delta\epsilon_{c(p-1)}$

За критерий останова итерационной процедуры принимаем следующее условие:

$$\Delta\epsilon_{c(p)}^{(q+1)} - \Delta\epsilon_{c(p)}^{(q)} \leq 0,001 \cdot \Delta\epsilon_{c(p)}^{(q+1)}$$

При $p = 1$ используем соотношения для упругого тела

$$\Delta\epsilon_{c(p=1)} = \mathbf{S}_c \cdot \Delta\sigma_{c(p=1)}$$

Определив приращение вектора деформации пакета $\Delta\epsilon_{c(p)}$ и меры внутреннего времени $\Delta\xi_{j,(p)}$, находим приращения напряжений $\Delta\sigma_{j,(p)}$ и деформации $\Delta\epsilon_{j,(p)}$ в слоях в СК монослоя

$$\Delta\epsilon_{j,(p)} = \mathbf{T}_{1j}^T \cdot \Delta\epsilon_{c(p)}, \quad \Delta\sigma_{j,(p)} = \mathbf{D}_j \cdot \Delta\epsilon_{j,(p)} - \mathbf{A}_j \cdot \sigma_{j,(p-1)} \frac{\Delta\xi_{j,(p)}}{1 + \beta_j \xi_{j,(p-1)}}$$

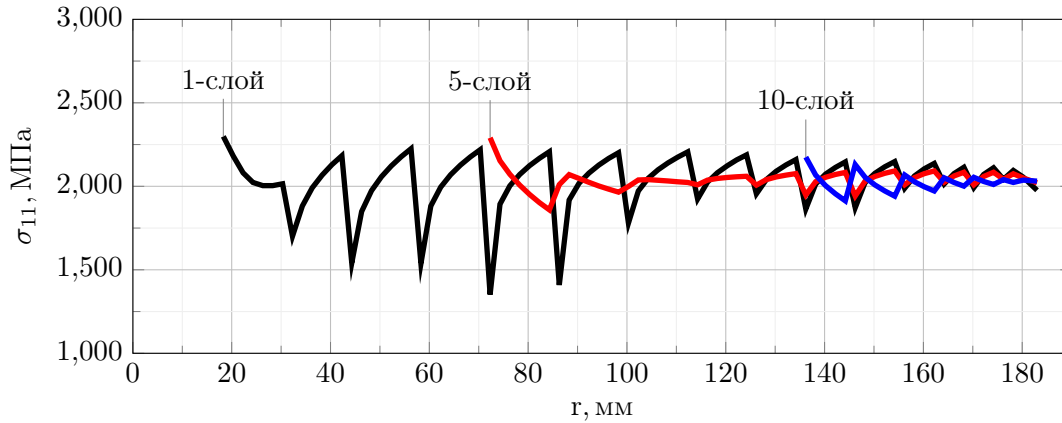


Рис. 2. Напряжения вдоль волокон σ_{11} в силовой оболочке для 1, 5 и 10-го слоя

Текущие значения величин вычисляют как

$$\begin{aligned} \sigma_{c(p)} &= \sigma_{c(p-1)} + \Delta\sigma_{c(p)}, & \varepsilon_{c(p)} &= \varepsilon_{c(p-1)} + \Delta\varepsilon_{c(p)}, \\ \sigma_{j,(p)} &= \sigma_{j,(p-1)} + \Delta\sigma_{j,(p)}, & \varepsilon_{j,(p)} &= \varepsilon_{j,(p-1)} + \Delta\varepsilon_{j,(p)}, \\ \xi_{j,(p)} &= \xi_{j,(p-1)} + \Delta\xi_{j,(p)}, & (j &= 1 \dots n) \end{aligned}$$

Для валидации предложенной методики был проведен расчет цилиндрической части МКБВД из работы [2]. Результаты удовлетворительным образом согласуются с экспериментальными данными.

Проведение поверочного расчета

Для проведения поверочного расчета были использованы следующие характеристики материала лейнера: $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\sigma_T = 250$ МПа, $\sigma_V = 650$ МПа, $\varepsilon_V = 35\%$, $\rho = 7800$ кг/м³, $a = 301,5$, $\beta = 3,45$. Для характеристик материала силовой оболочки использовались следующие значения [11, 12]: $E_1 = 136,5$ ГПа, $E_2 = 11,1$ ГПа, $G_{12} = 7,5$ ГПа, $\nu_{12} = 0,31$, $F_{1+} = 2300$ МПа, $F_{1-} = 1200$ МПа, $F_{2+} = 58$ МПа, $F_{2-} = 190$ МПа, $F_{12} = 88$ МПа, $\rho = 1550$ кг/м³, $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 38$, $\beta = 0,1$, $R_{11} = R_{22} = R_{12} = 0$, $R_{33} = 3,6$. Приведенные материальные параметры модели были найдены из условия минимального отклонения расчетных диаграмм деформирования, полученных по эндохронной теории, от экспериментальных кривых деформирования. В качестве экспериментальных кривых для материалов лейнера и силовой оболочки использовались диаграммы деформирования при растяжении и при чистом сдвиге соответственно [11, 12].

На рис. 2, 3 представлены результаты расчета внутренних силовых факторов в лейнере и в силовой оболочке баллона давления для некоторых слоев. Из графиков видно, что напряжения σ_{11} и σ_{12} не превосходят пределов прочности при растяжении вдоль волокон и при сдвиге соответственно. Напряжение σ_{22} выше предела прочности при растяжении поперек волокон, следовательно, матрица силовой оболочки полностью разрушается, после чего всю нагрузку воспринимают волокна. Аналогичное поведение наблюдается и в реальной конструкции.

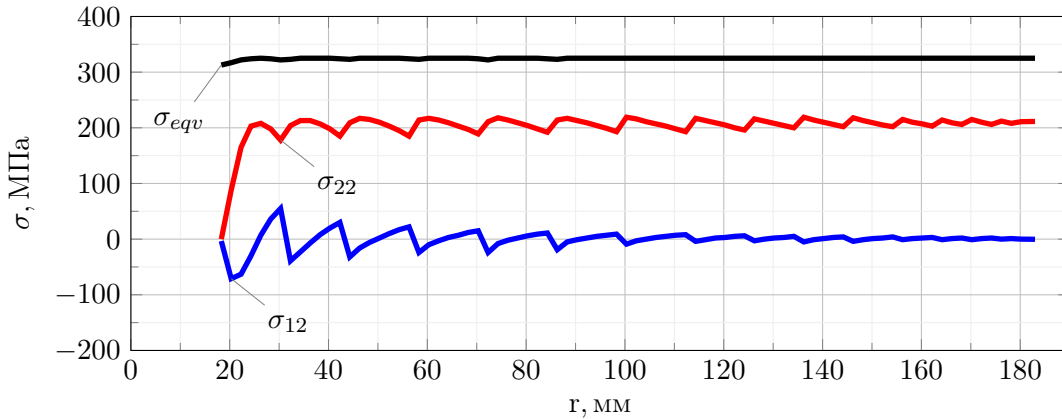


Рис. 3. Эквивалентные напряжения в лейнере σ_{equiv} , напряжения поперек укладки волокон σ_{22} и касательные напряжения σ_{12} в силовой оболочке для 1-го слоя

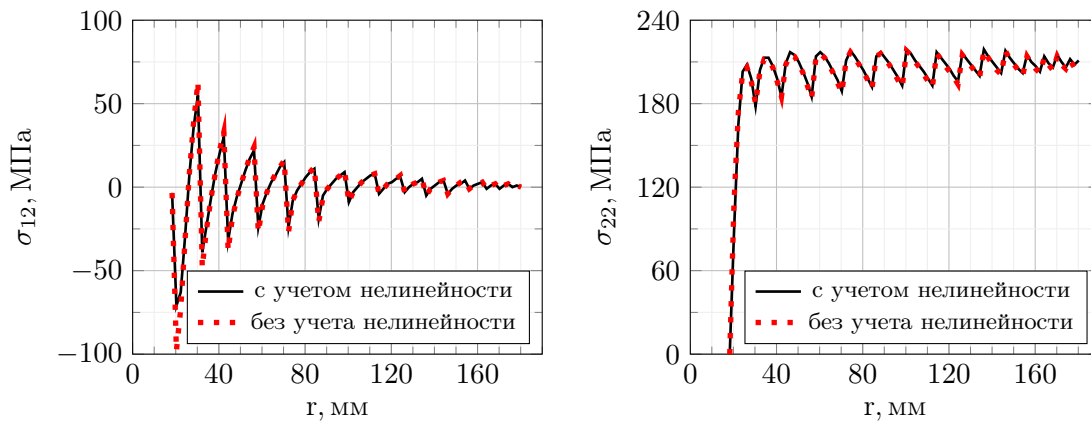


Рис. 4. Влияние нелинейности ортотропного материала для 1-го слоя

Для оценки влияния нелинейности материала силовой оболочки на общее напряженно-деформированное состояние (НДС) МКБВД был проведен аналитический расчет с учетом и без учета нелинейных свойств ортотропного материала. Анализ результатов показал, что нелинейные свойства оказывают наибольшее влияние на напряжения в силовой оболочке 1-го слоя (Рис. 4). Различие между решениями для касательных напряжений σ_{12} составляет 25 % в области фланцевого соединения, в остальных областях не превышает 13 %. Различие для напряжений поперек волокон σ_{22} составляет 15 % и 3 % соответственно. Поскольку нелинейность практически не оказывает влияния на напряжения σ_{22} , которые в отличие от напряжений σ_{12} значительно превосходят предел прочности, допустимо проводить расчет без учета нелинейных свойств силовой оболочки из углепластика.

Для учета моментных напряжений, возникающих в силовой оболочке, был проведен расчет методом конечных элементов в программе «MSC PATRAN/NASTRAN».

По результатам расчета было принято решение увеличить на 0,3 мм 1-й, 3-й и 6-й двойной спиральный слой, а также добавить адгезионную прокладку из резины в районе фланцевых соединений. Итоговая масса баллона составила 5,78 кг.

Заключение

В данной работе был проведен проектировочный и поверочный расчет металлокомпозитного баллона высокого давления. В проектировочном расчете было установлено необходимое число зон и значение радиусов полюсных отверстий для получения баллона сферической формы. В поверочном расчете было рассчитано общее НДС баллона, а также показано незначительное влияние нелинейных свойств силовой оболочки из углепластика. По результатам данного расчета было предложено увеличить некоторые двойные спиральные слои силовой оболочки.

В результате проведенного исследования был спроектирован высокоэффективный сферический МКБВД с 18-ю зонной силовой оболочкой из углепластика, намотанной на лейнер из стали 12X18H10T. Суммарная масса баллона составила 5,78 кг при полезном объеме в $2,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васильев В. В., Мороз Н. Г. Композитные баллоны давления. Проектирование, расчет, изготовление и испытания : справ. пособие. Москва: Машиностроение, 2015. 373 с.
- [2] Vasiliev V. V. Composite pressure vessels: Design, analysis, and manufacturing. Blacksburg: Bull Ridge Publishing, 2009. 704 p.
- [3] Воробей В. В., Маркин В. Б. Основы проектирования и технология сверхлегких композитных баллонов высокого давления : монография. Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2014. 166 с.
- [4] Композиционные материалы : справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин [и др.]. Москва: Машиностроение, 1990. 512 с.
- [5] Сарбаев Б. С. Расчет силовой оболочки композитного баллона давления : учеб. пособие. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 96 с.
- [6] Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. Москва: Машиностроение, 1977. 144 с.
- [7] Васильев В. В., Криканов А. А. Равнонапряженные безмоментные оболочки вращения, образованные методом непрерывной намотки армированной лентой // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 119–133.
- [8] Создание высокоэффективного металлокомпозитного баллона высокого давления / А. В. Асюшкин, В. П. Викуленков, К. Н. Лебедев [и др.] // Вестник НПО имени С.А. Лавочкина. 2015. № 1(27). С. 19–27.
- [9] Valanis K. C. A theory of viscoplasticity without a yield surface // Archives of Mechanics. 1971. Vol. 23, no. 4. P. 517–551.
- [10] Зиновьев П. А., Сарбаев Б. С. Эндохронная теория неупругого деформирования волокнистых композитов // Механика композитных материалов. 1985. № 3. С. 423–430.
- [11] Расчетно-экспериментальное исследование нелинейных свойств углепластиков / А. М. Думанский, Л. П. Таирова, И. Горлач [и др.] // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 5. С. 91–97.
- [12] Раскутин А. Е., Соколов И. И. Углепластики и стеклопластики нового поколения // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2013. № 4.

V. N. Zimin, G. N. Kuvyrkin, D. R. Rakhimov

DESIGN OF A HIGHLY EFFECTIVE METAL COMPOSITE HIGH-PRESSURE VESSEL OF SPHERICAL SHAPE

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Abstract. The article contains the results of design a spherical metal composite high-pressure vessel. A method of performing a verification calculation using the endochronic theory of plasticity is proposed to take into account the nonlinear properties of both the composite shell material and the liner material. Based on the results of the verification calculation, recommendations for improving the design are proposed and the influence of the nonlinear behavior of the carbon fiber shell on the stress-strain state of the pressure vessel is estimated.

Keywords: High-pressure metal composite vessel, endochronic theory of plasticity, nonlinear deformation, composite materials, design calculation, strength calculation, stress-strain state

REFERENCES

- [1] Vasiliev V. V., Moroz N. G. Composite pressure vessels. Design, analysis, manufacturing and testing : reference manual. Moscow: Mashinostroenie, 2015. 373 p. (in Russian).
- [2] Vasiliev V. V. Composite pressure vessels: Design, analysis, and manufacturing. Blacksburg: Bull Ridge Publishing, 2009. 704 p.
- [3] Vorobej V. V., Markin V. B. Basics of design and technology of ultra light composite high-pressure vessels : monograph. Barnaul: AltGTU, 2014. 166 p. (in Russian).
- [4] Composite materials : guide / V. V. Vasiliev, V. D. Protasov, V. V. Bolotin et al. Moscow: Mashinostroenie, 1990. 512 p. (in Russian).
- [5] Sarbayev B. S. Calculation of the power shell of a composite pressure vessel : training manual. Moscow: Izdatelstvo MGTU im. N.E. Baumana, 2001. 96 p. (in Russian).
- [6] Obrazcov I. F., Vasiliev V. V., Bunakov V. A. Optimal reinforcement of rotation shells made of composite materials. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 144 p. (in Russian).
- [7] Vasiliev V. V., Krikanov A. A. Equistressed Membrane Shells of Revolution Formed by Continuous Winding of a Reinforced Tape // Izvestiya RAN, Mekhanika Tverdogo Tela. 2002. no. 4. P. 119–133. (in Russian).
- [8] Development of higheffective metal-base composite high-pressure vessel / A. V. Asyushkin, V. P. Vikulenkov, K. N. Lebedev et al. // Vestnik NPO im. S. A. Lavochkina. 2015. no. 1(27). P. 19–27. (in Russian).
- [9] Valanis K. C. A theory of viscoplasticity without a yield surface // Archives of Mechanics. 1971. Vol. 23, no. 4. P. 517–551.
- [10] Zinov'ev P. A., Sarbayev B. S. Endochronic theory of fiber composite non-elastic deformation // Mechanics of Composite Materials. 1985. no. 3. P. 423–430. (in Russian).
- [11] A design-experiment study of nonlinear properties of coal-plastic / A. M. Dumansky, L. P. Tairova, I. Gorchach et al. // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2011. no. 5. P. 91–97. (in Russian).
- [12] Raskutin A. E., Sokolov I. I. Ugleplastiki i stekloplastiki novogo pokoleniya // Trudy VIAM: elektron. nauch.-tehnich. zhurn. 2013. no. 4. (in Russian).

Zimin Vladimir Nikolaevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

Kuvyrkin George Nikolaevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

Rakhimov Daniel Rustamovich, postgraduate student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

А. Л. Попов¹, В. М. Козинцев¹, Д. А. Челюбеев¹, А. А. Азаров²

ОПТИКО-АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА ДЕФЕКТОВ ЭЛЕМЕНТОВ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СТЕПЕНИ ИХ ЗАЛЕЧИВАНИЯ

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

²Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Предложен метод синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации для диагностики дефектов на примере диагностики дефектов в закреплении границы тестовой пластины в форме кардиоды. Метод позволяет судить не только о наличии дефектов по изменению спектрального состава её вибрационного и звукового полей, но и даёт возможность определения места дефекта по искажению спекл-интерферограммы поля перемещений поверхности пластины.

Ключевые слова: оптико-акустическая диагностика, акустическая спектроскопия, электронная спекл-интерферометрия.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.003

УДК: 539.3

Введение

Одним из современных требований повышения надёжности и остаточного ресурса технических объектов является определение допустимых величин трещиноподобных дефектов, зон и уровней концентрации напряжений. При этом желательно, чтобы соответствующая диагностика выполнялась непосредственно в процессе эксплуатации технического объекта. В то же время, в связи с широким использованием разного

© Попов А. Л., Козинцев В. М., Челюбеев Д. А., Азаров А. А. 2022

Попов Александр Леонидович

e-mail: popov@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Козинцев Виктор Михайлович

e-mail: kozincev@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Челюбеев Дмитрий Анатольевич

e-mail: da-ch@yandex.ru, ведущий инженер, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Азаров Артур Александрович

e-mail: azaartale@mail.ru, аспирант, Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 20.11.2022

рода покрытий визуальный контроль таких дефектов становится затруднительным, не говоря уже о контроле за изменением внутренней микроструктуры материалов, уровнями остаточного и накопленного в процессе эксплуатации НДС. Сами покрытия, в особенности, содержащие более одного слоя, могут иметь в процессе эксплуатации тенденции к расслоениям и отслоениям от подложки. Аппаратура и методики оптико-механического исследования материалов и конструкций по отдельности широко используются при решении научных и прикладных задач. Например, электронная спекл-интерферометрическая методика оказалась наиболее оперативной методикой измерения остаточных напряжений [1–3]. Ультразвуковая диагностика является общепризнанным методом определения дефектов в конструкциях [4,5]. Однако, собранные воедино, методы акустической спектроскопии и электронной спекл-интерферометрии позволяют более объективно и конкретно судить о наличии дефектов в материале детали не только по изменению спектрального состава её вибрационного и звукового полей, но и по искажению спекл-интерферограммы перемещений поверхности детали, снимаемой в режиме реального времени одновременно с акустической информацией. Подобный подход динамического варианта оптической спекл-интерферометрии и ее применения рассмотрен в работах [6–8].

Аппаратура и образцы

Для объединения возможностей метода акустической спектроскопии и электронной спекл-интерферометрии был собран оптико-акустический стенд. В акустическую часть стенда вошли контактные возбудители колебаний: ударный молоток AU02 с датчиком силы AC21 и несколькими насадками, шарики из закалённой стали разных диаметров и масс, вибровозбудитель Роботрон 11075, бесконтактные электромагнитные возбудители вибрации (изготовлены исполнителями проекта), высокоточный генератор сигналов ГЗ-122, усилитель Verstarker LV 103, частотомер ЧЗ-63, направленные микрофоны типа BSWA MA231 с равномерной частотной характеристикой в звуковом диапазоне частот и достаточной осевой чувствительностью для выделения дискретных составляющих сигнала в диапазоне до 50 кГц, соединяемые с двух, либо четырёхканальным спектроанализатором A19-U2, A17-U4 и через них, - с ЭВМ. Оптическая часть оптико-акустического стенда представлена спекл-интерферометром, собранном по модифицированной схеме Майкельсона в составе твердотельного одночастотного термостабилизированного лазера LCM-S-111, 10-ти мегапиксельной камеры AV10115DN, полупрозрачного зеркала, установленного под углом 45° к направлениям падающих и отражённых лучей, стеклянных пластинок с диффузионно отражающими поверхностями, закрепленных на кубике с отверстиями, а также лазерного триангуляционного датчика РФ603. При закреплении образцов предусмотрена возможность параллельного съёма акустической и спекл-интерферометрической информации. В качестве тестовых образцов использовались пластины постоянной толщины различной формы. На рис. 1 (а) показана стальная круглая пластина с жестким контуром. Механические параметры пластины: плотность $\rho=7800$ кг/м³; модуль Юнга $E = 200000$ Па; радиус пластины $r = 75$ мм. На рис. 1 (b) показана пластина из алюминиевого сплава в форме кардиоиды толщиной $h = 0.2$ мм. По контуру пластина была зажата 7-ю винтами в толстую металлическую оправку. Так как теоретическая модель колебаний такой пластины до настоящего времени не разработана, то первая резонансная частота (880 Гц) её изгибных колебаний была подобрана с помощью генератора звука ГЗ-122 по максимальной амплитуде звукоизлучения, фиксируемой через микрофон и спектроанализатор.

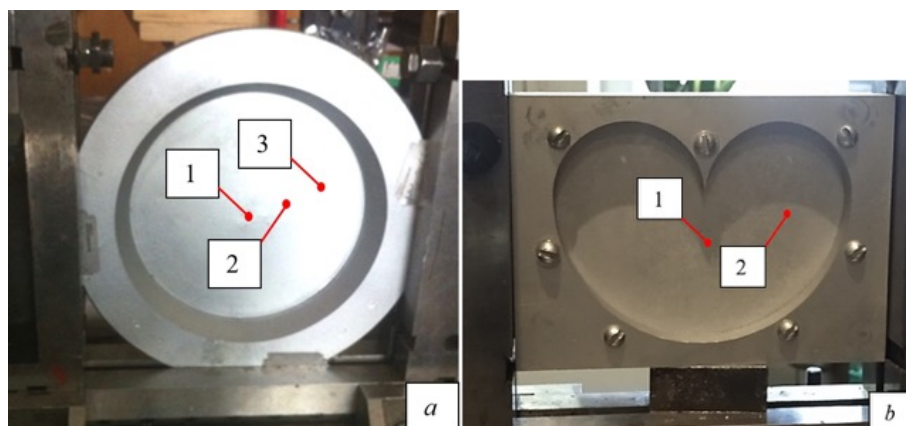
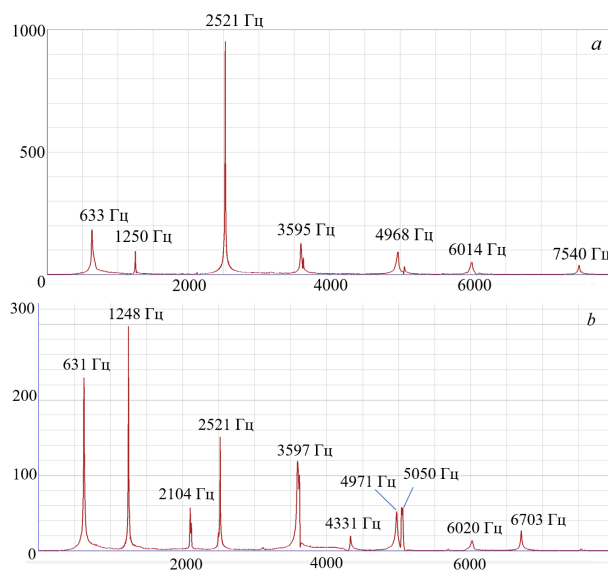


Рис. 1 Тестовые образцы (а) - круглая пластина, (b) - пластина-кардиоида (точки с номерами 1-3 показывает место ударного возбуждения пластины)

Применение ударного возбуждения для выявления собственных частот

В случае образца в виде круглой пластины, жестко заземленной по краю хорошо известны частотные уравнения и формы колебаний. Для образца пластины в форме кардиоиды такие данные отсутствуют. Чтобы оперативно определить спектр частот такой пластины используется ударное возбуждение [9] в сочетании с регистрацией спектра с помощью спектроанализатора, а форм колебаний - с помощью электронной спекл-интерферометрии. Проиллюстрируем этот подход вначале на круглой пластине. Так как спектр частот состоит из двух групп, одна из которых имеет в качестве узловых линий диаметры, а другая окружности, коаксиальной заданному контуру, то единственным ударным возбуждением проявить все такие частоты не удастся. Поэтому в эксперименте выполнялись несколько ударных возбуждений в точках, показанных на рис. 1 (а). По полученным спектрам, приведенным на рис. 2, видно, что при ударе с растущим эксцентриситетом спектр становится богаче. Амплитуды экспериментальных спектров акустического давления по осям ординат отложены в единицах электрического сигнала, поступающего с микрофона (мВ).



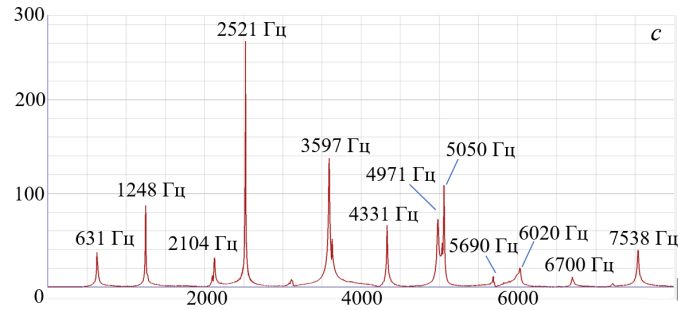


Рис. 2 Экспериментальные спектры акустического давления в диапазоне частот до 8000 Гц: (а) – ударное возбуждение в точке 1, (b) - в точке 2, (с) - в точке 3

На рис. 3 приведены некоторые характерные спекл-интерферограммы резонансных колебаний круглой пластины, соответствующие первым двум собственным частотам. Возбуждение резонансов как круглой, так и кардиоидной пластины осуществлялось с помощью бесконтактного электромагнитного возбудителя вибрации.

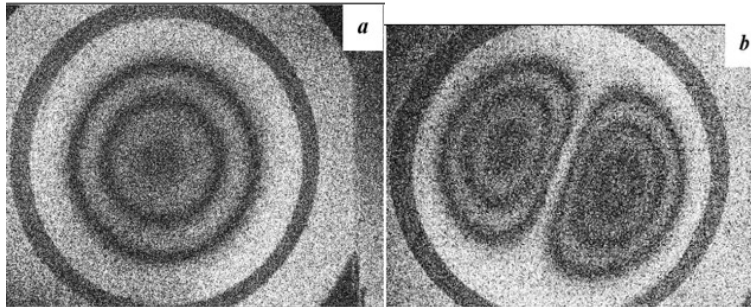
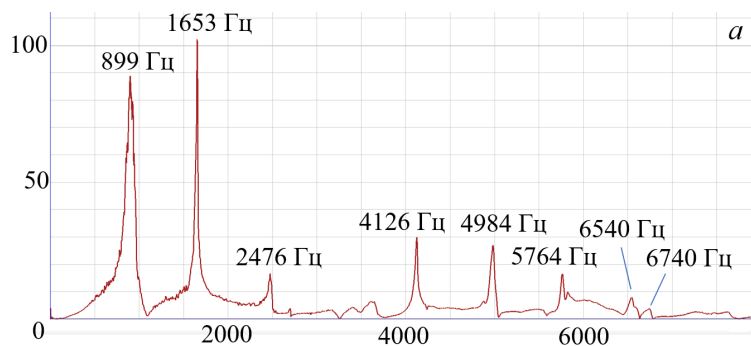


Рис. 3 Спекл-интерферограмма пластины: (а) – при 1-ой собственной частоте 631 Гц, (b) – при второй собственной частоте 1248 Гц

Полученные экспериментальные частоты и формы колебаний согласуются с теоретическими при соответствующем подборе параметров пластины.

Статический изгиб пластины в форме кардиоиды изучался в работе [10]. Теоретическая модель колебаний пластины-кардиоиды, насколько известно авторам, до сих пор не построена. Экспериментальное определение спектра частот пластины-кардиоиды выполнялось также как и круглой пластины; точки возбуждения колебаний представлены на рис.1 (б). Соответствующие спектры приведены на рис. 4 (а,б), из которых видно, что при ударе по точке 1, находящейся в середине оси симметрии пластины, отчетливо регистрируется 8 резонансных частот, а при ударе по точке 2 в середине площади одной из половин кардиоиды проявляется 11 резонансных частот.



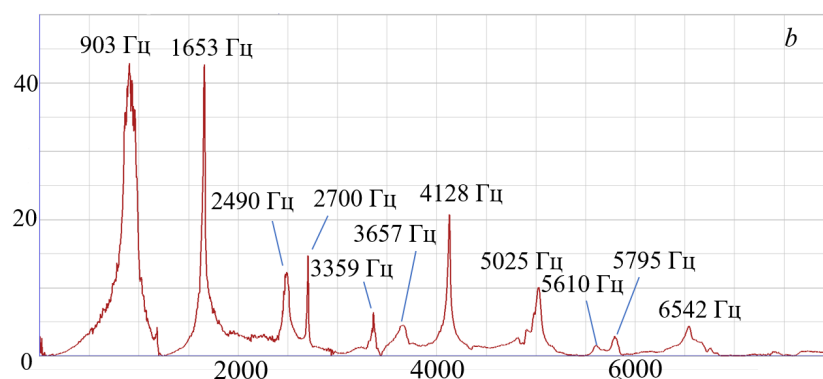


Рис. 4 Экспериментальный спектр акустического давления в диапазоне частот 0-8000 Гц: (а) – ударное возбуждение в точке 1, (b) - ударное возбуждение в точке 2

Наиболее интересными здесь являются первая и вторая резонансные частоты и формы колебаний. На рис. 5 приведены спекл-интерферограммы резонансных колебаний пластины кардиоиды, соответствующие первым двум собственным формам.

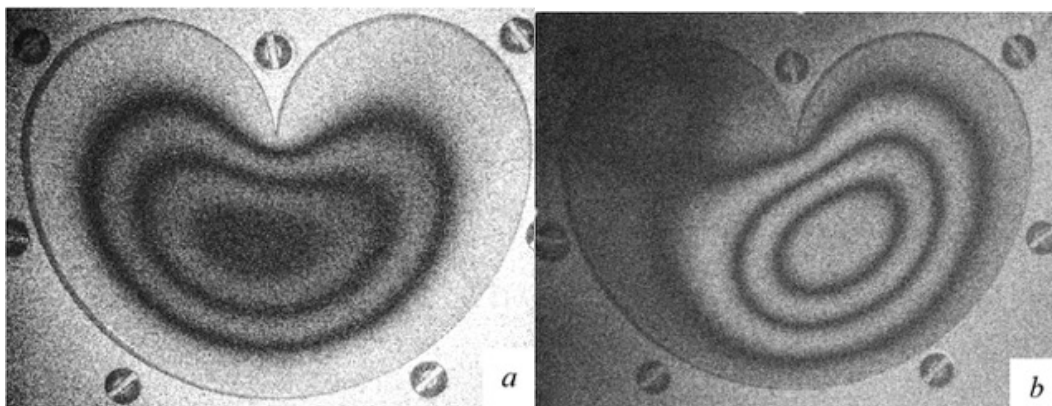


Рис. 5. Спекл-интерферограмма форм резонансных колебаний пластины-кардиоиды: (а) - на первой собственной частоте (899 Гц), (b) - на второй собственной частоте (1653 Гц) точке 1

Видно, что первая форма колебаний подобна аналогичной форме для круглой пластины; ее линии уровня коаксиальны заделке. Однако, в отличие от круглой пластины, вторая форма колебаний возбуждается преимущественно в той части пластины, на которую воздействует вибратор. Отсутствует вторая половина формы колебаний, подобная второй форме колебаний для круглой пластины изображенной на рис. 3б. Из этого сравнения может быть сделан вывод, что полюс кардиоиды препятствует передаче колебаний с возбуждаемой половины пластины на вторую половину, несмотря на то, что ожидаемая форма колебаний должна быть подобна соответствующей форме колебаний круглой пластины.

Создание искусственного дефекта и его диагностика

На рис. 6 (а) представлена фотография спекл-интерферограммы формы резонансных поперечных колебаний пластины – кардиоиды на первой собственной частоте – 899 Гц.

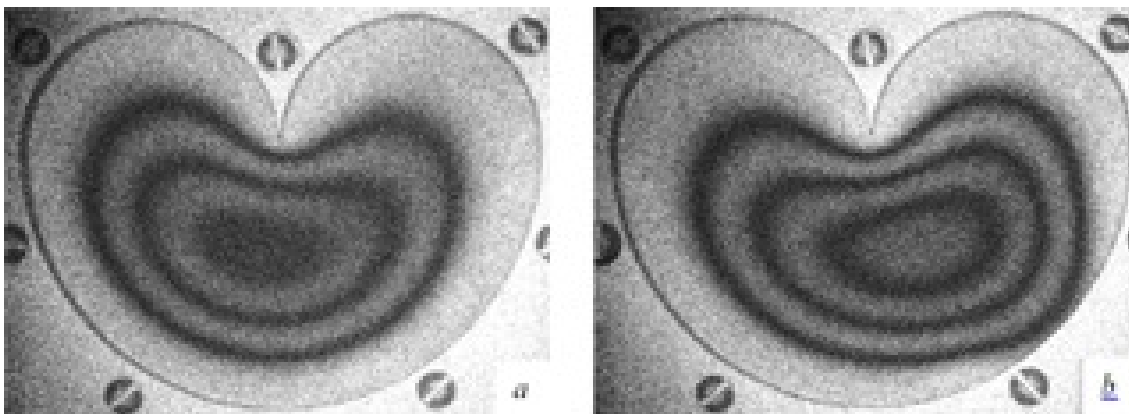


Рис.6 . Спекл-интерферограмма первой формы колебаний пластины в форме кардиоиды: а - при полной затяжке всех винтов крепления контура, б - при ослабленной затяжке двух винтов заделки

Полученная спекл-интерферограмма формы резонансных колебаний пластины представляет собой регулярную картину чередующихся темных и светлых полос, отражающих расположение линий уровня резонансного прогиба пластины с шагом по высоте, равным половине длины волны излучения примененного в интерферометре лазера (в данном случае - твердотельного зелёного лазера - этот шаг составляет 0.266 мкм). Видно, что зарегистрированные интерференционные полосы визуальны подобны контуру границы, прогиб на которой равен нулю, и огибают её на некотором расстоянии.

Характерным дефектом, возникающим при вибрации конструкций, является локальное ослабление её закрепления. Здесь такой дефект моделировался снижением затяжки двух рядом стоящих (внизу справа) винтов крепления пластины. Это, с одной стороны, вызывало снижение резонансной частоты колебаний пластины, а с другой, - искажение системы интерференционных полос в окрестности заделки. В данном случае частота снизилась до 875 Гц, а спекл-интерферограмма исказилась так, что на ней появился «флюс», указывающий на место ослабления заделки. На рис. 6 (b) показана эта интерферограмма.

По приведённым признакам можно контролировать как степень локального ослабления граничных условий, так и степень «залечивания» дефекта путём затягивания ослабленных винтов в заделке. Соответствующая интерферограмма после затяжки ослабленных винтов мало отличается от изображённой на рис. 6 (а). Однако она была получена не при частоте 899 Гц, а при 910 Гц, что свидетельствует о перетяжке слабо затянутых винтов в заделке по сравнению с исходным уровнем. Аналогичная диагностика и определение степени залечивания дефектов производилась и в случае создания нескольких дефектов такого типа.

Заключение

Проведенное тестирование показало преимущества объединения виброакустической и спекл-интерферометрической диагностики дефектов на примере диагностики дефектов в закреплении границы тестовой пластины. Важный признак такого дефекта - снижение резонансной частоты колебаний - является лишь интегральным признаком, по которому невозможно определить конкретное место расположения дефекта на контуре заделки. В то же время по конфигурации полос спекл-интерферограммы,

полученной на сниженной резонансной частоте колебаний пластины, однозначно определяется место расположения дефекта заделки контура пластины, после устранения которого восстанавливается исходная собственная частота колебаний пластины и спекл-интерферограмма соответствующей формы резонансных колебаний. Всё это показывает полезность объединения аппаратуры и методик синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации для диагностики дефектов элементов конструкций и степени их залечивания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах / Г.Н. Чернышев, А.Л. Попов, В.М. Козинцев [и др.]. Москва: Наука, Физматлит, 1996. 240 с.
- [2] Попов А.Л., Козинцев В.М., Челюбеев Д.А. Левитин А.Л. Метод отверстия в диагностике остаточных напряжений // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 2. С. 210–238.
- [3] Schajer G. S. Hole-drilling residual stress measurements at 75: origins, advances, opportunities // Experimental Mechanics. 2010. Vol. 50, no. 2. P. 245–253.
- [4] Клюев В.В. Неразрушающий контроль. Справочник в 8 томах. Москва: Машиностроение, 2008. 323 с.
- [5] Квартальнов С. В. Акустические методы контроля строительных конструкций. Метод акустической эмиссии // Аллея науки. 2018. Т. 1, № 11(27). С. 810–813.
- [6] Осипов М.Н., Щеглов Ю.Д. Некоторые аспекты применения спекл-интерферометрии одиночного спекла в научных и прикладных исследованиях // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18, № 4(4). С. 821–826.
- [7] Жужукин А.И., Непеин К.Г. Спекл-интерферометрическая установка для исследования частот и форм колебаний рабочих колес турбомашин // Инженерный журнал: наука и инновации. 2022. № 4(124). С. 1–11.
- [8] Владимиров А.П. Динамическая спекл-интерферометрия микроскопических и макроскопических процессов в деформируемых средах // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2015. № 6. С. 27–57.
- [9] Особенности экспериментального определения частот и форм собственных колебаний цилиндрической оболочки / И.С. Пономарев, Махнович, Пантеев С. В. [и др.] // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. 2016. № 3(64). С. 44–58.
- [10] Gaydon F.A., Shepherd W.M. The nature of the displacement in a slit plate subject to transverse forces // International Journal of Engineering Science. 1971. Т. 9. С. 621–629.

A. L. Popov¹, V. M. Kozincev¹, D. A. Chelyubeev¹, A. A. Azarov²

**OPTICAL-ACOUSTIC DIAGNOSTICS OF DEFECTS OF ELEMENTS
THIN-WALLED STRUCTURES AND THE DEGREE OF THEIR HEALING**

¹*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

Abstract. A method of synchronous removal of vibroacoustic and speckle interferometric information for the diagnosis of defects is proposed on the example of the diagnosis of defects in fixing the boundary of the test plate in the form of a cardioid. The method makes it possible to judge not only the presence of defects by changing the spectral composition of its vibration and sound fields, but also makes it possible to determine the location of the defect by distortion of the speckle interferogram of the field of plate surface changes.

Keywords: optical-acoustic diagnostics, acoustic spectroscopy, electron speckle interferometry.

REFERENCES

- [1] Thin-walled spatial systems / G. N. Chernyshev, A. L. Popov, V. M. Kozintsev et al. Moscow: Gosstroyizdat, 1996. 240 p. (in Russian).
- [2] Hole-Drilling Method in Residual Stress Diagnostics / A. L. Popov, V. M. Kozintsev, D. A. Chelyubeev et al. // Applied Mathematics and Mechanics. 2021. Vol. 85. P. 210–238.
- [3] Schajer G. S. Hole-drilling residual stress measurements at 75: origins, advances, opportunities // Experimental Mechanics. 2010. Vol. 50, no. 2. P. 245–253.
- [4] Klyuev V. V. Non-destructive testing. Handbook in 8 volumes. Moscow: Mashinostroenie, 2008. 323 p. (in Russian).
- [5] Kwartal'nov S. V. Acoustic methods of control of building structures. Acoustic emission method // Alley of Science. 2018. Vol. 1, no. 11(27). P. 810–813. (in Russian).
- [6] Osipov M. N., Shcheglov Y. D. Some aspects of the application of speckle interferometry of single speckle in scientific and applied research // Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2016. Vol. 18, no. 4(4). P. 44–58. (in Russian).
- [7] Zhuzhukin A. I., Nepein K. G. Speckle interferometric installation for the study of frequencies and vibration patterns of impellers of turbomachines // Engineering Journal: Science and Innovation. 2022. no. 4(124). P. 1–11. (in Russian).
- [8] Vladimirov A. P. Dynamic speckle interferometry of microscopic and macroscopic processes in deformable media // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2015. no. 6. P. 27–57. (in Russian).

Popov Alexander Leonidovich Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Kozintsev Viktor Mikhailovich Cand. Sci. Phys. & Math., Senior researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Chelyubeev Dmitry Anatolyevich Leading engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Azarov Artur Alexandrovich postgraduate student, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

-
- [9] Ponomarev I. S., Makhnovich S. V., Pantileev A. S. Features of experimental determination of frequencies and forms of proper oscillations of a cylindrical shell // Scientific Bulletin of Novosibirsk State Technical University. 2016. no. 3(64). P. 44–58. (in Russian).
- [10] Gaydon F. A., Shepherd W. M. The nature of the displacement in a slit plate subject to transverse forces // International Journal of Engineering Science. 1971. Vol. 9. P. 621–629.

А. И. Сумин, А. А. Богер, В. А. Сумин, С. В. Рябов

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕД ПРИ НАЛОЖЕННЫХ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия*

Аннотация. В работе изучаются аспекты устойчивости нелинейно-упругих тел по отношению к наложенным конечным деформациям. Вопрос изучения основного процесса деформирования исходной среды сведен к решению нелинейной краевой задачи с переменными коэффициентами для конечных возмущений. Решения для возмущений перемещений выбираются в виде рядов содержащих собственные функции. С помощью принципа возможных перемещений вопрос об устойчивости основного состояния сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для данной системы построена функция, которая, при некоторых ограничениях на начальные возмущения будет функцией Ляпунова, которая используется для нахождения областей устойчивости.

Ключевые слова: устойчивость, нелинейная-упругая среда, конечные возмущения, упругие потенциалы, функция Ляпунова, области устойчивости, конечные деформации, устойчивость решения, нулевое решение, точки бифуркации.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.004

УДК: 539.3

© Сумин А. И., Богер А. А., Сумин В. А., Рябов С. В., 2022

Сумин Александр Иванович

e-mail: sumin_ai@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия.

Богер Андрей Александрович

e-mail: a-boger@yandex.ru, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия.

Сумин Виктор Александрович

e-mail: vsum@gambler.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия.

Рябов Сергей Владимирович

e-mail: mg1.aka@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.12.2022

Введение

Исследование устойчивости по отношению к конечным возмущениям важны как для снижения веса конструкций и объектов, но для нахождения оценки допустимой границы относительно конечных возмущений при заданных параметрах рассматриваемой конструкции. Можно сказать, что развитие теории устойчивости при конечных возмущениях позволяет найти связь этой теории с теорией устойчивости движения по Ляпунову, а также с теорией бифуркаций. Построение конечных последовательностей точек бифуркации доказывают, что в отличие от применения теорий устойчивости по отношению к малым возмущениям, которые определяют единственную точку, всегда существует последовательность устойчивых равновесных состояний.

Материалы и методы

Согласно работе [1] приведем основные уравнения для исследования устойчивости нелинейно-упругих тел по отношению к конечным возмущениям, которые для основного состояния, запишутся следующим образом.

$$\nabla_i [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m] + \nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] + \rho_0 X^m - \rho_0 \ddot{u}^m = 0; \quad (1)$$

$$[(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m + S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] N_i^0 = P^m. \quad (2)$$

Предполагается, что плотность и нормаль к поверхности в деформированном состоянии не возмущаются.

Составим вариационное уравнение [2–8] метода Бубнова-Галеркина, соответствующее нелинейной краевой задаче, заданной уравнениями (1) – (2). Для этого, будем трактовать эти уравнения как уравнения принципа возможных перемещений, учитывая, что левые части уравнений (1) представляют собой взятые с обратным знаком компоненты некоторых объемных сил, а левые части уравнений (2) – компоненты некоторых поверхностных сил, составим условия, чтобы работа этих сил на возможных перемещениях δu_m ($m = 1, 2, 3$) была равна нулю

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \nabla_i [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m] + \nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] + \rho_0 X^m - \rho_0 \ddot{u}^m \right\} \delta u_m dV + \\ & + \int_S \left\{ [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m + S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] N_i^0 - P^m \right\} \delta u_m = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) перепишем следующим образом

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \nabla_i [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m] + \nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \right\} \delta u_m dV + \\ & + \rho_0 \int_V X^m \delta u_m dV - \rho_0 \int_V \ddot{u}^m \delta u_m dV + \\ & + \int_V \left\{ [(S^{oin} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \right\} N_i^0 \delta u_m dV - \int_S p^m \delta u_m dS = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя формулу Гаусса-Остроградского, преобразуем первый интеграл в выражении (5)

$$\begin{aligned} & - \int_V \{ \nabla_i [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + \nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} \delta u_m dV = \\ & = - \int_S \{ [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} N_i^0 \delta u_m dS + \\ & + \int_V \{ [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} \nabla_i (\delta u_m) dV. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\begin{aligned} & \int_V \{ [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} \nabla_i (\delta u_m) dV - \\ & - \rho_0 \int_V X^m \delta u_m dV + \rho_0 \int_V \ddot{u}^m \delta u_m dV - \int_S P^m \delta u_m dS = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем искать решение нелинейной краевой задачи в виде ряда

$$u_j(\xi_i, t) = \sum_m f_m(t) \cdot \varphi_j^m(\xi_i), \quad (j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots); \quad (7)$$

где $f_j(t)$ – неопределенные коэффициенты, зависящие от времени; $\varphi_m^j(\xi_i)$ – функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям для $u_m(\xi_i, t)$. Здесь, как и ранее, по повторяющимся индексам осуществляется суммирование от 1 до 3, если размерность индекса специально не оговорена.

В качестве вариаций примем выражения

$$\delta u_j = \sum_m \varphi_j^m(\xi_i) \cdot \delta f_m(t). \quad (8)$$

Рассмотрение сходимости ряда (7) представляет большие трудности. В настоящее время нет удовлетворительного доказательства сходимости ряда метода Бубнова-Галеркина, что, однако не мешает использованию этого способа в практических расчетах. В качестве системы функций $\varphi_m^j(\xi_i)$, будем брать известные формы, соответствующие линеаризованной задаче. Достаточным условием сходимости ряда (7), является [4] условие полноты системы функций $\varphi_m^j(\xi_i)$.

Подставляя выражения (8) в (6), получим в силу произвольности коэффициентов для каждого момента времени уравнения

$$\begin{aligned} & \int_V \{ [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \} \nabla_i (\varphi_{mj}) dV - \\ & - \rho_0 \int_V X^m \varphi_{mj} dV + \rho_0 \int_V \ddot{u}^m \varphi_{mj} dV - \int_S P^m \varphi_{mj} dS = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Возмущения объемных и поверхностных сил представимы в виде [4]

$$X^m = M_1^{m\alpha} u_\alpha + M_2^{m\alpha} \dot{u}_\alpha;$$

$$P^m = M_3^{m\alpha} u_\alpha + M_4^{m\alpha} \dot{u}_\alpha, \quad (10)$$

где $M_i^{m\alpha}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — линейные дифференциальные операторы по переменным ξ_i .

Так как в каждое из слагаемых соотношения [1] возмущения перемещений входят в степени, соответствующей цифре в скобках, то после подстановки в соответствующие соотношения [1] в общем случае можно записать

$$\begin{aligned} S^{in}(1) &= f_p \cdot S^{inp}; & S^{in}(2) &= f_p \cdot f_l \cdot S^{inpl}; \\ S^{in}(3) &= f_p \cdot f_l \cdot f_r \cdot S^{inplr}, \dots, & & \left(\sum_1^\infty p, l, r, \dots \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Вид S^{inp} , S^{inpl} , S^{inplr} , ... конкретизируются заданием формы упругого потенциала.

Подставляя полученные соотношения приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $f_k(t)$ в форме

$$A_p^k \ddot{f}_k + B_p^k \dot{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + \dots = 0, \quad (12)$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} A_p^k &= \rho_0 \int_V \varphi_p^m \varphi_m^k dV; \\ B_p^k &= - \int_V \varphi_{mp} M_2^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dV - \int_S \varphi_{mp} M_4^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dS; \\ C_p^k &= \int_V \left[S^{0in} \nabla_n \varphi_p^m + g_{lp} S^{inl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_l \varphi_m^k dV - \\ &\quad - \rho_0 \int_V \varphi_{mp} M_2^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dV - \rho_0 \int_V \varphi_{mp} M_4^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dS; \\ D_p^{kd} &= \int_V \left[S^{ind} \nabla_n \varphi^{mk} + S^{indk} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_l \varphi_{mp} dV; \\ L_p^{kdr} &= \int_V \left[S^{indk} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indkr} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_l \varphi_{mp} dV; \\ p, k, d, r, \dots &= 1, 2, 3, \dots \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Если пренебречь возмущениями массовых и поверхностных сил, что соответствует случаю, когда на тело действуют "мертвые" нагрузки, то в выражениях (13) все слагаемые, содержащие операторы $M_i^{m\alpha}$, обратятся в ноль и система уравнений (12) запишется в форме

$$A_p^k \ddot{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + \dots = 0. \quad (14)$$

Таким образом, вопрос об устойчивости основного процесса деформирования нелинейно-упругой среды свелся к вопросу об устойчивости нулевого решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида (12) в случае "следающих" нагрузок и соответственно, (14) в случае "мертвых" нагрузок.

Как видно из (13), коэффициенты нелинейной системы уравнений (12) определяются через полную систему функций, а также через компоненты симметричного тензора напряжений. Ввиду этого, а также в силу произвольности функций времени $f_l(t)$ коэффициенты (13) системы уравнений (12) будут симметричны относительно перестановки индексов.

Умножим обе части системы уравнений (12) справа на \dot{f}_p

$$A_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + B_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + C_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + D_p^{kd} \dot{f}_k \dot{f}_d \dot{f}_p + L_p^{kdr} \dot{f}_k \dot{f}_d \dot{f}_r \dot{f}_p + \dots = 0. \quad (15)$$

Ввиду симметрии коэффициентов (13) систему уравнений (12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} A_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} \dot{f}_k \dot{f}_p \dot{f}_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} \dot{f}_k \dot{f}_p \dot{f}_d \dot{f}_r + \dots \right] = \\ = -B_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p, \quad (p, k, d, \dots = 1, 2, \dots \infty). \end{aligned}$$

В дальнейшем будем предполагать не отрицательность квадратичной формы $F = B_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p$, что соответствует присутствию диссипативных сил [6].

Введем функцию

$$\Pi = \frac{1}{2} A_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} \dot{f}_k \dot{f}_p \dot{f}_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} \dot{f}_k \dot{f}_p \dot{f}_d \dot{f}_r + \dots, \quad \left(\sum_1^\infty p, k, d, \dots \right). \quad (16)$$

Если функция Π будет положительно определенной для тех значений координат и скоростей, которые не превосходят величин, найденных из соотношений [2]

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{f}_l} \right)_{t=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial f_l} \right)_{t=0} = 0, \quad (17)$$

то согласно первой теореме Ляпунова об устойчивости невозмущенное состояние будет устойчиво в этой области, так как производная от функции Π по времени, в силу системы (15), неположительна [6].

Соотношения (17) дают систему уравнений для определения величин начальных возмущений, при которых тело может перейти в новое положение равновесия

$$A_p^k \dot{f}_k + C_p^k \dot{f}_k + D_p^{kd} \dot{f}_k \dot{f}_d + L_p^{kdr} \dot{f}_k \dot{f}_d \dot{f}_r + \dots = 0, \quad p, k, d, \dots = 1, 2, 3, \dots \infty. \quad (18)$$

Система уравнений (17) соответствует аналогичным соотношениям, полученным в [5,6] при исследовании задачи в динамической постановке. Заметим, что полученный выше критерий устойчивости основного состояния соответствует статической задаче при динамическом подходе.

Рассмотрим N -мерное пространство начальных возмущений. Тогда (18) есть система N уравнений относительно N неизвестных величин возмущений f_1, f_2, \dots, f_N .

Функция Π в N -мерном пространстве начальных возмущений будет представлять собой некоторую гиперповерхность. Если вписать в эту гиперповерхность гиперсферу радиуса

$$|f| = \min \{|f_1|, \dots, |f_N|\}, \quad (19)$$

то, при найденном $|f|$ нулевое решение системы уравнений (18) будет устойчиво, и, следовательно, будет устойчив и основной процесс деформирования.

Система уравнений (18) определяет новое положение равновесия тела, которое, очевидно, будет неустойчивым. Действительно, если перенести начало координат в точку $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$, найденную из (18), то в окрестности этой точки функция Π будет принимать отрицательные значения и, согласно первой теореме Ляпунова о неустойчивости, основной процесс деформирования будет неустойчивым, так как знак функции Π будет совпадать со знаком ее производной по времени в силу системы (15).

Таким образом, для определения области возмущений, в которой основной процесс деформирования будет устойчив, достаточно решить систему уравнений (15) относительно $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ и проверить будет ли для этих значений положительна функция Π , имеющая вид (16).

Таким образом, в зависимости от уравнений состояния могут быть записаны краевые задачи, соответственно, для сжимаемых и несжимаемых нелинейно-упругих тел, относительно возмущений перемещений. Каждая из задач будет представлять собой нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно возмущений перемещений. Это следует из того, что возмущения всех неизвестных величин E_{ij} , S^{ij} , ..., как показано выше, в итоге выражаются через возмущения перемещений. Решить эти задачи даже при выборе простейшей формы упругого потенциала прямыми методами не представляется возможным, поэтому приходится прибегать к приближенным методам. Аналогичные задачи могут быть решены и для нелинейно-вязкоупругих тел.

Выведем критерии устойчивости для различного типа потенциалов.

а) Рассмотрим нелинейно-упругое тело, описываемое потенциалом Мурнагана. В этом случае из соотношений для величин возмущений компонент тензора напряжений имеем

$$S^{ij} = g^{ij}(\lambda A_1 + 2aA_1 + aA_1^2 + bA_2) + 2g^{ik}\varepsilon_k^{0i}bA_1 + 2\mu g^{ik}\varepsilon_k^j + b g^{ij}(A_1^0 + A_1) + c\varepsilon_k^{0i}\varepsilon_l^k g^{lj} + c\varepsilon_k^i\varepsilon_l^{0k}g^{lj} + c\varepsilon_k^i\varepsilon_l^k g^{lj}. \quad (20)$$

Подставляя в соотношения (20) выражения для соответствующих компонент, получим

$$S^{ij} = S^{ij}(1) + S^{ij}(2) + S^{ij}(3) + S^{ij}(4), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} S^{ij}(1) &= [g^{ij}(\lambda + 2aA_1^0) + 2g^{il}\varepsilon_l^{0j}]\varepsilon_s^s(1) + g^{ij}b[\varepsilon_l^{0k}\varepsilon_k^l(1) + \varepsilon_k^{0l}\varepsilon_l^k(1)] + \\ &\quad + 2(\mu + bA_1^0)\varepsilon_l^i(1)g^{lj} + c\varepsilon_k^{0i}\varepsilon_l^k(1)g^{lj} + c\varepsilon_k^l(1)\varepsilon_l^{0k}g^{lj}; \\ S^{ij}(2) &= [g^{ij}(\lambda + 2aA_1^0) + 2\varepsilon_l^{0i}g^{lj}b]\varepsilon_s^s(2) + g^{ij}a\varepsilon_s^s(2) + \\ &\quad + g^{ij}b[\varepsilon_l^{0k}\varepsilon_k^l(2) + \varepsilon_k^{0l}\varepsilon_l^k(2) + \varepsilon_l^k(1)\varepsilon_k^l(1)] + 2(\mu + bA_1^0)\varepsilon_l^i(2)g^{lj} + \\ &\quad + c\varepsilon_k^{0i}\varepsilon_l^k(2)g^{lj} + c\varepsilon_k^i(2)\varepsilon_l^{0k}g^{lj} + c\varepsilon_k^i(1)\varepsilon_l^k(1)g^{lj} + 2b\varepsilon_l^i(1)\varepsilon_s^s(1)g^{lj}; \\ S^{ij}(3) &= g^{ij}a\varepsilon_s^s(1)\varepsilon_k^k(2) + g^{ij}b[\varepsilon_l^k(1)\varepsilon_k^l(2) + \varepsilon_l^k(2)\varepsilon_k^l(1)] + \\ &\quad + c[\varepsilon_k^i(1)\varepsilon_l^k(2)g^{ij} + \varepsilon_k^i(2)\varepsilon_l^k(1)g^{ij}] + 2b\varepsilon_l^i(1)\varepsilon_s^s(2)g^{lj} + 2b\varepsilon_l^i(2)\varepsilon_s^s(1)g^{lj}; \\ S^{ij}(4) &= g^{ij}[a\varepsilon_s^s(2) + b\varepsilon_k^k(2)] + c\varepsilon_k^i(2)\varepsilon_l^k(2)g^{lj} + 2b\varepsilon_l^i(2)\varepsilon_s^s(2)g^{lj}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из соотношений для смешанных компонент выводим

$$\varepsilon_j^i(1) = \frac{1}{2}g^{il}f_k \left(\nabla_j \varphi_l^k + \nabla_j \varphi_l^k + \nabla_l u^{0n} \nabla_j \varphi_n^k + \nabla_j u^{0n} \nabla_l \varphi_n^k \right) = f_k \varepsilon_j^{ki};$$

$$\varepsilon_j^i(2) = \frac{1}{2}g^{il}f_k f_p \nabla_j \varphi_m^n \nabla_l \varphi_n^k g^{mp} = f_k f_p \varepsilon_j^{kpi};$$

$$k, p, \dots = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22), получим выражения типа (11)

$$S^{ij}(1) = f_p S^{ijp}; \quad S^{ij}(2) = f_p f_l S^{ijpl};$$

$$S^{ij}(3) = f_p f_l f_r S^{ijprl}; \quad S^{ij}(4) = f_p f_l f_r f_k S^{ijprlk};$$

$$i, n = 1, 2, 3; \quad p, l, r, k, \dots = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (24)$$

Здесь

$$S^{kij} = [g^{ij}(\lambda + 2aA_1^0) + 2g^{il}\varepsilon_l^{0j}]\varepsilon_s^{ks} + g^{ij}b[\varepsilon_l^{0m}\varepsilon_m^{kl} + \varepsilon_m^{0l}\varepsilon_l^{mk}] +$$

$$+ g^{lj}[2(\mu + bA_1^0)\varepsilon_l^{ki} + c\varepsilon_m^{0i}\varepsilon_l^{mk} + c\varepsilon_m^{mi}\varepsilon_l^{0k}];$$

$$S^{kpij} = [g^{ij}(\lambda + 2aA_1^0) + 2g^{il}\varepsilon_l^{0j}b]\varepsilon_s^{ks} + g^{ij}a\varepsilon_s^{sk^2} +$$

$$+ g^{ij}b[\varepsilon_l^{0m}\varepsilon_m^{kpl} + \varepsilon_m^{0l}\varepsilon_l^{mpk} + \varepsilon_l^{mk}\varepsilon_m^{pl}] + g^{lj}[2(\mu + bA_1^0)\varepsilon_l^{kpi} +$$

$$+ c\varepsilon_m^{0i}\varepsilon_l^{mpk} + c\varepsilon_m^{ikl}\varepsilon_l^{0m} + c\varepsilon_m^{ki}\varepsilon_l^{pm}] + 2bg^{lj}\varepsilon_l^{ki}\varepsilon_m^{pm};$$

$$S^{kplij} = g^{ij}a\varepsilon_s^{ms}\varepsilon_m^{kpl} + g^{ij}b[\varepsilon_s^{ms}\varepsilon_m^{kpl} + \varepsilon_s^{mps}\varepsilon_m^{kl}] +$$

$$+ cg^{mj}[\varepsilon_s^{ki}\varepsilon_m^{pls} + \varepsilon_s^{kpi}\varepsilon_m^{ls}] + 2bg^{lj}[\varepsilon_s^{ki}\varepsilon_m^{pls} + \varepsilon_s^{kpi}\varepsilon_m^{ls}];$$

$$S^{kpldij} = g^{ij}[a\varepsilon_s^{kps}\varepsilon_m^{ldm} + b\varepsilon_s^{kps}\varepsilon_m^{ldm}] + g^{mj}c\varepsilon_s^{kpi}\varepsilon_m^{lds} + 2b\varepsilon_s^{kpi}\varepsilon_m^{ldm}g^{lj}. \quad (25)$$

Система уравнений типа (12) здесь принимает форму

$$A_p^k \ddot{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + E_p^{kdrl} f_k f_d f_r f_l + R_p^{kdrlt} f_k f_d f_r f_l f_t = 0. \quad (26)$$

При этом коэффициенты этой системы уравнений согласно (15) таковы

$$A_p^k = \rho_0 \int_V \varphi_p^m \varphi_m^k dV;$$

$$C_p^k = \int_V [S^{0in} \nabla_n \varphi_p^m + g_{lp} S^{inl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \nabla_i \varphi_m^k dV;$$

$$D_p^{kd} = \int_V [S^{ind} \nabla_n \varphi^{mk} + S^{indk} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \nabla_i \varphi_{mp} dV;$$

$$L_p^{kdr} = \int_V [S^{indk} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indr k} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \nabla_i \varphi_{mp} dV;$$

$$E_p^{kdrl} = \int_V [S^{indkr} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indrkl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om})] \nabla_i \varphi_{mp} dV;$$

$$R_p^{kdrlt} = \int_V S^{indrkl} \nabla_n \varphi^{mt} \nabla_i \varphi_{mp} dV. \quad (27)$$

Здесь величины $S^{in}, \dots, S^{indrkl}$ определяются по формулам (25). Условием устойчивости будет положительность функции Ляпунова II типа (16), которая для потенциала Мурнагана будет следующей

$$\Pi = \frac{1}{2} A_p^k \ddot{f}_k \ddot{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k f_k f_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} f_k f_p f_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} f_k f_p f_d f_r +$$

$$+\frac{1}{5}E_p^{kdrl} f_k f_p f_d f_r f_l + \frac{1}{6}R_p^{kdrlt} f_k f_p f_d f_r f_l f_t, \quad \left(\sum_1^{\infty} k, p, d, r, l, t \right). \quad (28)$$

При этом допускаемые величины начальных возмущений определяются из системы уравнений типа (15), которая для потенциала Мурнагана принимает вид

$$A_p^k \overset{\bullet}{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + E_p^{kdrl} f_k f_d f_r f_l + \\ + R_p^{kdrlt} f_k f_d f_r f_l f_t = 0, \quad \left(\sum_1^{\infty} k, p, d, r, l, t \right). \quad (29)$$

б) Рассмотрим нелинейно-упругое сжимаемое тело, описываемое двухконстантным потенциалом. Этот потенциал получается из потенциала Мурнагана, если в последнем потенциале положить

$$a = b = c = 0. \quad (30)$$

Тогда соотношения (26) принимают вид

$$S^{kij} = \left(g^{ij} \lambda + 2g^{il} \varepsilon_l^{0j} \right) \varepsilon_s^{ks} + 2\mu \varepsilon_l^{ki} g^{lj}; \\ S^{kpij} = \lambda g^{ij} \varepsilon_s^{kps} + 2\mu \varepsilon_l^{kpi} g^{lj}; \quad S^{kplij} = 0; \quad S^{kpldij} = 0. \quad (31)$$

Учитывая это из (25) выводим отличные от нуля значения коэффициентов системы уравнений типа (15) для двухконстантного потенциала в виде

$$A_p^k = \rho_0 \int_V \varphi_p^m \varphi_m^k dV; \\ C_p^k = \int_V \left[S^{0in} \nabla_n \varphi_p^m + g_{lp} S^{inl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_i \varphi_m^k dV; \\ D_p^{kd} = \int_V \left[S^{ind} \nabla_n \varphi^{mk} + S^{indk} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV; \\ L_p^{kdr} = \int_V S^{indr} \nabla_n \varphi^{mr} \nabla_i \varphi_{mp} dV. \quad (32)$$

Тогда система уравнений (12) принимает конкретный вид

$$A_p^k \overset{\bullet\bullet}{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r = 0. \quad (33)$$

Очевидно, условием устойчивости будет положительность функции Ляпунова вида

$$\Pi = \frac{1}{2} A_p^k \overset{\bullet}{f}_k \overset{\bullet}{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k f_k f_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} f_k f_p f_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} f_k f_p f_d f_r. \quad (34)$$

При этом для величин начальных возмущений, не превосходящих величин, найденных из системы уравнений (33), имеем

$$A_p^k \overset{\bullet}{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r = 0. \quad (35)$$

в) Рассмотрим потенциал Муни. В этом случае компоненты тензора напряжений \mathbf{S} будут вычисляться по формулам (31). Для возмущений компонент тензора напряжений получим

$$S^{ij} = g^{ij} 4\mu A_1 - 4\mu g^{ik} \varepsilon_k^j + p^0 G^{ij} + pG^{0ij} + pG^{ij}.$$

Соотношения компонент тензора напряжений, запишем в виде

$$S^{ij} = S^{ij}(1) + S^{ij}(2) + S^{ij}(3) + S^{ij}(4) + S^{ij}(5),$$

где

$$\begin{aligned} S^{ij}(1) &= 4\mu g^{ij} A_1(1) - 4\mu \varepsilon_k^j(1) + u_4^0 G^{ij}(1) + u_4 G^{0ij}; \\ S^{ij}(2) &= 4\mu g^{ij} A_1(2) - 4\mu \varepsilon_k^j(2) + u_4^0 G^{ij}(2) + u_4 G^{ij}(1); \\ S^{ij}(3) &= u_4^0 G^{ij}(3) + u_4 G^{ij}(2); \\ S^{ij}(4) &= u_4^0 G^{ij}(4) + u_4 G^{ij}(3); \\ S^{ij}(5) &= u_4 G^{ij}(4). \end{aligned} \quad (36)$$

Соотношения (25) примут вид

$$\begin{aligned} G^{ij}(1) &= \varepsilon_{mn}^j \left[2\delta_1^i (\delta_2^n + 2\varepsilon_2^{0n}) \varepsilon_3^{km} + 2\delta_1^i (\delta_2^m + 2\varepsilon_2^{0m}) \varepsilon_3^{kn} - \right. \\ &\quad \left. - 2\delta_2^i (\delta_1^n + 2\varepsilon_1^{0n}) \varepsilon_3^{km} - 2\delta_2^i (\delta_3^m + 2\varepsilon_3^{0m}) \varepsilon_1^{kn} + \right. \\ &\quad \left. + 2\delta_3^i (\delta_1^n + 2\varepsilon_1^{0n}) \varepsilon_2^{km} + 2\delta_3^i (\delta_2^m + 2\varepsilon_2^{0m}) \varepsilon_3^{kn} \right] f_k = G^{ijk} f_k; \\ G^{ij}(2) &= \varepsilon_{mn}^j \left[2\delta_1^i (\delta_2^n + 2\varepsilon_2^{0n}) \varepsilon_3^{kpm} + 2\delta_1^i (\delta_2^m + 2\varepsilon_2^{0m}) \varepsilon_3^{kpn} - \right. \\ &\quad \left. - 2\delta_2^i (\delta_1^n + 2\varepsilon_1^{0n}) \varepsilon_3^{kpm} - 2\delta_2^i (\delta_3^m + 2\varepsilon_3^{0m}) \varepsilon_1^{kpn} + \right. \\ &\quad \left. + 2\delta_3^i (\delta_1^n + 2\varepsilon_1^{0n}) \varepsilon_2^{kpm} + 2\delta_3^i (\delta_2^m + 2\varepsilon_2^{0m}) \varepsilon_3^{kpn} + 4\delta_1^i \varepsilon_2^{kn} \varepsilon_3^{pm} \right] f_k f_p = G^{ijkp} f_k f_p; \\ G^{ij}(3) &= \varepsilon_{mn}^j 4\delta_1^i \left[\varepsilon_2^{kn} \varepsilon_3^{prm} + \varepsilon_2^{kpn} \varepsilon_3^{rm} \right] f_k f_p f_r = G^{ijkpr} f_k f_p f_r; \\ G^{ij}(4) &= \varepsilon_{mn}^j 4\delta_1^i \varepsilon_2^{kpn} \varepsilon_3^{nlm} f_k f_p f_r f_l = G^{ijkprl} f_k f_p f_r f_l, \quad \sum_1^\infty k, p, r, l. \end{aligned} \quad (37)$$

В качестве величины u_4 возьмем

$$u_4 = f_l \left(\varphi_1^l + \varphi_2^l + \varphi_3^l \right) = f_l u_4^l;$$

Для компонент тензора напряжений получим

$$\begin{aligned} S^{ij}(1) &= f_p S^{ijp}; \quad S^{ij}(2) = f_p f_l S^{ijpl}; \\ S^{ij}(3) &= f_p f_l f_r S^{ijplr}; \quad S^{ij}(4) = f_p f_l f_r f_k S^{ijplrk}; \\ S^{ij}(5) &= f_p f_l f_r f_k f_d S^{ijplrk d}; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \sum_1^\infty k, p, r, l, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} S^{kij} &= 4\mu g^{ij} \varepsilon_s^{ks} - 4\mu g^{ik} \varepsilon_m^{kj} + u_4^0 G^{kij} + u_4^k G^{0ij}; \\ S^{kpij} &= 4\mu g^{ij} \varepsilon_s^{kps} - 4\mu g^{ik} \varepsilon_m^{kpj} + u_4^0 G^{kpij} + u_4^k G^{pij}; \\ S^{kplij} &= u_4^0 G^{kplij} + u_4^k G^{plij}; \quad S^{kplrdij} = u_4 G^{kplrdij}; \\ k, p, l, r, d &= 1, 2, 3, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (39)$$

Система уравнений типа (33) принимает вид

$$\begin{aligned} A_p^k \overset{\bullet\bullet}{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + E_p^{kdr l} f_k f_d f_r f_l + \\ + R_p^{kdr l t} f_k f_d f_r f_l f_t + M_p^{kdr l t z} f_k f_d f_r f_l f_t f_z = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Коэффициенты системы уравнений (40) определяются аналогично (32) и имеют вид

$$\begin{aligned}
A_p^k &= \rho_0 \int_V \varphi_p^m \varphi_m^k dV; \\
C_p^k &= \int_V \left[S^{0in} \nabla_n \varphi_p^m + g_{lp} S^{inl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m}) \right] \nabla_i \varphi_m^k dV; \\
D_p^{kd} &= \int_V \left[S^{ind} \nabla_n \varphi^{mk} + S^{indk} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV; \\
L_p^{kdr} &= \int_V \left[S^{indr} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indr} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV; \\
E_p^{kdrl} &= \int_V \left[S^{indr} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indrkl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV; \\
R_p^{kdrlt} &= \int_V \left[S^{indrkl} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indrkl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{om}) \right] \nabla_i \varphi_{mp} dV; \\
M_p^{kdrltz} &= \int_V S^{indrkl} \nabla_n \varphi^{mt} \nabla_i \varphi_{mp} dV.
\end{aligned} \tag{41}$$

Условием устойчивости будет положительность функции Ляпунова типа (34), которая для потенциала Муни будет следующей

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} A_p^k \dot{f}_k \dot{f}_p + \frac{1}{2} C_p^k f_k f_p + \frac{1}{3} D_p^{kd} f_k f_p f_d + \frac{1}{4} L_p^{kdr} f_k f_p f_d f_r + \\
&+ \frac{1}{5} E_p^{kdrl} f_k f_p f_d f_r f_l + \frac{1}{6} R_p^{kdrlt} f_k f_p f_d f_r f_l f_t + \frac{1}{7} M_p^{kdrltz} f_k f_p f_d f_r f_l f_t f_z.
\end{aligned} \tag{42}$$

При этом величины допускаемых начальных возмущений определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
A_p^k \dot{f}_k + C_p^k f_k + D_p^{kd} f_k f_d + L_p^{kdr} f_k f_d f_r + E_p^{kdrl} f_k f_d f_r f_l + \\
+ R_p^{kdrlt} f_k f_d f_r f_l f_t + M_p^{kdrltz} f_k f_d f_r f_l f_t f_z = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

г) Для потенциала Трелоара надо положить $\mu = 0$, а вместо λ подставить E , тогда получим

$$\begin{aligned}
S^{kij} &= u_4^0 G^{kij} + u_4^k G^{0ij}; & S^{kpij} &= u_4^0 G^{kpij} + u_4^k G^{pij}; \\
S^{kplij} &= u_4^0 G^{kplij} + u_4^k G^{plij}; & S^{kprlij} &= u_4^0 G^{kprlij} + u_4^k G^{prlij}; \\
S^{kprldij} &= u_4^0 G^{kprldij} + u_4^k G^{pldrij}; & k, p, l, r, d &= 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{44}$$

Результаты и обсуждение

Очевидно, что соотношения для потенциала Трелоара имеют тот же вид, с той лишь разницей, если в них сделать соответствующие подстановки.

Полученные критерии устойчивости для различных потенциалов Мурнагана, Муни, Трелоара и т.д. в рамках конечных возмущений дают возможность получить величины критических значений параметров нагрузки в зависимости от величины начальных возмущений, которые могут реализовываться в виде конечной последовательности точек бифуркаций на фазовой плоскости. Это существенным образом отличает

предложенный подход к исследованию устойчивости нелинейно-упругих систем от линеаризированных теорий.

Выводы

Достаточно отметить, что для линеаризированных теорий (точной трехмерной линеаризированной теории устойчивости и прикладных теорий) как известно характерно лишь одно значение параметра нагрузки, при котором тело может потерять устойчивость. При этом считается, что при увеличении параметра нагрузки вплоть до критического, материал устойчивости не теряет, а при переходе значения параметра нагрузки через критическое значение происходит потеря устойчивости. Учет конечности возмущений позволяет избежать этого. Условие положительности функции Ляпунова для величин начальных возмущений, найденных из условий вида (44), дает возможность для каждого значения параметра нагрузки находить такую область возмущений, в которой невозмущенное состояние будет устойчиво. И наоборот, задавая область возмущений, мы можем найти такие значения параметра нагрузки, при которых невозмущенное состояние будет устойчиво. Заметим, что развитый в настоящей главе подход к исследованию устойчивости нелинейно-упругих систем применим как в случае, если на тело действуют «мертвые» нагрузки, так и в случае, если на тело действуют «следящие» нагрузки, то есть как для консервативных, так и не консервативных внешних нагрузок.

Бесспорно, что разработанный подход к исследованию устойчивости нелинейно-упругих сред в «большом» позволяет исследовать не только докритическое поведение систем, но и послекритическое. Однако последнее связано с проведением достаточно трудоемкого вычислительного эксперимента, результаты которого в рассмотренном классе задач не имеют, как представляется практического смысла. По-видимому, это существенно в задачах сейсмологии, горной механики, тонкостенных элементах конструкций и т.п.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sumin A. I., Boger A. A., Sumin V. A. Nonlinear dynamics in problems of stability of complex media // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. 03. Т. 973. с. 012019.
- [2] Stability of a nonlinear elastic plate under uniaxial loading with respect to finite perturbations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin [и др.] // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. 04. Т. 1203. с. 012025.
- [3] Torsion stability of a cylinder with circular and elliptical section under finite perturbations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin [и др.] // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. 03. Т. 1479. с. 012138.
- [4] Stability of a three-dimensional plate made of a nonlinear viscoelastic material under superimposed finite deformations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin [и др.] // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. 05. Т. 1902. с. 012025.
- [5] Сумин А.И. Спорыхин А.Н. Нелинейная динамика в задачах устойчивости механики сложных сред. Academic publishing: LAP LAMBERT, 2014. 173 с.
- [6] Sporykhin AN, Sumin AI. On new phenomena in the theory of stability of nonlinear media under finite perturbations // (Doc. USSR Academy of Sciences) Series: A. 1982. Т. 8. С. 46–49.
- [7] Sumin A. I. On the question of the stability of a plate made of a nonlinear viscoelastic material with finite deformations imposed // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2010. Т. 3, № 2(8). С. 501–505.
- [8] Guz A. N. Stability of Elastic Bodies at Finite Deformations. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 271 с.

A. I. Sumin, A. A. Boger, V. A. Sumin, S. V. Ryabov

STABILITY OF NONLINEAR ELASTIC MEDIA UNDER IMPOSED FINITE DEFORMATIONS

Military Educational Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia

Abstract. The paper studies aspects of the stability of nonlinear elastic bodies with respect to superimposed finite deformations. The question of studying the basic process of deformation of the initial medium is reduced to solving a nonlinear boundary value problem with variable coefficients for finite perturbations. Solutions for displacement perturbations are selected in the form of series containing eigenfunctions. Using the principle of possible displacements, the question of the stability of the ground state is reduced to the study of the stability of the zero solution of a system of ordinary differential equations with constant coefficients. For this system, a function is constructed, which, with some restrictions on the initial perturbations, will be the Lyapunov function, which is used to find stability regions.

Keywords: stability, nonlinear elastic medium, finite perturbations, elastic potentials, Lyapunov function, stability regions, finite deformations, stability of the solution, zero solution, bifurcation points.

REFERENCES

- [1] Sumin A. I., Boger A. A., Sumin V. A. Nonlinear dynamics in problems of stability of complex media // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 03. Vol. 973. p. 012019.
- [2] Stability of a nonlinear elastic plate under uniaxial loading with respect to finite perturbations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin et al. // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 04. Vol. 1203. p. 012025.
- [3] Torsion stability of a cylinder with circular and elliptical section under finite perturbations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin et al. // Journal of Physics: Conference Series. 2020. 03. Vol. 1479. p. 012138.
- [4] Stability of a three-dimensional plate made of a nonlinear viscoelastic material under superimposed finite deformations / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. I. Sumin et al. // Journal of Physics: Conference Series. 2021. 05. Vol. 1902. p. 012025.

Sumin Alexander Ivanovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Mathematics of the Military Educational and Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia.

Boger Andrey Alexandrovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics of the Military Educational and Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia.

Sumin Viktor Alexandrovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics of the Military Educational and Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia.

Ryabov Sergey Vladimirovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics of the Military Educational and Scientific Center of the Military – Air Forces "Military Air Academy named after Professor N E Zhukovsky and Yu A Gagarin", Voronezh, Russia.

- [5] Sumin A. I., Sporykhin A. N. Nonlinear dynamics in problems of stability of mechanics of complex media. Academic publishing: LAP LAMBERT, 2014. 173 p.
- [6] Sporykhin A., Sumin A. On new phenomena in the theory of stability of nonlinear media under finite perturbations // (Doc. USSR Academy of Sciences) Series: A. 1982. Vol. 8. P. 46–49.
- [7] Sumin A. I. On the question of the stability of a plate made of a nonlinear viscoelastic material with finite deformations imposed // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. Vol. 3, no. 2(8). P. 501–505.
- [8] Guz A. N. Stability of Elastic Bodies at Finite Deformations. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 271 p.

В. Э. Богачева¹, Л. В. Глаголев²

РАЗРЫВ ПО МОДЕ I АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ДИАГОНАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

¹ Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

² КБП им. академика А.Г. Шипунова, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассматривается упругое деформирование композита, состоящей из двух пластин, связанных адгезионным слоем в состоянии плоской деформации. Напряженное состояние слоя рассматривается на основе средних по толщине характеристик. Из общей вариационной постановки с учетом теории Миндлина–Рейснера получена постановка задачи в дифференциальном виде. Показано, что в напряженном состоянии слоя имеет место практическое совпадение двух средних главных напряжений, действующих в направлениях ортогональных отрыву. Установлено, что величина, к которой сходится произведение толщины слоя и удельной свободной энергии при фиксированной внешней нагрузке и предельно малой толщине адгезионного слоя, не зависит от механических свойств адгезива.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, энергетическое произведение, слой взаимодействия, линейный параметр, нормальный отрыв, упругое деформирование.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.005

УДК: 539.375

Введение

Одним из основных разделов современной механики деформируемого твердого тела является механика композиционных материалов. При проведении экспериментов для исследования трещиностойкости адгезионных слоев в качестве образца обычно используют двухконсольную балку. А трещиноподобный дефект в адгезиве моделируют слоем нулевой толщины.

© Богачева В. Э., Глаголев Л. В., 2022

Богачева Виктория Эдуардовна

e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, аспирант кафедры вычислительной механики и математики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Глаголев Леонид Вадимович

e-mail: len4ic92@gmail.com, кандидат физико-математических наук, начальник бюро, АО КБП им. академика А.Г. Шипунова, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00003, <https://rscf.ru/project/22-71-00003/> в Тульском государственном университете.

Поступила 20.11.2022

В работах [1–8] трещиноподобный дефект представляют в виде разреза с характерной толщиной. Для случая зарождения трещины в адгезионном слое, который соединяет тела, по толщине значительно превосходящие слой, адгезионный слой заменяют "слоем взаимодействия" [6–8]. Его механические характеристики соответствуют адгезиву, а толщина задается в виде линейного параметра δ_0 .

В качестве критерия разрушения в работе [7] рассматривают энергетическое произведение. При различии модуля упругости консоли с модулем упругости адгезива и примерном равенстве их коэффициентов Пуассона данная характеристика не имеет существенного различия.

1. Постановка задачи

В качестве образца рассматривается композитная пластина длиной $\ell + a$, состоящий из трех тел (рис. 1). Для консолей 1 и 2 заданы одинаковые толщины h и механические свойства. По длине ℓ тела связаны слоем взаимодействия 3, толщина которого δ_0 . Правый торец слоистого композита жестко закреплен от перемещений. В виде антисимметричной нагрузки на левых торцах консолей 1 и 2 действует изгибающий момент M . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки.

Композитную пластину рассматриваем в состоянии плоской деформации ($\varepsilon_{33} = 0$), а поведение слоя и консолей — в рамках линейной теории упругости.

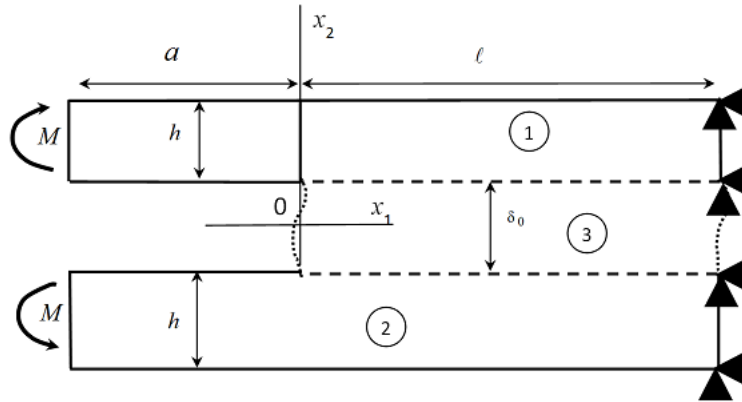


Рис. 1. Композитная пластина

Применив концепцию "слоя взаимодействия", развитую в работах [6–8], для описания взаимодействия слоя 3 с консолями, рассмотрим вариационную форму равновесия тел 1 и 2:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 +$$

$$+ 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + \\
 & + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \delta \mathbf{u} dl,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $\cdot \cdot$ — двойное скалярное умножение; \cdot — скалярное умножение; S_k — площадь поперечного сечения k -го тела; $k = 1, 2$ здесь и далее; L_k — граница приложения внешней нагрузки для k -го тела; u_k^+ — компоненты векторов перемещений верхней границы слоя; u_k^- — нижней границы слоя; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ — тензор средних напряжений слоя; $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — тензор средних деформаций слоя.

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} &= \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2, \\
 \bar{\varepsilon}_{11}(x_1) &= 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left(\frac{u_2^+ - u_2^-}{\delta_0} \right), \\
 \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{21} &= 0.5 \left(\frac{u_1^+ - u_1^-}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x_1} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Считаем, что между границами области 3 и 1, 2 жесткое сцепление, а векторы напряжений по границам слоя равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}(x_1, \delta_0/2); \quad \sigma_{2i}^+ \mathbf{e}_i = -\sigma_{2i}(x_1, \delta_0/2) \mathbf{e}_i; \\
 \mathbf{u}^- &= \mathbf{u}(x_1, -\delta_0/2); \quad \sigma_{2i}^- \mathbf{e}_i = -\sigma_{2i}(x_1, \delta_0/2) \mathbf{e}_i; \quad x_1 \in [0, \ell].
 \end{aligned} \tag{5}$$

где σ_{2i}^+ , σ_{2i}^- — граничные напряжения слоя; \mathbf{e}_i , $i = 1, 2$ — орты осей координат.

В рамках линейной теории упругости уравнения (1) и (2) замкнем определяющими соотношениями в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1 + \nu_k} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} \varepsilon \delta_{ij} \right), \tag{6}$$

где E_k — модуль упругости k -го тела; ν_k — коэффициент Пуассона k -го тела; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ — объемная деформация; δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right). \tag{7}$$

Учитывая геометрию образца и приложенное нагружение, получим следующее ограничение на поле перемещений границ слоя: $u_1^+ = u_1^-$, $u_2^+ = -u_2^-$. В адгезионном слое с учетом (4) и (7) $\bar{\sigma}_{12} = 0$ и для решения системы вариационных уравнений (1)–(2) достаточно ограничиться рассмотрением уравнения:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl. \quad (8)$$

Чтобы упростить задачу и получить аналитическое решение, поле перемещений в консоли 1 определяем согласно распределению Миндлина следующим образом:

$$u_1^{(1)}(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), u_2^{(1)}(x_1, x_2) = u_2^+(x_1), \quad (9)$$

где φ — малый угол поворота материальных нормалей к плоскости $x_2 = \delta_0/2$.

Основываясь на распределении (9), отличные от нуля деформации будут определяться в виде:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = u_1^{+\prime}(x_1) - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{21}^{(1)} = 0.5(u_2^{+\prime}(x_1) - \varphi(x_1)). \quad (10)$$

Обобщенные силы и обобщенный момент имеют следующий вид:

$$Q_{1k}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{1k} dx_2, M_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2. \quad (11)$$

Тогда от вариационного уравнения (8), с учетом поля деформаций (10), приходим к двум системам дифференциальных уравнений для консоли 1:

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} = 0; & x_1 \in [-a; 0), \\ \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; & x_1 \in (0; \ell] \end{cases} \quad (12)$$

с условиями сопряжения в точке $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} u_k^+|_{x_1=-0} &= u_k^+|_{x_1=+0}, \varphi|_{x_1=-0} = \varphi|_{x_1=+0}, \\ Q_{12}^{(1)}|_{x_1=-0} &= Q_{12}^{(1)}|_{x_1=+0}, M_{11}^{(1)}|_{x_1=-0} = M_{11}^{(1)}|_{x_1=+0}, \\ Q_{11}^{(1)}|_{x_1=-0} &= (Q_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, \end{aligned} \quad (13)$$

граничными условиями на правом торце (жесткая заделка):

$$u_1^+(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, u_2^+(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, \varphi(x_1)|_{x_1=\ell} = 0, \quad (14)$$

и на левом торце (изгибающий момент M):

$$Q_{12}^{(1)}|_{x_1=-a} = 0, Q_{11}^{(1)}|_{x_1=-a} = 0, M_{11}^{(1)}|_{x_1=-a} = -M. \quad (15)$$

Напряженное состояние в слое взаимодействия определим из соотношений (4) и (7):

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 u_1^{+\prime} + D_2 u_2^+, \bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 u_1^{+\prime}, \bar{\sigma}_{33} = \nu_3 (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}), \quad (16)$$

где $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$; $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$; $C_1 = \frac{2}{\delta_0} D_1$; $C_2 = \frac{\delta_0}{2} D_2$.

В результате система (12) с учетом напряженного состояния адгезионного слоя (16), условий сопряжения (13) и граничных условий (14)–(15) становится замкнутой. Решение поставленной задачи определяет три неизвестные функции u_1^+ , u_2^+ , φ .

2. Решение задачи

Для нахождения напряженного состояния в вершине слоя ограничимся рассмотрением участка $(0; \ell]$, перенеся граничные условия (15) в точку $x_1 = 0$, используя условия сопряжения (13). Приходим к следующим граничным условиям:

$$Q_{12}^{(1)} \Big|_{x_1=+0} = 0, \left(Q_{11}^{(1)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=+0} = 0, M_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=+0} = -M. \quad (17)$$

С учетом (6), (10), (11) выражения обобщенных сил и момента принимают вид:

$$Q_{11}^{(1)} = Dh \left(u_1^+{}' - \frac{h}{2} \varphi' \right), Q_{12}^{(1)} = Lh (u_2^+{}' - \varphi), M_{11}^{(1)} = Dh^2 \left(\frac{1}{2} u_1^+{}' - \frac{h}{3} \varphi' \right), \quad (18)$$

где $D = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$; $L = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$.

Тогда, учитывая (16), (18), система (12) примет следующий вид:

$$\begin{cases} D \left(\frac{h^2}{2} u_1^+{}'' - \frac{h^3}{3} \varphi'' \right) - Lh (u_2^+{}' - \varphi) = 0; \\ D \left(hu_1^+{}'' - \frac{h^2}{2} \varphi'' \right) + 0.5\delta_0 (D_1 u_1^+{}'' + D_2 u_2^+{}') = 0; \\ Lh (u_2^+{}'' - \varphi') = C_1 u_2^+{}' + C_2 u_1^+{}'. \end{cases} \quad (19)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений 2 порядка (19) на участке $(0; \ell]$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_1^+ = \frac{a_1}{R_1} \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} - \frac{a_2}{R_1} \tilde{C}_3 e^{-R_1 x_1} + \frac{a_3}{R_2} \tilde{C}_4 e^{R_2 x_1} - \frac{a_4}{R_2} \tilde{C}_5 e^{-R_2 x_1} + \frac{C_1}{C_2} S_3 \tilde{C}_1 x_1 + \tilde{C}_6; \\ u_2^+ = \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} + \tilde{C}_3 e^{-R_1 x_1} + \tilde{C}_4 e^{R_2 x_1} + \tilde{C}_5 e^{-R_2 x_1} - S_3 \tilde{C}_1; \\ \varphi = \frac{b_1}{R_1} \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} - \frac{b_2}{R_1} \tilde{C}_3 e^{-R_1 x_1} + \frac{b_3}{R_2} \tilde{C}_4 e^{R_2 x_1} - \frac{b_4}{R_2} \tilde{C}_5 e^{-R_2 x_1}. \end{cases} \quad (20)$$

где $b_i = \frac{(\lambda_i^2 - m_2)}{m_1}$, $i = \overline{1, 4}$; $a_1 = \frac{Lh}{C_2} R_1^2 - \frac{Lh}{C_2} \frac{(\lambda_1^2 - m_2)}{m_1} - \frac{C_1}{C_2}$; $a_2 = \frac{Lh}{C_2} R_1^2 - \frac{Lh}{C_2} \frac{(\lambda_2^2 - m_2)}{m_1} - \frac{C_1}{C_2}$; $a_3 = \frac{Lh}{C_2} R_2^2 - \frac{Lh}{C_2} \frac{(\lambda_3^2 - m_2)}{m_1} - \frac{C_1}{C_2}$; $a_4 = \frac{Lh}{C_2} R_2^2 - \frac{Lh}{C_2} \frac{(\lambda_4^2 - m_2)}{m_1} - \frac{C_1}{C_2}$; $S_2 = \frac{Dh + 0.5\delta_0 D_1}{C_2}$; $S_3 = \frac{1}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2}$; $m_1 = 1 + \frac{Dh}{2LS_2}$; $m_2 = \frac{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2}{Lh S_2}$; $m_3 = -\frac{3\delta_0 D_2 Dh + 12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)}$; $m_4 = \frac{12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)}$; $d^2 = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4$; $\lambda_1 = R_1 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 + d}{2}}$; $\lambda_3 = R_2 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 - d}{2}}$; $\lambda_2 = -R_1$; $\lambda_4 = -R_2$.

Чтобы однозначно определить решение (20), необходимо найти 6 постоянных интегрирования $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, \tilde{C}_5, \tilde{C}_6$ из условий (14), (17), которые образуют систему линейных уравнений в виде:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{R_1} \tilde{C}_2 e^{R_1 \ell} - \frac{a_2}{R_1} \tilde{C}_3 e^{-R_1 \ell} + \frac{a_3}{R_2} \tilde{C}_4 e^{R_2 \ell} - \frac{a_4}{R_2} \tilde{C}_5 e^{-R_2 \ell} + \frac{C_1 S_3}{C_2} \tilde{C}_1 \ell + \tilde{C}_6 = 0; \\ \tilde{C}_2 e^{R_1 \ell} + \tilde{C}_3 e^{-R_1 \ell} + \tilde{C}_4 e^{R_2 \ell} + \tilde{C}_5 e^{-R_2 \ell} - S_3 \tilde{C}_1 = 0; \\ \frac{b_1}{R_1} \tilde{C}_2 e^{R_1 \ell} - \frac{b_2}{R_1} \tilde{C}_3 e^{-R_1 \ell} + \frac{b_3}{R_2} \tilde{C}_4 e^{R_2 \ell} - \frac{b_4}{R_2} \tilde{C}_5 e^{-R_2 \ell} = 0; \\ \frac{R_1^2 - b_1}{R_1} \tilde{C}_2 - \frac{R_1^2 - b_2}{R_1} \tilde{C}_3 + \frac{R_2^2 - b_3}{R_2} \tilde{C}_4 - \frac{R_2^2 - b_4}{R_2} \tilde{C}_5 + \frac{C_1 S_3}{2C_2} \tilde{C}_1 = 0; \\ r_1 \tilde{C}_2 + r_2 \tilde{C}_3 + r_3 \tilde{C}_4 + r_4 \tilde{C}_5 + \left[Dh \frac{C_1}{C_2} + \frac{\delta_0}{2} \left(D_1 \frac{C_1}{C_2} - D_2 \right) \right] S_3 \tilde{C}_1 = 0; \\ \left(\frac{a_1}{2} - \frac{h}{3} b_1 \right) \tilde{C}_2 + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{h}{3} b_2 \right) \tilde{C}_3 + \left(\frac{a_3}{2} - \frac{h}{3} b_3 \right) \tilde{C}_4 + \left(\frac{a_4}{2} - \frac{h}{3} b_4 \right) \tilde{C}_5 = -\frac{M}{Dh^2}. \end{cases} \quad (21)$$

где $r_i = Dh \left(a_i - \frac{h}{2} b_i \right) + \frac{\delta_0}{2} (D_1 a_i + D_2)$, $i = \overline{1, 4}$.

В работе [8] найдено упрощенное аналитическое решение данной задачи.

3. Результаты

У рассматриваемого образца механические характеристики тела 1: $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_1 = 0.3$. А геометрические характеристики будут следующими: $h = 0.05$ м, $\ell = 0.2$ м, $\delta_0 = 10^{-5}$ м при единичном изгибающем моменте $M = 1$ Н·м. Механические характеристики для адгезионного слоя из работы [9] приведем в таблице 1.

	E_3 , Па	ν_3
Araldite AV138	$4.9 \cdot 10^9$	0.35
Araldite 2015	$1.85 \cdot 10^9$	0.33
Sikaforce 7752	$0.49 \cdot 10^9$	0.3

Таблица 1. Механические характеристики адгезивов

На рис. 2 изображено распределение напряжений в адгезионном слое Araldite AV138. График 1 соответствует напряжению $\bar{\sigma}_{11}$, график 2 — напряжению $\bar{\sigma}_{22}$, а график 3 — напряжению $\bar{\sigma}_{33}$. По оси абсцисс (рис. 2) отложена длина консоли, единица измерения величины — метр, по оси ординат — значение напряжения, единица измерения величин — Паскаль.

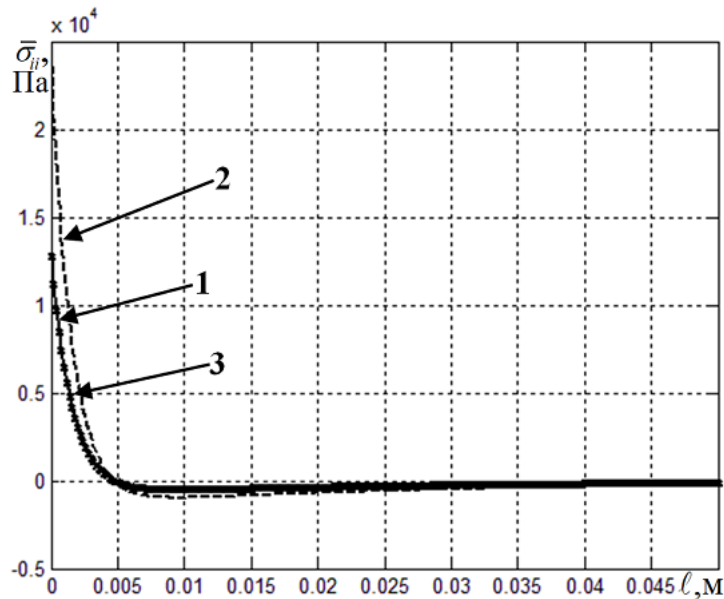
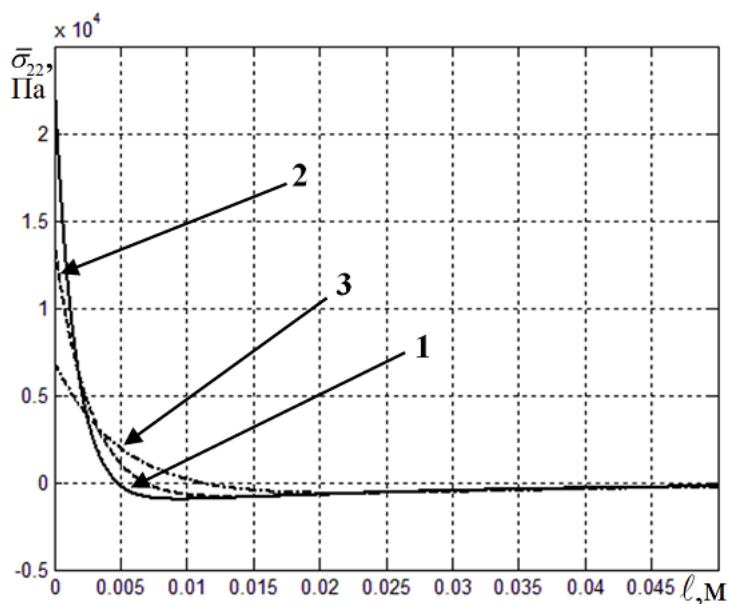


Рис. 2. Распределение напряжений в слое Araldite AV138

Из рис. 2 видно, что в слое осуществляется практическое равенство двух главных напряжений $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{33}$.

На рис. 3 построены графики для напряжения отрыва $\bar{\sigma}_{22}$. Кривая 1 соответствует расчету для адгезива Araldite AV138, кривая 2 — расчету для адгезива Araldite 2015, кривая 3 — расчету для адгезива Sikaforce 7752.

Из рис. 3 видно, что механические свойства адгезива влияют на распределение напряжений в адгезионном слое.

Рис. 3. Распределение напряжения $\bar{\sigma}_{22}$

На рис. 4 показано распределение напряжений в торцевой области адгезионного слоя Araldite AV138 при различных длинах консоли ℓ . Графики 1 и 2 построены для $\ell = 0.05$ м, а графики 3 и 4 — для $\ell = 1$ м. Графики 1 и 3 соответствуют напряжению $\bar{\sigma}_{11}$, графики 2 и 4 — напряжению $\bar{\sigma}_{22}$.

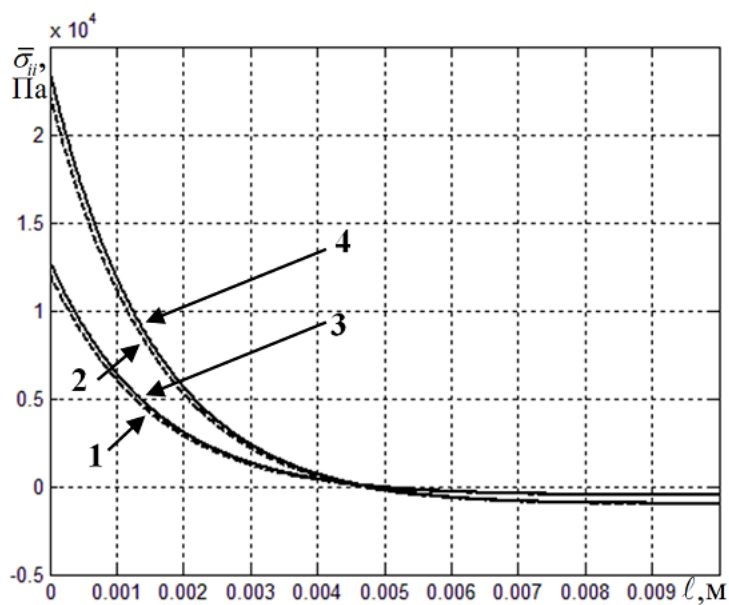


Рис. 4. Распределение напряжений в слое при различных длинах консоли

Из рис. 4 видно, что при рассмотренном диапазоне длин консолей распределение напряжений в слое практически не меняется.

4. Анализ

Рассмотрим регулярную характеристику напряженно-деформированного состояния относительно изменения толщины слоя взаимодействия z . В работе [7] в качестве такой характеристики используется энергетическое произведение (ЭП) в вершине адгезионного слоя:

$$2\hat{\gamma} = 0.5 (\bar{\sigma}_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22}\bar{\varepsilon}_{22}) \delta_0. \quad (22)$$

На рис. 5 изображена зависимость энергетического произведения (22) в слое от десятичного логарифма отношения толщины слоя к высоте консоли h при заданных ранее характеристиках образца. Толщина слоя принимала значение от $\delta_0 = 10^{-5}$ м до $\delta_0 = 10^{-8}$ м. График 1 построен для адгезива Araldite AV138, график 2 — для Araldite 2015, график 3 — для Sikaforce 7752. На рис. 5 ЭП $2\hat{\gamma}$ задается в виде отношения ЭП адгезива к ЭП Sikaforce 7752, полученного при толщине слоя $\delta_0 = 10^{-8}$ м.

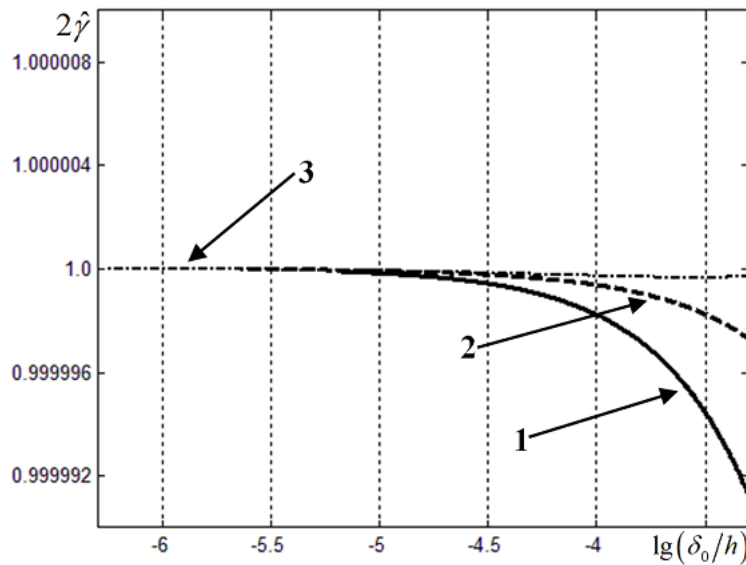


Рис. 5. Энергетическое произведение в слое

Из рис. 5 видно, при достижении определенного значения относительной толщины адгезионного слоя формула (22), основанная на решении (21), перестает давать результат. Для Sikaforce 7752 это условие $-\lg(\delta_0/h) \approx -6.3$, для Araldite 2015 — $\lg(\delta_0/h) \approx -5.6$, а для Araldite AV138 — $\lg(\delta_0/h) \approx -5.3$. Это связано с вычислительной погрешностью решения системы линейных уравнений (21) при нахождении коэффициентов общего аналитического решения (20). В этом плане упрощенное решение, полученное в работе [8] дает результат при существенно меньших ограничениях на относительную толщину слоя.

Также из рис. 5 видим, что при уменьшении отношения толщины адгезионного слоя к высоте консоли значение ЭП не зависит от упругих механических свойств материала слоя.

Заключение

На основе вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, сопряженных тонким "слоем взаимодействия" определена упрощенная постановка задачи в дифференциальном виде. Было получено аналитическое решение. На его основе построено

распределение напряжений в слое, которое зависит от механических свойств адгезива. Показано, что в состоянии плоской деформации осуществляется практическое равенство двух главных средних напряжений. Рассмотрена зависимость энергетического произведения на торце слоя от относительной толщины адгезионного слоя. Показано, что ЭП возможно вычислить для решений с малой, но конечной толщиной слоя.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // *International Journal of Fracture*. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.
- [2] Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*. 1968. № 6. С. 87–99.
- [3] Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия. К 75-летию со дня рождения профессора Владимира Марковича Ентова. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 180 с.
- [4] Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. 2015. № 2. С. 24–33.
- [5] Макклинтон Ф. Пластические аспекты разрушения // *Разрушение*. Москва: Мир, 1975. Т. 3. С. 67–262.
- [6] Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 193-194. P. 447–454.
- [7] Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 64. С. 63–77.
- [8] Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 3. С. 22–34.
- [9] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // *Journal of Adhesion and Adhesives*. 2016. Vol. 67. P. 103–111.

V.E. Bogacheva¹, L.V. Glagolev²

FRACTURE IN MODE I OF THE ADHESION LAYER TAKING INTO ACCOUNT THE DIAGONAL COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR

¹*Tula State University, Tula, Russia*

²*Instrument Design Bureau named after Academician A.G. Shipunov, Tula, Russia*

Abstract. The elastic deformation of a composite plate consisting of two cantilevers connected by an adhesive layer in a state of plane deformation is considered. The stress state of the layer is considered on the basis of the characteristics averaged over the thickness. From the general variational statement, taking into account the theory of Mindlin–Reisner, a statement in a differential form is obtained. It is shown that in the stressed state of the layer there is a practical coincidence of two average principal stresses acting in directions orthogonal to separation. It has been established that the value to which the product of the specific free energy and the layer thickness converges at a fixed external load and the adhesion layer thickness tends to zero does not depend on the mechanical properties of the adhesive.

Keywords: adhesive layer, composite, energy product, interaction layer, linear parameter, normal separation, elastic deformation.

REFERENCES

- [1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.
- [2] Entov V. M., Salganik R. L. To the Prandtl model of brittle fracture // Izv. AN SSSR. MTT. 1968. no. 6. P. 87–99. (in Russian).
- [3] Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Prandtl crack model and its application for solving the problem of contact interaction mechanics. Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovaniy, 2012. 180 p. (in Russian).
- [4] Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed // Journal of Mining Science. 2015. no. 2. P. 24–33. (in Russian).
- [5] Makkintok F. Plastic aspects of destruction // Razrushenie. Moscow: Mir, 1975. Vol. 3. P. 67–262. (in Russian).
- [6] Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 193-194. P. 447–454.
- [7] On one approach to assessing the strength of adhesive layer in layered composite / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2020. no. 64. P. 63–77. (in Russian).
- [8] Stress state and conditions for crack initiation in the adhesion layer of the composite / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // PNRPU Mechanics Bulletin. 2021. no. 3. P. 22–34. (in Russian).
- [9] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103–111.

Bogacheva Viktoriya Eduardovna, Postgraduate, Department of Computational Mechanics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russia.

Glagolev Leonid Vadimovich, Cand. Sci. Phys. & Math., Department head, JSC «KBP», Tula, Russia.

А. Д. Чернышов¹, О. Ю. Никифорова¹, В. В. Горяйнов², С. Ф. Кузнецов¹, И. Г. Рукин¹

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ БЫСТРЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ РАЗЛИЧНОГО ПОРЯДКА

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий,
г. Воронеж, Россия

² Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Даются основы быстрой универсальной тригонометрической интерполяции. Приведены оценки погрешности, вводится понятие граничной функции различных порядков и записаны аналитические формулы, применяемые для решения инженерных задач. Эффективность быстрой универсальной тригонометрической интерполяции показана на примере решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. На отрезке единичной длины для достижения максимальной относительной погрешности решения менее одного процента достаточно учитывать в быстром разложении только одно первое слагаемое с синусами и одно первое слагаемое с косинусами.

Ключевые слова: быстрые разложения, граничная функция, быстрая тригонометрическая интерполяция, относительная погрешность, дифференцирование.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.006

УДК: 519.65+517.95

© Чернышов А. Д., Никифорова О. Ю., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Рукин И. Г., 2022
Чернышов Александр Данилович
e-mail: chernyshovad@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.
Никифорова Ольга Юрьевна
e-mail: niki22@mail.ru, старший преподаватель, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.
Горяйнов Виталий Валерьевич
e-mail: gorvit77@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия.
Кузнецов Сергей Федорович
e-mail: sfs134@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.
Рукин Иван Геннадьевич
e-mail: thenotnick@gmail.com, аспирант, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Поступила 20.11.2022

Введение

Классические ряды Фурье редко применяются в инженерной практике, так как они медленно сходятся и в общем случае не допускают почленное дифференцирование [1]. С помощью рядов Фурье в некоторых случаях [2–4] и др. получены эффективные и полезные частные решения. Появление синус- и косинус-быстрых разложений [5], основанных на использовании специального вида граничных функций, расширяет возможности применения рядов Фурье для решения задач с интегро-дифференциальными системами [6, 7]. При введении в быстрое разложение граничной функции $M_p(x)$ p -го порядка коэффициенты Фурье с увеличением порядкового номера m быстро уменьшаются по закону m^{-p-2} [5]. Это допускает возможность p кратного дифференцирования ряда и обеспечивает высокую скорость его сходимости. Использование в быстрых разложениях интерполяционного подхода еще более расширило возможности быстрых разложений [8, 9]. В работах [10–12] показано, что скорость сходимости быстрых разложений в сотни раз превосходит сходимость классических рядов Фурье. Особенно эффективными являются быстрые универсальные тригонометрические интерполяции, где при организации быстрых разложений одновременно используется полный ряд Фурье [13]. Подобные интерполяции применимы к дифференциальным системам, содержащим одновременно и четные и нечетные производные. По этой причине в их названии добавлено слово «универсальный».

1. Универсальные быстрые тригонометрические интерполяции

В функциональных пространствах как правило рассматриваются периодические функции, тогда как при рассмотрении прикладных задач необходимо изучать непериодические функции на конечном отрезке $x \in [-a, a]$, так как материальные тела имеют конечные размеры. Для этих целей будем использовать функциональный базис, соответственный полному ряду Фурье

$$\{1, \cos m\pi x/a, \sin m\pi x/a\}. \quad (1)$$

Пусть некоторая непериодическая функция $f(x) \in L_2^\alpha[-a \leq x \leq a]$ из пространства Гильберта рассматривается на отрезке $[-a \leq x \leq a]$. Быстрым разложением $f(x)$ на $[-a \leq x \leq a]$ назовем сумму некоторой граничной функции $M_p(x)$ и ряда Фурье для разности $f(x) - M_p(x)$, т. е.

$$f(x) = M_p(x) + a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\pi \frac{x}{a} + b_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a (f(x) - M_p(x)) dx, \quad (2)$$

$$a_m = \frac{1}{a} \int_{-a}^a ((f(x) - M_p(x))) \cos m\pi \frac{x}{a} dx, \quad b_m = \frac{1}{a} \int_{-a}^a (f(x) - M_p(x)) \sin m\pi \frac{x}{a} dx.$$

Граничная функция $M_p(x)$ в (2) введена с целью увеличения скорости сходимости ряда Фурье для разности $(f(t) - M_p(t))$, возможности его многократного дифференцирования и определяется следующей суммой

$$M_p(x) = \sum_{q=0}^p A_q P_q(x), \quad (3)$$

где A_q некоторые постоянные, а $P_q(x)$ быстрые полиномы.

Коэффициенты A_q определяются по формуле [13]

$$A_q = f^{(q)}(a) - f^{(q)}(-a), \quad (4)$$

а $P_q(x)$ полиномы четной и нечетной степеней запишем рекуррентными формулами через определенные интегралы

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{x}{2a}, \quad P_{2q-1}(x) = \int_0^x P_{2q-2}(x) dx, \\ P_{2q}(x) &= \int_0^x P_{2q-1}(t) dt - \frac{x}{a} \int_0^a P_{2q-1}(x) dx, \quad q = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Полином первой степени $P_0(x)$ является начальным, остальные полиномы получаются по формулам (5). Например, при $p = 5$, что соответствует граничной функции 5-го порядка $M_5(x)$, получим:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{x}{2a}, \quad P_1(x) = \frac{x^2}{4a}, \quad P_2(x) = \frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12}, \quad P_3(x) = \frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24}, \\ P_4(x) &= \frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720}, \quad P_5(x) = \frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5) и (6) можно установить следующие свойства полиномов $P_p(t)$:

$$P_{2p-1}(a) = P_{2p-1}(-a), \quad P_{2p}(a) = P_{2p}(-a) = 0, \quad p = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Данные полиномы обладают свойством четности и нечетности: полиномы с нечетными номерами — четные функции от x , с четными номерами — нечетные функции от x .

$$P_{2q-1}(x) = P_{2q-1}(-x), \quad P_{2q}(x) = -P_{2q}(-x), \quad q = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Кроме того, полиномы имеют следующие дифференциальные свойства

$$P'_{2q-1}(x) = P_{2q-2}(x), \quad P'_{2q}(x) = P_{2q-1}(x) - \frac{1}{a} \int_0^a P_{2q-1}(x) dx, \quad q = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Во многих случаях воспользоваться интегральными формулами Фурье для нахождения a_0, a_m, b_m не представляется возможным. Поэтому для определения коэффициентов a_0, a_m, b_m используем дискретную систему, полученную из (2) при замене x на x_j .

$$\begin{aligned} f(x_j) &= M_p(x_j) + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m \cos m\pi \frac{x_j}{a} + b_m \sin m\pi \frac{x_j}{a}, \\ m &= 1 \div N - 1, \quad j = -N \div N - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

При использовании универсальных быстрых тригонометрических интерполяций необходимо выполнить три условия:

- 1) Отрезок $[-a, a]$ следует равномерно разбить на равные части.
- 2) Количество внутренних точек разбиения должно быть четным $2N$.

Нечетное количество внутренних точек разбиения $(2N + 1)$ строго не допускается, иначе базис (1) в интерполяционном варианте не будет ортогональным на отрезке $[-a, a]$, что приведет к увеличению погрешности. В случае неортогонального базиса

каждый коэффициент ряда Фурье будет вычисляться с некоторой погрешностью, которая будет накапливаться. Если же базис (1) ортогональный, то погрешность равна нулю, что приводит к увеличению точности вычислений.

3) В число расчетных точек входит только совокупность внутренних точек равномерного разбиения и левая граница отрезка $[-a, a]$, т. е. $x = -a$. Правая граница отрезка $x = a$ в суммах не участвует.

Координаты $2N$ расчетных точек x_j зададим формулой

$$x_j = ja/N, \quad j = -N \div N - 1. \quad (11)$$

Для доказательства дискретной ортогональности базиса (1) в интерполяционном варианте предварительно докажем справедливость следующих равенств

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad \sum_{j=-N}^{N-1} \sin n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad j = -N \div N - 1, \\ 2) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad \text{при } m \neq n, \\ 3) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \sin m\pi \frac{x_j}{a} \sin n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad \text{при } m \neq n, \\ 4) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \sin m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = 0, \quad \text{при } \forall (m, n) = 1 \div (N - 1). \end{aligned} \quad (12)$$

В последнем равенстве 4) системы (12) не следует требовать выполнения неравенства $m \neq n$, так как равенство 4) выполняются при $\forall m, n$, но при этом значение $j = N$ во всех суммах (12) исключается.

Для доказательства первого равенства 1) из (12) воспользуемся тригонометрической формулой Эйлера для комплексного числа и представим левую часть данной формулы в виде

$$\sum_{j=-N}^{N-1} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} \exp\left(in\pi \frac{j}{N}\right) + \exp\left(-in\pi \frac{j}{N}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{nj} + q_{-nj}. \quad (13)$$

В (13) i — мнимая единица и, кроме того, использовано обозначение

$$\exp\left(in\pi \frac{j}{N}\right) = q_{nj}, \quad \exp\left(-in\pi \frac{j}{N}\right) = q_{-nj}.$$

Тогда (13) можно записать в форме геометрических прогрессий

$$\sum_{j=-N}^{N-1} \cos n\pi \frac{t_j}{a} = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{nj} + q_{-nj}. \quad (14)$$

Правую часть в (14) преобразуем

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{nj} + q_{-nj} &= (q_{-nN} + q_{n(1-N)} + q_{n(2-N)} + \cdots + q_{n(N-1)}) + \\ &+ (q_{nN} + q_{n(N-1)} + q_{n(N-2)} + \cdots + q_{n(1-N)}) = \\ &= q_{-nN} (1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) + q_{nN} (1 + q_{-n} + q_{2n} + \cdots + q_{(1-2N)n}). \end{aligned} \quad (15)$$

Для геометрической прогрессии $(1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n})$ можно записать вспомогательное равенство

$$\begin{aligned} (1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) (1 - q_n) &= (1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) - \\ - q_n (1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) &= 1 - q_{2Nn}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как имеют место следующие выражения

$$\begin{aligned} q_{\pm 2Nn} &= \exp(\pm i 2n\pi) = \cos(\pm 2n\pi) + i \sin(\pm 2n\pi) = 1, \\ q_{\pm n} &= \exp\left(\pm i \frac{n\pi}{N}\right) \neq 1 \text{ при } \forall n = -N \div N - 1, \end{aligned}$$

то из (16) получаем доказательство равенства 1) в (12):

$$(1 + q_n + q_{2n} + \cdots + q_{(2N-1)n}) = (1 - q_{2Nn}) / (1 - q_n) = 0.$$

При помощи тригонометрической формулы Эйлера и получающихся геометрических прогрессий аналогично доказываются и все остальные равенства из (12).

Остается вычислить норму для дискретной системы (1). Вначале рассмотрим сумму квадратов косинусов

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} \cos^2 n\pi \frac{x_j}{a} &= \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} \left(1 + \cos 2n\pi \frac{j}{N}\right) = N + \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} \cos 2n\pi \frac{j}{N} = \\ &= N + \frac{1}{4} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{2nj} + q_{-2nj} = N + \frac{1}{4} (q_{-2nN} + q_{2n(1-N)} + q_{2n(2-N)} + \cdots + q_{2n(N-1)}) + \\ &+ \frac{1}{4} (q_{2nN} + q_{2n(N-1)} + \cdots + q_{2n(1-N)}) = N + \frac{1}{4} q_{-2nN} (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) + \\ &+ \frac{1}{4} q_{2nN} (1 + q_{-2n} + q_{-4n} + q_{-6n} + \cdots + q_{2n(1-2N)}). \\ q_{\pm 2Nn} &= \exp(\pm i 2n\pi) = \cos(\pm 2n\pi) + i \sin(\pm 2n\pi) = 1, \\ q_{\pm n} &= \exp\left(\pm i \frac{2n\pi}{N}\right) \neq 1 \text{ при } \forall n = 1 \div N - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) (1 - q_{2n}) &= (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) - \\ - q_{2n} (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) &= 1 - q_{4N}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для преобразования равенства (17) воспользуемся выражениями

$$\begin{aligned} (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) (1 - q_{2n}) &= (1 + q_{2n} + q_{4n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) - \\ - q_{2n} (1 + q_{2n} + q_{4n} + q_{6n} + \cdots + q_{2n(2N-1)}) &= 1 - q_{4N} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме (18) потребуется следующее свойство: при всех $n = -N \div N - 1$ дробь n/N остается правильной и потому $2n/N$ не может равняться четному числу, т. е. выполняется неравенство

$$\forall n = -N \div N - 1, \quad q_{\pm 2n} = \cos 2\pi n/N + i \sin 2\pi n/N \neq 1. \quad (19)$$

При помощи (18) и (19) из (17) получаем выражение для нормы косинусов

$$N = \sum_{j=-N}^{N-1} \cos^2 n\pi \frac{x_j}{a}. \quad (20)$$

Аналогично доказывается и выражение для нормы синусов

$$N = \sum_{j=-N}^{N-1} \sin^2 n\pi \frac{x_j}{a}. \quad (21)$$

Суммирование в (20) и (21) ведется по индексу j , тогда как индекс n остается свободным, но норма N оказывается независимой от величины n и равна половине количества внутренних расчетных точек, т. е. равна N .

Ортогональные свойства (5) и выражения норм (20) и (21) позволяют получить решение интерполяционной системы (10) относительно a_0, a_m, b_m в явном конечном виде. Для этого вначале левую и правую части (10) просуммируем по индексу j :

$$\sum_{j=-N}^{N-1} (f(t_j) - M_p(t_j)) = 2Na_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{t_j}{a} + b_m \sum_{j=-N}^{N-1} \sin m\pi \frac{t_j}{a}. \quad (22)$$

Выше было доказано, что суммы косинусов и синусов по свойству 1) из (12) равны нулю, поэтому из (22) находим

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(t_j) - M_p(t_j)). \quad (23)$$

То есть коэффициент a_0 равен среднеарифметическому значений $(f(t_j) - M_p(t_j))$ в точках равномерной интерполяции на отрезке $[-a, a]$.

Для нахождения a_m умножим левую и правую части (10) на $\cos m\pi j/N$ и просуммируем по индексу j :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \cos m\pi \frac{x_j}{a} = \\ & = \sum_{j=-N}^{N-1} a_0 \cos m\pi \frac{x_j}{a} + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} a_n \cos m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} + b_n \sin n\pi \frac{x_j}{a} \cos m\pi \frac{x_j}{a}. \end{aligned} \quad (24)$$

Равенство (24) упростим, воспользовавшись свойствами (12) и (20),

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{x_j}{a} &= 0, \quad \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} = 0 \text{ при } m \neq n, \\ \sum_{j=-N}^{N-1} \cos m\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x_j}{a} &= N \text{ при } m = n. \end{aligned} \quad (25)$$

С учетом (25) уравнение (24) принимает вид

$$\sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \cos m\pi \frac{x_j}{a} = a_m N. \quad (26)$$

Отсюда находим в явном виде коэффициенты a_m :

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \cos m\pi \frac{x_j}{a}, \quad m = 1 \div N - 1. \quad (27)$$

Аналогично после умножения левой и правой частей (10) на $\sin m\pi j/N$ и суммирования по j подобными вычислениями найдем b_m :

$$b_m = \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \sin m\pi \frac{x_j}{a}, \quad m = 1 \div N - 1. \quad (28)$$

Подставляя a_0 , a_m , b_m из (23), (27) и (28) в (10), получим формулу для полной тригонометрической интерполяции $f(x)$ на отрезке $[-a, a)$ при $f(x)$ задании дискретными значениями $f(x_j)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \cos n\pi \frac{x_j}{a} \cos n\pi \frac{x}{a} + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(x_j) - M_p(x_j)) \sin n\pi \frac{x_j}{a} \sin n\pi \frac{x}{a} + M_p(x), \\ &f(x) \in L_2^{p+2}(x \in [-a, a)). \end{aligned} \quad (29)$$

Получим оценки для коэффициентов a_m и b_m . Для этого запишем интегральные выражения для косинус-коэффициентов Фурье согласно (2) с использованием граничной функции $M_5(x)$ и применяем метод интегрирования по частям семь раз:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a \left(f(x) - A_0 \frac{x}{2a} - A_1 \frac{x^2}{4a} - A_2 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_3 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_4 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) - A_5 \left(\frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\ &= \frac{1}{m\pi} \int_{-a}^a \left(f(x) - A_0 \frac{x}{2a} - A_1 \frac{x^2}{4a} - A_2 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_3 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_4 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) - A_5 \left(\frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440} \right) \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\ &= -\frac{1}{m\pi} \int_{-a}^a \left(f'(x) - A_0 \frac{1}{2a} - A_1 \frac{x}{2a} - A_2 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) - A_3 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_4 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) - A_5 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{m\pi} \int_{-a}^a \left(f'(x) - A_1 \frac{x}{2a} - A_3 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_5 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= \frac{a}{m^2\pi^2} \int_{-a}^a \left(f'(x) - A_1 \frac{x}{2a} - A_3 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_5 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a}{m^2\pi^2} \int_{-a}^a \left(f''(x) - A_1 \frac{1}{2a} - A_3 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) - A_5 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= -\frac{a^2}{m^3\pi^3} \int_{-a}^a \left(f''(x) - A_1 \frac{1}{2a} - A_3 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) - A_5 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\
&= \frac{a^2}{m^3\pi^3} \int_{-a}^a \left(f'''(x) - A_3 \frac{x}{2a} - A_5 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= \frac{-a^3}{m^4\pi^4} \int_{-a}^a \left(f'''(x) - A_3 \frac{x}{2a} - A_5 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= \frac{-a^3}{m^4\pi^4} \left(f'''(x) - A_3 \frac{x}{2a} - A_5 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a + \\
&+ \frac{-a^3}{m^4\pi^4} \int_{-a}^a \left(f^{(4)}(x) - A_3 \frac{1}{2a} - A_5 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= \frac{a^4}{m^5\pi^5} \int_{-a}^a \left(f^{(4)}(x) - A_3 \frac{1}{2a} - A_5 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a^4}{m^5\pi^5} \int_{-a}^a \left(f^{(5)}(x) - A_5 \frac{x}{2a} \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \frac{a^5}{m^6\pi^6} \int_{-a}^a \left(f^{(5)}(x) - A_5 \frac{x}{2a} \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a^5}{m^6\pi^6} \int_{-a}^a \left(f^{(6)}(x) - A_5 \frac{1}{2a} \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= -\frac{a^6}{m^7\pi^7} \int_{-a}^a \left(f^{(6)}(x) - A_5 \frac{1}{2a} \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \frac{a^6}{m^7\pi^7} \int_{-a}^a f^{(7)}(x) \sin m\pi \frac{x}{a} dx.
\end{aligned}$$

Если обозначить $\max |f^{(7)}(t)| = B^{(7)}$, то получаем оценку для коэффициентов

$$|a_m| \leq \frac{2a^7}{m^7\pi^7} B^{(7)} \sim (m\pi)^{-7}. \quad (30)$$

Интегральные выражения для синус-коэффициентов Фурье согласно (2) с использованием граничной функции $M_5(x)$ будем интегрировать по частям шесть раз:

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a \left(f(x) - A_0 \frac{x}{2a} - A_1 \frac{x^2}{4a} - A_2 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) - A_3 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} \right) - \right. \\
&\quad \left. - A_4 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) - A_5 \left(\frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440} \right) \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= \frac{a^2}{m^3\pi^3} \int_{-a}^a \left(f''(x) - A_2 \frac{x}{2a} - A_4 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a^2}{m^3\pi^3} \int_{-a}^a \left(f'''(x) - A_2 \frac{1}{2a} - A_4 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \\
&= -\frac{a^3}{m^4\pi^4} \int_{-a}^a \left(f'''(x) - A_2 \frac{1}{2a} - A_4 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\
&= \frac{a^3}{m^4\pi^4} \int_{-a}^a \left(f^{(4)}(x) - A_4 \frac{x}{2a} \right) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = -\frac{a^4}{m^5\pi^5} \int_{-a}^a \left(f^{(4)}(x) - A_4 \frac{x}{2a} \right) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= \frac{a^4}{m^5\pi^5} \int_{-a}^a \left(f^{(5)}(x) - A_4 \frac{1}{2a} \right) \cos m\pi \frac{x}{a} dx = \frac{a^5}{m^6\pi^6} \int_{-a}^a \left(f^{(5)}(x) - A_4 \frac{1}{2a} \right) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \\
&= -\frac{a^5}{m^6\pi^6} \int_{-a}^a f^{(6)}(x) \sin m\pi \frac{x}{a} dx.
\end{aligned}$$

Обозначая $\max |f^{(6)}(t)| = B^{(6)}$, получим оценку для коэффициентов b_m :

$$|b_m| \leq \frac{2a^6}{m^6\pi^6} B^{(6)} \sim (m\pi)^{-6}. \quad (31)$$

Из оценок (30) и (31) следует, что рассматриваемый метод по скорости сходимости ряда во много раз превосходит все известные методы и обладает следующими свойствами:

- 1) Данный приближенный универсальный метод является аналитическим.
- 2) Вследствие его чрезвычайно высокой скорости сходимости в ряде Фурье в большинстве случаев достаточно учитывать всего только одно первое слагаемое с синусами и одно первое слагаемое с косинусами (всего два слагаемых), что приводит к весьма удобной экономичной алгебраической системе и позволяет быстро получить ответ с высокой точностью.
- 3) Данный универсальный ряд Фурье с граничной функцией $M_5(x)$ допускает шестикратное почленное дифференцирование, что является недоступным в других методах.

2. Применение универсальных быстрых тригонометрических интерполяций для решения нелинейных дифференциальных уравнений

В качестве примера рассмотрим краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' = (x + 2y)^2 + 3(y')^2 + 1.44\pi^2 \sin(1.2\pi x) + (x + 2 \sin(1.2\pi x))^2 + 4.32\pi^2 \cos^2(1.2\pi x), \quad x \in [-a, a]. \quad (32)$$

$$y(-a) = -\sin(1.2\pi a), \quad y(a) = \sin(1.2\pi a). \quad (33)$$

Краевая задача (32), (33) имеет точное решение

$$y(x) = \sin(1.2\pi x), \quad (34)$$

которое позволит провести исследование погрешности решения краевой задачи (32), (33) путем сравнения с приближенным аналитическим решением, полученным методом универсальных быстрых разложений [13]. При сравнении будет вычислена относительная погрешность решения $y(x)$ и невязка дифференциального уравнения (32).

Решение задачи (32), (33) представим быстрым универсальным разложением

$$y(x) = \sum_{q=0}^5 A_q P_q(x) + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m \cos m\pi \frac{x}{a} + \sum_{m=1}^{N-1} b_m \sin m\pi \frac{x}{a}. \quad (35)$$

Полиномы $P_q(x)$ берутся из (6). Подлежат определению коэффициенты граничной функции $A_0 \div A_5$ и коэффициенты Фурье $a_0, a_m, b_m, m = 1 \div N - 1$.

После подстановки $y(x)$ из (35) в граничные условия (33), найдем

$$y(a) = A_0 \frac{1}{2} + A_1 \frac{a}{4} - A_3 \frac{a^3}{48} + A_5 \frac{a^5}{480} + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m (-1)^m = \sin(1.2\pi a). \quad (36)$$

$$y(-a) = -A_0 \frac{1}{2} + A_1 \frac{a}{4} - A_3 \frac{a^3}{48} + A_5 \frac{a^5}{480} + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m (-1)^m = -\sin(1.2\pi a). \quad (37)$$

Вычитая из (36) равенство (37) получим значение коэффициента A_0 :

$$A_0 = 2 \sin(1.2\pi a). \quad (38)$$

Складывая равенства (36) и (37) имеем уравнение для определения коэффициента A_1 :

$$A_1 \frac{a}{2} - A_3 \frac{a^3}{24} + A_5 \frac{a^5}{240} + 2a_0 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} a_m (-1)^m = 0. \quad (39)$$

Далее подставим $y(x)$ из (35) в дифференциальное уравнение (32):

$$A_1 \frac{1}{2a} + A_2 \frac{x}{2a} + A_3 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) + A_4 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) + A_5 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) - \sum_{m=1}^{N-1} a_m \left(m \frac{\pi}{a} \right)^2 \cos m\pi \frac{x}{a} - \sum_{m=1}^{N-1} b_m \left(m \frac{\pi}{a} \right)^2 \sin m\pi \frac{x}{a} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x + 2 \left(A_0 \frac{x}{2a} + A_1 \frac{x^2}{4a} + A_2 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) + A_3 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A_4 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) + A_5 \left(\frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left. + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m \cos m\pi \frac{x}{a} + \sum_{m=1}^{N-1} b_m \sin m\pi \frac{x}{a} \right) \right)^2 + \\
&+ 3 \left(A_0 \frac{1}{2a} + A_1 \frac{x}{2a} + A_2 \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) + A_3 \left(\frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12} \right) + A_4 \left(\frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) + \right. \\
&\quad \left. + A_5 \left(\frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720} \right) - \sum_{m=1}^{N-1} a_m m \frac{\pi}{a} \sin m\pi \frac{x}{a} + \sum_{m=1}^{N-1} b_m m \frac{\pi}{a} \cos m\pi \frac{x}{a} \right) + \quad (40) \\
&+ 1.44\pi^2 \sin(1.2\pi x) + (x + 2 \sin(1.2\pi x))^2 + 4.32\pi^2 \cos^2(1.2\pi x), \quad x \in [-a, a].
\end{aligned}$$

Согласно [13] уравнения для нахождения коэффициентов $A_2 \div A_5$ составим следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(40)|_{x=a} - (40)|_{x=-a}, \quad \frac{d}{dx}(40)|_{x=a} - \frac{d}{dx}(40)|_{x=-a}, \\
&\frac{d^2}{dx^2}(40)|_{x=a} - \frac{d^2}{dx^2}(40)|_{x=-a}, \quad \frac{d^3}{dx^3}(40)|_{x=a} - \frac{d^3}{dx^3}(40)|_{x=-a}. \quad (41)
\end{aligned}$$

Аналитический вид равенств (41) здесь не приводим из-за их громоздкости.

Коэффициенты Фурье $a_0, a_m, b_m, m = 1 \div N - 1$ определим с помощью универсальной быстрой тригонометрической интерполяции по формулам (23), (27), (28), полагая, что значения искомой функции в расчетных точках (11) известны.

В уравнения (41) подставим значения найденных коэффициентов Фурье $a_0, a_m, b_m, m = 1 \div N - 1$ и значения A_0 и A_1 из (38) и (39) соответственно. Тем самым получим систему нелинейных алгебраических уравнений (41) относительно коэффициентов $A_2 \div A_5$. Данная система четырех уравнений была решена в среде Maple. В расчетах принимались различные значения номера N и параметра a . Приближенное аналитическое решение (35) сравнивалось с точным (34). Относительная погрешность $\delta^{y(x)}$ решения $y(x)$ и невязка δ^{du} дифференциального уравнения (32) вычислялась по формуле

$$\delta = |\Delta|/f_{\max} \cdot 100 \%,$$

где Δ — абсолютная погрешность, f_{\max} — максимальное значение решения $y(x)$ или невязки уравнения (32).

Графики $\delta^{y(x)}$ и δ^{du} при $a = 1/2$ и $N = 4$ показаны на рис. 1 и рис. 2 соответственно, из которых видно, что граничные условия (33) выполняются точно, а максимальные значения погрешностей $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} находятся вблизи левой границы отрезка $x \in [-a, a]$. Значения максимальной относительной погрешности $\delta_{\max}^{y(x)}$ решения $y(x)$ и максимальной невязки δ_{\max}^{du} дифференциального уравнения (32) для различных значений параметров N и a приведены в таблице.

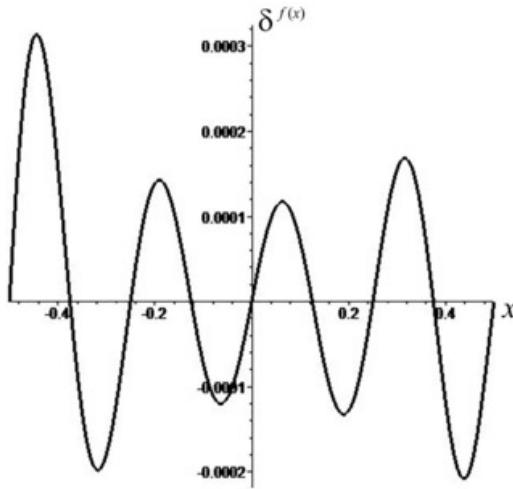
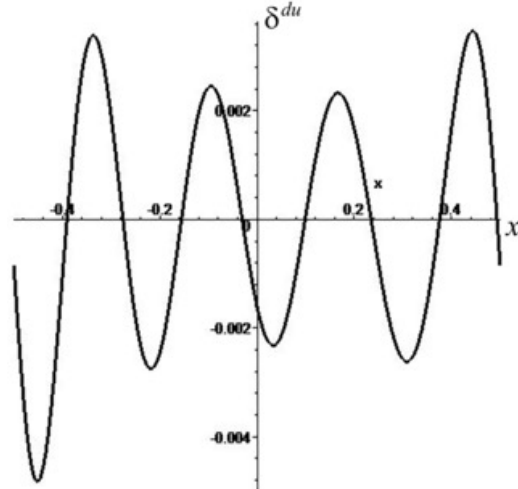
Рис. 1. Относительная погрешность решения $y(x)$ 

Рис. 2. Невязка дифференциального уравнения (32)

N	$a = 1/2$		$a = 2$	
	$\delta_{\max}^{y(x)}, \%$	$\delta_{\max}^{du}, \%$	$\delta_{\max}^{y(x)}, \%$	$\delta_{\max}^{du}, \%$
2	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-1}$	—	—
3	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.750 \cdot 10^{-2}$	7.4	15
4	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.85 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-1}$	2.0
5	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-1}$	$9.1 \cdot 10^{-1}$
6	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-4}$	$1.24 \cdot 10^{-1}$	$4.3 \cdot 10^{-1}$
7	$8.8 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-1}$
8	$3.8 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$
10	$9.2 \cdot 10^{-7}$	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^{-2}$
20	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$5.6 \cdot 10^{-6}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$

Таблица 1. Максимальная относительная погрешность δ_{\max} решения краевой задачи (32), (33)

Из таблицы видно, что на отрезке единичной длины $x \in [-1/2, 1/2]$ для достижения $\delta_{\max}^{y(x)} < 1\%$ и $\delta_{\max}^{du} < 1\%$ требуется использовать по одному коэффициенту Фурье a_1 и b_1 ($N = 2$). С увеличением значения номера N погрешности $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} быстро убывают. При увеличении длины отрезка, например в четыре раза ($x \in [-2, 2]$), для достижения той же погрешностей $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} , что и при отрезке единичной длины требуется увеличение значения номера N в четыре раза, например с $N = 2$ до $N = 8$ или с $N = 5$ до $N = 20$ (см. таблицу).

Заключение

В данной работе описана универсальная быстрая тригонометрическая интерполяция и продемонстрирована ее эффективность при решении нелинейной краевой задачи. Вычислительные эксперименты показали, что с увеличением значения номера N максимальная относительная погрешность $\delta_{\max}^{y(x)}$ решения $y(x)$ краевой задачи и максимальная невязка δ_{\max}^{du} нелинейного дифференциального уравнения (32) быстро убывают. На отрезке единичной длины для достижения значений $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} менее

одного процента достаточно учитывать в быстром разложении только одно первое слагаемое с синусами и одно первое слагаемое с косинусами. При увеличении длины отрезка для достижения той же погрешности $\delta_{\max}^{y(x)}$ и δ_{\max}^{du} , что и на отрезке единичной длины требуется увеличение значения номера N .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Толстов Г. П. Ряды Фурье. Москва: Наука, 1980. 384 с.
- [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 741 с.
- [3] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. 560 с.
- [4] Biot M. Distributed gravity and temperature loading in two dimensional elasticity replaced by boundary pressure and dislocations // Journal of Applied Mechanics. 1935. P. 41–48.
- [5] Чернышов А. Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. № 54(1). С. 13–24.
- [6] Решение методом быстрых разложений задачи о сушке зерна / А. Д. Чернышов, И. О. Павлов, Е. В. Воронова [и др.] // Теплофизика и аэромеханика. 2012. № 19(6). С. 739–749.
- [7] Горяйнов В. В., Попов М. И., Чернышов А. Д. Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 5. С. 113–130.
- [8] Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Чернышов О. А. Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космических кораблей // Известия вузов. Авиационная техника. 2015. № 2. С. 41–47.
- [9] Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Danshin A. A. Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. no. 973. p. 012002.
- [10] Чернышов А. Д., Горяйнов В. В. О выборе оптимального порядка граничной функции в быстром разложении // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2011. № 1. С. 60–65.
- [11] Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Соловьев А. О. О возможности вычисления коэффициентов Фурье поточечным методом // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. № 6(2). С. 49–53.
- [12] Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, О. В. Лешонков [и др.] // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2019. № 1. С. 27–34.
- [13] Chernyshov A. D., Saiko D. S., Kovaleva E. N. Universal fast expansion for solving nonlinear problems // Journal of Physics: Conference Series. 2020. p. 012147.

A. D. Chernyshov¹, O. Yu. Nikiforova¹, V. V. Goryainov², S. F. Kuznetsov¹, I. G. Rukin¹

UNIVERSAL FAST TRIGONOMETRIC INTERPOLATIONS FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL PROBLEMS OF VARIOUS ORDERS

¹ Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

² Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Abstract. The basics of fast universal trigonometric interpolation are given in the article. The error estimates are presented by the authors. The concept of various orders boundary function is introduced in this work. Analytical formulas used to solve engineering problems are written as well. The efficiency of fast universal trigonometric interpolation is shown by the example of solving a boundary value problem for a second-order nonlinear differential equation. To achieve the maximum relative error of the solution of less than one percent, it is sufficient to take into account only one first term with sines and one first term with cosines in the fast decomposition on a segment of unit length.

Keywords: fast expansions, boundary function, fast trigonometric interpolation, relative error, differentiation.

REFERENCES

- [1] Tolstov G. P. Fourier Series. Moscow: Nauka, 1980. 384 p. (in Russian).
- [2] Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Mathematical physics equations. Moscow: Nauka, 1977. 741 p. (in Russian).
- [3] Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1979. 560 p. (in Russian).
- [4] Biot M. Distributed gravity and temperature loading in two dimensional elasticity replaced by boundary pressure and dislocations // Journal of Applied Mechanics. 1935. P. 41–48.
- [5] Chernyshov A. D. Method of fast expansions for solving nonlinear differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. no. 54(1). P. 11–21.
- [6] Solution of the grain drying problem by the method of fast expansions / A. D. Chernyshov, I. O. Pavlov, E. V. Voronova et al. // Thermophysics and Aeromechanics. 2012. no. 19(3). P. 739–749. (in Russian).
- [7] Goryainov V. V., Popov M. I., Chernyshov A. D. Solving the stress problem in a sharp wedge-shaped cutting tool using the quick decomposition method and the problem of matching boundary conditions // Mechanics of Solids. 2019. no. 54(7). P. 1083–1097.
- [8] Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Chernyshov O. A. Application of the fast expansion method for spacecraft trajectory calculation // Russian Aeronautics. 2015. no. 58(2). P. 180–186.
- [9] Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Danshin A. A. Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. no. 973. p. 012002.
- [10] Chernyshov A. D., Goryainov V. V. On the choice of the optimal order of a boundary function in a fast decomposition // Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies. 2011. no. 1. P. 60–65. (in Russian).
- [11] Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Soloviev A. O. On the possibility of Fourier coefficients calculating by the point method // Bulletin of Voronezh state technical University. 2010. no. 6(2). P. 49–53. (in Russian).
- [12] Comparison of the convergence rate of fast expansions with expansions into the classical Fourier series / A. D. Chernyshov, V. V. Goryainov, O. V. Leshonkov et al. // Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies. 2019. no. 1. P. 27–34. (in Russian).
- [13] Chernyshov A. D., Saiko D. S., Kovaleva E. N. Universal fast expansion for solving nonlinear problems // Journal of Physics: Conference Series. 2020. p. 012147.

Chernyshov Alexander Danilovich, Dr. Phys. & Math. Sci., Professor Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Nikiforova Olga Yurievna, Senior Lecturer, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Goryainov Vitaly Valerievich, Ph.D. in Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia.

Kuznetsov Sergey Fedorovich, Ph.D. in Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Rukin Ivan Gennadievich, post-graduate student, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Ю. Д. Щеглова

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. В работе дано развитие метода малого параметра к определению напряженного состояния трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении. Два внешних слоя находятся в пластическом состоянии, внутренний слой находится в упругопластическом состоянии. Рассматривается случай пластической анизотропии, учитывающей одновременно и анизотропию согласно Хиллу и трансляционную анизотропию. Каждый слой обладает своими параметрами анизотропии. В первом приближении определены напряжения в пластических областях, перемещение и напряжения в упругой области внутреннего слоя и упругопластическая граница.

Ключевые слова: упругопластическое кручение, анизотропия согласно Хиллу, трансляционная анизотропия, напряженное состояние, упругопластическая граница, метод малого параметра.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.007

УДК: 539.375

Введение

Пластическое деформирование твердых тел влечет за собой приобретение материалом свойств пластической анизотропии. Метод малого параметра позволяет получить приближенное аналитическое решение задач для тел со сложной реологией.

Среди моделей пластических тел, учитывающих анизотропию, выделяют условие пластичности Хилла, которое содержит 6 констант анизотропии [1]. Однако, условие пластичности Хилла не учитывает эффект Баушингера. К моделям, учитывающим этот эффект, относится модель трансляционного упрочнения, которую предложили А. Ю.

© Щеглова Ю. Д., 2022

Щеглова Юлия Дмитриевна

e-mail: scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.11.2022

Ишлинский [2] и В. Прагер [3]. Д. Д. Ивлев с коллегами на основе подобных представлений предложили модель идеальнопластического тела с трансляционной анизотропией [4, 5]. В задачах пластического кручения трансляционная анизотропия учитывалась в работе [5], в работе [6] рассматривалась анизотропия согласно Хиллу. В работах [7, 8] использовался метод малого параметра при определении напряженного состояния анизотропной толстостенной трубы при упругопластическом кручении. В работе [7] рассматривался случай трансляционной анизотропии, случай анизотропии по Хиллу исследовался в работе [8]. Метод возмущений также привлекался при исследовании взаимодействия различных видов пластической анизотропии при упругопластической плоской деформации толстостенной трубы а работе [9]. В работах [10, 11] исследовался случай анизотропии, учитывающей одновременно и трансляционную анизотропию и анизотропию согласно Хиллу. В работе [10] рассмотрено упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Работа [11] посвящена упругопластическому кручению анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения, при этом использовался метод малого параметра. В настоящей работе метод возмущений применяется для определения напряженного состояния трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении. Рассматривается случай анизотропии, частными видами которой являются трансляционная анизотропия и анизотропия согласно Хиллу. Задача решена в первом приближении. Определены поля напряжений в каждом слое, перемещения в упругой области внутреннего слоя и упругопластическая граница.

Постановка задачи

Рассмотрим упругопластическое кручение [12] трехслойного пластически анизотропного цилиндрического стержня. Поперечное сечение стержня ограничивается некруговыми контурами: внешним контуром L_1 , границами раздела слоев L_2 и L_3 , и внутренним контуром L_4 . Предполагается, что крутящий момент M имеет такую величину, при которой два внешних слоя находятся в пластическом состоянии, а внутренний слой – в упругопластическом, так что существует упругопластическая граница L_s , которая определяется при решении задачи о напряженном состоянии. Слои стержня являются анизотропными, при этом анизотропия одновременно учитывает анизотропию по Хиллу и трансляционную анизотропию, и каждый слой имеет свои параметры анизотропии. Решение поставленной задачи будем проводить в цилиндрической системе координат (ρ, θ, z) , ось z направлена по оси стержня) в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести внутреннего слоя k_3 , а величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу упругопластической границы в нулевом приближении $r_s^{(0)}$. Кроме того, далее символ "e" вверху означает принадлежность величин к упругой области, символ "p" – к пластической.

Запишем систему уравнений для решения задачи:

– уравнение равновесия выполняются в каждом слое

$$\frac{\partial \tau_{\rho zi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta zi}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho zi}}{\rho} = 0, \quad (1)$$

где $\tau_{\rho z}, \tau_{\theta z}$ – компоненты тензора напряжений;

– соотношения Коши в упругой зоне внутреннего слоя

$$\varepsilon_{\rho z 3}^e = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w_3^e}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z 3}^e = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_3^e}{\partial \theta} + \rho \right), \quad (2)$$

где w_3^e – функция деформации в упругой зоне третьего слоя, ω – крутка или угол кручения на единицу длины;

– закон Гука

$$\tau_{\rho z 3}^e = 2G\varepsilon_{\rho z 3}^e, \quad \tau_{\theta z 3}^e = 2G\varepsilon_{\theta z 3}^e, \quad (3)$$

где $G = \mu$ – модуль сдвига;

– условие пластичности в каждом слое примем в виде [11]

$$A_i \left(\tau_{\rho z i}^p \cos \theta - \tau_{\theta z i}^p \sin \theta - k_i \right)^2 + B_i \left(\tau_{\rho z i}^p \sin \theta + \tau_{\theta z i}^p \cos \theta - \chi_i \right)^2 = K_i^2, \quad (4)$$

где $i = 1, 2, 3$; A_i, B_i, k_i, χ_i – параметры анизотропии;

– в упругой области внутреннего слоя подстановкой (2) в (3), а затем в (1), получим уравнение

$$\Delta w_3^e = 0, \quad (5)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ – оператор Лапласа;

– граничное условие на внешнем контуре L_1 будет иметь вид

$$\left(\tau_{\rho z 1}^p n_{\rho 1} + \tau_{\theta z 1}^p n_{\theta 1} \right) \Big|_{L_1} = 0; \quad (6)$$

– на границах раздела слоев L_2 и L_3 выполняются условия сопряжения напряжений

$$\left(\tau_{\rho z 2}^p n_{\rho 2} + \tau_{\theta z 2}^p n_{\theta 2} \right) \Big|_{L_2} = \left(\tau_{\rho z 1}^p n_{\rho 2} + \tau_{\theta z 1}^p n_{\theta 2} \right) \Big|_{L_2}, \quad (7)$$

$$\left(\tau_{\rho z 3}^p n_{\rho 3} + \tau_{\theta z 3}^p n_{\theta 3} \right) \Big|_{L_3} = \left(\tau_{\rho z 2}^p n_{\rho 3} + \tau_{\theta z 2}^p n_{\theta 3} \right) \Big|_{L_3}; \quad (8)$$

– граничное условие на внутреннем контуре L_4 имеет форму

$$\left(\tau_{\rho z 3}^e n_{\rho 4} + \tau_{\theta z 3}^e n_{\theta 4} \right) \Big|_{L_4} = 0; \quad (9)$$

– на упругопластической границе L_s внутреннего слоя выполняются условия непрерывности напряжений

$$[\tau_{\rho z 3}] \Big|_{L_s} = 0, \quad (10)$$

$$[\tau_{\theta z 3}] \Big|_{L_s} = 0. \quad (11)$$

Компоненты единичной нормали к контуру L_i определяются соотношениями

$$n_{\rho i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \left(\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n_{\theta i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \left(\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

где $\Phi_i(\rho, \theta) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – уравнения контуров поперечного сечения.

Применение метода малого параметра

Определим напряженное состояние стержня с помощью метода возмущений [13]. Ограничимся нулевым и первым приближениями. В каждом слое параметры анизотропии представим в виде

$$A_i = 1 + \delta a_i, B_i = 1 + \delta b_i, k_i = \delta k_i^{(1)}, \chi_i = \delta \chi_i^{(1)}, \quad (13)$$

где δ - безразмерный малый параметр, $\delta \ll 1$.

Уравнения контуров запишем в форме

$$\Phi_i(\rho, \theta) = \rho - R_{0i} - \delta_i R_{1i}, \quad (14)$$

где $\delta_i = d_i \delta$, $-1 \leq d_i \leq 1$, $R_{1i} = R_{1i}(\theta)$ - функции переменной θ .

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \delta \tau_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \delta \varepsilon_{ij}^{(1)}, w^e = w^{e(0)} + \delta w^{e(1)}, \quad (15)$$

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \delta \rho_s^{(1)}. \quad (16)$$

Подставляя разложения (13)-(16) в систему уравнений (1)-(12) и приравнивая члены при одинаковых степенях малого параметра δ , получим системы уравнений для нулевого и первого приближений.

В нулевом приближении будем иметь.

Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{\rho zi}^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta zi}^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho zi}^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (17)$$

Соотношения Коши

$$\varepsilon_{\rho z 3}^{e(0)} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w_3^{e(0)}}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z 3}^{e(0)} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_3^{e(0)}}{\partial \theta} + \rho \right). \quad (18)$$

Соотношения закона Гука

$$\tau_{\rho z 3}^{e(0)} = 2G\varepsilon_{\rho z 3}^{e(0)}, \quad \tau_{\theta z 3}^{e(0)} = 2G\varepsilon_{\theta z 3}^{e(0)}. \quad (19)$$

Условие пластичности в каждом слое

$$\tau_{\rho zi}^{p(0)2} + \tau_{\theta zi}^{p(0)2} = K_i^2. \quad (20)$$

Граничные условия и условия сопряжения напряжений на границе раздела слоев в нулевом приближении будут иметь вид

$$\tau_{\rho z 1}^{p(0)} \Big|_{\rho=R_{01}} = 0, \tau_{\rho z 2}^{p(0)} \Big|_{\rho=R_{02}} = \tau_{\rho z 1}^{p(0)} \Big|_{\rho=R_{02}}, \tau_{\rho z 3}^{p(0)} \Big|_{\rho=R_{03}} = \tau_{\rho z 2}^{p(0)} \Big|_{\rho=R_{03}}, \tau_{\rho z 3}^{e(0)} \Big|_{\rho=R_{04}} = 0. \quad (21)$$

Условия непрерывности напряжений на упругопластической границе в нулевом приближении примут форму

$$\tau_{\rho z 3}^{e(0)} \Big|_{\rho=\rho_s^{(0)}} = \tau_{\rho z 3}^{p(0)} \Big|_{\rho=\rho_s^{(0)}}, \quad \tau_{\theta z 3}^{e(0)} \Big|_{\rho=\rho_s^{(0)}} = \tau_{\theta z 3}^{p(0)} \Big|_{\rho=\rho_s^{(0)}}. \quad (22)$$

Рассмотрим первое приближение.

Система уравнений для первого приближения будет иметь следующий вид.

Уравнение равновесия не меняет свою форму

$$\frac{\partial \tau_{\rho zi}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta zi}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho zi}^{(1)}}{\rho} = 0. \quad (23)$$

Соотношения Коши примут вид

$$\varepsilon_{\rho z 3}^{e(1)} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w_3^{e(1)}}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z 3}^{e(1)} = \frac{\omega}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_3^{e(1)}}{\partial \theta}. \quad (24)$$

Соотношения закона Гука не изменяются

$$\tau_{\rho z 3}^{e(1)} = 2G\varepsilon_{\rho z 3}^{e(1)}, \quad \tau_{\theta z 3}^{e(1)} = 2G\varepsilon_{\theta z 3}^{e(1)}. \quad (25)$$

Условие пластичности в каждом слое будет иметь вид

$$\begin{aligned} & 2\tau_{\rho z i}^{p(0)} \tau_{\rho z i}^{p(1)} + 2\tau_{\theta z i}^{p(0)} \tau_{\theta z i}^{p(1)} + 2 \left(-k_i^{(1)} \tau_{\rho z i}^{p(0)} \cos\theta + k_i^{(1)} \tau_{\theta z i}^{p(0)} \sin\theta \right) - \\ & - 2 \left(\chi_i^{(1)} \tau_{\rho z i}^{p(0)} \sin\theta + \chi_i^{(1)} \tau_{\theta z i}^{p(0)} \cos\theta \right) + \\ & + a_i \left(\tau_{\rho z i}^{p(0)2} \cos^2\theta + \tau_{\theta z i}^{p(0)2} \sin^2\theta - \tau_{\rho z i}^{p(0)} \tau_{\theta z i}^{p(0)} \sin 2\theta \right) + \\ & + b_i \left(\tau_{\rho z i}^{p(0)2} \sin^2\theta + \tau_{\theta z i}^{p(0)2} \cos^2\theta + \tau_{\rho z i}^{p(0)} \tau_{\theta z i}^{p(0)} \sin 2\theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

В упругой области внутреннего слоя уравнение (5) сохраняет свою форму

$$\Delta w_3^{e(1)} = 0. \quad (27)$$

Граничное условие на внешнем контуре L_1 (6) примет форму

$$\left(\frac{\partial \tau_{\rho z 1}^{p(0)}}{\partial \rho} R_{11} + \tau_{\rho z 1}^{p(1)} - \tau_{\theta z 1}^{p(0)} \frac{\dot{R}_{11}}{R_{01}} \right) \Big|_{\rho=R_{01}} = 0. \quad (28)$$

Условие сопряжения напряжений на границе L_2 (7) будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial \tau_{\rho z 2}^{p(0)}}{\partial \rho} R_{12} + \tau_{\rho z 2}^{p(1)} - \tau_{\theta z 2}^{p(0)} \frac{\dot{R}_{12}}{R_{02}} \right) \Big|_{\rho=R_{02}} = \left(\frac{\partial \tau_{\rho z 1}^{p(0)}}{\partial \rho} R_{12} + \tau_{\rho z 1}^{p(1)} - \tau_{\theta z 1}^{p(0)} \frac{\dot{R}_{12}}{R_{02}} \right) \Big|_{\rho=R_{02}}. \quad (29)$$

Условие сопряжения на границе L_3 (8) запишется так

$$\left(\frac{\partial \tau_{\rho z 3}^{p(0)}}{\partial \rho} R_{13} + \tau_{\rho z 3}^{p(1)} - \tau_{\theta z 3}^{p(0)} \frac{\dot{R}_{13}}{R_{03}} \right) \Big|_{\rho=R_{03}} = \left(\frac{\partial \tau_{\rho z 2}^{p(0)}}{\partial \rho} R_{13} + \tau_{\rho z 2}^{p(1)} - \tau_{\theta z 2}^{p(0)} \frac{\dot{R}_{13}}{R_{03}} \right) \Big|_{\rho=R_{03}}. \quad (30)$$

Граничное условие на внутреннем контуре L_4 (9) будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial \tau_{\rho z 3}^{e(0)}}{\partial \rho} R_{14} + \tau_{\rho z 3}^{e(1)} - \tau_{\theta z 1}^{e(0)} \frac{\dot{R}_{14}}{R_{04}} \right) \Big|_{\rho=R_{04}} = 0. \quad (31)$$

Условия непрерывности напряжений на упругопластической границе L_s (10), (11) имеют форму

$$\left(\frac{\partial \tau_{\rho z 3}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_s^{(1)} + \tau_{\rho z 3}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_s^{(0)}} = \left(\frac{\partial \tau_{\rho z 3}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_s^{(1)} + \tau_{\rho z 3}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_s^{(0)}}, \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{\theta z 3}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_s^{(1)} + \tau_{\theta z 3}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_s^{(0)}} = \left(\frac{\partial \tau_{\theta z 3}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_s^{(1)} + \tau_{\theta z 3}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=\rho_s^{(0)}}. \quad (33)$$

Объединяя (17)-(22), в нулевом приближении получим задачу упругопластического кручения трехслойного изотропного цилиндрического стержня кругового поперечного

сечения.

Решение данной задачи имеет вид

$$\tau_{\rho zi}^{p(0)} = 0, \tau_{\theta zi}^{p(0)} = K_i, \tau_{\rho zi}^{e(0)} = 0, \tau_{\theta z3}^{e(0)} = G\omega\rho, w_3^{e(0)} = 0, \rho_s^{(0)} = 1. \quad (34)$$

Результаты для первого приближения

Следуя [14], уравнения контуров L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) представим в виде

$$\rho = \alpha_i (1 + d_i \delta \cos m\theta), \quad (35)$$

где $-1 \leq d_i \leq 1$, причем $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$.

Из условия пластичности (26) с учетом нулевого приближения (34) можно получить компоненту напряжения $\tau_{\theta zi}^{p(1)}$ в каждом слое

$$\tau_{\theta zi}^{p(1)} = -k_i^{(1)} \sin\theta + \chi_i^{(1)} \cos\theta - \frac{K_i}{4} (a_i + b_i - (a_i - b_i) \cos 2\theta). \quad (36)$$

Уравнение равновесия (23) в пластических областях можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \tau_{\rho zi}^{p(1)} \right) = - \frac{\partial \tau_{\theta zi}^{p(1)}}{\partial \theta}. \quad (37)$$

Подставляя (36) в (37) и, производя интегрирование, получим выражение для компоненты напряжений $\tau_{\rho zi}^{p(1)}$ в каждом слое

$$\tau_{\rho zi}^{p(1)} = k_i^{(1)} \cos\theta + \chi_i^{(1)} \sin\theta + \frac{K_i (a_i - b_i)}{4} \sin 2\theta + \frac{N_i}{\rho}, \quad (38)$$

где $N_i = N_i(\theta)$ – неизвестные функции координаты θ , которые определяются из граничного условия на внешнем контуре для внешнего слоя и условий сопряжения напряжений на границе раздела слоев для второго и третьего слоев.

Рассмотрим внешний слой.

Граничное условие на внешнем контуре (28), исходя из (34) и (35), примет вид

$$\tau_{\rho z1}^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_1} = -K_1 d_1 m \sin m\theta. \quad (39)$$

Подставляя (38) в (39), надем выражение для N_1 и получим

$$\tau_{\rho z1}^{p(1)} = \left(k_1^{(1)} \cos\theta + \chi_1^{(1)} \sin\theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{4} \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\alpha_1}{\rho} \right) - \frac{\alpha_1}{\rho} K_1 d_1 m \sin m\theta. \quad (40)$$

На границе раздела первого и второго слоев условие сопряжения напряжений (29), учитывая (34) и (35), будет иметь форму

$$\tau_{\rho z2}^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \left(\tau_{\rho z1}^{p(1)} - d_2 (K_2 - K_1) m \sin m\theta \right) \Big|_{\rho=\alpha_2}. \quad (41)$$

Подстановкой (38) и (40) в (41) найдем N_2 , и соотношение для $\tau_{\rho z2}^{p(1)}$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z2}^{p(1)} = & \left(k_2^{(1)} \cos\theta + \chi_2^{(1)} \sin\theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{4} \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\rho} \right) + \\ & + \left(k_1^{(1)} \cos\theta + \chi_1^{(1)} \sin\theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{4} \sin 2\theta \right) \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho} - \\ & - \frac{(\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1))}{\rho} m \sin m\theta. \end{aligned} \quad (42)$$

Наконец, условие сопряжения напряжений на границе раздела второго и третьего слоя (30) с учетом (34) и (35) примет форму

$$\tau_{\rho z 3}^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_3} = \left(\tau_{\rho z 2}^{p(1)} - d_3 (K_3 - K_2) m \sin m \theta \right) \Big|_{\rho=\alpha_3}. \quad (43)$$

Выражение для N_3 найдем подстановкой (38) и (42) в (43), и затем определим выражение для $\tau_{\rho z 3}^{p(1)}$, оно будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z 3}^{p(1)} = & \left(k_3^{(1)} \cos \theta + \chi_3^{(1)} \sin \theta + \frac{K_3 (a_3 - b_3)}{4} \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\alpha_3}{\rho} \right) + \\ & + \left(k_2^{(1)} \cos \theta + \chi_2^{(1)} \sin \theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{4} \sin 2\theta \right) \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)}{\rho} + \\ & + \left(k_1^{(1)} \cos \theta + \chi_1^{(1)} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{4} \sin 2\theta \right) \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho} - \\ & - \frac{(\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2))}{\rho} m \sin m \theta. \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом, определены напряжения в первом приближении в пластических областях.

Рассмотрим упругую область внутреннего слоя.

Выразим компоненты упругих напряжений через функцию депланации в упругой области, для этого подставим (24) в (25), получим

$$\tau_{\rho z 3}^{e(1)} = G \omega \frac{\partial w^{e(1)3}}{\partial \rho}, \quad \tau_{\theta z 3}^{e(1)} = G \omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial w^{e(1)3}}{\partial \theta}. \quad (45)$$

Граничное условие на внутреннем контуре (31) с учетом начального приближения (34), уравнения границы (35) и первого из соотношений (45) примет форму

$$\frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\alpha_4} = -\alpha_4 d_4 m \sin m \theta. \quad (46)$$

Условие непрерывности компоненты напряжений $\tau_{\rho z 3}^{(1)}$ на упругопластической границе (32) подстановкой в него (34) и (45) даст соотношение

$$\frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \frac{1}{G \omega} \tau_{\rho z 3}^{p(1)} \Big|_{\rho=1}. \quad (47)$$

В упругой области для функции депланации объединением уравнения (27) и крайевых условий (46) и (47) с учетом полученного соотношения (44) получим задачу Неймана

для кольца ($0 \leq \theta < 2\pi$, $\alpha_4 < \rho < 1$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w^{e(1)} = 0 \\ \left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \frac{1}{G\omega} \left(k_3^{(1)} \cos\theta + \chi_3^{(1)} \sin\theta + \frac{K_3(a_3-b_3)}{4} \sin 2\theta \right) (1 - \alpha_3) + \\ + \frac{1}{G\omega} \left(k_2^{(1)} \cos\theta + \chi_2^{(1)} \sin\theta + \frac{K_2(a_2-b_2)}{4} \sin 2\theta \right) (\alpha_3 - \alpha_2) + \\ + \frac{1}{G\omega} \left(k_1^{(1)} \cos\theta + \chi_1^{(1)} \sin\theta + \frac{K_1(a_1-b_1)}{4} \sin 2\theta \right) (\alpha_2 - \alpha_1) - \\ - \frac{1}{G\omega} (\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2)) m \sin m\theta \\ \left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\alpha_4} = -\alpha_4 d_4 m \sin m\theta \end{array} \right. \quad (48)$$

Решая систему (48), получим выражение для функции перемещения в упругой области третьего слоя

$$\begin{aligned} w_3^{e(1)} = & \frac{1}{G\omega (1 - \alpha_4^2)} (M_1 \cos\theta + M_2 \sin\theta) \left(\rho + \frac{\alpha_4^2}{\rho} \right) + \\ & + \frac{1}{2G\omega (1 - \alpha_4^4)} M_3 \left(\rho^2 + \frac{\alpha_4^4}{\rho^2} \right) \sin 2\theta + \\ & + \left(M_4 \left(\rho^m + \frac{\alpha_4^{2m}}{\rho^m} \right) + \frac{d_4 \alpha_4^{m+2}}{\rho^m} \right) \sin m\theta, \end{aligned} \quad (49)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} M_1 &= k_3^{(1)} (1 - \alpha_3) + k_2^{(1)} (\alpha_3 - \alpha_2) + k_1^{(1)} (\alpha_2 - \alpha_1), \\ M_2 &= \chi_3^{(1)} (1 - \alpha_3) + \chi_2^{(1)} (\alpha_3 - \alpha_2) + \chi_1^{(1)} (\alpha_2 - \alpha_1), \\ M_3 &= \frac{K_3(a_3-b_3)}{2} (1 - \alpha_3) + \frac{K_2(a_2-b_2)}{2} (\alpha_3 - \alpha_2) + \frac{K_1(a_1-b_1)}{2} (\alpha_2 - \alpha_1), \\ M_4 &= \frac{1}{G\omega (1 - \alpha_4^{2m})} (\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2)). \end{aligned}$$

Поле напряжений в упругой зоне получим по формулам (45) подстановкой в них (49)

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z 3}^{e(1)} = & \frac{1}{(1 - \alpha_4^2)} (M_1 \cos\theta + M_2 \sin\theta) \left(1 - \frac{\alpha_4^2}{\rho^2} \right) + \\ & + \frac{1}{(1 - \alpha_4^4)} M_3 \left(\rho - \frac{\alpha_4^4}{\rho^3} \right) \sin 2\theta + \\ & + mG\omega \left(M_4 \left(\rho^{m-1} - \frac{\alpha_4^{2m}}{\rho^{m+1}} \right) - \frac{d_4 \alpha_4^{m+2}}{\rho^{m+1}} \right) \sin m\theta, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z 3}^{e(1)} = & \frac{1}{(1 - \alpha_4^2)} (-M_1 \sin\theta + M_2 \cos\theta) \left(1 + \frac{\alpha_4^2}{\rho^2} \right) + \\ & + \frac{1}{(1 - \alpha_4^4)} M_3 \left(\rho + \frac{\alpha_4^4}{\rho^3} \right) \cos 2\theta + \\ & + mG\omega \left(M_4 \left(\rho^{m-1} + \frac{\alpha_4^{2m}}{\rho^{m+1}} \right) + \frac{d_4 \alpha_4^{m+2}}{\rho^{m+1}} \right) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (51)$$

Определим упругопластическую границу в первом приближении.

Подставляя (34) в (33), получим формулу для определения радиуса упругопластической границы

$$\rho_s^{(1)} = \frac{1}{G\omega} \left(\tau_{\theta z 3}^{p(1)} - \tau_{\theta z 3}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=1}. \quad (52)$$

Подстановка (36) и (51) в (52) дает выражение для упругопластической границы в первом приближении, оно имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_s^{(1)} = & \frac{1}{G\omega} \left(-k_3^{(1)} \sin\theta + \chi_3^{(1)} \cos\theta - \frac{K_3}{4} (a_3 + b_3 - (a_3 - b_3) \cos 2\theta) \right) - \\ & - \frac{(1 + \alpha_4^2)}{G\omega (1 - \alpha_4^2)} (-M_1 \sin\theta + M_2 \cos\theta) - \frac{(1 + \alpha_4^4)}{G\omega (1 - \alpha_4^4)} M_3 \cos 2\theta - \\ & - m (M_4 (1 + \alpha_4^{2m}) + d_4 \alpha_4^{m+2}) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (53)$$

Заключение

Таким образом, в работе с помощью метода малого параметра получено приближенное аналитическое решение задачи упругопластического кручения трехслойного анизотропного цилиндрического стержня. В первом приближении получены напряжения в пластических и упругой областях, поле перемещений в упругой области и упругопластическая граница.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. Москва: ГИИТ, 1956. 407 с.
- [2] Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матема. ж. 1954. Т. 6, № 3. С. 314–325.
- [3] Прагер В. Упрочнение металла при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности / под ред. Ю.Н. Работнов. Москва: ИЛ, 1948. С. 325–335.
- [4] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. Об условиях анизотропии идеальнопластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 571–575.
- [5] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 560–600.
- [6] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении анизотропных цилиндрических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). С. 80–87.
- [7] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Упругопластическое кручение толстостенной трубы в случае трансляционной анизотропии // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. 1. Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2014. С. 193–199.
- [8] Ковалев А. В., И. Э. Свиридов Ю. Д. Щеглова. Упругопластическое кручение кругового цилиндра в случае анизотропии согласно Хиллу // Сборник трудов Международной научно-технической конференции. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2015. С. 68–71.
- [9] Фоминых С. О. Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). С. 211–226.
- [10] Фоминых С. О. Определение упругопластического состояния в толстостенной трубе при условии идеальнопластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2(16). С. 150–153.

- [11] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Упругопластическое состояние толстостенного стержня некругового поперечного сечения при кручении в случае анизотропии общего вида // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С. 42–54.
- [12] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
- [13] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [14] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи уруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2004. 219 с.

Yu. D. Shcheglova

PERTURBATION METHOD IN STUDYING THE STRESSED STATE OF A THREE-LAYER ANISOTROPIC CYLINDRICAL ROD OF NON-CIRCULAR CROSS SECTION UNDER ELASTIC-PLASTIC TORSION

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The paper presents the development of the small parameter method for determining the stress state of a three-layer anisotropic cylindrical rod of non-circular cross section under elastic-plastic torsion. The two outer layers are in the plastic state, the inner layer is in the elastoplastic state. The case of plastic anisotropy is considered, which takes into account both anisotropy according to Hill and translational anisotropy. Each layer has its own anisotropy parameters. In the first approximation, the stresses in the plastic regions, the displacement and stresses in the elastic region of the inner layer, and the elastoplastic boundary are determined.

Keywords: elastoplastic torsion, anisotropy according to Hill, translational anisotropy, stress state, elastoplastic boundary, small parameter method.

REFERENCES

- [1] Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford: Oxford University Press, 1998. 355 p.
- [2] Ishlinskiy A. Yu. General theory of plasticity with linear hardening // Ukrain. Math. J. 1954. T. 6, № 3. С. 314–325.
- [3] Prager W. Hardening of metal under complex stress state // Theory of plasticity / под ред. Yu. N. Rabotnov. Moscow: FL, 1948. С. 325–335.
- [4] Ivlev D. D., Maksimova L. A. On conditions of anisotropy of ideal plastic bodies // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 2(8). С. 571–575.
- [5] Ivlev D. D., Mironov B. G. On the ratios of the translational ideal plastic anisotropy in torsion // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 2(8). С. 560–600.
- [6] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. On torsion of anisotropic cylindrical rods // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2011. № 1(9). С. 80–87.
- [7] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastic-plastic torsion of a thick-walled pipe in the Case of translational anisotropy // Proceedings of the VIII All-Russian Conference on Solid Mechanics. 1. Cheboksary: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2014. С. 193–199.
- [8] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Y. D. Elastic-plastic torsion of a circular cylinder in the case of anisotropy according to Hill // Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Voronezh: Voronezh State University, 2015. P. 68–71.

Shcheglova Yuliya Dmitrievna, Candidate Sci. Phys. and Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia

-
- [9] Fominykh S. O. Elastic-plastic state of a thick-walled pipe in the interaction of different types of anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2011. № 1(9). С. 211–226.
- [10] Fominykh S. O. Determination of the elastoplastic state in a thick-walled pipe under the condition of ideal plastic anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 2(16). С. 150–153.
- [11] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastic-plastic state of a thick-walled bar of non-circular cross section under torsion in the case of general anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. № 4(30). С. 42–54.
- [12] Kachanov L. M. Fundamentals of the theory of plasticity. Moscow: Science, 1969. 420 с.
- [13] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Science, 1978. 208 с.
- [14] Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Yu. D. Non-One-Dimensional Problems of Elastic-Visco-Plasticity with an Unknown Boundary. Voronezh: Voronezh State University, 2004. 219 с.

Л. В. Левина, И. И. Марахова, В. Б. Пеньков

РЕАЛИЗАЦИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. Рассмотрены итерационные процессы для решения краевых задач математической физики и, в первую очередь, – механики. Причины порождения процессов: многополостность тел (алгоритм Шварца), композиционные среды, построение аналитических решений, физическая и геометрическая нелинейность определяющих соотношений (подход Линшtedта-Пуанкаре). Оценены особенности энергетического метода граничных состояний в этих подходах. В качестве примера рассмотрено применение алгоритма Шварца к решению основной смешанной задачи термостатики. .

Ключевые слова: алгоритм Шварца, метод возмущений, малый параметр, метод Линшtedта-Пуанкаре, энергетические методы, метод граничных состояний, МГС, МГСВ.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.008

УДК: 539.3+518.5

Введение. Исторически зародилась тенденция к усложнению постановок краевых задач математической физики, механики сплошных сред. Причины этого: многополостность тел, взаимодействие явлений различной физической природы, поиск точных и приближенных аналитических решений, учет свойств нелинейного характера. Классически решение сводится к итерационной последовательности линейных задач. Эффективным средством явилось использование энергетического метода граничных состояний (МГС), исходящего из изоморфизма гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний тела.

© Левина Л. В., Марахова И. И., Пеньков В. Б., 2022

Левина Любовь Владимировна

e-mail: sataalkina_lyubov@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,

Марахова Ирина Игоревна

e-mail: marahova.irina@yandex.ru, студент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,

Пеньков Виктор Борисович

e-mail: vbrenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей механики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Поступила 10.11.2022

1. Классические итерационные процессы

1.1. *Многополостность.* Тело занимает замкнутую область $V \subset R^3$ и содержит множество из N непересекающихся полостей $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_N$, где $\bar{V}_k = R^3 \setminus V_k$; $V_i \cap V_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Следовательно, $V = \bigcap_{k=0}^N V_k$, где V_0 есть либо односвязная ограниченная область, либо $V_0 \equiv R^3$. Любой вычислительный процесс преодолевает трудности, связанные с учетом особенностей участков границ множества ∂V , на которых также возможны различные варианты постановок граничных условий (ГУ).

Пусть краевая задача представлена в операторной форме (L – линейный оператор):

$$L \xi = f, \quad x \in V \quad (1)$$

Правая часть f отвечает за неоднородность линейной постановки задачи, ξ содержит информацию о внутреннем состоянии тела. В общем случае линейности граничное условие (ГУ) имеет форму

$$G\gamma = g, \quad x \in \partial V, \quad (2)$$

где G характеризует тип ГУ, а g – их значения; γ – “след” состояния ξ на ∂V .

В случае энергетических методов эффективность для решения краевой задачи (1), (2) показал подход Треффца [1]. Решение представляется в виде ряда по элементам базиса:

$$\xi = \sum_{k=0}^K c_k \xi^k \quad (3)$$

Базис составляют состояния ξ^k , удовлетворяющие определяющим соотношениям среды.

Продemonстрируем подход Треффца на примере уравнения Пуассона

$$\Delta \xi(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V. \quad (4)$$

Пусть значение $k = 0$ отвечает частному решению уравнения (4).

Полагая $c_0 = 1$ и корректируя ГУ (2) в форме

$$\sum_{k=1}^K c_k \Delta \xi^k = 0 \quad (G \xi^0 = f),$$

приходим к выводу, что все ξ^k являются линейно-независимыми гармоническими функциями. Для односвязной ограниченной области V_0 набор элементов базиса можно составить отрезком гармонических многочленов известной последовательности [2]:

$$\xi^k \in \{x, y, z, xy, xz, yz, x^2 - y^2, x^2 - z^2, xyz, \dots\}$$

Обозначим $Q_n(x, y, z)$ любой однородный гармонический многочлен порядка n из указанного списка. Доказано [3], что функция вида

$$P_n(x, y, z) = \frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

является гармонической в любой ε -окрестности начала координат. Соответственно $P_n(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ являются таковыми вне ε -окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и исчезающими на бесконечности. При формировании списка $\{\xi^k\}$ требуется удерживать значительное число элементов для каждой полости со своими центрами. Если обозначить мощности отрезков указанных базисов через N_j , то мощность декартова

произведения состояний от каждого элемента базиса равна $K = \prod_{j=0}^N N_j$, где $N_0 = 1$ в случае, когда область $V_0 \equiv R^3$. Эта размерность зачастую весьма велика для проведения практических расчетов.

Итерационный подход Шварца [4] декомпозирует решение задачи: на каждом шаге решается последовательность задач поочередно для каждой из областей V_k . После каждого решения выполняется коррекция в ГУ всех участков границы. Это снимает проблему высокой размерности базиса. Сходимость “алгоритма Шварца” не доказана, но использование подхода к задачам эластостатики показало такую уже при 3-4 итерациях [5].

1.2. Физическая композиционность. Усложнение физических свойств среды приводит к трудностям, определяемым композицией разнообразных физических характеристик. Примером служит термоэластостатика изотропного однородного тела.

Ее определяющими соотношения являются: 1) уравнения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad x \in V, \quad (5)$$

где ε_{ij} – деформации, u_i – перемещения; 2) уравнения Ламе (λ, μ – упругие постоянные).

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad x \in V, \quad (6)$$

где σ_{ij} – напряжения, δ_{ij} – символ Кронекера; 3) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x \in V. \quad (7)$$

Здесь X_i – компонента объемной силы.

В задаче термостатики уравнение Пуассона связывает температуру T с объемным теплоисточником Q посредством коэффициента температуропроводности κ :

$$T_{,ii} = -\frac{1}{\kappa} Q, \quad x \in V. \quad (8)$$

“Комбинированная” термоэластостатическая среда содержит в определяющих соотношениях набор из (5), (6), (8) и закон Дюамеля–Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T \delta_{ij}, \quad x \in V. \quad (9)$$

Здесь α – коэффициент температурного расширения.

При каждом упругом состоянии (мощностью списка N^E) возможно произвольное температурное состояние (N^T). Базис термоэластостатических состояний имеет мощность $K = N^E N^T$. Комбинирование сред также порождает проблему размерности.

Если характеристики упругого и теплового состояний не “завязаны” в ГУ, то краевая задача – несвязанная. Строится поле температуры (8) при соответствующих ГУ. Уравнение Дюамеля–Неймана вырождаются в обобщенный закон Гука с объемными силами

$$F_i = X_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,i} \quad (10)$$

В общем случае задача термоэластостатики может быть связанной. Возникает необходимость преодоления сложностей, порожденных числом K . Зарождается версия применения итераций по типу алгоритма Шварца: начальное приближение для температурного поля корректирует объемные силы и ГУ, решается эластостатическая задача, корректируются ГУ для температурной задачи и т.д.

1.3. Полнопараметрические решения. Фундаментальное значение имеют аналитические решения, явно содержащие все параметры задачи. Решение достаточно выполнить один раз. Практические расчеты по оценке полей при конкретных значениях параметров сводятся к элементарному расчету по готовым формулам.

Рассмотрим пример организации полнопараметрического решения (ППР, [6]) для эластостатического тела с характерным геометрическим размером R . В случае однородности и изотропии упругие параметры Ламе μ , $\lambda = 2\nu\mu/(1-2\nu)$ (ν – коэффициент Пуассона), можно использовать при обезразмеривании. При $\nu_0 = 1/4$ после обезразмеривания масштабом μ получается $\mu = \lambda = 1$.

Безразмерное решение не содержит истинного значения коэффициента Пуассона. Будем считать его слабо отличающимся от ν_0 : $\nu = \nu_0 + \omega$. Малый параметр ω может использоваться для организации итерационного процесса на основе метода возмущений. Рассмотрим декомпозицию по параметру ω при $\nu_0 = 1/4$. При $\lambda_0 = \mu_0 = 1$ для λ имеем:

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_* \omega^k, \quad \lambda_* = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2, & k > 0 \end{cases}.$$

Разложения по степеням ω приводят к последовательности задач в итерациях (k):

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij}^{(k)} &= u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}, \\ s_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)} = \lambda_* \varepsilon_{mm}^{(k)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ s_{ij,j}^{(k)} + \tilde{X}_i^{(k)} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)} = \lambda_* \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_{mm}^{(l)} \omega^l \delta_{ij}, \quad \tilde{X}_i^{(k)} = \lambda_* \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_{mm,i}^{(l)}.$$

Соотношения (11) являются определяющими для линейной изотропной теории упругости, но значения λ_* имеет два уровня. Разрешающую систему уравнений надо готовить дважды. После перехода к размерным величинам приближенное решение содержит все параметры задачи.

1.4. Нелинейные определяющие соотношения. Причины проявления нелинейностей различны: 1) “геометрический” характер нелинейности. Например, – учет составляющей Альманси в определении тензора деформации [7]; 2) физически нелинейные зависимости параметров среды от ее состояния (нелинейная упругость); 3) неоднородность среды. Этот фактор нелинейным не считается, но способствует организации итерационного процесса при проведении вычислений [8].

Использование подхода Линшtedта-Пуанкаре [9] во многих случаях позволяет нелинейную задачу преобразовать к “слабо - нелинейному” операторному представлению

$$L\xi + \beta M\xi = 0, \quad \beta \ll 1. \quad (12)$$

Здесь L – главная линейная часть операторного уравнения, M – собственно нелинейная составляющая, β – малый параметр. В предположении о разложимости нелинейного оператора M по итерациям

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} M^{(k)} \xi^{(k)} \quad (13)$$

удается представить вычислительный процесс в виде последовательности $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ решения задач линейного характера:

$$L\xi^{(0)} = 0; \quad L\xi^{(k)} = -M^{*(k-1)} \xi^{(k-1)}. \quad (14)$$

Правая часть соотношений (14) является уже известной функциональной зависимостью.

Для успешного решения соответствующих (14) краевых задач необходимо эффективно строить как частные решения $\xi^{*(k)}$ для каждой итерации k , так и решение соответствующей однородной задачи

$$L\xi^{(k)} = 0 \quad (15)$$

при скорректированных ГУ за счет поправки от частного решения.

На каждом итерационном шаге сохраняют силу все выше описанные причины усложнения процесса построения решения. Убедительным примером линеаризации методом Линшtedта-Пуанкаре может служить исследования напряженно-деформированного состояния протяжённого упругого тела [10], имеющего малые деформации, но конечные перемещения.

2. Основные положения метода граничных состояний. Энергетический метод граничных состояний (МГС) исходит из изоморфизма внутреннего Ξ и граничного Γ пространств состояний среды, заключенной в области V с границей ∂V . Под внутренним состоянием ξ понимается избыточный набор характеристик среды, согласованных определяющими соотношениями. Под граничным состоянием γ понимается “след” внутреннего состояния на границе тела. Он также избыточен; его набор должен гарантировать однозначное восстановление соответствующего внутреннего состояния: $\gamma \rightarrow \xi$. Будем полагать оба пространства линейными, бесконечномерными, полными, всюду плотными. При наличии равных скалярных произведений

$$(\xi^1, \xi^2)_{\Xi} = (\gamma^1, \gamma^2)_{\Gamma} \quad (16)$$

для изоморфных пар элементов $\xi^i \leftrightarrow \gamma^i$, $i \in \{1, 2\}$ они состоят в гильбертовом изоморфизме $\Xi \leftrightarrow \Gamma$.

При условии сепарабельности пространств Ξ, Γ в них существуют изоморфные счетные базисы элементов:

$$\{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n, \dots\} \leftrightarrow \{\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n, \dots\},$$

которые полагаем ортонормированными в смысле скалярных произведений (16).

Любая изоморфная пара элементов этих пространств имеет структурно одинаковые разложения Фурье по соответствующим базисам:

$$\xi = \sum_{k \in N} c_k \xi^k, \quad \gamma = \sum_{k \in N} c_k \gamma^k, \quad c_k = (\xi, \xi^k)_{\Xi} = (\gamma, \gamma^k)_{\Gamma}. \quad (17)$$

Метод граничных состояний позволяет переписать граничные условия в форме бесконечной системы алгебраических уравнений (БСУ) относительно коэффициентов Фурье (N – размерность усеченного базиса)

$$A \mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (18)$$

$$A = \{a_{ij}\}_{N \times N}, \quad \mathbf{b} = \{b_i\}_N, \quad \mathbf{c} = \{c_j\}_N.$$

Матрица A коэффициентов определяется исходным базисом граничных состояний и типом ГУ. Вектор правых частей несет точную информацию о правой части (4). Структура матрицы A предписана типом ГУ.

Например, в классических вариантах некоторых краевых задач она является единичной и тогда решение БСУ сводится к рутинному вычислению коэффициентов Фурье через свертку $g(x)$ с актуальным набором $\langle \gamma^k \rangle$ – подмножеством элементов искомого граничного состояния γ , отвечающим условиям корректности:

$$c_k = (g, \langle \gamma^k \rangle)_\Gamma. \quad (19)$$

При практических расчетах приходится проводить усечения счетного базиса до некоторого конечного значения $K \in N$. Тогда о качественно-точностном характере решения удается судить по неравенству Бесселя

$$\sum_{k=1}^K c_k^2 \leq (\gamma, \gamma)_\Gamma. \quad (20)$$

Значение γ заранее является неизвестным. Однако факт насыщения суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя) позволяет судить о приемлемости удерживаемого значения K . Строгая оценка может быть получена сопоставлением левой и правой частей ГУ (2) и оценкой их разности по любой удовлетворяющей исследователя норме.

Линейность оператора L позволяет представить решение краевой задачи для в виде суммы

$$\xi = \xi^0 + \xi^*, \quad (21)$$

где ξ^* – частное решение, тождественно удовлетворяющее операторному уравнению, ξ^0 – решение краевой задачи для однородного операторного уравнения

$$L \xi^0 = 0 \quad (22)$$

при скорректированных ГУ

$$G \gamma^0 = g - G \gamma^*, \quad \gamma^* \leftrightarrow \xi^*. \quad (23)$$

МГС далее используется для построения решения ξ^0 на основе базиса состояний, соответствующего однородному уравнению с последующей композицией (21). Рассмотрим примеры формирования разрешающей БСУ для двух типов сред.

2.1. Изотропная эластостатика. В задачах об упругом равновесии изотропного материала под внутренним состоянием удобно понимать набор характеристик $\xi^E = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$, согласованных соотношениями (5)-(7). Базис элементов пространства внутренних состояний эластостатического тела Ξ^E эффективно выписывается средствами общих решений Аржаных–Слободянского для внутренней ограниченной области и внешности полости [7]. Выход на границу тела формирует граничное состояние $\gamma^E = \{u_i, p_i\} \in \Gamma^E$, $p_i = \sigma_{ij} n_j$, $x \in \partial V$, где $\mathbf{n} = \{n_j\}$ – единичный вектор внешней нормали.

Равенство скалярных произведений в обоих пространствах обеспечивает принцип возможных перемещений в эластостатике

$$(\xi_E^{(1)}, \xi_E^{(2)}) \equiv \int_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_{\partial V} p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS \equiv (\gamma_E^{(1)}, \gamma_E^{(2)}), \quad (24)$$

где верхние индексы (1), (2) отвечают любым элементам изоморфных базисов. Ниже считаем оба базиса ортонормированными.

Приведем классические варианты разрешающих систем уравнений вида (18).

Первая основная задача. На границе тела заданы усилия: $\mathbf{p}(x), x \in \partial V$. Параметры БСУ определяются выражениями

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = \int_{\partial V} p_k u_k^{(i)} ds, \quad x \in \partial V. \quad (25)$$

Вторая основная задача. На границе ∂V заданы поверхностные перемещения $\mathbf{u}(x)$.

Параметры БСУ:

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = \int_{\partial V} u_k p_k^{(i)} ds, \quad x \in \partial V. \quad (26)$$

Основная смешанная задача. Граница ∂V тела разбита на два класса: $\partial V = S_p \cup S_u$, $S_p \cap S_u = \emptyset$. На S_p удержаны поверхностные усилия \mathbf{p} , на S_u – перемещения \mathbf{u} . Параметры БСУ таковы [10]:

$$a_{ij} = \int_{S_p} u_k^i p_k^j ds + \int_{S_u} p_k^i u_k^j ds, \quad b_i = \int_{S_p} p_i u_k^i ds + \int_{S_u} u_k p_k^i ds, \quad x \in \partial V. \quad (27)$$

2.2. Линейная термостатика. Элементами базисов пространств внутренних и граничных состояний удобно обозначать наборы характеристик $\xi^T = \{T, T_{,i}\} \in \Xi^T$, $x \in V$ и $\gamma^T = \{T, dT/d\mathbf{n}\} \in \Gamma^T$, $x \in \partial V$. Скалярные произведения определяют основные свойства гармонических функций

$$(\xi_T^{(1)}, \xi_T^{(2)}) = \int_V T_{,i}^{(1)} T_{,i}^{(2)} dV = \int_{\partial V} T^{(1)} \frac{dT^{(2)}}{d\mathbf{n}} dS = (\gamma_T^{(1)}, \gamma_T^{(2)}). \quad (28)$$

В случае задачи Дирихле на границе тела удерживаются значения приведенной температуры: $T(x), x \in \partial V$ и разрешающая система уравнений имеет коэффициенты

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = \int_{\partial V} T \frac{dT^{(i)}}{d\mathbf{n}} dS, \quad x \in \partial V. \quad (29)$$

В задаче Неймана на границе определен тепловой поток $\frac{dT}{d\mathbf{n}}, x \in \partial V$. Разрешающие уравнения содержат коэффициенты

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = \int_{\partial V} \frac{dT}{d\mathbf{n}} T^{(i)} dS, \quad x \in \partial V. \quad (30)$$

В смешанной задаче, когда на границе удержана линейная комбинация $\alpha T + \beta \frac{dT}{d\mathbf{n}}$, справедливы выражения:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\partial V} \left(\alpha T^{(j)} + \beta \frac{dT^{(j)}}{d\mathbf{n}} \right) \left(\alpha T^{(i)} + \beta \frac{dT^{(i)}}{d\mathbf{n}} \right) dS, \\ b_i &= \int_{\partial V} \left(\alpha T + \beta \frac{dT}{d\mathbf{n}} \right) \left(\alpha T^{(i)} + \beta \frac{dT^{(i)}}{d\mathbf{n}} \right) dS. \quad x \in \partial V \end{aligned} \quad (31)$$

В основной *смешанной* задаче, когда граница ∂V тела разбита на два класса: $\partial V = S_D \cup S_N$, $S_D \cap S_N = \emptyset$ с условиями Дирихле (S_D) и Неймана (S_N), коэффициенты БСУ рассчитываются так:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{S_D} T^{(i)} \frac{dT^{(j)}}{dn} dS + \int_{S_N} \frac{dT^{(j)}}{dn} T^{(i)} dS, \\ b_i &= \int_{S_D} T \frac{dT^{(i)}}{dn} dS + \int_{S_N} \frac{dT}{dn} T^{(i)} dS, \quad x \in \partial V. \end{aligned} \quad (32)$$

Во всех случаях в силу линейной независимости элементов базиса решение разрешающей системы линейных алгебраических уравнений единственно.

3. Особенности метода граничных состояний в итерационных процессах. На каждом шаге итерационных процессов решаются линейные краевые задачи, ставящиеся для набора определяющих соотношений среды и удовлетворяющие на границе тела корректным условиям различных типов. Использование для решения МГС предполагает выполнение ряда исходных положений довольно общего характера.

1°. Пространство внутренних состояний Ξ среды является гильбертовым: линейным со скалярным произведением $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi}$. Набор характеристик согласован определяющими соотношениями. Например, для (5), (6), (8), (9) это $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, T, T_{,i}\}$. Соответствующее граничное состояние содержит набор характеристик: $\gamma = \{u_i, p_i, T_i, dT_i/dn\} \in \Gamma$. В силу истинности выражений (24), (28) можно определить скалярные произведения:

$$\begin{aligned} (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) &= \alpha_E (\xi_E^{(1)}, \xi_E^{(2)}) + \alpha_T (\xi_T^{(1)}, \xi_T^{(2)}), \\ (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) &= \alpha_E (\gamma_E^{(1)}, \gamma_E^{(2)}) + \alpha_T (\gamma_T^{(1)}, \gamma_T^{(2)}), \end{aligned}$$

где α_E, α_T – заданные положительные множители.

2°. Каждому элементу $\xi \in \Xi$ изоморфно соответствует элемент гильбертова пространства граничных состояний $\gamma \in \Gamma$. Скалярные произведения изоморфных пар элементов $\xi^{(k)} \leftrightarrow \gamma^{(k)}$ равны: $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi} = (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})_{\Gamma}$.

3°. Базисы используемых ниже пространств состояний считаем сформированными и ортонормированными любым способом [11].

4°. Граничные условия (2) использованием разложения в ряды Фурье (3) приводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (18).

5°. Решение усеченной БСУ уровнем K обеспечивается на двух этапах. Во-первых, из неравенства Бесселя $\sum_{k=1}^K c_k^2 \leq (\xi, \xi)_{\Xi}$ по характеру насыщения суммы Бесселя (левая

часть неравенства) можно судить о приемлемости назначаемой величины. Во-вторых, оценка невязки ГУ с γ характеризует точность и можно корректировать значение K .

6°. Построение частного решения неоднородной задачи в случае регулярных правых частей принципиальных трудностей не составляет. Можно достаточно точно и даже строго выписывать частные решения для объемных воздействий полиномиального типа [12].

МГС при решении итерационных задач имеет ряд положительных факторов:

1) в случае многополостности ортогонализация базисов для “частных” тел выполняется единожды: ресурсосбережение;

2) при смешанных типах ГУ факт отражения “смешанности” в матрице A разрешающей БСУ достаточно выполнить один раз на начальном приближении. На последующих итерациях решается основная задача, для которой эта матрица – единичная;

3) при построении полнопараметрического решения ортогонализация проводится дважды: сначала – для первого приближения, затем – для всех последующих;

4) физически композиционные задачи можно разложить по физическому смыслу на этапах подготовки базисов. Просматривается подход, аналогичный алгоритму Шварца;

5) при решении нелинейных задач сочетанием метода возмущений и МГС (МГСВ, [13]) ортогонализация и конструирование матрицы A выполняется единожды.

4. Термостатическое состояние полушара со сферической полостью.

Однородная теплопроводная среда занимает область полушара ($z \leq 0$) с шаровидной полостью с центром $O_1(0, 0, -3)$. Полагаем процедуры обезразмеривания выполненными, радиус полости равен 1, радиус полусферы, ограничивающей тело, равен 10. Теплоисточники отсутствуют. Краевые условия соответствуют основной смешанной задаче теплопроводности: на границе полушара температура соответствует отсчетному уровню, на границе полости задан температурный поток: $T|_{\partial V_1} = 0$, $dT/dn|_{\partial V_2} = 1$, \mathbf{n} – направление внешней нормали по отношению к телу. Требуется определить распределение температуры в теле, используя алгоритм Шварца.

На начальном шаге итерации выполнена последовательность действий: 1) решена задача Дирихле для уравнения Лапласа для полушара. В ГУ для внешности полости внесена поправка величиной $dT^{(0)}/dn$; 2) решена задача Неймана для внешности полости. В ГУ следующей итерации для полушара внесена поправка величиной $T_{II}^{(0)}$. По результату первой итерации сформировано приближение для поля температуры $T^{(0)} = T_I^{(0)} + T_{II}^{(0)}$.

На последующих шагах реализуется только постановку задачи Дирихле на обеих границах: 1) в задаче для полушара строится решение $T_I^{(k+1)}$ и формируется поправка в ГУ на величину $T_{II}^{(k+1)} = T_{II}^{(k)} - T_I^{(k+1)}|_{\partial V_{II}}$; 2) решается задача Дирихле для внешности полости, определяется $T_{II}^{(k+1)}$ и готовится поправка в ГУ следующей итерации. Итерационно поле температуры накапливается: $T^{(k+1)} = T^{(k)} + T_I^{(k)} + T_{II}^{(k)}$.

Контроль за корректностью осуществлялось двумя способами: 1) фактом насыщения суммы Бесселя; 2) визуальной оценкой сходимости решения. На рис. 1,2 приведены графики, отражающие значения коэффициентов Фурье для внутренности полушара.

После каждой итерации поле температуры составило значения:

$$T^{(0)} = 1/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 3)^2},$$

$$T^{(1)} = -0.30 + 0.007(x^2 + y^2) - 0.068z + 0.003(x^2 + y^2)z - 0.015z^2 - 0.002z^3 + 0.035/r^5 - \\ - 0.002(x^2 + y^2)/r^5 + (0.024z + 0.004z^2)/r^5 + (0.060 + 0.020z)/r^3 + 1.183/r,$$

$$T^{(2)} = -0.348 + 0.008(x^2 + y^2) - 0.076z + 0.004(x^2 + y^2)z - 0.016z^2 - 0.002z^3 + 0.035/r^5 - \\ - 0.002(x^2 + y^2)/r^5 + 0.024z/r^5 + 0.004z^2/r^5 + 0.070/r^3 + 0.023z/r^3 + 1.216/r.$$

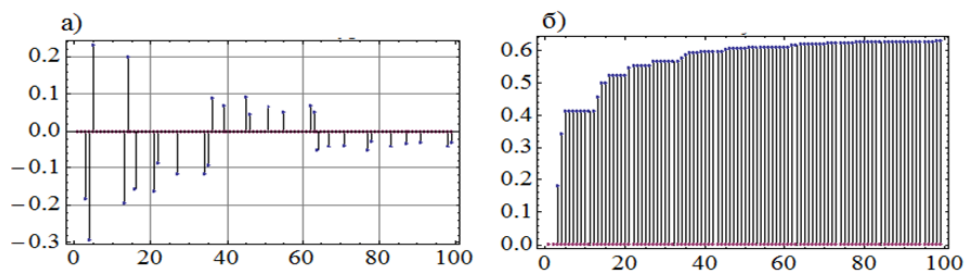


Рис. 1. Приближение I. Коэффициенты Фурье (а) и суммы Бесселя (б)

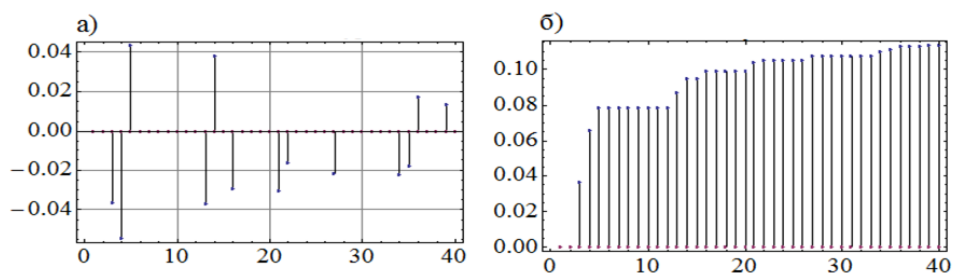


Рис. 2. Приближение II. Коэффициенты Фурье (а) и суммы Бесселя (б)

Для наглядности в оценке процесса сходимости приведено сравнение графиков распределения температуры вдоль оси z в слое $z \in [-2, 0]$. Графики помечены номерами итераций. Из них видно явное стремление к сходимости в итерационном процессе.

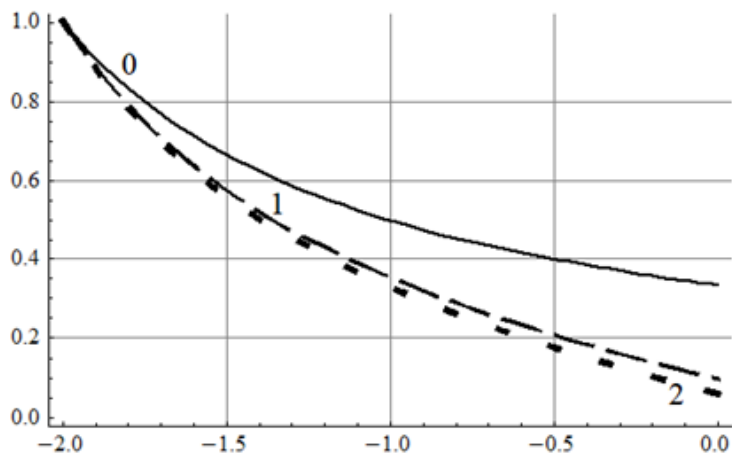


Рис. 3. Итерационное изменение поля температуры: 0,1,2 – номера итераций

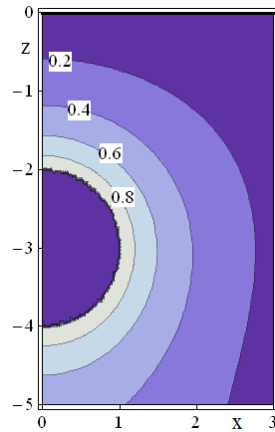


Рис. 4. Фрагмент термополя вблизи полости

После двух корректирующих итераций построено поле температуры. Его линии уровня в окрестности полости приведены на рис. 4.

Заключение

- (1) Применение итерационных подходов к решению различных задач математической физики является регулярным фактором в проведении научных исследований.
- (2) МГС является эффективным аппаратом преодоления трудностей, порождаемых введением итерационных процессов, обусловленных причинами различной природы: многополостностью тела, многофакторностью физических свойств среды, нелинейностью определяющих соотношений, и даже – желанием построить ППР.
- (3) Подход МГС является самодостаточным при решении линейных задач: уравнения определяющих соотношений среды удовлетворяются тождественно; точность решения оценивается невязкой при сопоставлении граничного состояния с ГУ; существует естественный подход для повышения точности посредством прогнозирования необходимой размерности базисов состояний.
- (4) Сходимость итерационного алгоритма Шварца продемонстрирована на решении основной смешанной задачи термостатики для однополостного ограниченного тела (полусфера с заглубленной сферической полостью). Проиллюстрированы процесс сходимости и результирующее температурное поле.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren: Verhandl 2er Internat. Kongress. Techn. Mechanik. Zürich, 1926. p. 131–137.
- [2] Пеньков В. Б., Пеньков В. В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
- [3] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В., Шульмин А. С. Применение метода граничных состояний для анализа упругой среды с полостями и включениями // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 542–556.

- [4] Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1869. p. 65–83.
- [5] Пеньков В. Б., Рыбакова М. Р., Левина Л. В. Применение алгоритма Шварца к пространственным задачам теории упругости // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 165–176.
- [6] Новикова О. С., Пеньков В. Б., Левина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями как способ организации полнопараметрического аналитического решения второй основной задачи линейной эластостатики // Вестник ЧПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 2 (36). С. 26–37.
- [7] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела М.: Наука, 1979. 744 с.
- [8] Саталкина Л. В. Метод граничных состояний в задачах теории упругости неоднородных тел и термоупругости: дисс. ... канд. физ.- мат. наук : 01.02.04; науч. рук. В.Б. Пеньков; Липецк, 2010. 108 с.
- [9] Nayfeh A. H. Introduction to perturbation techniques USA: A wiley–interscience publication. John Wiley & Sons, Inc , 1993. 519 p.
- [10] Пеньков В. Б., Левина Л. В., Новиков Е. А., Наза С. Ю. Решение краевой задачи для слабо-нелинейного операторного уравнения геометрически нелинейной упругой среды средствами метода граничных состояний с возмущениями // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. трудов Международной научной конференции. Воронеж, 2021. С. 1387–1393.
- [11] Пеньков В. Б., Левина Л. В. Сравнительный анализ процедур ортогонализации базисов евклидовых и гильбертовых пространств // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2020. № 3. С. 103–107.
- [12] Пеньков В. Б., Левина Л.В. Метод опорного базиса построения частного решения линейного неоднородного операторного уравнения математической физики // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2022. № 3. С. 91–101.
- [13] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. 108 с.

L. V. Levina, I. I. Marakhova, V. B. Penkov

IMPLEMENTATION OF ITERATIVE PROCESSES BY THE ENERGY METHOD

Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia

Abstract. Iterative processes for solving boundary value problems of mathematical physics and, first of all, mechanics are considered. The reasons for the generation of processes: multi-plane bodies (Schwartz algorithm), compositional media, the construction of analytical solutions, physical and geometric nonlinearity of the defining relations (Linstedt-Poincare approach). The features of the energy method of boundary states in these approaches are evaluated. As an example, the application of the Schwartz algorithm to the solution of the main mixed problem of thermostatics is considered.

Keywords: Schwartz algorithm, perturbation method, small parameter, Linstedt-Poincare method, energy methods, boundary state method, MBS, MBSP.

Levina Lyubov Vladimirovna, Ph.D., Associate Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,
Marakhova Irina Igorevna, Student, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,
Penkov Viktor Borisovich, Dr. Sci. Phys. and Math, Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

REFERENCES

- [1] Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren: Verhandl 2er Internat. Kongress. Techn. mechanic. Zürich, 1926. pp. 131-137.
- [2] Penkov V. B., Penkov V. V. Boundary state method for solving problems of linear mechanics // Far Eastern Mathematical magazine. 2001. V. 2. No. 2. pp. 115–137.
- [3] Penkov V. B., Satalkina L. V., Shulmin A. S. Application of the method of boundary states for the analysis of elastic media with cavities and inclusions // Applied Mathematics and Mechanics. 2014. V. 78. Issue. 4. pp. 542–556.
- [4] Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1869. pp. 65–83.
- [5] Penkov V. B., Rybakova M. R., Levina L. V. Application of the Schwartz algorithm to spatial problems theory of elasticity // Izvestia TulGU. Natural Sciences. 2015. Issue. 3. pp. 165–176.
- [6] Novikova O. S., Penkov V. B., Levina L. V. Perturbed boundary state method as a method organization of a full-parametric analytical solution of the second main problems of linear elastostatics // Bulletin of ChGPU im. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2018. No. 2 (36). pp. 26–37.
- [7] Rabotnov Yu. N. Mechanics of a deformable solid body M.: Nauka, 1979. 744 p.
- [8] Satalkina L. V. Boundary state method in problems of elasticity theory inhomogeneous bodies and thermoelasticity: diss. ...cand. physical - mat. Sciences : 01.02.04; scientific hands V.B. Penkov; Lipetsk, 2010. 108 p.
- [9] Nayfeh A. H. Introduction to perturbation techniques USA: A wiley–interscience publication. John Wiley & Sons, Inc., 1993. 519
- [10] V. B. Penkov, L. V. Levina, E. A. Novikov, Naza S. Yu. Solution of a boundary value problem for a weakly nonlinear operator equations of a geometrically nonlinear elastic medium by means of the method of boundary states with perturbations // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics: Sat. Proceedings of the International Scientific Conference. Voronezh, 2021. P. 1387–1393.
- [11] Penkov V. B., Levina L. V. Comparative analysis of base orthogonalization procedures Euclidean and Hilbert spaces // International Journal of Applied and Basic Research. 2020. No. 3. P. 103–107.
- [12] V. B. Penkov, L. V. Levina Support basis method for constructing a particular solution linear inhomogeneous operator equation of mathematical physics // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.2022. No. 3. P. 91–101.
- [13] Penkov VB, Satalkina LV Perturbed boundary state method: inhomogeneous and nonlinear problems of the theory of elasticity and thermoelasticity. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. 108 p.

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ПРЕДЕЛЬНО УПРУГИЙ ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНЫХ БЕТОННЫХ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

² *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

³ *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Рассматриваются трехслойные бетонные стержни постоянного вдоль оси стержня поперечного сечения, где в каждом из слоев может быть реализована своя марка бетона. Предполагается, что на стержень действуют поперечные квазистатические нагрузки, при этом часть слоев стержня деформируется упруго, а часть нелинейно. Получены аналитические решения прогибов стержня, границы раздела упругой и нелинейной областей, величины предельных нагрузок и примеры расчетов для различных марок бетона слоев стержня и поперечных размеров форм сечения стержня.

Ключевые слова: бетонные стержни, аналитические решения, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.011

УДК: 539.374

Современные технологии производства железобетонных изделий [1] позволяют создавать многослойные гибридные конструкции, где в поперечном сечении могут использоваться различные марки бетонов. Во многих научных работах задачи расчета железобетонных конструкций ограничиваются только упругими случаями [2], причем зачастую нелинейные задачи сводятся к последовательному расчету линейных [3].

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2022

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.11.2022

Численно расчет физически нелинейных железобетонных стержней методом Бубнова-Галеркина приведен в работах [4–6]. При численном решении нелинейных задач зачастую возникают посторонние решения, среди которых достаточно тяжело выбрать решения, удовлетворяющие условиям задачи. Примеры аналитических решений для многослойных и составных физически нелинейных стержней при продольных нагрузках приведены в работе [7], в [8] приведен пример расчета многоэтажного здания из физически нелинейных многослойных стержней. В данной работе рассматриваются аналитические решения для многослойных стержней, которые, в зависимости от приложенных нагрузок, могут деформироваться упруго и нелинейно-неупруго.

Рассмотрим многослойные бетонные стержни постоянного вдоль оси стержня поперечного сечения. Ось Ox направим вдоль оси стержня, положим, что поперечное сечение стержня обладает двумя осями симметрии, направим оси Oy и Oz вдоль указанных осей симметрии. Для простоты изложения материала ограничимся случаем трехслойного стержня (рис. 1). На указанном рисунке через Δ_1, Δ_2 обозначены толщина слоев, а через b_1, b_2 – ширина соответствующих слоев.

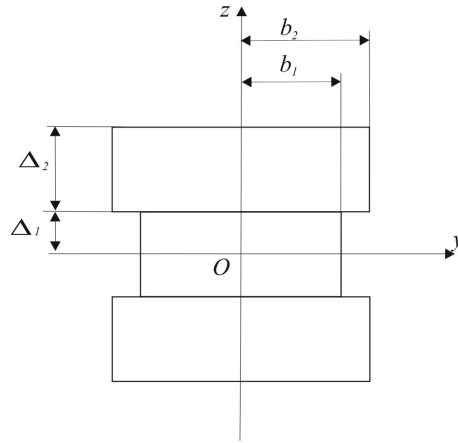


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

Для каждого из составляющих фазовых материалов соотношения между напряжениями и деформациями на i -ом участке стержня для случая $-\varepsilon_{0i}^- < \varepsilon < \varepsilon_{0i}^+$ примем равной

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad (1)$$

а при $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$ равной [9–11]

$$\sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2, \quad (2)$$

где E_i – модуль упругости бетона i -го участка стержня, $\varepsilon_{0i}^+, -\varepsilon_{0i}^-$ – предельная упругая деформация при растяжении и сжатии i -го участка стержня соответственно, ε_{*i}^+ – предельная деформация упрочнения при растяжении i -го участка стержня, A_{1i}, A_{2i} – физические параметры, определяемые из реальной диаграммы растяжения-сжатия бетонов i -го участка стержня [12].

Указанные коэффициенты также могут быть определены из достаточно простых предположений [13], исходя из вида диаграммы растяжения-сжатия бетонов.

В дальнейшем, если это не оговорено специально, перейдем к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{l} = 1, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tilde{\Delta}_i = \frac{\Delta_i}{l}, \\ \tilde{q} &= q \frac{1}{l\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{Q} = Q \frac{1}{l^2\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{N} = N \frac{1}{l^2\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{M} = M \frac{1}{l\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{l}, \end{aligned} \quad (3)$$

где обезразмеривающие величины такие: σ_{1*}^- – предел прочности при сжатии бетона марки В10, l – длина стержня, q – величина распределенной нагрузки, Q – величина перерезывающей силы, M – величина изгибающего момента, N – продольного усилия, w – величина прогиба стержня.

Во всех дальнейших обозначениях индекс «~» над всеми обезразмеренными величинами будем опускать.

Рассматриваемый нами стержень будет шарнирно оперт по краям и будет находиться под действием вертикальной распределенной нагрузки $q(x)$ (рис. 2). В данной постановке задачи будем иметь случай прямого изгиба стержня.

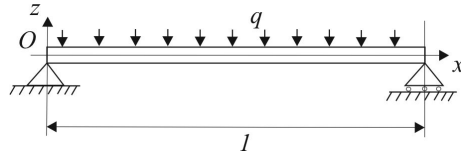


Рис. 2. Шарнирно опертый стержень

Исходя из симметрии формы поперечного сечения стержня относительно оси Oy (рис. 1), сделаем предположение, что нейтральная линия будет располагаться вдоль оси стержня.

Для рассматриваемого стержня будем считать справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\varepsilon(x, z) = -z\kappa_z(x), \quad \kappa_z(x) = \frac{d^2w_0(x)}{dx^2}, \quad (4)$$

где $\kappa_z(y)$ – кривизна осевой линии стержня, $w(x)$ – величина прогиба стержня.

В случае прямого изгиба стержня дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = q(x), \quad Q = \frac{dM_y}{dx}, \quad (5)$$

где $M_y(x)$ – проекция вектора изгибающего момента на ось Oy , Q – величина перерезывающей силы.

Граничные условия в случае шарнирного закрепления стержня имеют вид

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 0, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(1) = 0. \quad (6)$$

В случае одноосного напряженного состояния значение изгибающего момента может быть определено согласно выражениям

$$M_y(x) = -4 \sum_{i=1}^2 \iint_{S_i} z \sigma_i dS_i, \quad (7)$$

где суммирование по индексу i идет по номерам слоев в поперечном сечении.

Принимая во внимание тот факт, что, в зависимости от фазовых материалов, размеров поперечного сечения стержня, а также действующих нагрузок, возможны случаи как упругого деформирования фазовых материалов стержня по соотношениям (1), так и нелинейного, согласно зависимостям (2).

Рассматриваемая задача является статически определимой, тогда, проинтегрировав соотношения (5) с учетом граничных условий (6) и предположив, что нагрузка $q(x)$ является равномерно распределенной, получим распределение изгибающего момента вдоль всей длины стержня

$$M_y = q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right). \quad (8)$$

Из уравнения (8) видно, что наибольшее значение момента достигается в середине пролета стержня $x = 1/2$ и, исходя из соображений симметрии, при этом решение достаточно рассматривать на участке $[0; 0,5]$, решение на участке $[0,5; 1]$ будет получаться из $[0; 0,5]$ путем замены x на $(1 - x)$.

Рассмотрим случай, когда все материалы в стержне деформируются упруго, тогда из соотношений (4), (7) получим

$$\begin{aligned} M_y(x) &= -4 \left(\int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} z \sigma_1^e dy + \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} dz \int_0^{b_2} z \sigma_2^e dy \right) = \\ &= 4 \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \left(E_1 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} z^2 dy + E_2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} dz \int_0^{b_2} z^2 dy \right) = \\ &= \frac{4}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \left(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \left((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3 \right) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из соотношений (6), (8), (9) получим

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \frac{3}{8} \frac{q}{b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \left((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3 \right)} (x^2 - x) \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{dw_0(x)}{dx} \right|_{x=0,5} = 0, \quad w_0(0) = 0. \quad (11)$$

Откуда можем получить для прогиба $w(x)$ в случае упругого изгиба многослойного стержня

$$w(x) = \frac{q}{32 \left(3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2 + E_2 b_2 \Delta_2^3 + E_1 b_1 \Delta_1^3 \right)} (x^4 - 2x^3 + x). \quad (12)$$

Из соотношений (4), (10) можем получить выражения для деформаций

$$\varepsilon(x, z) = -\frac{3}{8} \frac{q}{b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2} z (x^2 - x). \quad (13)$$

Найденное значение деформации не должно превышать предельных упругих значений деформации для составляющих фазовых материалов $-\varepsilon_{0i}^-$ в области сжатия ($z > 0$) и ε_{0i}^+ в области растяжения ($z < 0$).

Из соотношений (13) видно, что наибольшее по модулю значение деформации достигается в середине пролета стержня $x = 0,5$ на верхней границе стержня. Принимая во внимание тот факт, что предельная деформация бетона при растяжении существенно меньше, чем при сжатии, то достижение деформации предельного упругого значения возможно в зоне растяжения на верхней границе слоев стержня $z = -\Delta_1$ или $z = -\Delta_1 - \Delta_2$.

Таким образом, стержень будет деформироваться нелинейно в случае, когда нагрузка на стержень такова, что начнет нарушаться хотя бы одно из неравенств

$$\frac{-3q}{32(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2)} \Delta_1 < \varepsilon_{01}^+, \quad (14)$$

$$\frac{-3q}{32(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2)} (\Delta_1 + \Delta_2) < \varepsilon_{02}^+, \quad (15)$$

которые перепишем в виде

$$q > -\frac{32}{3}(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1}, \quad (16)$$

$$q > -\frac{32}{3}(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2}. \quad (17)$$

Из соотношений (16), (17) видно, что при значениях предельных упругих деформаций и толщине слоев, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} < \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad (18)$$

область нелинейного деформирования возникнет, в первую очередь, в первом слое стержня, а при нарушении указанного неравенства – во втором. Из указанного соотношения также следует, что в случае однородного стержня, т. е. когда фазовые материалы одинаковые, указанная область нелинейного деформирования будет возникать на верхней границе стержня. Также из указанного неравенства следует, что оптимальным (все слои начинают «работать» вместе, и область нелинейного деформирования будет появляться сразу в двух слоях при одной и той же нагрузке) будет распределение толщины слоев и фазовых материалов, удовлетворяющее равенству

$$\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}. \quad (19)$$

Рассмотрим случай, когда нелинейная область возникает в первом слое стержня в середине пролета, т. е. в случае толщины материалов слоя и материалов слоя таких, что выполняется неравенство (18), т. е. при нагрузке $q < q_1$, где q_1 определяется из соотношения

$$q_1 = -\frac{32}{3}(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1}. \quad (20)$$

В этом случае выражение для изгибающего момента, согласно соотношениям (1), (2), (4), (7) и предположению, что область раздела линейной и нелинейной областей

$z_1(x)$ удовлетворяет условиям $-\Delta_1 \leq z_1(x) < 0$, будет иметь вид

$$\begin{aligned} M_y(x) = & -2 \int_{z_1}^0 dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{-\Delta_1}^{z_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^n z dy - 2 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - \\ & -4 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy = \frac{1}{2} A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4(x)) \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 + \\ & + \frac{2}{3} (-2E_1 b_1 z_1^3(x) + A_{11} b_1 (\Delta_1^3 + z_1^3(x)) + E_1 b_1 (\Delta_1^3 + z_1^3(x)) + \\ & + 2E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3)) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где через $z_1(x)$ обозначена ордината раздела линейной и нелинейной областей деформирования во втором слое стержня.

Из соотношений (8), (21) получим нелинейное дифференциальное уравнение для определения прогиба

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4) + \\ & + \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0}{dx^2} (2E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + A_{11} b_1 \Delta_1^3 + E_1 b_1 \Delta_1^3 + \\ & + (A_{11} b_1 - E_1 b_1) z_1^3) - q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{dw_0(x)}{dx} \right|_{x=0,5} = 0, \quad w_0(0) = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) является квадратным уравнением относительно $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$.

Перепишем уравнение (22) в виде

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + k_1 \frac{d^2 w_0}{dx^2} + k_2 = 0, \quad (24)$$

где величины k_1 , k_2 определяются из соотношений

$$\begin{aligned} k_1 = & \frac{8E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 4A_{11} b_1 \Delta_1^3 + 4E_1 b_1 \Delta_1^3 + 4(A_{11} b_1 - E_1 b_1) z_1^3}{3A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4)} = \\ & = \frac{f_1 + f_2 z_1^3}{f_3 - f_4 z_1^4}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$k_2 = \frac{q(x^2 - x)}{A_{21} b_1 (z_1^4 - \Delta_1^4)} = \frac{q(x^2 - x)}{f_4 z_1^4 - f_3}, \quad (26)$$

где постоянные f_1 , f_2 , f_3 , f_4 равны

$$\begin{aligned} f_1 = & 8E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 4A_{11} b_1 \Delta_1^3 + 4E_1 b_1 \Delta_1^3, \quad f_2 = 4b_1 (A_{11} - E_1), \\ f_3 = & 3A_{21} b_1 \Delta_1^4, \quad f_4 = 3A_{21} b_1. \end{aligned}$$

Тогда для выражения дискриминанта квадратного уравнения D имеем

$$D = k_1^2 - 4k_2. \quad (27)$$

Соотношения (26) перепишем в виде

$$k_2 = \frac{q(x^2 - x)}{A_{21}b_1(z_1^4 - \Delta_1^4)}. \quad (28)$$

Из соотношения (28) видно, так как мы рассматриваем случай нахождения границы раздела упругой и нелинейной областей z_1 в первом слое, что должны быть справедливы неравенства $|z_1| < \Delta_1$. Тогда выражение k_2 , определяемое соотношениями (28), будет всегда положительным для любых параметров поперечного сечения и фазовых материалов стержня и, следовательно, необходима проверка условия, что значение D положительно. Тогда будем иметь два действительных корня.

Действительные корни определяются соотношениями

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} = \frac{f_1 + f_2z_1^3}{2f_3 - 2f_4z_1^4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{f_1 + f_2z_1^3}{f_4z_1^4 - f_3}\right)^2 - 4 \frac{q(x^2 - x)}{A_{21}b_1(z_1^4 - \Delta_1^4)}} \quad (29)$$

Правая часть выражения (29) должна быть положительна, что возможно только в том случае, если мы возьмем знак «+», тогда

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} = \frac{f_1 + f_2z_1^3}{2f_3 - 2f_4z_1^4} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{f_1 + f_2z_1^3}{f_4z_1^4 - f_3}\right)^2 - 4 \frac{q(x^2 - x)}{A_{21}b_1(z_1^4 - \Delta_1^4)}} \quad (30)$$

Для определения прогиба в стержне по соотношениям (29) необходимо определить границу раздела упругой и нелинейной областей $z_1(x)$. Причем найденное решение будет справедливо только для области стержня с нелинейным участком $x_1 < x \leq 0,5$, где через x_1 обозначена граница областей стержня с только упругим деформированием стержня и сочетанием упругого деформирования и нелинейного (рис. 3). На указанном рисунке заштрихованной является область нелинейного деформирования стержня. На отрезке $0 < x \leq x_1$ решение в упругой области определяется формулами (12), (13).

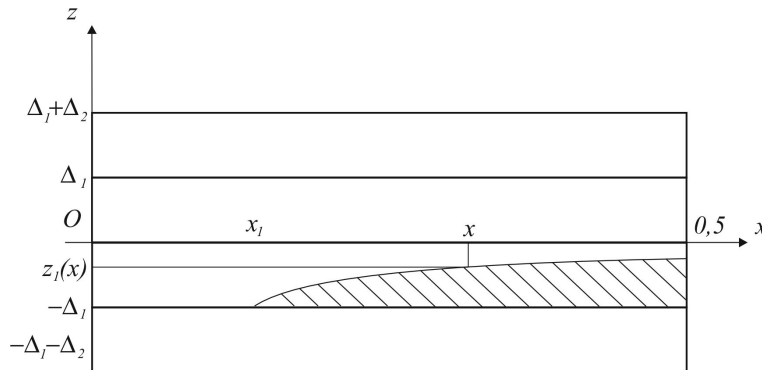


Рис. 3. Граница раздела линейной и нелинейной областей в стержне

Для нахождения границы раздела областей $z_1(x)$ необходимо учесть, что на указанной границе деформация равна предельной упругой деформации при растяжении, то есть для первого материала слоя она равна ε_{01}^+ . Тогда из соотношений (4) получим

$$-z_1(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \varepsilon_{01}^+, \quad (31)$$

откуда получим

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{01}^+}{z_1(x)}. \quad (32)$$

Найденное значение для второй производной прогиба (32) подставим в уравнение (24), откуда получим уравнение для определения искомой границы $z_1(x)$

$$\frac{(\varepsilon_{01}^+)^2}{z_1^2(x)} + \frac{f_1 + f_2 z_1^3}{f_3 - f_4 z_1^4} \left(-\frac{\varepsilon_{01}^+}{z_1(x)} \right) + \frac{q(x^2 - x)}{(f_4 z_1^4 - f_3)} = 0, \quad (33)$$

которое перепишем в виде

$$((\varepsilon_{01}^+)^2 f_4 + \varepsilon_{01}^+ f_2) z_1^4(x) + q(x^2 - x) z_1^2(x) + \varepsilon_{01}^+ f_1 z_1(x) - (\varepsilon_{01}^+)^2 f_3 = 0. \quad (34)$$

Уравнение (34) является уравнением четвертой степени относительно $z_1(x)$. Разрешим его, применив метод Феррари [14]. Для этого приведем уравнение (34) к виду

$$z_1^4(x) + b(x) z_1^2(x) + c z_1(x) + d = 0, \quad (35)$$

где

$$b(x) = \frac{q(x^2 - x)}{(\varepsilon_{01}^+)^2 f_4 + \varepsilon_{01}^+ f_2}, \quad c = \frac{\varepsilon_{01}^+ f_1}{(\varepsilon_{01}^+)^2 f_4 + \varepsilon_{01}^+ f_2}, \quad d = -\frac{(\varepsilon_{01}^+)^2 f_3}{(\varepsilon_{01}^+)^2 f_4 + \varepsilon_{01}^+ f_2}.$$

Для решения уравнения (35) составим уравнение

$$\xi^3(x) - b\xi^2(x) - 4d\xi(x) - a^2(x)d + 4bd - c^2 = 0. \quad (36)$$

Указанное уравнение решим с помощью формулы Кардано [14], для этого приведем уравнение (34) к каноническому виду с помощью замены

$$\xi(x) = \mu(x) + b/3, \quad (37)$$

тогда уравнение (37) примет вид

$$\mu^3(x) - \frac{12d + b^2}{3} \mu(x) + \frac{108bd - 27a^2(x)d - 36bd - 2b^3 - 27c^2}{27} = 0. \quad (38)$$

Если обозначить

$$f_5(x) = \left(\frac{12d + b^2}{9} \right)^3 + \left(\frac{108bd - 27a^2(x)d - 36bd - 2b^3 - 27c^2}{54} \right)^2, \quad (39)$$

тогда уравнение (38) имеет три корня

$$\mu_1(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad \mu_{2,3}(x) = -\frac{\alpha(x) + \beta(x)}{2} \pm i \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{2} \sqrt{3}, \quad (40)$$

где

$$\alpha(x) = \sqrt[3]{-\frac{108bd - 27a^2(x)d - 36bd - 2b^3 - 27c^2}{54} + \sqrt{f_5(x)}},$$

$$\beta(x) = \sqrt[3]{-\frac{108bd - 27a^2(x)d - 36bd - 2b^3 - 27c^2}{54} - \sqrt{f_5(x)}},$$

причем $\alpha(x)$, $\beta(x)$ берутся удовлетворяющими условию

$$\alpha(x)\beta(x) = \frac{12d + b^2}{9}.$$

Если среди найденных решений $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ взять любое действительное решение $\mu_i(x)$, тогда по формуле (37) получим действительное решение $\xi_i(x)$ уравнения (36). Тогда, согласно методу Феррари, уравнение (35) будет иметь 4 корня, которые являются корнями уравнения

$$z_1^2(x) + \frac{\xi_1(x)}{2} = \pm \sqrt{(-b + \xi_1(x))z_1^2(x) - cz_1(x) + \frac{\xi_1(x)^2}{4} - d},$$

где выражение под корнем в правой части является полным квадратом.

Тогда данное уравнение можно преобразовать к виду

$$z_1^2(x) \pm \sqrt{\xi_i(x) - b}z_1(x) + \frac{\xi_i(x)}{2} \pm \frac{-c}{2\sqrt{\xi_i(x) - b}} = 0,$$

где знаки плюс-минус должны быть выбраны одинаково.

Решение данного квадратного уравнения имеет вид

$$z_1(x) = \pm_* \frac{1}{2} \sqrt{\xi_i(x) - b} \pm \frac{1}{2} \sqrt{|\xi_i(x) - b| - 2\xi_i(x) \pm_* \frac{2c}{\sqrt{\xi_i(x) - b}}}, \quad (41)$$

где символом * обозначены знаки, которые следует брать одинаковыми.

Среди решений (41) необходимо выбрать решение, которое удовлетворяет условию

$$z_1(x_1) = -\Delta_1. \quad (42)$$

Из уравнений (22) и (42) можно получить соотношения для определения x_1

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} \right) (2E_2b_2((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + A_{11}b_1\Delta_1^3 + E_1b_1\Delta_1^3 + (A_{11}b_1 - E_1b_1)\Delta_1^3) - \frac{q}{2}(x_1^2 - x_1) = 0, \quad (43)$$

где можно заметить, что последующие уравнения (22) непригодны для определения указанной границы, так как получены путем деления на старший коэффициент уравнения многочлена (22), который при выполнении условия (42) всегда равен 0.

После приведения подобных членов в уравнении (43) получим

$$\frac{4}{3} \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} (E_1b_1\Delta_1^3 + E_2b_2\Delta_2^3 + 3E_2b_2\Delta_1\Delta_2^2 + 3E_2b_2\Delta_1^2\Delta_2) - \frac{q}{2}(x_1^2 - x_1) = 0.$$

Учитывая выражение для предельной нагрузки q_1 , указанное соотношение запишем в виде

$$-\frac{q_1}{8} = \frac{q}{2}(x_1^2 - x_1) = 0,$$

которое перепишем в виде

$$x_1^2 - x_1 + \frac{q_1}{4q} = 0. \quad (44)$$

Уравнение (44) представляет собой квадратное уравнение относительно x_1 и имеет два решения, симметричные относительно $x = 1/2$. Учитывая, что мы рассматриваем решение на интервале $(0, 1/2)$, решение, удовлетворяющее нашему условию, будет иметь вид

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{q_1}{q}}}{2} \quad (45)$$

Из соотношения (45) видно, что при нагрузке q , равной предельной q_1 в стержне, область нелинейного деформирования будет только в середине пролета стержня, а с увеличением по модулю нагрузки q указанная граница q_1 будет сдвигаться к левому концу стержня, и причем для любых отрицательных нагрузок, больших по модулю q_1 , справедливо $x_1 > 0$.

Полученные решения будут справедливы в случае, если нагрузка q не превышает значения q_2 , при которой в середине пролета стержня $x = 1/2$ на границе двух слоев $z = -\Delta_1$, где деформация равна ε_{02}^+ . Указанную нагрузку можем найти из уравнения (4)

$$\Delta_1 \kappa_z(x) = \Delta_1 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \varepsilon_{02}^+, \quad (46)$$

для определения границы раздела двух областей z_1 в середине пролета стержня $x = 1/2$ также справедливо уравнение

$$-z_1 \kappa_z(x) = -z_1 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \varepsilon_{01}^+. \quad (47)$$

Из соотношений (44), (47) получим

$$z_1 = -\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} \Delta_1. \quad (48)$$

Из уравнения (48) видно, что при $\varepsilon_{01}^+ < \varepsilon_{02}^+$ граница раздела областей z_1 в середине пролета будет равна

$$-\Delta_1 < z_1 < 0. \quad (49)$$

Найдем значение предельной нагрузки q_2 , для этого в уравнение (24) при $x = 1/2$ подставим значения кривизны и границы раздела из соотношений (46), (48)

$$\left(\frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1}\right)^2 + \frac{f_1 - f_2 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+}\right)^3 \Delta_1^3}{f_3 - f_4 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+}\right)^4 \Delta_1^4} \left(\frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1}\right) + \frac{q_2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)}{2 \left(f_4 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+}\right)^4 \Delta_1^4 - f_3\right)} = 0. \quad (50)$$

Из соотношений (50) получим для предельной нагрузки

$$q_2 = 8 \left(\left(\frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1}\right)^2 \left(f_4 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+}\right)^4 \Delta_1^4 - f_3 \right) + \left(\frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1}\right) \left(f_1 - f_2 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+}\right)^3 \Delta_1^3 \right) \right). \quad (51)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мут А. Р. Современные технологии производства ЖБИ // Бетон и железобетон. Оборудование. Материалы. Технологии. 2009. С. 20–23.
- [2] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.
- [3] Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. Москва: Стройиздат, 1996. 416 с.
- [4] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары: Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.
- [6] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1(117). С. 40–46.
- [7] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность физически-нелинейного композитного бетонного стержня при центральном растяжении // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении: материалы VI Дальне-восточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г. ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2022. С. 192–199.
- [8] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение несущей способности многоэтажных зданий из физически нелинейных бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 19–35.
- [9] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146.
- [10] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.
- [11] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [12] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. С. 125–129.
- [13] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
- [14] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 720 с.

Yu. V. Nemirovskii^{1,2}, S. V. Tikhonov³

**LIMIT ELASTIC BENDING OF MULTILAYERED CONCRETE AND
REINFORCED CONCRETE MULTILAYERED RODS UNDER QUASI-STATIC
LOADINGS**

¹*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

³*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. Three-layer concrete rods of constant cross-section along the axis of the rod are considered, where each of the layers can have its own brand of concrete. It is assumed that transverse quasi-static loads act on the rod, while some of the layers of the rod are elastically deformed, and others are non-linear. Analytical solutions for rod deflections, the interface between elastic and nonlinear areas, ultimate loads and examples of calculations for different grades of concrete of the bar layers and transverse dimensions of the cross-section shapes of the rod are obtained.

Keywords: concrete rods, analytical solutions, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads

REFERENCES

- [1] Mut A. R. Modern concrete production technologies // Concrete and reinforced concrete. Equipment. Materials. Technologies. 2009. P. 20–23. (in Russian).
- [2] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered bar systems. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 p. (in Russian).
- [3] Karpenko N. I. General models of reinforced concrete mechanics. Moscow: Stroyizdat, 1996. 416 p. (in Russian).
- [4] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Bearing capacity of multilayer concrete bars. Cheboksary: Publishing house of the Chuvash University, 2022. 180 p. (in Russian).
- [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // Bulletin of PNRPU. Mechanics. 2020. no. 1. p. 60–73. (in Russian).
- [6] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel-fiber-reinforced concrete bars // News of the Altai State University. 2021. no. 1(117). P. 40–46. (in Russian).
- [7] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Bearing capacity of a physically non-linear composite concrete bar under central tension // Fundamental and Applied Problems of Deformable Solid Mechanics and Advanced Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering: Proceedings of the VI Far East Conference with International Participation, Komsomolsk-on-Amur, October 5-7, 2022. FGBOU VO «KnAGU», 2022. P. 192–199. (in Russian).
- [8] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Determination of the bearing capacity of multi-storey buildings from physically non-linear concrete bars // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2022. no. 2(52). P. 19–35. (in Russian).

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.
Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

- [9] Calculation of strength and crack resistance of reinforced concrete elements under the combined action of longitudinal forces, bending and torsional moments / V. S. Plevkov, I. V. Baldin, S. V. Baldin et al. // Bulletin of the Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2018. P. 133–146. (in Russian).
- [10] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity: Proceedings of the XIX All-Russian Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005. P. 184–188. (in Russian).
- [11] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [12] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of the Belgorod State Technological University. V.G. Shukhov. 2015. no. 6. p. 125–129. (in Russian).
- [13] Nemirovsky Y. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2018. no. 3(37). P. 26–37. (in Russian).
- [14] Korn G., Korn T. Handbook of mathematics (for scientists and engineers). M.: Science, 1973. 720 p. (in Russian).

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ПРИВЕДЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФОРМ ГЕМИТРОПНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ К КОНВЕНЦИОНАЛЬНЫМ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматривается проблема приведения естественных энергетических форм потенциалов напряжений (силовых и моментных) к конвенциональному виду. Приводятся несколько энергетических форм для гемитропной упругой среды в терминах асимметричных тензоров напряжений и деформаций. Указанные энергетические формы полагаются абсолютно инвариантными по отношению к произвольным преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях). В результате применения специальных координатных представлений полуизотропных (гемитропных) тензоров четвертого ранга получены 9 определяющих скаляров, характеризующих гемитропную упругую среду. Получены соотношения, связывающие определяющие скаляры конвенциональной и второй основной естественной энергетических форм, в том числе, с общепринятыми гемитропными скалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной, и шестью безразмерными скалярами.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, квадратичная энергетическая форма, потенциал напряжений, определяющий псевдотензор, характерная микродлина, хиральная среда, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009

УДК: 539.374

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2022

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.09.2022

1. Введение. Современный этап развития механики деформируемого твердого тела характеризуется широким применением моделей гемитропных сред при описании механического поведения материалов со сложной микроструктурой. Прежде всего, это касается моделирования биологических тканей и современных метаматериалов. Указанные материалы проявляют полуизотропные (гемитропные, демитропные) свойства, т.е. определяющие тензоры обязаны быть чувствительными к зеркальным отражениям трехмерного пространства.

Модели механики линейного упругого поведения гемитропных сред основываются на энергетических квадратичных формах микрополярных упругих потенциалов [1–5]. Предполагается, что упругий потенциал является абсолютным инвариантом по отношению к произвольным преобразованиям пространства, в том числе, к зеркальным отражениям. Анизотропный микрополярный упругий потенциал характеризуется тремя определяющими тензорами четвертого ранга.

Линейное анизотропное микрополярное тело можно редуцировать к гемитропному с помощью специальных координатных представлений для полуизотропных тензоров четвертого ранга и, тем самым, сократить количество определяющих скаляров до девяти. При конвенциональном подходе, такими скалярами выступают: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микродлина, и 6 безразмерных скаляров.

Наиболее распространенной энергетической формой потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений является потенциал предложенный в работах [1–3]. Альтернативные подходы к формулировке потенциала напряжений можно найти в работах [4–8]. В настоящей работе проводится сравнение конвенциональной и второй основных естественных энергетических форм и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры, в том числе, с конвенционально используемыми гемитропными скалярами.

В работе [5] обсуждались вопросы формулировок энергетических форм упругих микрополярных потенциалов в терминах псевдотензоров, играющих решающую роль при моделировании гемитропных сред. Было проведено сравнение и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры и псевдоскаляры первой и второй естественных энергетических форм, в том числе, с конвенциональными гемитропными псевдоскалярами. Настоящее исследование посвящено сравнению конвенциональной и второй основной энергетических форм. И, в этом смысле, настоящую работу следует рассматривать как продолжение публикации [5].

2. Вторая основная энергетическая форма гемитропной упругой среды. Введем в рассмотрение микрополярный упругий потенциал напряжений \mathcal{U} , в расчете на единицу инвариантного элемента объема $d\tau$ [9, 10], с естественными асимметричными тензорными аргументами (не разделяя пока на симметричную и антисимметричную конституэнты)

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{ij}, \kappa_i^s), \quad (1)$$

где ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформации; κ_i^s — тензор изгиба–кручения.

Следствием потенциальности связей деформаций и напряжений будут определяющие уравнения:

$$t^{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \mu_k^i = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa_i^k}. \quad (2)$$

В работе [5] были рассмотрены первая и вторая основные энергетические формы потенциала силовых и моментных напряжений. Для линейного анизотропного микрополярного упругого тела вторая основная энергетическая форма в произвольной системе координат записывается в виде:

$$2\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + H_3^{islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}. \quad (3)$$

Воспользовавшись определяющими соотношениями (2), получим

$$\begin{aligned} t^{is} &= H_1^{islm} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{isl \cdot} \kappa_{\cdot m}^{\cdot m}, \\ \mu_{\cdot s}^{\cdot i} &= H_2^{i \cdot l \cdot} \kappa_{\cdot s \cdot m}^{\cdot m} + \frac{1}{2} H_3^{lmi \cdot} \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для определяющих тензоров, предполагая их полуизотропными, координатные представления [11–13] получаются в форме

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}, \\ H_2^{islm} &= a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl}, \\ H_3^{islm} &= a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь a_a, b_a, c_a ($a = 1, 2, 3; g = 0, -1, -2$) — девять определяющих скаляров гемитропного микрополярного упругого тела. “Метаиндекс” a — нумерует определяющие скаляры.

Подставив координатные представления (5) в определяющие соотношения (2), получим

$$\begin{cases} t^{is} = (a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}) \epsilon_{lm} + \\ \quad + \frac{1}{2} (a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}) \kappa_{lm}, \\ \mu^{is} = (a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl}) \kappa_{lm} + \\ \quad + \frac{1}{2} (a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}) \epsilon_{lm}. \end{cases} \quad (6)$$

Расщепляя асимметричные тензоры напряжений и деформаций в виде суммы симметричной и антисимметричной составляющих, имеем

$$\begin{aligned} t^{is} &= t^{(is)} + t^{[is]}, & \mu_{is} &= \mu_{(is)} + \mu_{[is]}, \\ \epsilon_{is} &= \epsilon_{(is)} + \epsilon_{[is]}, & \kappa_{is} &= \kappa_{(is)} + \kappa_{[is]}. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая соотношения (6) и (7), приходим к выражениям

$$\begin{cases} t^{(is)} = a_1 g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + (b_1 + c_1) \epsilon^{(is)} + \frac{1}{2} a_3 g^{is} g^{lm} \kappa_{(lm)} + \frac{1}{2} (b_3 + c_3) \kappa^{(is)}, \\ \mu_{(is)} = a_2 g_{is} g^{lm} \kappa_{(lm)} + (b_2 + c_2) \kappa_{(is)} + \frac{1}{2} a_3 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \frac{1}{2} (b_3 + c_3) \epsilon_{(is)}, \\ t^{[is]} = (b_1 - c_1) \epsilon^{[is]} + \frac{1}{2} (b_3 - c_3) \kappa^{[is]}, \\ \mu_{[is]} = (b_2 - c_2) \kappa_{[is]} + \frac{1}{2} (b_3 - c_3) \epsilon_{[is]}. \end{cases} \quad (8)$$

3. Конвенциональная энергетическая форма гемитропной упругой среды. Конвенциональной энергетической формой гемитропной упругой среды будем считать упругий потенциал линейного анизотропного микрополярного тела, предложенный в работах [1–3]. В произвольной системе координат, в терминах абсолютных тензоров конвенциональная энергетическая форма представляется в виде:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} a^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} c^{islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + b^{islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}. \quad (9)$$

Обратим внимание, что в (9) множитель $\frac{1}{2}$ отсутствует в последнем слагаемом. Воспользовавшись определяющими соотношениями (2), получим

$$\begin{aligned} t^{is} &= a^{islm} \epsilon_{lm} + b^{islm} \kappa_{lm}, \\ \mu^{is} &= c^{islm} \kappa_{lm} + b^{islm} \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (10)$$

Координатные представления для определяющих полуизотропных тензоров получаются в форме [11]¹

$$\begin{aligned} a^{islm} &= \lambda g^{is} g^{lm} + (\mu + \alpha) g^{il} g^{sm} + (\mu - \alpha) g^{im} g^{sl}, \\ b^{islm} &= \varkappa g^{is} g^{lm} + (\chi + \nu) g^{il} g^{sm} + (\chi - \nu) g^{im} g^{sl}, \\ c^{islm} &= \beta g^{is} g^{lm} + (\gamma + \varepsilon) g^{il} g^{sm} + (\gamma - \varepsilon) g^{im} g^{sl}, \end{aligned} \quad (11)$$

Поставляя координатные представления (11) в определяющие уравнения (10), приходим к

$$\begin{aligned} t^{is} &= \left(\lambda g^{is} g^{lm} + (\mu + \alpha) g^{il} g^{sm} + (\mu - \alpha) g^{im} g^{sl} \right) \epsilon_{lm} + \\ &+ \left(\varkappa g^{is} g^{lm} + (\chi + \nu) g^{il} g^{sm} + (\chi - \nu) g^{im} g^{sl} \right) \kappa_{lm}, \\ \mu^{is} &= \left(\beta g^{is} g^{lm} + (\gamma + \varepsilon) g^{il} g^{sm} + (\gamma - \varepsilon) g^{im} g^{sl} \right) \kappa_{lm} + \\ &+ \left(\varkappa g^{is} g^{lm} + (\chi + \nu) g^{il} g^{sm} + (\chi - \nu) g^{im} g^{sl} \right) \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (12)$$

Выделим в (12) симметричные и антисимметричные конститuentы

$$\begin{aligned} t^{is} &= \lambda g^{is} g^{lm} \epsilon_{lm} + 2\mu \epsilon^{(is)} + 2\alpha \epsilon^{[is]} + \varkappa g^{is} g^{lm} \kappa_{lm} + 2\chi \kappa^{(is)} + 2\nu \kappa^{[is]}, \\ \mu^{is} &= \beta g^{is} g^{lm} \kappa_{lm} + 2\gamma \kappa^{(is)} + 2\varepsilon \kappa^{[is]} + \varkappa g^{is} g^{lm} \epsilon_{lm} + 2\chi \epsilon^{(is)} + 2\nu \epsilon^{[is]}. \end{aligned} \quad (13)$$

4. Взаимосвязь определяющих скаляров конвенциональной и второй основной энергетических форм. Сравнивая энергетические формы микрополярных упругих потенциалов (3) и (9), можно сразу же заключить:

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a^{islm}, \\ H_2^{islm} &= c^{islm}, \\ H_3^{islm} &= 2b_3^{islm}. \end{aligned} \quad (14)$$

¹Отметим, что введенная в работе [2] постоянная ν не совпадает с коэффициентом Пуассона. На страницах монографии (см., например, [2, p. 355]) автор неоднократно использует обозначение ν для различных термомеханических постоянных.

Откуда, при учете (5) и (11), получаем

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda, & b_1 &= \mu + \alpha, & c_1 &= \mu - \alpha, \\ a_2 &= \beta, & b_2 &= \gamma + \varepsilon, & c_2 &= \gamma - \varepsilon, \\ a_3 &= 2\kappa, & b_3 &= 2(\chi + \nu), & c_3 &= 2(\chi - \nu). \end{aligned} \quad (15)$$

Определяющие скаляры, участвующие в записи различных энергетических форм потенциалов напряжений гемитропного упругого тела [2, 4, 5], сведены в таблицу.

5. Заключение. В данной работе, с целью установления формул, связывающих различные наборы определяющих постоянных, проведено сравнение конвенциональной и второй основной энергетических форм упругих потенциалов гемитропных сред.

- (1) В основе развиваемого в статье подхода лежит принцип инвариантности энергии, по отношению к любым преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях).
- (2) Получены определяющие уравнения для гемитропной упругой среды в терминах абсолютных асимметричных тензоров напряжений и деформаций.
- (3) В результате применения специальных координатных представлений абсолютных полуизотропных (гемитропных) тензоров четвертого ранга определены 9 определяющих постоянных, характеризующих гемитропную упругую среду.
- (4) Выполнено сравнение и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры конвенциональной и второй естественных энергетических форм, в том числе, с конвенционально используемыми гемитропными скалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной, и 6 безразмерными постоянными.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.
- [2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5.
- [4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
- [5] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциалов асимметричных тензоров напряжений в механике гемитропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 3(53). С. 118–127.
- [6] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2, no. 1. P. 48–69.
- [7] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics. 1966. P. 153–158.
- [8] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua. 1968. P. 109–113.
- [9] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.

Таблица 1. Гемитропные определяющие скаляры

Скаляры первой основной энергетической формы	Скаляры конвенциональной энергетической формы	Скаляры второй основной энергетической формы	Материальные скаляры
A_1	$\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{2}a_1$	$G\nu(1 - 2\nu)^{-1}$
A_2	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{1}{2}a_2$	GL^2c_3
A_3	μ	$\frac{1}{2}(b_1 + c_1)$	G
A_4	γ	$\frac{1}{2}(b_2 + c_2)$	GL^2
A_5	2α	$\frac{b_1 - c_1}{1}$	$2Gc_1$
A_6	2ε	$\frac{b_2 - c_2}{2}$	$2GL^2c_2$
A_7	\varkappa	$\frac{1}{2}a_3$	GLc_4
A_8	2χ	$\frac{1}{2}(b_3 + c_3)$	GLc_5
A_9	-4ν	$\frac{c_3 - b_3}{3}$	GLc_6

- [10] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57, no. 2. p. 205–213.
- [11] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [12] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). с. 106–115.
- [13] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). С. 118–127.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

REDUCING NATURAL FORMS OF HEMITROPIC ENERGY POTENTIALS TO CONVENTIONAL ONES

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to the problem of reducing the natural energy form of stress potentials (force and couple) to a conventional one. Several energy forms are given for a hemitropic elastic medium in terms of asymmetric stress and strain tensors. These energy forms are assumed to be absolutely invariant with respect to arbitrary transformations of the three-dimensional Euclidean space (including mirror reflections). As a result of applying special coordinate representations of semi-isotropic (hemitropic) tensors of the fourth rank, 9 defining scalars characterizing a hemitropic elastic medium are obtained. Equations for constitutive scalars of the conventional form are derived in terms of constitutive scalars of the second base natural energy form and in terms of commonly used hemitropic scalars: shear modulus, Poisson's ratio, characteristic microlength, and six dimensionless scalars.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, quadratic energy form, potential detection, detecting pseudotensor, characteristic microlength, chiral medium, micropolar hemitropic continuum

REFERENCES

- [1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.
- [2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5.
- [4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
- [5] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциалов асимметричных тензоров напряжений в механике гемитропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 3(53). С. 118–127.
- [6] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2, no. 1. P. 48–69.
- [7] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics. 1966. P. 153–158.
- [8] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua. 1968. P. 109–113.
- [9] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

Radayev Yuri Nikolaevich, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

-
- [10] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57, no. 2. p. 205–213.
- [11] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [12] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). с. 106–115.
- [13] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). С. 118–127.

Е. В. Мурашкин

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ПОВЕРХНОСТНОГО НАРАЩИВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ С МИКРОСТРУКТУРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье обсуждаются проблемы постановки и решения краевых задач при моделировании процессов аддитивного производства 3D материала, при учете наличия в нем дополнительных выделенных характерных направлений (выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях, биоволокон в мышечной ткани и т.д.). Выводится общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительных выделенных направлений. Определяется необходимая система независимых аргументов определяющей тензорной функции на поверхности наращивания в рассматриваемом случае. Определяется минимально необходимый полный набор совместных рациональных псевдоинвариантов тензоров силовых и моментных напряжений и характерных векторов, выделенных направлений. Дается инвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложены постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов. Полученные дифференциальные ограничения конкретизируются для ортогональных систем координат, учитывающих геометрию рассматриваемого процесса наращивания. Получены формулы преобразования тензоров напряжений при условии, что выделенные направления не являются ортогональными.

Ключевые слова: определяющая тензорная функция, псевдотензор, поверхность наращивания, тканый 3D-материал, микрополярная среда, рациональный псевдоинвариант

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.010

УДК: 539.374

Вводные замечания. Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы все чаще используют методы аддитивных технологий (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойная солидификация) [1].

© Мурашкин Е. В. 2022

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.10.2022

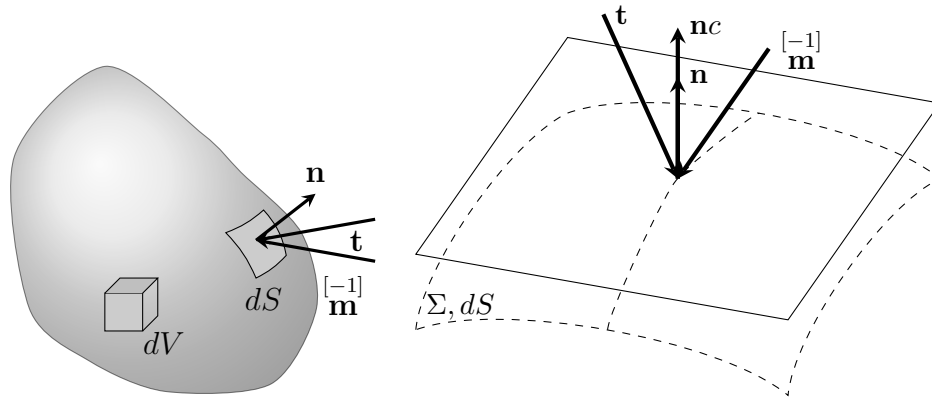


Рис. 1. Растущее тело

Такие производственные процессы связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала к основному телу. При этом следует отметить, что рассматриваемые процессы роста [2,3] не включают процессы так называемого объемного роста [4], проявляющиеся в биологических процессах. В то же время процедура выбора адекватных граничных условий на поверхности наращивания является актуальной фундаментальной проблемой современной механики сплошных сред и прикладной математики. Конечные продукты аддитивных технологий, обладают микроструктурными особенностями и механическими свойствами, которые лучше всего описываются асимметричными теориями механики сплошных сред. Следовательно, для разработки математических моделей таких технологических процессов необходимо использовать микрополярные континуумы.

Псевдотензоры естественным образом возникают в математических моделях микрополярного континуума. Например, псевдотензорами являются: вектор микровращения, тензор изгиба-кручения, псевдотензор моментных напряжений, микроинерция, характерная микродлина. Литературный поиск показывает, что применение псевдотензоров в теориях механики сплошных сред не имеет широкого распространения, несмотря на разработанный аппарат [5–13].

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела всегда является сложной и трудоемкой процедурой [14, 15]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью [16].

1. Условия на поверхности наращивания в материалах с характерными выделенными направлениями. На протяжении всей статьи будем применять описание в эйлеровых координатах. Терминология и обозначения в основном соответствуют аналогичным в работах [22–25]. Определим распространяющуюся поверхность наращивания Σ в трехмерном евклидовом пространстве неявным уравнением

$$t = \tau_* (x^i). \quad (1)$$

На элемент поверхности наращивания dS с вектором единичной нормали n_i действуют векторы поверхностных сил \mathbf{t} и моментов $\mathbf{m}^{[-1]}$ (см. рис. 1), выселяющихся через

компоненты тензора актуальных силовых $\boldsymbol{\sigma}$ и моментных $^{[-1]}\boldsymbol{\mu}$ напряжений согласно формулам

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]}. \quad (2)$$

Тогда единичный вектор нормали n_i на наращиваемой поверхности Σ направленный в сторону ее распространения, связан с пространственным градиентом (1)

$$n_i = c \partial_i \tau, \quad c = |\nabla \tau|^{-1} \quad (t = \tau), \quad (3)$$

где c — линейная скорость распространения поверхности наращивания в нормальном направлении n_k .

Ранее в работах подробно обсуждался вывод краевых условий на поверхности наращивания (см., Например, [22–24]). Приведем здесь лишь окончательные формулы для актуальных компонент тензора силовых напряжений σ^{ij}

$$\sigma^{ij} = \int_{\tau+0}^t [\partial. \sigma^{ij}(x^s, t')] dt' + \mathcal{S}^{ji} + \sigma_*^{ij}(x^s), \quad (4)$$

$$\mathcal{S}^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial. \sigma^{ij}(x^s, t')] dt', \quad (5)$$

$$c[\nabla_j \sigma_*^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + X_*^i(x^s)] - n_j \partial. \sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0). \quad (6)$$

и для компонент тензора моментных напряжений

$$^{[-1]}\mu_{.k}^i = \int_{\tau+0}^t [\partial. ^{[-1]}\mu_{.k}^i(x^s, t')] dt' + \mathcal{M}_{.k}^i + ^{[-1]}\mu_{.k}^i(x^s), \quad (7)$$

$$\mathcal{M}_{.k}^i = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial. ^{[-1]}\mu_{.k}^i(x^s, t')] dt', \quad (8)$$

$$c[\nabla_i ^{[-1]}\mu_{.k}^i(x^s) + \nabla_i \mathcal{M}_{.k}^i - 2 \frac{^{[-1]}}{\tau k} + \frac{^{[-1]}}{Y k}] - n_i \partial. ^{[-1]}\mu_{.k}^i(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0). \quad (9)$$

В приведенных выше уравнениях (4)–(9) введены следующие обозначения: \mathcal{S}^{ji} — интеграл, связанный со скачком напряжений, $\sigma_*^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ — компоненты тензора напряжений, соответственно, вычисленные в момент $t = \tau(x^s) - 0$ прямо перед включением элемента в основное твердое тело, $X_*^i(x^s) = X^i(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$. Момент $t = \tau(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к поверхности наращивания, $\mathcal{M}_{.k}^i$ — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений, $^{[-1]}\mu_{.k}^i(x^s) = ^{[-1]}\mu_{.k}^i(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ — компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время $t = \tau(x^s) - 0$.

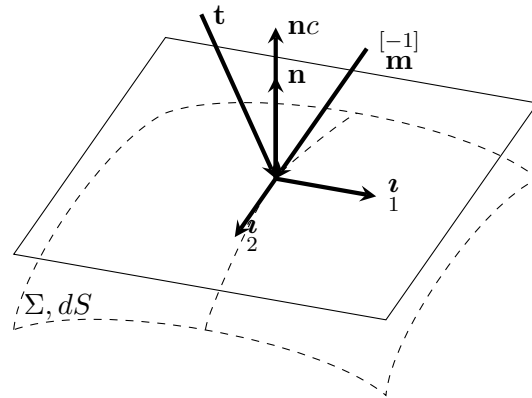


Рис. 2. Геометрическая визуализация векторов действующих на плоский касательный элемент T на поверхности наращивания Σ .

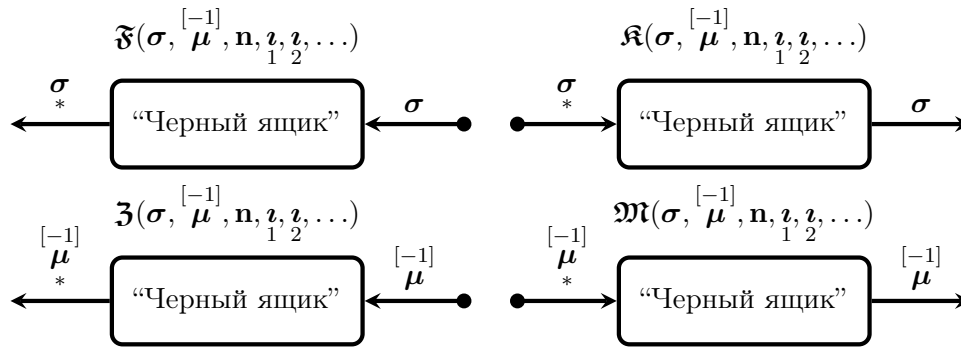


Рис. 3. Идея физического принципа “Черного ящика” в механике наращиваемых тел.

2. Тензорные функции связи актуальных силовых и моментных напряжений с напряжениями в наращиваемом элементе с учетом выделенного направления. В процессах производства тканых материалов зачастую можно выделить характерные направления на поверхности наращивания. Обозначим направляющие вектора таких направления \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 (см. рис. 2). В этом случае псевдотензорные функции связи силовых σ_*^{ij} и моментных напряжений $\mu_*^{[-1]i}$ с актуальными напряжениями и моментами на поверхности наращивания можно принять в форме

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma_*^{ij}, \mu_*^{[-1]i}, n_j, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots), \quad \mu_*^{[-1]i} = \mathfrak{Z}_j^{i}(\sigma_*^{ij}, \mu_*^{[-1]i}, n_j, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots), \quad (10)$$

и если возможно обратное

$$\sigma_*^{ij} = \mathfrak{K}_j^{ij}(\sigma_*^{ij}, \mu_*^{[-1]i}, n_j, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots), \quad \mu_*^{[-1]i} = \mathfrak{M}_j^{i}(\sigma_*^{ij}, \mu_*^{[-1]i}, n_j, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots), \quad (11)$$

Соотношения (10) и (11) необходимо уточнить путем экспериментального определения функций \mathfrak{F}_{ij} , $\mathfrak{Z}_{.k}^{[-1]i}$, \mathfrak{K}_{ij} и $\mathfrak{M}_k^{[-1]i}$. Схематически процесс определения необходимых параметров процесса наращивания изображен на рис. 3. В этом случае под “черным ящиком” понимаются возможные изменения параметров напряженно деформированного состояния материала во временном промежутке от момента создания наращиваемого элемента до момента его присоединения к основному телу, т.е. во временном интервале $\tau - 0 \leq t \leq \tau + 0$. “Черный ящик” может быть связан с различными физическими явлениями.

В частности, тензорные функции \mathfrak{F}_{ij} , $\mathfrak{Z}_{.k}^{[-1]i}$, \mathfrak{K}_{ij} и $\mathfrak{M}_k^{[-1]i}$ при производстве тканых материалов могут зависеть от подвижных выделенных направлений, связанных с распространяющейся поверхностью наращивания. Физический смысл дополнительных направляющих может быть связан с характерными направлениями укладки волокон в тканых композитных материалах, направлениях армирования более жесткими волокнами, направлениями наматывания нитей в бобину и т. д. Важное ограничение, накладываемое на тензорные функции \mathfrak{F}_{ij} , $\mathfrak{Z}_{.k}^{[-1]i}$, \mathfrak{K}_{ij} и $\mathfrak{M}_k^{[-1]i}$, которое следует принять — является инвариантность их аргументов относительно поворотов подвижной системы координат вокруг единичного вектора нормали n_j к поверхности наращивания. В этом случае необходимо выбрать систему совместных инвариантов тензорных σ^{ij} , $\mu_{.j}^{[-1]i}$ и векторных n_j , ϱ_{1j} , ϱ_{2j} , величин, удовлетворяющих условию ротационной инвариантности относительно вектора n_j .

3. Способы построения систем совместных алгебраических относительных инвариантов тензора второго ранга и вектора. Как видно из обсуждения в предыдущем разделе, для дальнейшей конкретизации определяющих тензорных функций на поверхности наращивания необходимо определить систему совместных инвариантов тензорных σ^{ij} , $\mu_{.j}^{[-1]i}$ и векторных n_j , ϱ_{1j} , ϱ_{2j} . В дальнейшем разумно учесть, что единичный вектор нормали n_i и касательный к поверхности наращивания вектор ϱ_{1j} , ϱ_{2j} , определяют ее локальную. Введем специальную ортонормированную систему координат, с базисными векторами: единичным вектором нормали n_i касательным вектором ϱ_{1j} , ϱ_{2j} , и вектором в касательной плоскости к поверхности наращивания, который можно определить через векторы n_i и ϱ_{1j} , ϱ_{2j} , согласно правилу

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu}. \quad (12)$$

В этом случае система трех взаимно-ортогональных векторов \mathbf{n} , $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\tau}$ будет правоориентированной.

Алгоритм построения систем совместных рациональных инвариантов подробно рассмотрены в монографии [8]. Следуя методологии, изложенной в [8], для рассматриваемого здесь случая получим рациональную систему алгебраических рациональных инвариантов тензора силовых напряжений σ^{ij} и векторов n_k и ν_i

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp, \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_2, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp. \end{aligned} \quad (13)$$

тогда для псевдоаффинора моментных напряжений $\mu_{\cdot k}^{[-1]i}$ и векторов n_k и v_i записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]} \cdot \boldsymbol{\mu}^{[-1]} \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}, & \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2, & & \end{aligned} \quad (14)$$

Совместные инварианты тензоров σ^{ij} и $\mu_{\cdot k}^{[-1]i}$ определяются согласно

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp, & \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_2, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}, & \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_2, & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_2. \end{aligned} \quad (15)$$

При построении системы совместных инвариантов (13)–(15) векторы \mathbf{t}_\perp , \mathbf{m}_\perp , \mathbf{t}_2 и \mathbf{m}_2 есть проекции векторов \mathbf{t} , \mathbf{m} , \mathbf{t} и \mathbf{m} , соответственно, в касательную плоскость к поверхности наращивания.

Очевидно, что система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов, представленная уравнениями (13)–(15) является полной. Вместе с этим совместные инварианты, входящие в нее, не являются независимыми и частично могут быть исключены из рассмотрения с помощью рациональных сизигий. Более того, совместные алгебраические рациональные инварианты высоких порядков, включающие кубы и биквадраты тензора силовых и псевдотензора моментных напряжений следует исключить в силу теоремы Гамильтона–Кэли [8].

Таким образом, неприводимая полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора силовых напряжений σ^{ij} , псевдотензора моментных напряжений $\mu_{\cdot k}^{[-1]i}$ и векторов n_k и v_i может быть принята в виде

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp. \quad (16)$$

Отметим еще раз, что система инвариантов (16) не чувствительна к вращениям локальной ортогональной системы координат с базисными ортами n_i , v_i , τ_i вокруг единичного орта n_i .

Неприводимая полная система гемитропных псевдоинвариантов выглядит следующим образом

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp. \quad (17)$$

Отметим, что система инвариантов (17) чувствительна к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, но, при этом, ротационно инвариантна.

4. Определяющие тензорные функции в специфической ортогональной системе координат. Рассмотрим инвариантно–геометрическую интерпретацию случая в специальной ортогональной системе координат с ортами \mathbf{n} , \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 . Пусть на поверхности наращивания известны поверхностные усилия \mathbf{t} и моменты \mathbf{m} . В этом случае, определяющие тензорные функции (10) на поверхности наращивания в терминах

полной системы совместных инвариантов (16) для сужения на двумерный плоский касательный элемент T тензора $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}$, примет вид

$$\sigma_{*}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}([\overset{[-1]}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot [\overset{[-1]}{\mathbf{m}}], \mathbf{t}_{\perp} \cdot [\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_{\perp}]). \quad (18)$$

$$\mu_{*}^{[-1]i}{}_{j} = \mathfrak{Z}_{.j}^{[-1]i}([\overset{[-1]}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot [\overset{[-1]}{\mathbf{m}}], \mathbf{t}_{\perp} \cdot [\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_{\perp}]). \quad (19)$$

Для проекций векторов \mathbf{t}_{\perp} и $[\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_{\perp}]$ в касательной плоскости T к поверхности наращивания следует

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}_{\perp}|^2 &= |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_1|^2 + |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_2|^2, \\ |[\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_{\perp}]|^2 &= |[\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_{\perp}] \cdot \mathbf{z}_1|^2 + |[\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_{\perp}] \cdot \mathbf{z}_2|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Квадраты совместных инвариантов, длины векторов (16) и длины их проекций (20) легко вычисляются через актуальные значения \mathbf{t} и $[\overset{[-1]}{\mathbf{m}}]$ на поверхности наращивания, т.е. через актуальные компоненты силовых и моментных напряжений, согласно формулам

$$\begin{aligned} |\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}| &= |\sigma_{33}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_1|^2 = \sigma_{31}^2, \quad |\mathbf{t}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_2|^2 = \sigma_{32}^2, \\ |[\overset{[-1]}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}]| &= |[\overset{[-1]}{\mu}_{33}]|, \quad |[\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_1]| = |[\overset{[-1]}{\mu}_{31}]|, \quad |[\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_{\perp} \cdot \mathbf{z}_2]| = |[\overset{[-1]}{\mu}_{32}]|, \\ |\mathbf{t} \cdot [\overset{[-1]}{\mathbf{m}}]| &= |\sigma_{3s} [\overset{[-1]}{\mu}_{s3}]| = |\sigma_{31} [\overset{[-1]}{\mu}_{13}] + \sigma_{32} [\overset{[-1]}{\mu}_{23}] + \sigma_{33} [\overset{[-1]}{\mu}_{33}]|, \\ |\mathbf{t}_{\perp} \cdot [\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_{\perp}]| &= |[\overset{[-1]}{\mu}_{3s} \mu_{s3}]| = |\sigma_{31} [\overset{[-1]}{\mu}_{13}] + \sigma_{32} [\overset{[-1]}{\mu}_{23}]|. \end{aligned} \quad (21)$$

Определяющие тензорные функции (18) и (19) на поверхности наращивания с учетом выражений (21) и приняв следующие обозначения для инвариантов,

$$\begin{aligned} I &= |[\overset{[-1]}{\mu}_{33}]|, \quad II = |\sigma_{31} [\overset{[-1]}{\mu}_{13}] + \sigma_{32} [\overset{[-1]}{\mu}_{23}] + \sigma_{33} [\overset{[-1]}{\mu}_{33}]|, \\ III &= |\sigma_{31} [\overset{[-1]}{\mu}_{13}] + \sigma_{32} [\overset{[-1]}{\mu}_{23}]|. \end{aligned} \quad (22)$$

можно выписать в форме

$$\sigma_{*}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(I, II, III), \quad (23)$$

$$\mu_{*}^{[-1]i}{}_{j} = \mathfrak{Z}_{.j}^{[-1]i}(I, II, III). \quad (24)$$

Граничные условия в форме дифференциальных ограничений на поверхности наращивания (32), (9) с учетом псевдотензорных определяющих функций (23) обладают необходимыми свойствами полуизотропной чувствительности к геометрии поверхности наращивания и характерным направлениям выкладки материала в процессах намотки нитей или производстве тканых композитов.

2. Преобразование операторов дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости.

Ниже воспроизведем вывод формул преобразования операторов d_k дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости при переходе от ортогональной сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке.

Предположим, что на плоскости имеется локальный ортонормированный базис \mathbf{l} , \mathbf{m} , а другой локальный базис состоит из, вообще говоря, неортогональных единичных векторов $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, первый из которых отклоняется от орта \mathbf{l} на угол ψ_1 по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта \mathbf{l} на угол ψ_2 против хода часовой стрелки. Мы считаем, что $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$, $\psi_1 + \psi_2 \neq \pi$. Углы ψ_1 , ψ_2 могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы \mathbf{l} , \mathbf{m} .

Найдем формулы преобразования дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla, & d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla, \\ \bar{d}_1 &= \bar{\mathbf{l}} \cdot \nabla, & \bar{d}_2 &= \bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla \end{aligned}$$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой. Эти операторы, как следует из их определения, представляют собой производные вдоль соответствующих координатных линий.

Коэффициенты в разложении

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2 \quad (25)$$

на основании

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= \cos \psi_1 = k_1 + k_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \cos \psi_2 = k_2 + k_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) \end{aligned}$$

вычисляются в следующем виде

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ k_2 &= \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично для разложения

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2 \quad (27)$$

с помощью

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{l}} &= -\sin \psi_1 = s_1 + s_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} &= \sin \psi_2 = s_2 + s_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) \end{aligned}$$

можно получить

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}, \\ s_2 &= \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \cdot \nabla = k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2, \\ d_2 &= \mathbf{m} \cdot \nabla = (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \cdot \nabla = s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2, \end{aligned}$$

то в итоге искомые формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \overline{d_1} + \frac{\cos \psi_2 - \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \overline{d_2}, \\ d_2 &= \frac{-\sin \psi_1 - \sin \psi_2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \overline{d_1} + \frac{\sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\sin^2(\psi_1 + \psi_2)} \overline{d_2}. \end{aligned} \quad (29)$$

В случае преобразования поворота исходного базиса \mathbf{l}, \mathbf{m} , т.е. когда

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \psi_2 = \psi,$$

полученные формулы упрощаются

$$\begin{aligned} d_1 &= \sin \psi \overline{d_1} + \cos \psi \overline{d_2}, \\ d_2 &= -\cos \psi \overline{d_1} + \sin \psi \overline{d_2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Обратное по отношению к (30) преобразование есть

$$\begin{aligned} \overline{d_1} &= \sin \psi d_1 - \cos \psi d_2, \\ \overline{d_2} &= \cos \psi d_1 + \sin \psi d_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Полученные выше формулы преобразования дифференциальных d -операторов оказываются весьма удобным средством при исследовании систем уравнений в частных производных, с которыми приходится сталкиваться в двумерных задачах математической теории пластичности. То же самое можно сказать о задачах механики растущих тел [16–21]. Соответствующий круг вопросов рассмотрен в следующих разделах работы.

3. Дифференциальное ограничение на растущей поверхности, сформулированное в эйлеровых переменных.

Можно показать [22–25], что дифференциальное ограничение на поверхности наращивания можно записать в виде

$$c[\nabla_j \tau^{*ji}(x^k) + \nabla_j \mathfrak{I}^{ji} + \dot{X}^i(x^k)] - [n_j \partial_t \tau^{*ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)+0} = 0 \quad (t = \tau^* + 0). \quad (32)$$

где ∇_j — ковариантное дифференцирование по эйлеровой метрике, c — линейная скорость поверхности наращивания в направлении нормали, τ^{ij} — тензор напряжений (вообще говоря несимметричный), ∂_t — производная по времени при фиксированных координатах x^k , $\dot{X}^i(x^k) = X^i(x^k, t) \Big|_{t=\tau^*(x^s)-0}$, $X^i = X^i(x^k, t)$, — объемные силы, \mathfrak{I}^{ji} — интеграл скачков напряжений, $\tau^{*ij}(x^k) = \tau^{ij}(x^k, t) \Big|_{t=\tau^*(x^s)-0}$, $t = \tau^*(x^s) - 0$ момент времени непосредственно перед моментом включения элемента в состав основного тела (Рис. 2). Момент времени $t = \tau^*(x^s) + 0$ соответствует моменту непосредственно после присоединения элемента к поверхности наращивания.

Заметим, что

$$\mathfrak{I}^{ij} = \int_{\tau^*-0}^{\tau^*+0} [\partial_t \tau^{ij}(x^k, t')] dt'.$$

Дифференциальное ограничение (32) для напряжений на поверхности наращивания в ортогональной системе координат, можно представить в форме (в отсутствие

массовых сил и скачков напряжений)

$$[cd_j \tau_{<ji>}^* - n_{<j>} \partial. \tau_{<ji>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x_s)+0} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (33)$$

В (33) индекс 3 соответствует направлению нормали, а индексы 1 и 2 — касательным направлениям к поверхности наращивания. Выпишем соотношение (33) в криволинейной системе координат, воспользовавшись преобразованием (29) при условии, что орт, соответствующий индексу 3, направлен вдоль нормали \mathbf{n} к поверхности наращивания.

После подстановки соотношений (29) в дифференциальное ограничение (33) с учетом обозначений (26), (28) и равенства (35) получим

$$\begin{aligned} & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \tau_{<11>}^* + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \tau_{<21>}^* + d_3 \tau_{<31>}^* - \\ & - n_{<1>} \partial. \tau_{<11>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial. \tau_{<21>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial. \tau_{<31>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x_s)+0} = 0, \\ & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \tau_{<12>}^* + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \tau_{<22>}^* + d_3 \tau_{<32>}^* - \\ & - n_{<1>} \partial. \tau_{<12>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial. \tau_{<22>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial. \tau_{<32>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x_s)+0} = 0, \\ & [c(k_1 \bar{d}_1 + k_2 \bar{d}_2) \tau_{<13>}^* + (s_1 \bar{d}_1 + s_2 \bar{d}_2) \tau_{<23>}^* + d_3 \tau_{<33>}^* - \\ & - n_{<1>} \partial. \tau_{<13>}(x_k, t) - n_{<2>} \partial. \tau_{<23>}(x_k, t) - n_{<3>} \partial. \tau_{<33>}(x_k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x_s)+0} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь учтено, что

$$d_3 = \bar{d}_3 = \mathbf{n} \cdot \nabla. \quad (35)$$

За счет выбора углов ψ_1, ψ_2 можно упростить вид дифференциальных ограничений (34). Вообще говоря, в соотношениях (34) компоненты тензора напряжений $\tau_{<ji>}^*$ необходимо преобразовать к новому базису. Соотношения для преобразования компонент тензора напряжений будут даны в разделе 5 работы.

5. Преобразование несимметричного тензора напряжений при переходе к неортогональному базису. Несимметричный тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ можно записать как линейную комбинацию базисных тензорных произведений с сомножителями $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{<11>} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \tau_{<12>} \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \tau_{<21>} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \tau_{<22>} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \tau_{<23>} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{<32>} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \tau_{<33>} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{<13>} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \tau_{<31>} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (36)$$

Найдем диадное представление тензора $\boldsymbol{\tau}$ после замены базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ на новый базис $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{m}}, \mathbf{n}$. Подставив в формулу (36) формулы (25) и (27), получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \tau_{<11>} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{<12>} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{<21>} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) + \tau_{<22>} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \\ & + \tau_{<23>} (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{<32>} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \bar{\mathbf{m}}s_2) + \tau_{<33>} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\ & + \tau_{<13>} (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{<31>} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \bar{\mathbf{m}}k_2), \end{aligned} \quad (37)$$

кроме того, имеем:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = & \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_1 k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_2 k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_2^2) + \\
& + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_1 s_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_1 s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_2 s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_2 s_2) + \\
& + \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_1 k_1 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_1 k_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_2 k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_2 k_2) + \\
& + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_1^2 + \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_1 s_2 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_2 s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_2^2) + \\
& + \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} s_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} s_2) + \tau_{\langle 32 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}} s_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} s_2) + \\
& + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} k_1 + \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} k_2) + \tau_{\langle 31 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}} k_1 + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} k_2).
\end{aligned} \tag{38}$$

Соберем затем слагаемые с одинаковыми диадами базисных директоров $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, \mathbf{n} . После ряда преобразований приходим к:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = & (k_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\
& + (k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_1 k_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
& + (k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_2 k_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \\
& + (k_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
& + (k_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 23 \rangle}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} + (k_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \\
& + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (k_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 23 \rangle}) \bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} + (k_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Откуда, окончательно, формулы преобразования компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$ от исходного базиса к искаженному примут вид:

$$\begin{aligned}
\tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} &= k_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_1 s_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} &= k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_1 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_1 k_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} &= k_1 k_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + s_2 k_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_1 s_2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} &= k_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + k_2 s_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + s_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle} &= k_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 23 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle} &= k_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_2 \tau_{\langle 32 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle} &= \tau_{\langle 33 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} &= k_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 23 \rangle}, \\
\tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} &= k_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + s_1 \tau_{\langle 32 \rangle}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Далее рассмотрим обращение формул (40). Формулы преобразования базисных директоров $\bar{\mathbf{l}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, \mathbf{n} в директоры \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} можно принять как

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l} \bar{k}_1 + \mathbf{m} \bar{k}_2, \tag{41}$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{l} \bar{s}_1 + \mathbf{m} \bar{s}_2, \tag{42}$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}. \tag{43}$$

Тогда коэффициенты в разложении (41), (42) легко получить на основании соотношений

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{l} &= \cos \psi_1 = \bar{k}_1, \\
\bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{m} &= -\sin \psi_1 = \bar{k}_2, \\
\bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{l} &= \cos \psi_2 = \bar{s}_1, \\
\bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} &= \sin \psi_2 = \bar{s}_2.
\end{aligned} \tag{44}$$

Снова запишем тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ как линейную комбинацию базисных тензорных произведений

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \tau_{\langle 11 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \tau_{\langle 12 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle 21 \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{l}} + \tau_{\langle 22 \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle 23 \rangle} \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} + \\
&+ \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} \bar{\mathbf{l}} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{l}}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Подставляя в формулу (45) разложения (41), (42), получим

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \tau_{\langle 11 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) + \tau_{\langle 12 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 21 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) + \tau_{\langle 22 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 23 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 32 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{s}_2) + \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \\
&+ \tau_{\langle 13 \rangle} (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2) \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 31 \rangle} \mathbf{n} \otimes (\bar{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{m}\bar{k}_2).
\end{aligned} \tag{46}$$

Раскроем скобки в (46), в результате приходим к:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \tau_{\langle 11 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{k}_1^2 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_1\bar{k}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{k}_2\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2^2) + \\
&+ \tau_{\langle 12 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{k}_1\bar{s}_1 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_1\bar{s}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{k}_2\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2\bar{s}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 21 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{s}_1\bar{k}_1 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_1\bar{k}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{s}_2\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2\bar{k}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 22 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \bar{s}_1^2 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_1\bar{s}_2 + \mathbf{m} \otimes \bar{s}_2\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2^2) + \\
&+ \tau_{\langle 23 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}\bar{s}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}\bar{s}_2) + \tau_{\langle 32 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{s}_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}\bar{s}_2) + \\
&+ \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tau_{\langle 13 \rangle} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}\bar{k}_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}\bar{k}_2) + \tau_{\langle 31 \rangle} (\mathbf{n} \otimes \bar{k}_1 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}\bar{k}_2).
\end{aligned} \tag{47}$$

Соберем слагаемые с одинаковыми диадами, состоящими из векторов \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} . После ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= (\bar{k}_1^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_1^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \\
&+ (\bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{s}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \\
&+ (\bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_1 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{s}_2 \bar{k}_1 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \\
&+ (\bar{k}_2^2 \tau_{\langle 11 \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle 12 \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle 21 \rangle} + \bar{s}_2^2 \tau_{\langle 22 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \\
&+ (\bar{k}_2 \tau_{\langle 13 \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle 23 \rangle}) \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_2 \tau_{\langle 31 \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \\
&+ \tau_{\langle 33 \rangle} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_1 \tau_{\langle 13 \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle 23 \rangle}) \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + (\bar{k}_1 \tau_{\langle 31 \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle 32 \rangle}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Откуда, окончательно формулы преобразования компонент тензора напряжений τ от искаженного базиса к исходному запишем в форме:

$$\begin{aligned}
\tau_{\langle 11 \rangle} &= \bar{k}_1^2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1^2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 12 \rangle} &= \bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 21 \rangle} &= \bar{k}_1 \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{s}_2 \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 22 \rangle} &= \bar{k}_2^2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle} + \bar{k}_2 \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_2^2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 23 \rangle} &= \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle}, \\
\tau_{\langle 32 \rangle} &= \bar{k}_2 \tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_2 \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle}, \\
\tau_{\langle 33 \rangle} &= \tau_{\langle \bar{3}\bar{3} \rangle}, \\
\tau_{\langle 13 \rangle} &= \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{1}\bar{3} \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{2}\bar{3} \rangle}, \\
\tau_{\langle 31 \rangle} &= \bar{k}_1 \tau_{\langle \bar{3}\bar{1} \rangle} + \bar{s}_1 \tau_{\langle \bar{3}\bar{2} \rangle}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Заключение. В статье рассмотрены вопросы формулировки краевых задач моделировании процессов аддитивного производства тканых 3D материала, при учете наличия в нем дополнительных выделенных направлений (выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях, биоволокон в мышечной ткани и т.д.). Получена общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительных характерных выделенных направлений. Определена необходимая система независимых аргументов определяющей тензорной функции на поверхности наращивания в рассматриваемом случае. Определен полный набор совместных рациональных полузотропных псевдоинвариантов тензора напряжений, псевдотензора моментных напряжений и характерных директоров. Дается инвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложены постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов. Полученные дифференциальные ограничения конкретизируются для ортогональных систем координат, учитывающих геометрию процесса наращивания. Получены формулы преобразования тензоров напряжений при условии, что выделенные направления не являются ортогональными.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business Horizons*. 2012. Vol. 55. P. 155–162.
- [2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // *International Journal of Plasticity*. 2000. Vol. 16. P. 951–978.
- [3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009. p. 731–741.
- [4] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York: Springer, 2017. xxii + 646 p.
- [5] Veblen O., Thomas T. Y. *Extensions of Relative Tensors* // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377.
- [6] Veblen O. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.
- [7] Levi-Civita T. *The absolute differential calculus (calculus of tensors)*. London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 p.
- [8] Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.
- [9] Einstein A. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 p.

- [10] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 p.
- [11] Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
- [12] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. New York: Courier Corporation, 1978. Vol. 5. 334 p.
- [13] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 p.
- [14] Southwell R. V. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [15] Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. Vol. 14. P. 199–209.
- [16] Arutyunyan N. K., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. Vol. 48. P. 1–10.
- [17] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // *AIP Conference Proceedings*. — 2019. — Vol. 2116. — P. 380013.
- [18] Stadnik N. E., Dats E. P. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2018. — Vol. 991. — P. 012075.
- [19] Стадник Н. Э. О наращивании 3d-материалов в условиях осевой симметрии // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. — 2021. — № 4(50). — С. 91–97.
- [20] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2022. — Vol. 45, no. 5. — P. 3197–3212.
- [21] Нестеров Т. К., Мурашкин Е. В. Объемный рост составного толстостенного упругого цилиндра // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. — 2021. — № 4(50). — С. 82–90.
- [22] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 2019. Vol. 23. P. 646–656.
- [23] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. № 3(41). С. 11–29.
- [24] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164.
- [25] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2021. № 1(47). С. 114–121

E. V. Murashkin

ON MODELING THE PROCESSES OF SURFACE GROWTH OF MATERIALS WITH MICROSTRUCTURE

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The article discusses the problems of setting and solving boundary value problems in modeling the processes of additive production of a 3D material, taking into account the presence of additional selected characteristic directions in it (layout of fibers in woven materials, reinforcement in concrete structures, biofibers in muscle tissue, etc.). The general form of the tensor relation on the growth surface is derived, taking into account additional distinguished directions. The necessary system of independent arguments of the defining tensor function on the growth surface in the case under consideration is determined. The minimum necessary complete set of joint rational pseudo-invariants of force and moment stress tensors and characteristic vectors, selected directions is determined. An invariant-complete formulation of the constitutive relations on the growth surface is given. Statements of boundary value problems simulating the processes of synthesis of woven 3D materials are proposed. The resulting differential constraints are specified for orthogonal coordinate systems that take into account the geometry of the growth process under consideration.

Keywords: pseudotensor, growing surface, 3D woven material, micropolar medium, rational invariant

REFERENCES

- [1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business Horizons*. 2012. T. 55. C. 155–162.
- [2] Epstein M. Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // *International Journal of Plasticity*. 2000. T. 16. C. 951–978.
- [3] A. Maugin G. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009. c. 731–741.
- [4] A. Goriely. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
- [5] Veblen O. Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1924. T. 26. C. 373–377.
- [6] O. Veblen. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.
- [7] T. Levi-Civita. *The absolute differential calculus (calculus of tensors)*. London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 c.
- [8] B. Gurevich G. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.
- [9] A. Einstein. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 c.
- [10] A. Schouten J. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 c.
- [11] S. Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 c.
- [12] Synge J. L. Schild A. *Tensor calculus*. New York: Courier Corporation, 1978. T. 5. 334 c.
- [13] J. Das A. *Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 c.
- [14] V. Southwell R. *An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists*. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [15] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. T. 14. C. 199–209.

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

-
- [16] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. T. 48. C. 1–10.
- [17] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // *Mechanics of Solids*. 2019. T. 54. C. 1157–1164.
- [18] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 2019. T. 23. C. 646–656.
- [19] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a class of constitutive equations on propagating growing surface // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2019. C. 11–29.
- [20] В. Мурашкин Е. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2021. C. 114–121.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 20-01-00666.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2e с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Зайко Н. Ю., Любимова О. Н.</i> Температурные напряжения в соосных сопряженных цилиндрических системах и композиционных материалах с разной степенью проскальзывания по границе контакта	5
<i>Зимин В. Н., Кувыркин Г. Н., Рахимов Д. Р.</i> Проектирование высокоэффективного металлокомпозитного баллона высокого давления сферической формы	14
<i>Попов А. Л., Козинцев В. М., Челобеев Д. А., Азаров А. А.</i> Оптико-акустическая диагностика дефектов элементов тонкостенных конструкций и степени их залечивания	25
<i>Сумин А. И., Богер А. А., Сумин В. А., Рябов С. В.</i> Устойчивость нелинейно-упругих сред при наложенных конечных деформациях	34
<i>Богачева В. Э., Глаголев Л. В.</i> Разрыв по моде i адгезионного слоя с учетом диагональных компонент тензора напряжений	47
<i>Чернышов А. Д., Никифорова О. Ю., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Рукин И. Г.</i> Универсальные быстрые тригонометрические интерполяции для интегро-дифференциальных задач различного порядка	57
<i>Щеглова Ю. Д.</i> Метод возмущений при исследовании напряженного состояния трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении	71
<i>Левина Л. В., Марахова И. И., Пеньков В. Б.</i> Реализация итерационных процессов энергетическим методом	82
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Предельно упругий изгиб многослойных бетонных и железобетонных многослойных стержней при квазистатических нагружениях	95
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным	108
<i>Мурашкин Е. В.</i> О моделировании процессов поверхностного наращивания материалов с микроструктурными особенностями	116
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	132
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	135
СОДЕРЖАНИЕ	137

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2022. № 4 (54)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 30.12.2022. Выход в свет 31.12.2022.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 16,5.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 2260

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38