

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 1(55)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2023

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 1(55)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

Л. В. Ковтанюк¹, Г. Л. Панченко^{1,2}, Е. О. Попова¹

К МОДЕЛИРОВАНИЮ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ УПРУГИХ СРЕД

¹Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
г. Владивосток, Россия

²Владивостокский государственный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Для разномодульных нелинейных упругих изотропных сред рассмотрены деформации изменения формы. С использованием предложенных модельных соотношений получено решение краевой задачи о прямолинейном движении среды в круглой трубе под действием переменного перепада давления. Приводится сравнение полученных результатов с точным решением для нелинейной упругой изотропной среды.

Ключевые слова: упругость, разномодульные среды, большие деформации.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.001

УДК: 539.371

Обычно в качестве разномодульных сред рассматривают материалы с различным сопротивлением растяжению и сжатию, к которому приводит наличие микродефектов в реальных материалах, например, в горных породах. В общем случае различие свойств материалов наблюдается и при деформациях изменения формы. Моделирование таких свойств материалов неоднократно рассматривалось в механике, как на стадии обратимого деформирования, так и необратимого. Соответствующие модели описаны давно и достаточно подробно [1–6]. Классическая теория идеально упругих

© Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О., 2023

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iasp.dvo.ru, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Панченко Галина Леонидовна

e-mail: panchenko@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия, доцент Владивостокского государственного университета, г. Владивосток, Россия.

Попова Елена Олеговна

e-mail: polepao@bk.ru, аспирант, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Поступила 10.01.2023

тел может быть построена на основе потенциала напряжений, который в случае изотропной среды является функцией инвариантов напряжений. Выбрать такие инварианты можно по-разному. Предложение выбирать в качестве второго инварианта интенсивность напряжений содержится, например, в [7, 8]. Здесь рассмотрим деформации изменения формы в нелинейно упругих материалах, аналогично [7, 8] выбирая интенсивность деформаций вторым инвариантом.

1. Пусть деформированное состояние нелинейной упругой изотропной среды характеризует тензор деформаций Альманси d_{ij}

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \quad (1)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений.

Для несжимаемой среды компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши σ_{ij} связаны с деформациями d_{ij} формулой Мурнагана

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}). \quad (2)$$

Здесь p — добавочное гидростатическое давление, W — упругий потенциал. Для изотропной несжимаемой среды W является функцией инвариантов тензора деформаций: $W = W(I_1, I_2)$. Выберем инварианты тензора Альманси I_1, I_2 в виде

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3}(d_1 + d_2 + d_3) = \frac{1}{3}(d_{11} + d_{22} + d_{33}) = \frac{1}{3}d_{kk} = d, \\ I_2 &= \frac{3}{2}((d_1 - d)^2 + (d_2 - d)^2 + (d_3 - d)^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь d_1, d_2, d_3 — главные значения тензора деформаций d_{ij} . Инвариант I_2 в таком случае равен квадрату интенсивности деформаций. Исключая d_1, d_2, d_3 из (3), запишем его в форме

$$I_2 = \frac{3}{2} \left(d_{ik}d_{ki} - \frac{1}{3}d_{kk}^2 \right). \quad (4)$$

Выберем функцию $W = W(I_1, I_2)$ в виде ее разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния, ограничиваясь слагаемыми до третьего порядка по компонентам d_{ij}

$$\begin{aligned} W &= -\gamma_1 I_1 + \gamma_2 \sqrt{I_2} + \gamma_3 I_1^2 + \gamma_4 I_2 - \gamma_5 I_1 \sqrt{I_2} - \gamma_6 I_1^3 + \\ &+ \gamma_7 I_1^2 \sqrt{I_2} - \gamma_8 I_1 I_2 + \gamma_9 I_2 \sqrt{I_2} \dots \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) $\gamma_k > 0$ — упругие модули. Подстановка производных инвариантов

$$\frac{\partial I_1}{\partial d_{ik}} = \frac{1}{3}\delta_{ik}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial d_{ik}} = 3d_{ik} - d_{jj}\delta_{ki}$$

в формулу Мурнагана (2) позволяет получить зависимости для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \left[3L - \frac{2}{3} \left(-\gamma_1 + 2\gamma_3 I_1 - \gamma_5 \sqrt{I_2} - 3\gamma_6 I_1^2 + 2\gamma_7 I_1 \sqrt{I_2} - \gamma_8 I_2 \right) \right] d_{ij} + \\ + 2L (d_{kk} d_{ij} - 3d_{ik} d_{kj}), \quad P = p - \frac{1}{3} \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} d_{kk}, \quad (6) \\ L = \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{\gamma_2}{2\sqrt{I_2}} + \gamma_4 - \gamma_5 \frac{I_1}{2\sqrt{I_2}} + \gamma_7 \frac{I_1^2}{2\sqrt{I_2}} - \gamma_8 I_1 + \frac{3}{2} \gamma_9 \sqrt{I_2}. \end{aligned}$$

В случае антиплоской деформации для компонент перемещений справедливы зависимости

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2). \quad (7)$$

Для компонент тензора Альманси в рассматриваемом случае получаем

$$\begin{aligned} d_{11} = -\frac{1}{2} u_{3,1}^2, \quad d_{12} = -\frac{1}{2} u_{3,1} u_{3,2}, \quad d_{13} = \frac{1}{2} u_{3,1}, \quad (8) \\ d_{22} = -\frac{1}{2} u_{3,2}^2, \quad d_{23} = \frac{1}{2} u_{3,2}, \quad d_{33} = 0. \end{aligned}$$

Инварианты деформаций для компонент (8) принимают форму

$$I_1 = -\frac{1}{6} b^2, \quad I_2 = \frac{1}{4} b^2 (b^2 + 3), \quad b^2 = u_{3,1}^2 + u_{3,2}^2. \quad (9)$$

В случае чистого сдвига, когда $u_2 = u_2(x_1)$, $b = u_{2,1}$. Для напряжений в таком случае получаем зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = -P - \left(\frac{1}{3} \gamma_1 + 3\gamma_4 \right) b^2 \pm \frac{1}{2} \gamma_5 \frac{b^3}{a} - \left(\frac{1}{2} \gamma_8 + \frac{1}{9} \gamma_3 + \gamma_4 \right) b^4 \pm \left(\gamma_5 + \frac{1}{2} \gamma_7 \right) \frac{b^5}{6a} \pm \\ \pm \left(\frac{1}{6} \gamma_5 + \frac{9}{4} \gamma_9 \right) ab^3 - \left(\gamma_8 + \frac{1}{6} \gamma_6 \right) \frac{b^6}{6} - \frac{\gamma_8}{12} a^2 b^4 \pm \left(\frac{\gamma_7}{18} + \frac{3}{4} \gamma_9 \right) ab^5 \pm \frac{\gamma_7}{36} \frac{b^7}{a}, \\ \sigma_{12} = \left(\frac{1}{3} \gamma_1 + \frac{3}{2} \gamma_4 \right) b \mp \frac{1}{4} \gamma_5 \frac{b^2}{a} + \left(\frac{1}{4} \gamma_8 + \frac{1}{9} \gamma_3 + \gamma_4 \right) b^3 \mp \left(\gamma_5 + \frac{1}{4} \gamma_4 \right) \frac{b^4}{6a} \mp \\ \mp \left(\frac{1}{6} \gamma_5 + \frac{9}{8} \gamma_9 \right) ab^2 + \left(\gamma_8 + \frac{1}{6} \gamma_6 \right) \frac{b^5}{6} + \frac{\gamma_8}{12} a^2 b^3 \mp \left(\frac{\gamma_7}{18} + \frac{3}{4} \gamma_9 \right) ab^4 \mp \frac{\gamma_7}{36} \frac{b^6}{a}, \\ \sigma_{22} = -P - \frac{3}{2} \gamma_4 b^2 \pm \frac{1}{4} \gamma_5 \frac{b^3}{a} \pm \frac{9}{8} \gamma_9 ab^3 \pm \frac{1}{24} \gamma_7 \frac{b^5}{a} - \frac{1}{4} \gamma_8 b^4, \quad \sigma_{33} = -P. \quad (10) \end{aligned}$$

В (10) $a = \sqrt{b^2 + 3}$. Здесь и далее верхний знак соответствует $u_{2,1} < 0$, нижний $u_{2,1} > 0$.

Как известно [9], в случае антиплоского движения среды коэффициенты в упругом потенциале являются зависимыми. Такое движение осуществимо, если

$$\begin{aligned} W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + h J_1^2 + (h - \mu) J_1 J_2 - \zeta J_1^3 + \dots, \quad (11) \\ J_1 = d_{kk}, \quad J_2 = d_{ik} d_{ki}. \end{aligned}$$

Сравнивая (5) и (11), для коэффициентов потенциала (5) получим

$$\gamma_1 = 6\mu, \quad \gamma_3 = 3(3h - \mu), \quad \gamma_4 = -\frac{2}{3}\mu, \quad \gamma_6 = 9(\mu - h) + 27\zeta, \quad \gamma_8 = 2(\mu - h). \quad (12)$$

Отметим, что равенство нулю коэффициента γ_2 следует из условия отсутствия касательного напряжения в недеформированном материале.

2. Прямолинейное движение среды в круглой трубе. Пусть несжимаемый упруговязкопластический материал, деформационные свойства которого приведены выше, заполняет круглую трубу радиуса R с недеформируемыми стенками. Рассмотрим обратимое деформирование материала и его продвижение по трубе в условиях растущего со временем перепада давления. Решение этой краевой задачи теории больших деформаций в цилиндрической системе координат r, φ, z будем искать в классе функций

$$u = u_z(r, t), \quad v = v_z(r, t), \quad P = P(r, z, t).$$

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций в рассматриваемом случае имеем

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}(u')^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}u'. \quad (13)$$

Полагаем, что деформирование начинается из свободного состояния материала. Далее ограничимся слагаемыми до третьей степени $u' = u_{z,r}$. Таким образом, учитываются только старшие нелинейные слагаемые в зависимостях напряжений от обратимых деформаций. Согласно соотношениям (10) и (12) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P \pm \frac{1}{2}\gamma_5 \frac{b^3}{a}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -P, \\ \sigma_{rz} &= \mu b \mp \frac{1}{4}\gamma_5 \frac{b^2}{a}, \quad \sigma_{zz} = -P + \mu b^2 \pm \frac{1}{4}\gamma_5 \frac{b^3}{a}. \end{aligned} \quad (14)$$

Деформирование и движение материала по трубе свяжем с воздействием градиента давления

$$\partial P / \partial z = \mp \psi(t), \quad \psi(0) = 0. \quad (15)$$

Считаем, что во всем процессе деформирования на стенках трубы выполнено условие жесткого сцепления

$$u(R, t) = 0. \quad (16)$$

Далее силами инерции будем пренебрегать, считая процесс деформирования достаточно медленным. Тогда интегрирование уравнений равновесия

$$\sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad (17)$$

приводит к зависимостям

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t)}{2}r + \frac{c_1(t)}{r}, \quad P = c(t)z + g(r, t). \quad (18)$$

Неизвестные функции интегрирования $c(t)$, $c_1(t)$ необходимо определить из краевых условий. Заметим, что $c_1(t) = 0$, так как напряжение σ_{rz} обязано быть конечным при $r = 0$.

Для краевых условий (15), (16) решение получаем в виде

$$\sigma_{rz} = \mp \psi(t)r/2, \quad P = \mp \psi(t)z + g(r, t). \quad (19)$$

Для определения перемещений согласно (14) и (19) получаем уравнение

$$\mu b \mp \frac{1}{4}\gamma_5 \frac{b^2}{a} = \mp \frac{\psi(t)r}{2}. \quad (20)$$

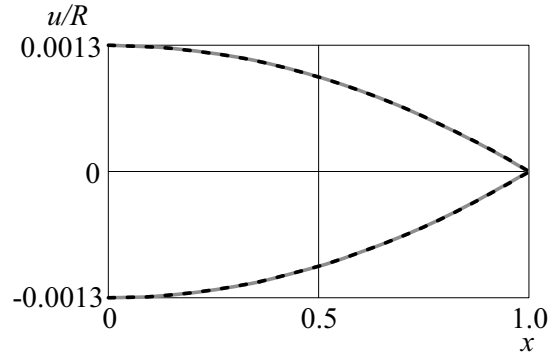


Рис. 1. Распределение перемещений u/R в зависимости от радиуса x в момент начала пластического течения τ_0

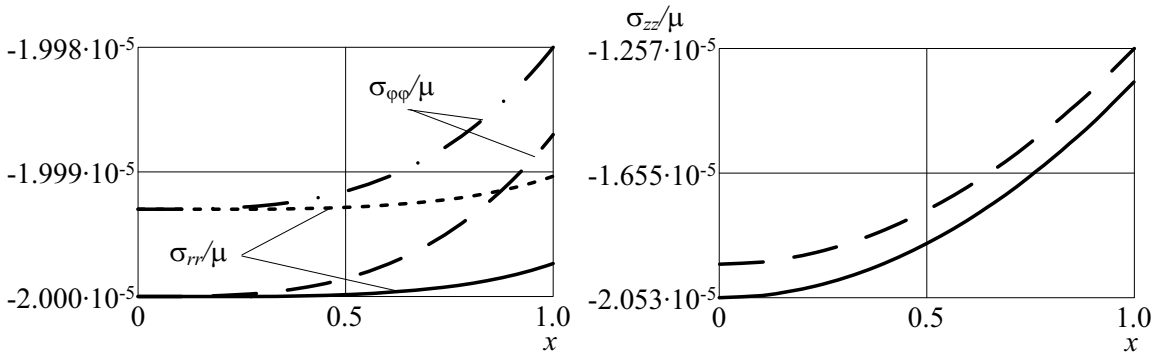


Рис. 2. Компоненты напряжений σ_{rr}/μ , $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ и σ_{zz}/μ в момент времени τ_0

Для определенности полагаем далее $\psi(t)$ линейной функцией времени $\psi(t) = \alpha t$ ($\alpha = \text{const}$).

По известным перемещениям компонента напряжений σ_{rr} находится интегрированием второго уравнения равновесия (17) с учетом (14) и с использованием граничного условия

$$\sigma_{rr}|_{r=R, z=0} = \sigma_0, \quad (21)$$

которое задает напряженное состояние, вызванное начальным поджатием в сечении трубы $z = 0$. Таким образом, получаем

$$\sigma_{rr} = \mp \frac{1}{2} \gamma_5 \int_R^r \frac{b^3}{a} dr \pm \psi(t)z + \sigma_0. \quad (22)$$

Гидростатическое давление находится из (14) по известному напряжению σ_{rr} . Компонента напряжений σ_{zz} определится также из (14).

Расчеты проводились в безразмерных переменных $\tau = \alpha t R / \mu$ и $x = r / R$ при значениях постоянных $\gamma_5 / \mu = 3$, $k / \mu = 2.629 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_0 / \mu = -2 \cdot 10^{-5}$. Численные решения уравнения (20) иллюстрирует рис. 1 (верхняя пунктирная линия для $u' < 0$ и нижняя

пунктирная линия для $u' > 0$); сплошными серыми линиями показано точное решение соответствующей задачи, полученное для случая обратимого деформирования без учета разномодульности среды [10–12]. Перемещения точек разномодульной среды отличаются от перемещений точек среды без учета разномодульности в шестом знаке после запятой, поэтому на графике соответствующие линии перемещений совпадают.

Полученное решение при возрастающей функции $\psi(t)$ справедливо в промежутке времени от 0 до последующего момента времени $t = t_0$, начиная с которого от стенки $r = R$ развивается область пластического течения. Выбирая, например, условие Треска

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k$$

для рассмотренного случая, записанного в форме

$$\left. \left((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}^2 \right) \right|_{r=R} = 4k^2,$$

в принятом приближении получим

$$\sigma_{rz}(R, t_0) = \mp k, \quad t_0 = \frac{2k}{\alpha R}.$$

На рис. 2 показаны распределения компонент напряжений σ_{rr}/μ и $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ в зависимости от радиуса x при $z/R = 0.000001$ сплошной и штриховой линиями соответственно для $u' > 0$ и пунктирной и штрих-пунктирной линиями соответственно для $u' < 0$. Распределения компоненты напряжений σ_{zz}/μ при $z/R = 0.0001$ приведены на рис. 2 сплошной и штриховой линиями для $u' > 0$ и $u' < 0$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Амбарцумян С. А. Разномодульные теории упругости. М.: Наука. 1982. 320 с.
- [2] Мясников В. П., Олейников А. И. Основные общие соотношения изотропно-упругой разнородной среды // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 1. С. 57–60.
- [3] Быковцев Г. И., Лаврова Т. Б. Модель анизотропно упрочняющейся среды, имеющей различные законы упрочнения для растяжения и сжатия // Изв. АН СССР. МТТ. 1998. № 2. С. 146–151.
- [4] Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
- [5] Шапиро Г. С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. журн. МТТ. 1966. № 2. С. 123–125.
- [6] Саркисян М. С. К теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 99–108.
- [7] Буренин А. А., Ярушина В. М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: к 75-летию со дня рождения академика Е.И. Шемякина: сб. науч. тр. М.: Изд-во Физ.-мат. лит., 2006. С. 100–106.
- [8] Цвелодуб И. Ю. К разномодульной теории упругости изотропных материалов // В сб. Динамические задачи механики сплошных сред. СО АН СССР. Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева. Вып. 32. 1977. С. 123–131.
- [9] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [10] Ковтанюк Л. В. О продавлиании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // ДАН. 2005. Т. 400, № 6. С. 764–767.
- [11] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие // Монография. Владивосток: Дальнаука. 2013. 312 с.
- [12] Ковтанюк Л. В., Матвеев В. П., Буренин А. А. Течение упруговязкопластической среды по трубе в условиях изменяющегося перепада давления // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1(15). С. 69–80.

L. V. Kovtanyuk¹, G. L. Panchenko^{1,2}, E. O. Popova¹

ON MODELING OF LARGE STRAINS OF MULTIMODULUS ELASTIC MEDIA

¹*Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia*

²*Vladivostok State University, Vladivostok, Russia*

Abstract. For nonlinear elastic isotropic media with different moduli, deformations of shape change are considered. Using the proposed model relations, a solution of a boundary value problem of the rectilinear motion of a medium in a round pipe under the action of a variable pressure drop is obtained. The obtained results are compared with the exact solution for a nonlinear elastic isotropic medium.

Keywords: elasticity, multimodulus media, large strains.

REFERENCES

- [1] Ambartsumyan S. A. Multimodulus theories of elasticity. M.: Science. 1982. 320 p. (in Russian).
- [2] Myasnikov V. P., Oleinikov A. I. Basic General Relationships of an Isotropically Elastic Differently Resisting Medium // DAN SSSR. 1992. V. 322, No. 1. P. 57–60. (in Russian).
- [3] Bykovtsev G. I., Lavrova T. B. Model of an anisotropically hardening medium with different laws of hardening for tension and compression // Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT. 1998. No. 2. P. 146–151. (in Russian).
- [4] Lomakin E. V., Rabotnov Yu. N. Relationships of the theory of elasticity for an isotropic multimodular body // Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT. 1978. No. 6. P. 29–34. (in Russian).
- [5] Shapiro G. S. On the deformations of bodies with different resistance to tension and compression // Inzh. journal. MTT. 1966. No. 2. P. 123–125. (in Russian).
- [6] Sargsyan M. S. On the theory of elasticity of isotropic bodies, the material of which resists tension and compression in different ways // Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT. 1971. No. 5. P. 99–108. (in Russian).
- [7] Burenin A. A., Yarushina V. M. On modeling the deformation of materials that resist tension and compression in different ways // Problems of Mechanics of Deformable Solids and Rocks: On the 75th Anniversary of Academician E.I. Shemyakin: collection of scientific papers. M.: Publishing house Fiz.-mat. lit., 2006. P. 100–106. (in Russian).
- [8] Tselodub I. Yu. On the multi-modulus theory of elasticity of isotropic materials // In the collection of articles. Dynamic problems of continuum mechanics. SO AN USSR. Institute of Hydrodynamics. M.A. Lavrentiev. Issue. 32. 1977. P. 123–131. (in Russian).
- [9] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).

Kovtanyuk Larisa Valentinovna

e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Panchenko Galina Leonidovna

e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru, Candidate of Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia, Associate Professor, Vladivostok State University, Vladivostok, Russia.

Popova Elena Olegovna

e-mail: polenao@bk.ru, Postgraduate Student, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

- [10] Kovtanyuk L. V. On the forcing of an elastoviscoplastic material through an inflexible circular cylindrical die // *Doklady Physics*. 2005. T. 50. No. 2. P. 112–114.
- [11] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible strains and elastic aftereffect // Monograph. Vladivostok: Dalnauka. 2013. 312 p. (in Russian).
- [12] Kovtanyuk L. V., Matveenko V. P., Burenin A. A. The flow of elasto-viscous-plastic medium through a tube in the conditions of changing differential pressure // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state*. 2013. No. 1(15). P. 69–80. (in Russian).

Б. Г. Миронов¹, Ю. Б. Миронов²

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОМПОНЕНТ ДЕФОРМАЦИИ В СЛУЧАЕ КРУЧЕНИЯ ИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе исследуется деформированное состояние изотропного стержня из идеального жесткопластического материала, в предположении, что стержень закручивается вокруг своей оси. Кручение изотропных и анизотропных идеально пластических стержней рассмотрено в работах [1–5]. В работах [6–9] исследовано кручение стержней, находящихся под действием линейного давления

Ключевые слова: пластичность, стержень, кручение, анизотропия, деформация, напряжение, ассоциированный закон течения, изотропия.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.002

УДК: 539.374

Рассмотрим изотропный стержень из идеально пластического материала кругового сечения радиуса R , ориентированный в цилиндрической системе координат $\rho\theta z$ причем ось z является осью стержня. Стержень закручивается вокруг своей оси противоположными и равными парами сил. При этом боковая поверхность стержня предполагается свободной от нагрузок.

Кручение изотропных и анизотропных идеально пластических стержней рассмотрено в работах [1–5]. В работах [6–9] исследовано кручение стержней, находящихся под действием линейного давления.

Пусть напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + \tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho z}^2 = k^2. \quad (k - \text{const}) \quad (1)$$

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2023

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chsru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 10.01.2023

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Предположим

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_z = -\lambda z + \mu, \quad (\lambda, \mu - \text{const}, \lambda > 0) \\
\tau_{\rho\theta} = 0, \tau_{\rho z} = \tau_{\rho z}(\rho, \theta), \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(\rho, \theta).
\end{aligned} \tag{3}$$

Согласно (3) из (1) и (2) следует

$$\tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho z}^2 = k^2, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = \lambda \tag{5}$$

$$\tau_{\rho z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta} + \tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = 0. \tag{6}$$

Умножим соотношение (5) на $\rho \tau_{\theta z}$

$$\rho \tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = (\lambda \rho - \tau_{\rho z}) \tau_{\theta z} \tag{7}$$

Тогда из (6) и (7) получим

$$\rho \tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} - \tau_{\rho z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta} = (\lambda \rho - \tau_{\rho z}) \tau_{\theta z}. \tag{8}$$

Характеристики и соотношения вдоль характеристик уравнения (8) определяются из следующих соотношений

$$\frac{d\rho}{\rho \tau_{\theta z}} = -\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}} = \frac{d\tau_{\rho z}}{(\lambda \rho - \tau_{\rho z}) \tau_{\theta z}}. \tag{9}$$

Из системы (9) имеем следующее уравнение для определения компоненты $\tau_{\rho z}$ напряжения

$$\frac{d\tau_{\rho z}}{d\rho} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = \lambda. \tag{10}$$

Тогда из (10) находим компоненту $\tau_{\rho z}$

$$\tau_{\rho z} = \frac{\lambda \rho^2 + c_1}{2\rho} \tag{11}$$

где $c_1 = \text{const}$ вдоль характеристики.

Учитывая, что на контуре поперечного сечения стержня вектор касательного напряжения $\tau = (\tau_{\rho z}, \tau_{\theta z})$ направлен по касательной к нему, при $\rho = R$ имеем $\tau_{\rho z} = 0$. Отсюда следует

$$\tau_{\rho z} = \frac{\lambda(\rho^2 - R^2)}{2\rho} \tag{12}$$

Согласно (4), из (12) получим

$$\tau_{\theta z} = \sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{4\rho^2}(\rho^2 - R^2)^2}. \tag{13}$$

С учетом (12) и (13) из (9) получим следующее уравнение характеристики

$$\theta = \theta_0 - \int_R^{\rho} \frac{\lambda(\rho^2 - R^2)d\rho}{\rho\sqrt{4\rho^2k^2 - \lambda^2(\rho^2 - R^2)^2}}, \quad (14)$$

где точка $M_0(R, \theta_0)$ принадлежит контуру поперечного сечения стержня. В соответствии с [5] характеристики (14) есть окружности радиуса $\frac{k}{\lambda}$ ортогональные контуру поперечного сечения стержня, причем центры этих окружностей лежат на касательных к контуру. Огибающая семейства характеристик (14) есть окружность с центром в начале координат и радиуса

$$r = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 R^2} - 1}{\lambda} \quad (15)$$

Деформированное состояние стержня определяется из соотношений ассоциированного закона пластического течения. С учетом (3) и (4) они имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \varepsilon_{\rho\theta} = 0, \quad \tau_{\rho z} \varepsilon_{\theta z} = \tau_{\theta z} \varepsilon_{\rho z} \quad (16)$$

где $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\rho\theta}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{\rho z}$ – компоненты скоростей деформации.

Интегрируя соотношения (16), и, учитывая, что в начальный момент деформирования все компоненты деформации равны нулю, имеем

$$e_\rho = e_\theta = e_z = e_{\rho\theta} = 0, \quad \tau_{\rho z} e_{\theta z} = \tau_{\theta z} e_{\rho z} \quad (17)$$

где $e_\rho, e_\theta, e_z, e_{\rho\theta}, e_{\theta z}, e_{\rho z}$ – компоненты деформации.

Рассмотрим соотношения между компонентами деформации $e_\rho, e_\theta, e_z, e_{\rho\theta}, e_{\theta z}, e_{\rho z}$ и компонентами перемещений u, v, w

$$e_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad e_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (18)$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad e_{\rho z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \quad (19)$$

Из (17) и (18) следует

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (20)$$

Положим

$$u = 0, \quad v = \xi \rho z \quad (21)$$

где $\xi = const$ Тем самым удовлетворяются соотношения (20).

Из (19) с учетом (21) следует

$$\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = \xi - \frac{e_{\theta z}}{\rho} \quad (22)$$

Продифференцируем последнее соотношение из (17) по переменной θ . Согласно (13) и (14) получим

$$\tau_{\rho z} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \theta} - \tau_{\theta z} \frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = 0. \quad (23)$$

Умножив уравнение (22) на $\rho \tau_{\theta z}$, и, вычитая из полученного соотношения соотношение (23), имеем

$$\rho \tau_{\theta z} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \tau_{\rho z} \frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = \xi \rho \tau_{\theta z} - \tau_{\theta z} e_{\theta z} \quad (24)$$

Система уравнений для определения характеристик соотношения (24) имеет вид

$$\frac{d\rho}{\rho\tau_{\theta z}} = -\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}} = \frac{d\tau_{\rho z}}{(\xi\rho - e_{\rho z})\tau_{\theta z}}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что характеристики соотношений (8) и (24) совпадают. Также из системы (25) имеем следующее уравнение для определения компоненты деформации $e_{\theta z}$ вдоль характеристик соотношения (24)

$$\frac{de_{\theta z}}{d\rho} + \frac{e_{\theta z}}{\rho} = \xi. \quad (26)$$

Согласно (26) находим компоненту $e_{\theta z}$

$$e_{\theta z} = \frac{\xi\rho^2 + c_2}{2\rho} \quad (27)$$

где $c_2 = const$ вдоль характеристики.

Согласно (12), (13) и (27) из (17) находим компоненту деформации $e_{\rho z}$ вдоль характеристик соотношения (24)

$$e_{\rho z} = \frac{\frac{\lambda(\rho^2 - R^2)}{2\rho}}{\sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{4\rho^2}(\rho^2 - R^2)^2}} \frac{\xi\rho^2 + c_2}{2\rho} \quad (28)$$

Рассматривая огибающую характеристик как предельное положение жесткого слоя, можно положить на ней компоненты деформации равными нулю. Тогда получим

$$e_{\theta z} = \frac{\xi(\rho^2 - r^2)}{2\rho}, \quad e_{\rho z} = \frac{\lambda\xi(\rho^2 - R^2)(\rho^2 - r^2)}{4\rho^2\sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{4\rho^2}(\rho^2 - R^2)^2}} \quad (29)$$

Таким образом, мы полностью определили деформированное состояние стержня.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. с. 608.
- [2] Прагер В., Ходж Г. Ф. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. с. 398.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. с. 232.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. К вопросу о кручении анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. Т. 1, № 23. с. 196–199.
- [5] Миронов Б. Г., Тихонов С. В. Об одном виде анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. Т. 1, № 11. с. 36–38.
- [6] Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Известия Российской академии наук. 2014. № 3. с. 107–113.
- [7] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. Т. 3, № 21. с. 105–111.
- [8] Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Предельное состояние призматических стержней, находящихся под давлением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2009. № 63. с. 3–4.
- [9] Миронов Б. Г. О кручении призматических, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2006. № 1. с. 98.

B. G. Mironov¹, Yu. B. Mironov²

ON THE DETERMINATION OF THE STRAIN COMPONENTS IN THE CASE OF TORSION OF ISOTROPIC RODS UNDER EXTERNAL PRESSURE

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. In this paper, we study the deformed state of an isotropic rod made of an ideal rigid-plastic material, assuming that the rod is twisted around its axis. The torsion of isotropic and anisotropic ideally plastic rods was considered in [1–5]. In [6–9], the torsion of rods under the action of linear pressure.

Keywords: plasticity, rod, torsion, anisotropy, deformation, stress, associated flow law, isotropy.

REFERENCES

- [1] Sokolovsky V. V. Theory of plasticity. M.: high school, 1969. p. 608.
- [2] Prager V., Hodge G. F. Theory of Ideally Plastic Solids. M.: IL, 1956. p. 398.
- [3] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. M.: Science, 1966. p. 232.
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. To the question of torsion of anisotropic rods // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2015. Vol. 1, no. 23. p. 196–199.
- [5] Kozlova L. S., Mironov B. G. Torsion of prismatic rods under the action of pressure changing linearly along the generatrix // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. 2014. no. 3. p. 107–113.
- [6] Derevyannykh E. A., Mironov B. G. On the issue of torsion of inhomogeneous prismatic rods // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2014. Vol. 3, no. 21. p. 105–111.
- [7] Mironov B. G., Tikhonov S. V. About one kind of anisotropy in torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2012. Vol. 1, no. 11. p. 36–38.
- [8] Kozlova L. S., Mironov B. G. Limit State of Pressurized Prismatic Bars // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovleva. 2009. no. 63. p. 3–4.
- [9] Mironov B. G. On the torsion of prismatic objects under the influence of pressure that changes linearly along the generatrix // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2006. no. 1. p. 98.

Mironov Boris Gurjevich , Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Mironov Yuri Borisovich , Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.

В. Г. Зубчанинов, В. И. Гультияев, А. А. Алексеев, А. С. Двужилов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ ЛАТУНИ Л63 НА ДВУЗВЕННЫХ ЛОМАНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ ТИПА “СМЕЩЕННЫЙ ВЕЕР”

Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Аннотация. Представлены экспериментальные результаты исследования сложного нагружения материала латуни Л63 по двузвенным ломаным по типу “смещенного веера”. Экспериментальные исследования проводились на автоматизированном экспериментально-расчетном комплексе СН-ЭВМ. Представлены результаты экспериментов: траекторий с углами излома 90° , 135° , 180° и длиной первого звена $\Theta_1=3\%$. Исследованы скалярные и векторные свойства материала латуни Л63. Предложены варианты аппроксимации диаграмм деформирования при простом и сложном нагружениях.

Ключевые слова: пластичность, экспериментальные данные, траектория деформирования, векторные и скалярные свойства материала.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.003

УДК: 539.374

В данной статье приводятся экспериментальные исследования упруго-пластического деформирования материала латуни Л63 при сложном нагружении по типу смещенного веера двузвенных ломаных траекторий. Были получены новые экспериментальные результаты по установлению закономерностей упругопластического деформирования латуни для траекторий по типу двузвенных ломаных.

© Зубчанинов В. Г., Гультияев В. И., Алексеев А. А., Двужилов А. С., 2023

Зубчанинов Владимир Георгиевич

e-mail: vlgzub@gmail.com, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Гультияев Вадим Иванович

e-mail: vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильных дорог, оснований и фундаментов, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия. *Алексеев Андрей Алексеевич*

e-mail: alexeev@bk.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия. *Двужилов Антон Сергеевич*

e-mail: anton_in_tver, ассистент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 10.01.2023

Экспериментальные исследования проводились на тонкостенных трубчатых образцах из латуни Л63. Испытания выполнялись на автоматизированном комплексе СН-ЭВМ (рис. 1) в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. На рис. 1 представлен общий вид испытательного комплекса СН-ЭВМ.



Рис. 1.

Тонкостенные трубчатые оболочки имели длину рабочей части $l = 110$ мм, толщину стенки $h = 1$ мм и радиус срединной поверхности $r = 15,5$ мм.

В девиаторных подпространствах напряжений и деформаций элементы векторов напряжений и деформаций $S_k (k = 1, 3), \Theta_k (k = 1, 3)$ определялись по формулам [1–7].

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\sigma_{11} - \sigma_0), \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12} = \sqrt{2} \sigma_{12} \quad (1)$$

$$\Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \Theta_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \quad \Theta_3 = \sqrt{2} \Theta_{12} = \sqrt{2} \varepsilon_{12}$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, S_{ij}, \Theta_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ – компоненты тензоров и тензоров-девиаторов напряжений и деформаций соответственно. $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3, \sigma_0 = \sigma_{ii}/3$, – средние деформация и напряжения. Модули векторов напряжений и деформаций, равные модулям девиаторов напряжений и деформаций определялись по формулам:

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_3^2}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_3^2}, \quad (2)$$

Материал образцов – двухкомпонентная латунь Л63 в состоянии поставки. Как показал эксперимент на растяжение, на диаграмме растяжения площадка текучести отсутствует, определялся условный предел текучести при $\Theta = 0,2\%$, который составил $\sigma = 158$ МПа (рис. 2)

Диаграмма растяжения материала $\sigma = \Phi(\Theta)$ без площадки текучести может быть аппроксимирована выражениями:

$$\sigma = \begin{cases} 2G\vartheta, & \text{при } \vartheta \leq \vartheta^T \\ \sigma^T + 2G_*(\vartheta - \vartheta_*^T) + \sigma_a(1 - e^{-\beta(\vartheta - \vartheta_*^T)}), & \text{при } \vartheta > \vartheta_*^T \end{cases} \quad (3)$$

где $\vartheta^T = \sigma^T / 2G$, ϑ_*^T – значение ϑ в конце площадки текучести.

$2G$ – удвоенный модуль сдвига, G_* , σ^T , σ_a, β – параметры аппроксимации.

На рис. 2 представлена экспериментальная диаграмма латуни Л63 и соответствующая ей аппроксимационная диаграмма, которая построена на основании (3) при значении параметров $\sigma^T = 158$ МПа, $2G_* = 1644$ МПа, $\sigma_a = 40,34$ МПа, $\beta = 70$. При этом погрешность аппроксимации при развитых пластических деформациях составляет не больше 3%.

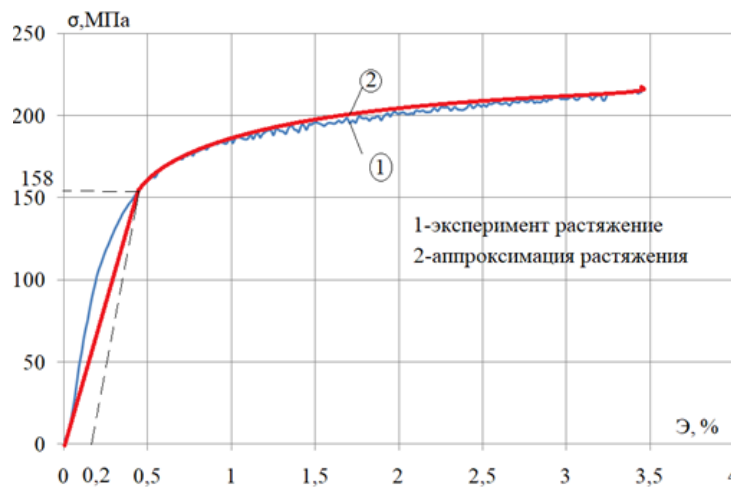


Рис. 2.

Программа экспериментов осуществлялась в векторном пространстве деформаций в плоскости $\vartheta_1\vartheta_3$, а соответствующий ей отклик по напряжениям осуществлялся в плоскости S_1S_3 векторного пространства девиатора напряжений. Программа серии экспериментов с точками излома при $\vartheta_1^0 = 3\%$ приведены на рис. 3.

Были проведены экспериментальные исследования по двузвенным ломаным траекториям деформирования с углами излома 90° ; 135° ; 180° . После излома траектории при угле 90° на втором звене испытуемый образец был подвергнут кручению при $\vartheta_1 = \text{const}$, при угле 135° – одновременному кручению и сжатию, при угле 180° – знакопеременному нагружению с упругой разгрузкой.

На рис. 4 и 5 приведены диаграммы $\sigma - s$ и $\sigma - \vartheta$. Из рисунка видно, что при изломе траектории на диаграммах наблюдаются “нырки” напряжений, которые при угле излома 90° составили 23 МПа, при угле излома 135° – 42 МПа, при угле излома 180° – 174 МПа. Опускающаяся часть “нырка” соответствовала неполной упругой сложной разгрузке до минимума напряжения σ_{BT}^T , при котором происходит “протыкание” предельной поверхности и создаются вторичные пластические деформации. Напряжение σ_{BT}^T названо вторичным пределом текучести. При угле излома 90° получено $\sigma_{BT}^T = 174$ МПа, угле 135° – $\sigma_{BT}^T = 134$ МПа, угле 180° – $\sigma_{BT}^T = 3,3$ МПа. На рис. 6 и 7

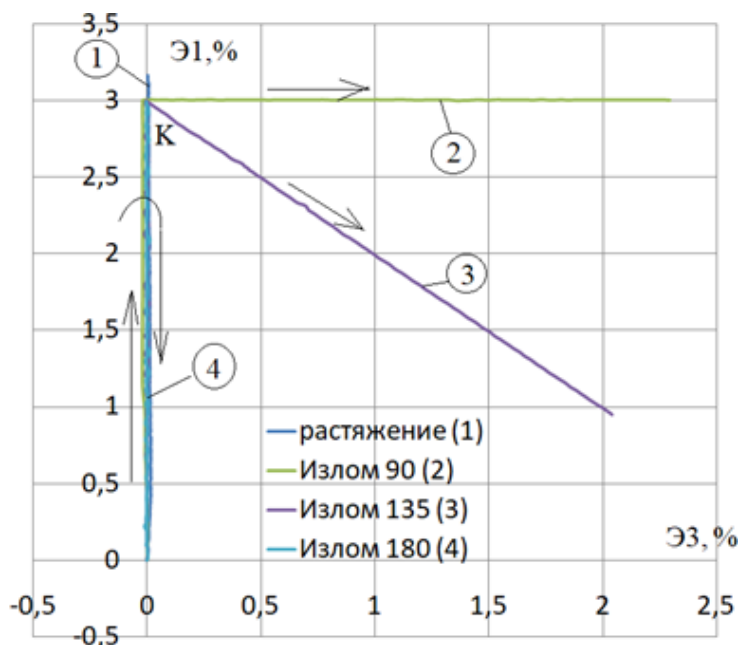


Рис. 3.

представлены локальные диаграммы деформирования $S_1-\epsilon_1$ и $S_3-\epsilon_3$. На ниспадающей части “нырка” происходит упругая разгрузка на диаграмме $S_1-\epsilon_1$ и упругое нагружение на диаграмме $S_3-\epsilon_3$ при кручении образца (рис. 6, 7). На восходящей ветви “нырка” продолжается упругая разгрузка по растяжению-сжатию, однако происходит активное пластическое деформирование от кручения, что и является причиной прекращения частичной упругой разгрузки материала (рис. 6, 7).

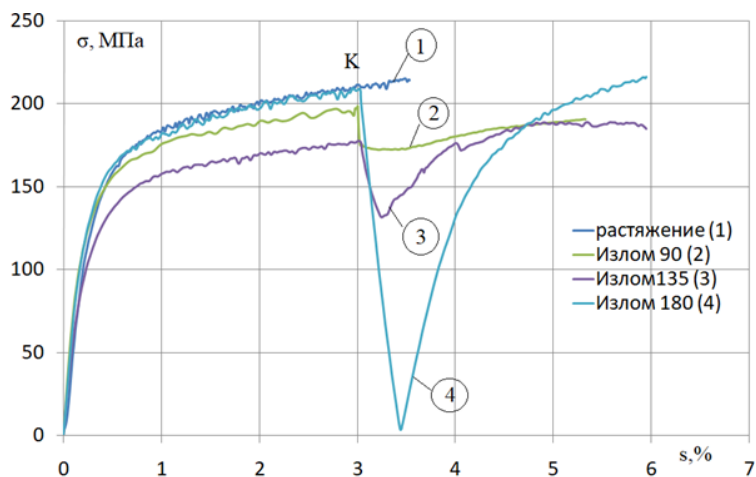


Рис. 4.

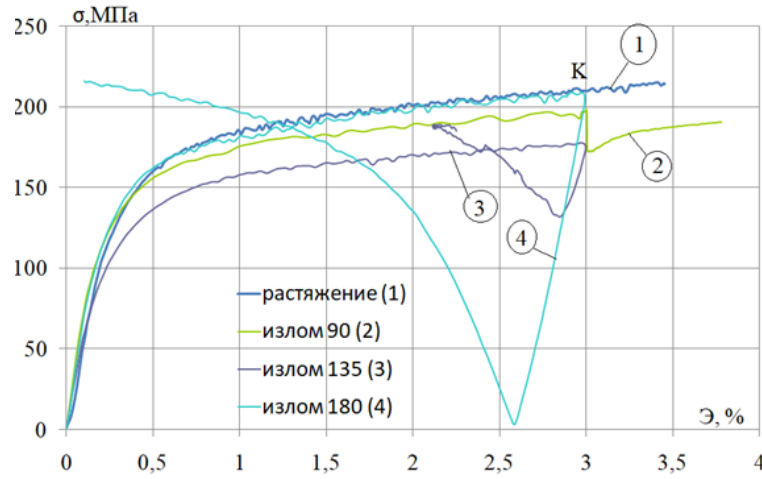


Рис. 5.

Из рис. 4, 5 можно увидеть практически линейную частичную разгрузку. Поэтому по предложению В.Г.Зубчанинова закон сложной частичной упругой разгрузки может быть принят линейным для данного материала латунь.

$$\Delta\sigma = 2G(S - S_0) = 2G(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) \quad (4)$$

где S_0 , \mathcal{E}_0 – значения S и \mathcal{E} в точке K излома траектории.

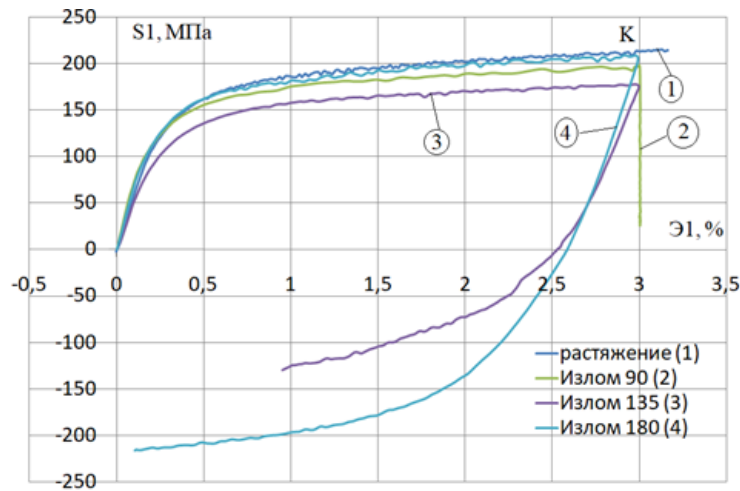


Рис. 6.

После окончания частичной разгрузки на участке вторичного пластического деформирования (после $\sigma_{\text{ВТ}}^T$ согласно предположения В. Г. Зубчанинова зависимость $\sigma = \Phi(s)$ выражается следующим образом:

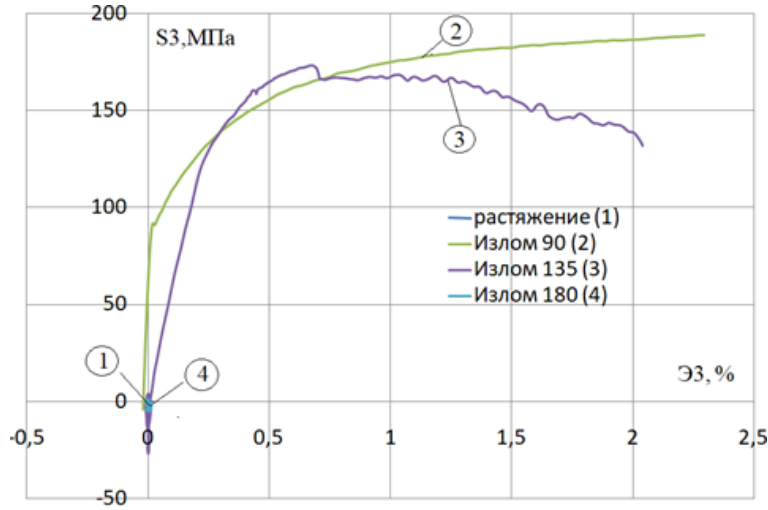


Рис. 7.

$$\sigma = \Phi(s) = \sigma_{\text{ВТ}}^T + 2G_*(s - s_0^\gamma) + \sigma_a [1 - e^{-\beta(s-s_0^\gamma)}] \quad (5)$$

где длина дуги s_0^γ , которая соответствует началу участка при $\sigma = \sigma_{\text{ВТ}}^T$. $2G_* = 1577$ МПа, $\sigma_a = 65,06$ МПа, $\beta = 70$

На рис. 8 можно увидеть экспериментальную диаграмму деформирования для угла излома $\vartheta_1^0 = 135^\circ$ и ее теоретическую аппроксимацию на основании формулы 6. Из рис. 8 видно, что применяемые аппроксимации хорошо соответствуют данным эксперимента.

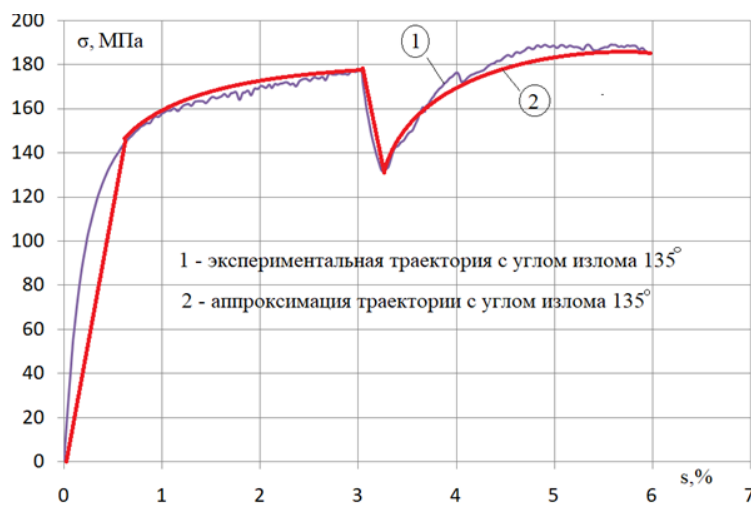


Рис. 8.

Векторные свойства материала для углов излома 90° ; 135° , 180° траектории можно увидеть на рис. 9, где представлены зависимости угла сближения ν_1 от приращения длины дуги траектории Δs после точки излома.

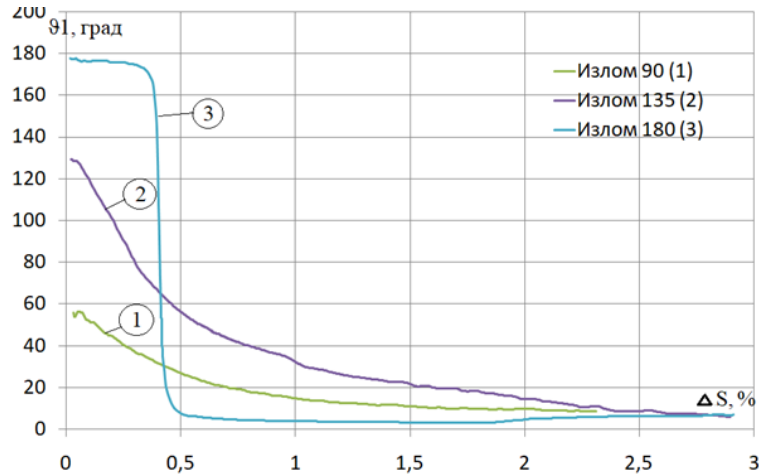


Рис. 9.

В процессе дальнейшего нагружения угол ν_1 становится стабильным и стремится к нулю (рис. 9).

Результаты исследований планируется использовать при построении математической модели теории процессов упругопластического деформирования для материала латунь Л63.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [2] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2018. Т. 5. С. 29–46.
- [4] Inelasticity V. V. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.
- [5] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. Т. 1. С. 110–135.
- [6] Молодцов И. Н. Прикладные вопросы теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2020. № 5. С. 33–8.
- [7] Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories / V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, E. G. Alekseeva et al. // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 32, no. 3. p. 298–304.

V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev, A. S. Dvuzhilov

**EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF THE COMPLEX LOADING OF L63
BRASS ON TWO-LINK POINTED PATH TYPE "OFFSET FAN"**

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. Experimental results of the study are presented complex loading of the material brass L63 by two-link broken lines by type “displaced fan”. Experimental studies were carried out on automated experimental and computational complex SN-EVM. Represented experimental results: trajectories with break angles 90° , 135° , 180° and the length of the first link is $E1=3\%$. The scalar and vector properties of the L63 brass material are studied. Suggested options for approximating deformation diagrams for simple and complex loading.

Keywords: plasticity, experimental data, trajectory deformations, vector and scalar properties of the material.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory. M.: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1963. 273 p.
- [2] Zubchaninov V. G. Mechanics of plastic media processes. M.: Fizmatlit, 2010. 352 p.
- [3] Zubchaninov V. G. General mathematical theory of plasticity and postulates of macroscopic definability and isotropy A.A. Ilyushin // Bulletin of the Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics. 2018. Vol. 5. P. 29–46.
- [4] Inelasticity B. V. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.
- [5] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastic-plastic processes of active complex loading. Part 2: Identification and verification // Izv. RAN. MTT. 2016. Vol. 1. P. 110–135.
- [6] Molodtsov I. N. Applied Problems of the Theory of Elastic-Plastic Processes by A. A. Ilyushin // Bulletin of the Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics. 2020. no. 5. P. 33–8.
- [7] Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories / V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, E. G. Alekseeva et al. // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 32, no. 3. p. 298–304.

Zubchaninov Vladimir Georgievich, Dr. Tech. Sci., Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Gulyaev Vadim Ivanovich, Dr. Tech. Sci., Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Alekseev Andrey Alekseevich, Cand. Tech. Sci., Tver State Technical University, Tver, Russia.

Dvuzhilov Anton Sergeevich, Assistant, Tver State Technical University, Tver, Russia.

В. Г. Зубчанинов, В. И. Гультияев, А. С. Двужилов

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАТУНИ Л63 ПО ГЛАДКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРИИ ТИПА “ВЕЕР СМЕЩЕННЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ”

Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Аннотация. В статье описаны результаты эксперимента деформирования по гладкой криволинейной траектории трубчатого тонкостенного образца. На каждом участке траектории менялось значение кривизны и одновременно перемещался ее центр. Экспериментальные исследования проводились в девиаторном пространстве деформаций А.А. Ильюшина на экспериментальном автоматизированном комплексе СН-ЭВМ, с учетом одновременного, комбинированного действия на трубчатый образец кручения и растяжения-сжатия. Исследованию подлежали скалярные и векторные свойства материала латуни Л63. Выявлено, что полученные диаграммы, которые показывают векторные и скалярные свойства материала имеют колебательный характер.

Ключевые слова: векторные и скалярные свойства материала, сложное нагружение, экспериментальные данные, пластичность, траектория деформирования.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.004

УДК: 539.374

Серьезная и необходимая на сегодняшний день задача теории пластичности – изучить очевидные законы упругопластического деформирования и прочности материалов, а также определённые свойства материалов при нагружении и при сложном напряженном состоянии. Работа над экспериментами открывает объективную возможность по определению достоверности и пределов применимости математических моделей теории пластичности.

© Зубчанинов В. Г., Гультияев В. И., Двужилов А. С., 2023

Зубчанинов Владимир Георгиевич

e-mail: vlgzub@gmail.com, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Гультияев Вадим Иванович

e-mail: vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильных дорог, оснований и фундаментов, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Двужилов Антон Сергеевич

e-mail: anton_in_tver, ассистент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 10.01.2023

В более ранних исследованиях, описанных в источниках [1–13] и др., можно увидеть результаты эксперимента деформирования поликристаллических металлов и сплавов при сложном нагружении, а также различные виды моделей теории пластичности. Из вышеуказанных источников важно отметить именно криволинейные траектории деформирования, которые имеют окружности или спирали Архимеда.

Представлена специфическая криволинейная траектория, в процессе деформирования которой задана различная кривизна, при этом центр окружности смещается по оси Э1 в положительную сторону. Эксперименты выполнены на комплексе СН-ЭВМ (экспериментально-расчетный комплекс СН-ЭВМ А.А. Ильюшина), на котором возможно осуществить трехпараметрическое нагружение на образец (внутреннее давление, кручение и осевое растяжение-сжатие). Эксперименты, результаты которого показаны в векторном представлении деформаций и напряжений А.А. Ильюшина [1–3], выполнялись в пространстве деформаций Э1-Э3 при одновременном воздействии крутящего момента и осевой силы. Нагружение осуществлялось при постоянной температуре, деформации подразумеваются малыми.

Программу деформирования, показанную на рисунке 1, можно описать следующим образом: начинающиеся из начала координат пять окружностей различного радиуса $R_1 = 0.25\%$, $R_2 = 0.5\%$, $R_3 = 0.75\%$, $R_4 = 1\%$, $R_5 = 1.5\%$ и различной кривизны ± 400 , ± 200 , ± 133 , ± 100 , ± 67 .

Тонкостенный трубчатый образец был подвержен одновременному растяжению по Э1 и знакопеременному кручению по Э3. Полученная линия деформирования относится к гладким траекториям (по А.А.Ильюшину) [1], в следствии того, что в области смены участков нет точек перелома, однако меняется величина кривизны.

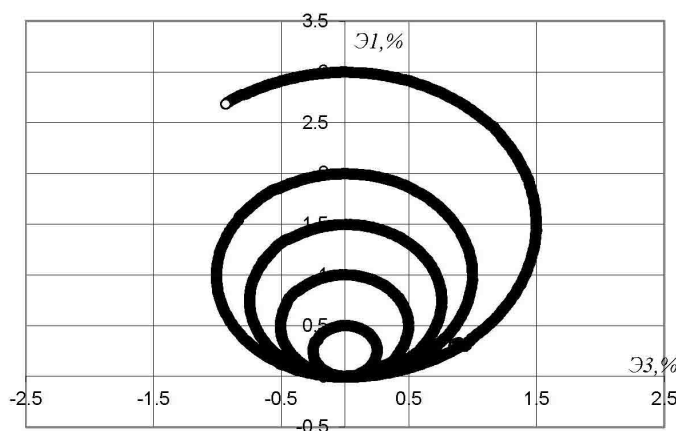


Рис. 1. Траектория деформирования на плоскости Э1-Э3

В экспериментах задействованы тонкостенные трубчатые образцы, выполненные из латуни Л63. Состав и марка латуни подтверждены химическим анализом.

Габариты образцов, использованные в экспериментальных исследованиях:

- толщина стенки – 1 мм (h),
- радиус срединной поверхности поперечного сечения – 15, 5 мм (r)

- длина рабочей части – 110 мм (1).

При растяжении и кручении, т.е. при простом пропорциональном нагружении, исходная изотропия материала латуни Л63 была подтверждена экспериментально. Результаты обработаны с помощью формул [3]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}, \varepsilon_{22} = \frac{\Delta r}{r}, \varepsilon_{12} = \frac{r\psi}{2l}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{\sigma_0}{K}, \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{P}{2\pi r h}, \sigma_{22} = q \frac{r}{h}, \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi r^2 h}, \sigma_{33} \approx 0, \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \end{cases} \quad (2)$$

где: $-\xi_{ij}$ – компоненты тензоров деформаций; σ_{ij} – компоненты тензоров напряжения; Δl – приращения l ; Δr – приращения r ; ψ – угол поворота поперечного сечения; P – осевая сила при растяжении; q – внутреннее давление; M – момент кручения; E – модуль Эйлера-Юнга; μ – коэффициент Пуассона; $-K$ – объемный модуль упругости.

В процессе обработки информации, полученной в результате эксперимента, было принято, что условие несжимаемости $\varepsilon_0 = 0$, показатель μ приближался к 0,5.

Через компоненты тензоров по выражениям (3) были получены координаты векторов деформаций и напряжений.

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\sigma_{11} - \sigma_0), S_3 = \sqrt{2} S_{12} = \sqrt{2} \sigma_{12}, \\ \mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathcal{E}_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \mathcal{E}_3 = \sqrt{2} \mathcal{E}_{12} = \sqrt{2} \varepsilon_{12}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, S_{ij}, \mathcal{E}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – компоненты тензоров и тензоров-девиаторов напряжений и деформаций соответственно; $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$ – средние напряжение и деформация.

Модули векторов деформаций и напряжений, которые равны модулям девиаторов деформаций и напряжений, были получены следующим образом (4):

$$\sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{S_1^2 + S_3^2}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}} = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_3^2} \quad (4)$$

Значения угла ϑ_1 получили с помощью формулы (5). Здесь косинус угла отклонения ϑ_1 вектора напряжений от касательной к траектории деформирования определяется выражением, где $\mathcal{E}_1^0, \mathcal{E}_3^0$ – координаты центра кривизны полуокружности:

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma} \left(\pm S_1 \frac{\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_3^0}{R} \mp S_3 \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1^0}{R} \right) \quad (5)$$

Результаты проведённой работы отражены на рисунках 2-7. На рисунке 2 отражен отклик $S_1 - S_3$, построенный в пространстве напряжений. Глобальную диаграмму деформирования $\sigma - \mathcal{E}$ представлена на рисунке 3, а диаграмму прослеживания процесса деформирования $\sigma - s$ на рисунке 4. Диаграмма $\sigma - s$ характеризует векторные свойства материала, где s является длиной дуги траектории деформирования. На рисунках 5, 6 отражены две локальные диаграммы деформирования (продольного нагружения $S_1 - \mathcal{E}_1$ и кручение $S_3 - \mathcal{E}_3$). Диаграмма зависимости $\vartheta_1 - s$, характеризующая векторные свойства материала, показана на рисунке 7.

Ранее, при проведении подобных экспериментов, выявлено [3, 12, 13] следующее: изменение характера нагружения, а именно смена кривизны траектории деформирования, на диаграмме $\sigma - s$ вызывает “нырок напряжений”, которые схожи с нырком, появляющимся при наличии угла излома траектории. Похожее явление мы видим и

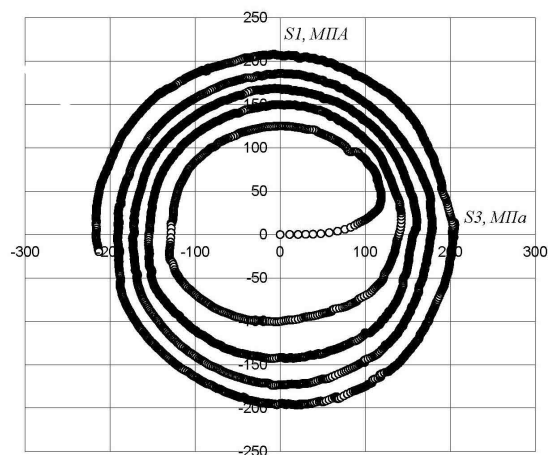
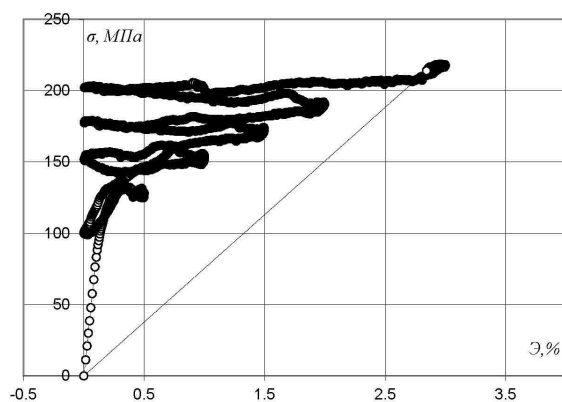


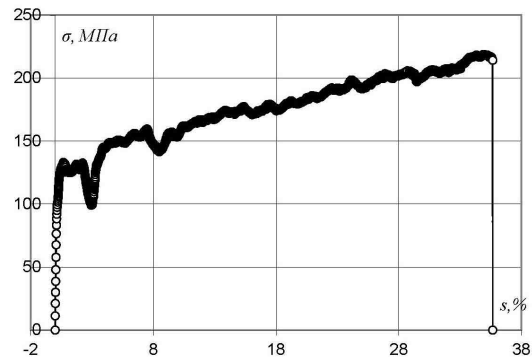
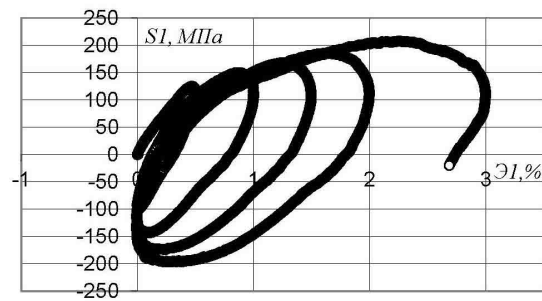
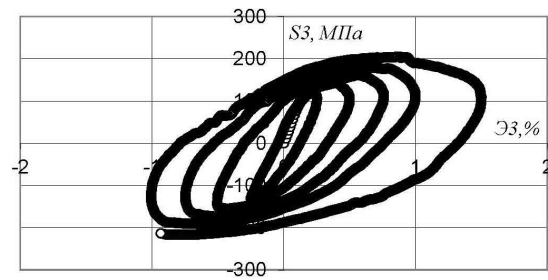
Рис. 2. Отклик по напряжениям на плоскости S1 - S3.

Рис. 3. Диаграмма деформирования $\sigma - \epsilon$.

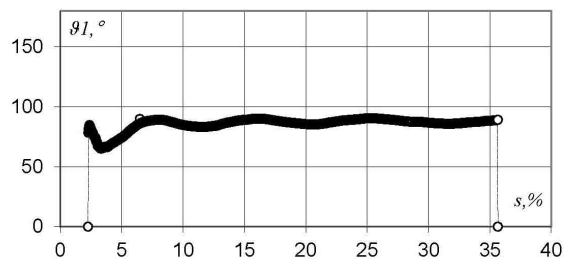
при текущих исследованиях на латуни Л63. На рисунке 4 выявлены зависимости, которые показывают, что вначале каждого участка, при увеличении ЭЗ по модулю, значение напряжения растет, а далее, при уменьшении ЭЗ до нуля, значение σ уменьшается. При этом процент убывания в сопоставлении с наибольшим значением не превышает значения 7% на данном участке.

Выявлено, что при проведении экспериментов по гладким траекториям с неизменной кривизной, проявляется постоянный режим деформирования с одинаковым значением угла сближения ϑ_1 [3, 12]. В нашем же случае видно, что при смене значения кривизны на диаграмме зависимости угла сближения от длины дуги траектории проявляется колебательный эффект.

Заключение. Показаны экспериментальные результаты, полученные в ходе сложного упругопластического деформирования латуни Л63 на тонкостенных трубчатых

Рис. 4. Диаграмма деформирования $\sigma - s$.Рис. 5. Локальная диаграмма деформирования $S1 - \text{Э}1$.Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования $S3 - \text{Э}3$.

образцах по гладким траекториям деформирования различной кривизны. Для материала латунь Л63 исследованы скалярные и векторные свойства. Определено, что

Рис. 7. Диаграмма $\vartheta_1 - s$.

диаграммы зависимости угла сближения от длины дуги траектории $\vartheta_1 - s$ носят колебательный характер, затухающий со временем. При проверке существующих математических моделей теории пластичности будет целесообразно использование итогов эксперимента в практической плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1971. с. 310.
- [2] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. с. 273.
- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. с. 352.
- [4] Зубчанинов В. Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 5. с. 29–46.
- [5] Аннин Б. Д., Жигалкин В. М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
- [6] Прикладная теория пластичности / Ф. М. Митенков, И. А. Волков, Л. А. Игумнов [и др.]. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.
- [8] Васин Р. А. Экспериментальное исследование неупругого поведения материалов // Прикладная механика и техническая физика. 2016. с. 30–34.
- [9] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. с. 110–135.
- [10] Зубчанинов В. Г. Моделирование процесса упругопластического деформирования стали 45 по траекториям типа спирали Архимеда // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 1. с. 102–109.
- [11] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultiaev V. I. Modeling of deformation processes of structural steels along circular paths // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1425, no. 1. p. 012186.
- [12] Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally / Z. V. G., A. A. Alekseev, V. I. Gultiaev et al. // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42, no. 5. p. 528–534.
- [13] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гульяев В. И. Влияние замены неаналитических траекторий с точками излома гладкими траекториями на сложность процессов деформирования и нагружения материалов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 2. с. 52–63.

V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev, A. S. Dvuzhilov

INVESTIGATION OF BRASS L63 ALONG A SMOOTH CURVILINEAR TRAJECTORY OF THE ‘FAN’ TYPE DISPLACED CIRCLES’

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The article presents the results of an experimental study of deformation of a thin-walled tubular sample along a smooth curvilinear trajectory of deformation of different curvature, in which each section of the trajectory changes the value of curvature and moves its center. The experiments were carried out on an automated calculation and experimental complex SN-EVM in the deviatoric space deformations A.A. Ilyushin (hard loading) with simultaneous combined action on a thin-walled tubular tensile-compression sample and twists. Scalar and vector material properties were subject to research brass L63. It was revealed that the resulting diagrams that characterize scalar and vector material properties are oscillatory.

Keywords: vector and scalar material properties, complex loading, experimental data, plasticity, trajectory deformation.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Continuum Mechanics. M.: Publishing house of Moscow State University, 1971. p. 310.
- [2] Ilyushin A. A. Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory. M.: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1963. p. 273.
- [3] Zubchaninov V. G. Mechanics of plastic media processes. M.: Fizmatlit, 2010. p. 352.
- [4] Zubchaninov V. G. General mathematical theory of plasticity and postulates of macroscopic definability and isotropy A.A. Ilyushin // Bulletin of the Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics. 2018. no. 5. p. 29–46.
- [5] Annin B. D., Zhigalkin V. M. Behavior of materials under complex loading. Novosibirsk: Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 1999. 342 p.
- [6] Applied Theory of Plasticity / F. M. Mitenkov, I. A. Volkov, L. A. Igumnov et al. M.: Fizmatlit, 2015. 284 p.
- [7] v. S. Bondar. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.
- [8] Vasin R. A. Experimental Study of Inelastic Behavior of Materials // Applied mechanics and engineering physics. 2016. p. 30–34.
- [9] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastic-plastic processes of active complex loading. Part 2: Identification and verification // Izv. RAN. MTT. 2016. no. 1. p. 110–135.
- [10] Zubchaninov V. G. Modeling the process of elastic-plastic deformation of steel 45 along trajectories of the Archimedes spiral type // Computational Continuum Mechanics. 2021. Vol. 14, no. 1. p. 102–109.
- [11] v. G. Zubchaninov, Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Modeling of deformation processes of structural steels along circular paths // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1425, no. 1. p. 012186.
- [12] Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally / Z. v. G., A. A. Alekseev, V. I. Gulyaev et al. // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42, no. 5. p. 528–534.
- [13] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Influence of replacing non-analytical trajectories with break points with smooth trajectories on the complexity of the processes of deformation and loading of materials // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2020. no. 2. p. 52–63.

Zubchaninov Vladimir Georgievich, Dr. Tech. Sci., Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Gulyaev Vadim Ivanovich, Dr. Tech. Sci., Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Dvuzhilov Anton Sergeevich, Assistant, Tver State Technical University, Tver, Russia.

А. И. Евстигнеев, А. А. Евстигнеева, Э. А. Дмитриев, Е. П. Иванкова,
В. И. Одинокоев, Д. В. Чернышова

О СИЛОВОМ ВЛИЯНИИ ОПОРНОГО НАПОЛНИТЕЛЯ И МЕЖСЛОЙНОГО ТРЕНИЯ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЫ ПО ВЫПЛАВЛЯЕМЫМ МОДЕЛЯМ

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. В работе изложены результаты теоретического исследования напряженно-деформированного состояния оболочковой формы в зависимости от силового воздействия на неё со стороны опорного наполнителя и межслойного трения при литье по выплавляемым моделям.

Ключевые слова: многослойная оболочковая форма, напряженное состояние, напряжение, перемещение, трещинообразование.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.005

УДК: 539.5, 621.74.045

1. Введение Метод литья по выплавляемым моделям является самым востребованным способом получения отливок высокой сложности. Растрескивание или полное разрушение оболочковой формы (ОФ) на операциях прокаливания и заливки ее жидким расплавом приводят к повышенному браку получаемых отливок. Неравномерность нагрева ОФ при заливке металла и затвердевании формирующейся отливки приводит к появлению в ней микро и макротрещин, что связано с неравномерным термоупругим напряженно-деформируемым состоянием (НДС) ОФ. Растрескивание и полное разрушение ОФ имеет место при всех известных технологических способах их

© Евстигнеев А. И., Евстигнеева А. А., Дмитриев Э. А., Иванкова Е. П., Одинокоев В. И., Чернышова Д. В., 2023

Евстигнеев Алексей Иванович

e-mail: diss@knastu.ru, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник управления научно-исследовательской деятельностью, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Евстигнеева Анна Алексеевна

e-mail: annka.ewstig@mail.ru, студентка 3-го курса факультета компьютерных технологий, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Дмитриев Эдуард Анатольевич

e-mail: rector@knastu.ru, доктор технических наук, профессор, ректор, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Поступила 02.02.2023

подготовки к прокаливанию и заливке жидким металлом, которые обусловлены разнообразием требований, предъявляемых к качеству получаемых отливок, их массой и габаритными размерами, свойствами материалов, применяемых для изготовления ОФ, толщиной и термостойкостью стенок ОФ и пр. Одним из наиболее распространенных в действующем производстве способов подготовки ОФ к прокаливанию и заливке является технология прокаливания и заливки жидким металлом заформованной ОФ в опорный наполнитель (ОН)

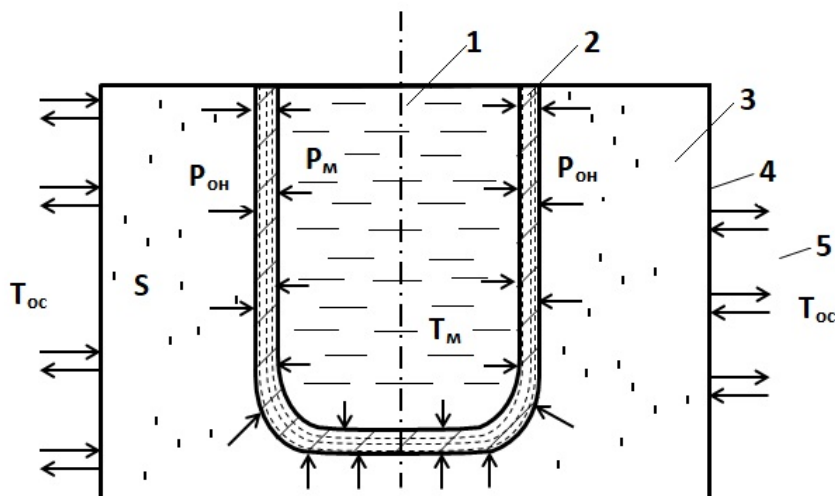


Рис. 1. Схема заформованной в опорный наполнитель оболочковой формы и залитой жидким металлом: 1 – жидкий металл; 2 – оболочковая форма; 3 – опорный наполнитель; 4 – опок (кожух); 5 – окружающая среда. T_{OC} – температура окружающей среды; T_M – температура жидкого металла; P_M – давление жидкого металла на оболочковую форму; $P_{ОН}$ – давление опорного наполнителя на оболочковую форму

Оболочковая форма по выплавляемым моделям формируется в результате повторения технологических операций окунания блока в огнеупорную суспензию, обсыпки его зернистым огнеупорным материалом и сушки каждого нанесенного на блок слоя, формируя таким образом тело многослойной керамической оболочки.

© Евстигнеев А. И., Евстигнеева А. А., Дмитриев Э. А., Иванкова Е. П., Одинокоев В. И., Чернышова Д. В., 2023

Иванкова Евгения Павловна

e-mail: jenuvany@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Одинокоев Валерий Иванович

e-mail: 79122718858@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Управления научно-исследовательской деятельностью, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Чернышова Дарья Витальевна

e-mail: daracernysova744@gmail.com., аспирантка, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

При этом все слои оболочки жестко связаны между собой и могут иметь отличные физико-механические, теплофизические и химические свойства друг от друга. Количество наносимых на модельный блок слоев огнеупорного покрытия от 3-х до 12-ти и может быть более. Поэтому материал ОФ в целом можно считать гетерогенным.

Опорный наполнитель – огнеупорный материал, окружающий ОФ с внешней стороны и предназначенный для увеличения жесткости и прочности ОФ, обеспечивая её устойчивость при прокаливании и заливке металлом, сохранение начальной температуры ОФ до заливки. В качестве ОН используют сыпучий или монолитный огнеупорный материал, и, в некоторых случаях, металлическую чугунную дробь [1].

Существующие наработки и собранный научный и производственный опыт в этом направлении не снижает актуальности проблемы уменьшения уровня НДС ОФ. Требуется проведение дополнительных дальнейших исследований.

Сейчас исследователи активно работают над вопросом влияния внутренних и внешних факторов на НДС ОФ.

К исследуемым внешним факторам воздействия на ОФ относим основные: силовое и температурное воздействие как со стороны жидкого и твердого металла, так и со стороны ОН.

Среди ранее опубликованных можно выделить работы [2–4], посвященные исследованию внешнего температурного воздействия со стороны ОН на НДС ОФ, а также работу [5], в которой предложен уже способ управления уровнем НДС ОФ при ее заливке жидким металлом. Установлению особенностей силового влияния ОН на ОФ посвящена работа [6], а со стороны заливаемого металла – работа [7].

Морфологическая структура ОФ и ее виды, а также межслойные связи контактирующих слоев оболочки относятся к внутренним факторам воздействия на ОФ.

Теоретическое исследование по влиянию макроструктуры многослойной ОФ на ее НДС представлено в работе [8]. Однако вопрос влияния наличия трения или его отсутствия между контактирующими слоями на трещиностойкость ОФ остался незатронутым.

В данной работе исследуется влияние внутреннего межслойного трения в ОФ и силового воздействия ОН в виде монолитного тела на НДС ОФ, при этом принимается структура ОФ согласно работе [8], но уже с учетом трения между слоями.

Таким образом, математическое моделирование процессов влияния межслойных связей в ОФ и силового воздействия сыпучего ОН в виде монолитного тела на трещинообразование в ОФ и возможное полное ее разрушение после заливки расплава и охлаждения отливки является целью настоящей работы. При этом макроструктура ОФ, в т. ч. градиентных, должна быть как с учетом трения между слоями (жесткие связи), так и с учетом рекомендации работы [9] (наличие межслойного проскальзывания).

Данная инженерная тематика ранее рассматривалась в многочисленных работах и монографиях [2, 3, 7, 8, 10]. Так, в работе [10] решалась задача по заливке стали в ОФ с учетом фазового перехода. Анализ результатов показал, что учет этого фактора несущественно сказывается на результатах решения. Учет физических параметров: теплоемкости (C), теплопроводности (λ), от температуры также несущественен [8].

2. Построение математической модели Рассмотрим процесс охлаждения (затвердевания) залитой жидким металлом многослойной ОФ в виде осесимметричного тела вращения (рис. 1, а), заформованной в опорный наполнитель и нагретую

до определенной температуры, при этом ограничимся рассмотрением только зумпфа ОФ (нижняя сферическая часть стояка в виде полусферы) и цилиндрической части стояка.

Принимаем, что деформируемая среда – оболочковая форма и затвердевший металл можно считать изотропным. ОФ представляет собой керамический многослойный материал толщиной T . На рис. 2,б представлена расчетная схема моделирования областей системы: область I – жидкий металл (ЖМ); II – твердый металл (ТМ); III – оболочковая форма (ОФ), IV – опорный наполнитель (ОН).

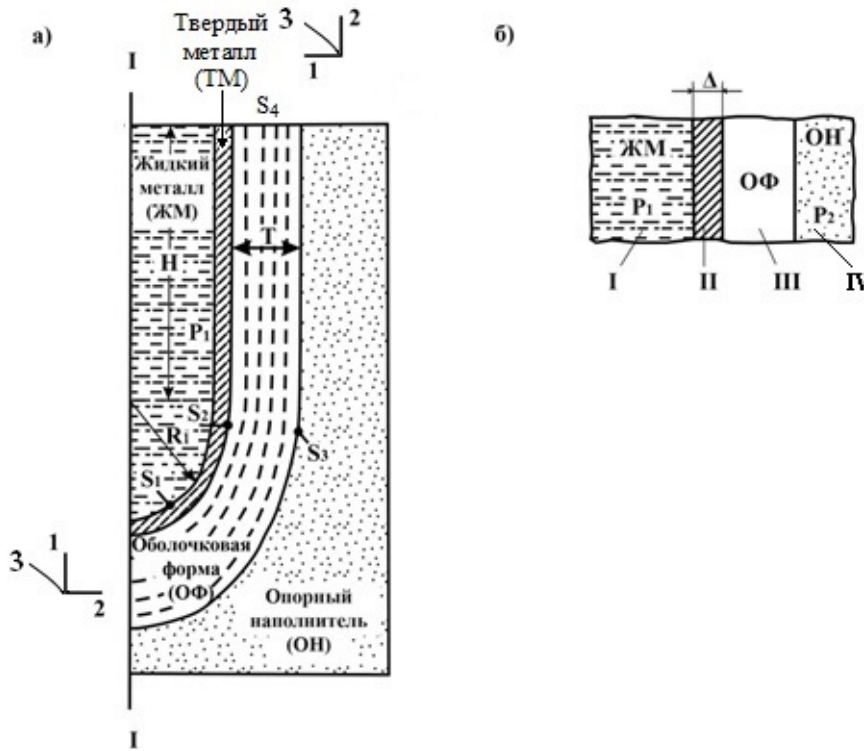


Рис. 2. Расчетная схема системы ЖМ-ТМ-ОФ-ОН с расшифровкой поверхностей к граничным условиям задачи: а – меридианное сечение, б – схема моделирования областей системы; T – толщина оболочковой формы; H – высота цилиндрической части стояка оболочковой формы; R_1 – радиус сферической части стояка (зумпфа); I–I – ось симметрии; 1, 2, 3 – оси координат; S_1 – внутренняя поверхность контакта жидкого и затвердевшего металла, S_2 – внутренняя поверхность контакта затвердевшего металла и оболочковой формы; S_3 – внешняя поверхность оболочковой формы; S_4 – свободная поверхность торца литниковой чаши оболочковой формы

Используем линейную теорию упругости, эйлерову систему координат и уравнение теплопроводности. Запишем для каждой из областей систему уравнений на временном шаге $\Delta\tau_n$:

область I:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma = P_1; P_1 = -h\gamma; \theta = \bar{\alpha}_1 \Delta\theta; \quad (1)$$

области II, III:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0; \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2G_p^t \epsilon_{ij}^*; \epsilon_{ij}^* = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon\delta_{ij}; \epsilon = \epsilon_{ii}; \\ \epsilon_{ii} &= 3k_p^t\sigma + 3\alpha_p^t(\theta_n - \theta_p^*); \epsilon_{ij} = 0.5(U_{i,j} + U_{j,i}); \\ \theta &= \bar{\alpha}_2\Delta\theta; \\ \theta &= \bar{\alpha}_3^t\Delta\theta; \text{(область III)}\end{aligned}\quad (2)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; U_i – перемещения; ϵ_{ij} – компоненты тензора упругих деформаций; σ – гидростатическое напряжение; G_p^t ($p=2$) – модуль сдвига закристаллизовавшегося металла; формы ($p=3$) в слое t_i ; δ_{ij} – символ Кронекера; k_p^t – коэффициент объемного сжатия; α_3^t – коэффициент линейного расширения в области (III), в слое (t); γ – плотность разливаемого металла (г/см^3); $\bar{\alpha}_p$ – коэффициент температуропроводности в области (p); $p = 1, 2$; α_3^{-t} – коэффициент температуропроводности в области (III) в слое (t); θ_n – текущая температура; θ_p^* – начальная температура в области (p). В системе (2) используется суммирование по повторяющимся индексам.

Полагаем, что внутренние поверхности $x_1 = x_i^*$ не влияют на тепловое поле внутри ОФ. В процессе охлаждения жидкий металл кристаллизуется. Величина закристаллизовавшейся корочки Δ_n на временном шаге $\Delta\tau_n$ определяется из решения уравнения межфазового перехода [11]

$$\Delta_n = C\sqrt{\Delta\tau_n}, C = \sqrt{\frac{2\Delta\theta_1\lambda_1}{\rho L}} \quad (3)$$

Здесь $\Delta\theta_1$ – перепад температур в твердой фазе вблизи фронта кристаллизации, L – скрытая теплота плавления, ρ – плотность, λ_1 – коэффициент теплопроводности в твердой фазе.

Начальные условия задачи:

$\Delta|_{\tau=0}=0$ – отсутствие твердой фазы металла (Δ – толщина затвердевшего металла); $\theta_I|_{\tau=0} = \theta_0$ – температура разливаемого жидкого металла; $\theta_{III}^*|_{\tau=0} = \theta^*$ – начальная температура формы.

С учетом осевой симметрии имеем $\sigma_{31}=\sigma_{32}=0$; $\epsilon_{13}=\epsilon_{23}=0$; $U_3=0$.

Граничные условия задачи (рис. 2, а):

- на оси симметрии $U_2=0$; $\sigma_{21}=0$; $q_n=0$;
- на поверхности S_i , ($i = 1 - 4$)

$$\begin{aligned}U_1|_{S_3} &= 0; \sigma_{11}|_{S_1} = -P_1; \sigma_{12}|_{S_1} = 0; \sigma_{21}|_{S_4} = 0; \sigma_{22}|_{S_4} = 0; \\ \sigma_{12}|_{S_3} &= -\psi^*\tau_s \frac{U_{\text{ск}}}{U^*} \cos(n, x_1); \theta|_{S_3} = 20^\circ\text{C}.\end{aligned}\quad (4)$$

На границе поверхностей слоев $x_1 = x_i^*$; $\sigma_{12}|_{x_i^*} = -\psi\tau_s \frac{\bar{U}_{\text{ск}}}{U^*} \cos(n, x_i^*)$, где ψ^* – коэффициент трения на поверхности контакта между ОФ и ОН; $U_{\text{ск}}$ – скольжение ОФ относительно опорного наполнителя (ОН) вдоль координаты x_2 ; U^* – нормирующая величина U ; ψ – коэффициент трения между слоями, τ_s – нормирующая величина, τ_s

$= 1 \text{ кг/мм}^2$, $\bar{U}_{\text{ск}}$ – скольжение одного слоя относительно другого на поверхности $x_1 = x_i^*$ вдоль координаты x_2 .

При расчете приняты следующие физические параметры и свойства.

Физические параметры разливаемой стали при температуре $\theta \geq 1000^\circ\text{C}$ [7]:

$$\begin{aligned} G &= 9810 \text{ МПа}, \alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}, \lambda = 29,8 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ L &= 270 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}, C = 444 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}, \gamma = 7800 \text{ кг/м}^3, \\ \theta_{\text{к}} &= 1450^\circ\text{C}, \theta_0 = 1500^\circ\text{C}. \end{aligned} \quad (5)$$

Физические свойства материала ОФ – керамики:

$$\begin{aligned} G &= 2960 \text{ кг/мм}^2, \alpha = 0,51 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}, \lambda = 0,812 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ C &= 890 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}, \gamma = 2000 \text{ кг/м}^3, \end{aligned} \quad (6)$$

Заданы следующие геометрические параметры 10-ти слойной ОФ со свойствами (6): толщина $T = 8 \text{ мм}$, высота цилиндрической части стояка $H = 40 \text{ мм}$, внутренний радиус сферической части $R_1 = 20 \text{ мм}$.

Решение полученной алгебраической системы уравнений (1, 2) осуществляется численным методом [12, 13] с использованием разработанных авторских алгоритмов [12] и программного комплекса [14].

3. Анализ результатов расчета Задачей настоящего исследования является установление влияния величины трения между ОН и ОФ (поверхность S_3) на НДС ОФ. Для начала задаемся следующими значениями: $\psi^* = 1$, $\psi = 0,002$. Результаты расчетов приведены на рис. 3 (пунктирные линии).

Можно отметить значительный разброс по сечению касательных напряжений σ_{12} от 0,34 МПа внутри оболочки до 0,08 МПа на поверхности S_3 при уменьшении нормальных напряжений σ_{11} , σ_{22} по всем параметрам. Тогда можно обобщить, что ОФ при $\psi^* = 0,01$ на поверхности S_3 (сплошные линии) более склонна к образованию микро и макротрещин, чем при $\psi^* = 0,1$.

Результаты расчета при коэффициентах трения $\psi^* = 10$ (сплошные линии), $\psi^* = 20$ (пунктирные линии) представлены на рис. 4.

Анализ результатов, представленных на рис. 3 и 4 показывает, что растягивающиеся напряжения σ_{22} на поверхности контакта ОФ с ОН с увеличением трения уменьшаются и несколько увеличиваются в ее срединной части. При этом отмечается возрастание по абсолютной величине сжимающих напряжений на внутренней поверхности ОФ, а перемещения U_1 , U_2 уменьшаются как по сечению, так и на поверхностях ОФ.

Как на контактной поверхности S_3 , так и внутри оболочки касательные напряжения σ_{12} (рис. 4) возрастают до значений 0,44 МПа и 0,76 МПа соответственно с небольшим ростом к поверхности S_4 . Видно, что величина нормальных напряжений σ_{22} при $\psi^* = 10$ (сплошные линии) выше величин σ_{22} при $\psi^* = 20$ (пунктирные линии). Существенного изменения результатов не выявлено в случае дальнейшего роста ψ^* на поверхности S_3 со стороны ОН. Это подтверждается результатами, представленными на рис. 5.

Видно, что представленные на рис. 4 эпюры при $\psi^* = 20$ практически не отличаются от эпюр, представленных на рис. 5. Это говорит о том, что дальнейший рост коэффициента трения ψ^* на поверхности S_3 не имеет смысла.

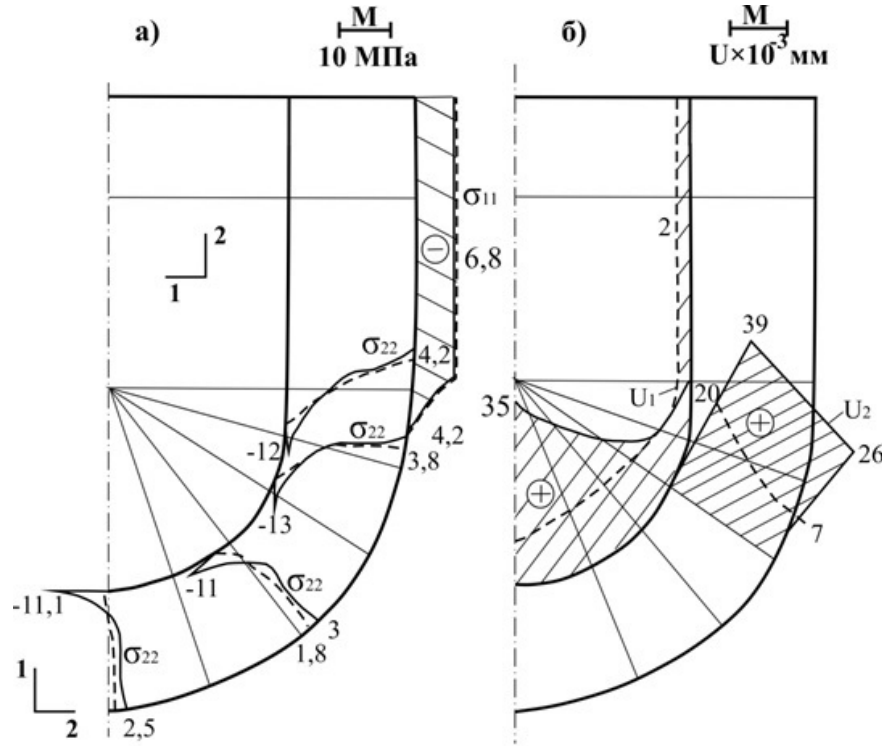


Рис. 3. Поля напряжений σ_{11} , σ_{22} (а) и перемещений U_1 , U_2 (б) по толщине оболочки при $\psi=0,002$ (— — — $\psi^*=0,01$; - - - - - $\psi^*=1$)

Отмечаем, что наибольшие значения растягивающих напряжений σ_{22} наблюдаются в центральной области ОФ с их уменьшением в направлении от оси симметрии к цилиндрической части ОФ.

Можно также констатировать, что зона отставания ОФ от ОН уменьшается с ростом трения на поверхности S_3 и полностью исчезает при $\psi^* = 40 - 80$. Это свидетельствует, что ОН полностью соприкасается (контактирует) с поверхностью S_3 ОФ.

Как видно из рис. 6 нормальное напряжение σ_{22} по сечению ОФ стабилизируется уже при $\psi^* = 10$.

Растягивающие напряжения σ_{22} на внутренней поверхности ОФ с увеличением трения на поверхности S_3 уменьшаются до нуля. Это связано с тем, что трение препятствует перемещению наружного слоя от его линейного расширения, а значит приводит к уменьшению величин растягивающих напряжений, вызванных расширением внутренних слоев оболочки.

Таким образом, можем заключить, что наличие трения между ОН и ОФ обеспечивает повышение стойкости ОФ к образованию в ней микро и макротрещин.

На следующем этапе исследовалось влияние внутреннего межслойного трения в ОФ, результаты которого представлены на рис.7 при $\psi^* = 10$; $\psi = 0,006$ (сплошные линии), $\psi = 0,01$ (пунктирные линии).

Установлено (рис. 7, а) увеличение растягивающих и сжимающих (по абсолютной величине) нормальных напряжений σ_{22} , особенно при $\psi = 0,01$.

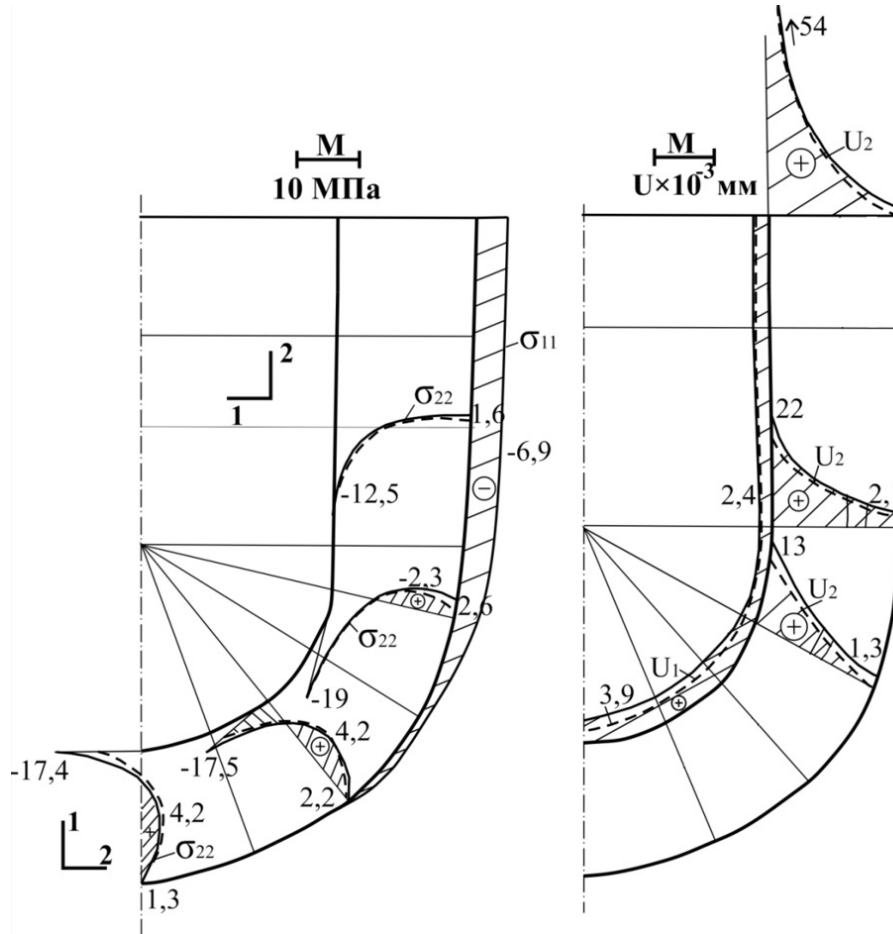


Рис. 4. Поля напряжений σ_{11} , σ_{22} (а) и перемещений U_1 , U_2 (б) по толщине оболочки при — $\psi^*=10$; - - - - $\psi^*=20$

Эпюры касательных напряжений σ_{12} и перемещений U_2 приведены на рис. 7, б, при этом отмечается полный контакт наружной поверхности ОФ с ОН.

Таким образом, можно резюмировать, что наличие трения между слоями ОФ способствует уменьшению трещиностойкости ОФ до определённого предела (рис.3,4,5), а затем способствует ее увеличению (рис. 7). Такое заключение справедливо при открытой (свободной) поверхности S_4 .

Вызывает интерес также и наличие закрытой поверхности S_4 . Так, представим поверхность S_4 ОФ в следующем виде: $S_4 = S'_4 + S''_4$, где S'_4 – свободная поверхность, S''_4 – закрытая поверхность. Положим:

$$U_2|_{S'_4} = 0; \sigma_{21}|_{S''_4} = 0; \sigma_{22}|_{S''_4} = 0; \sigma_{21}|_{S'_4} = 0; \quad (7)$$

Результаты решения задачи по аналогии с предыдущим решением (при $\psi = 0,006$) и и дополнительным граничным условием (7) на поверхности S_4 при $S'_4 = 3$ мм приведены на рис.8.

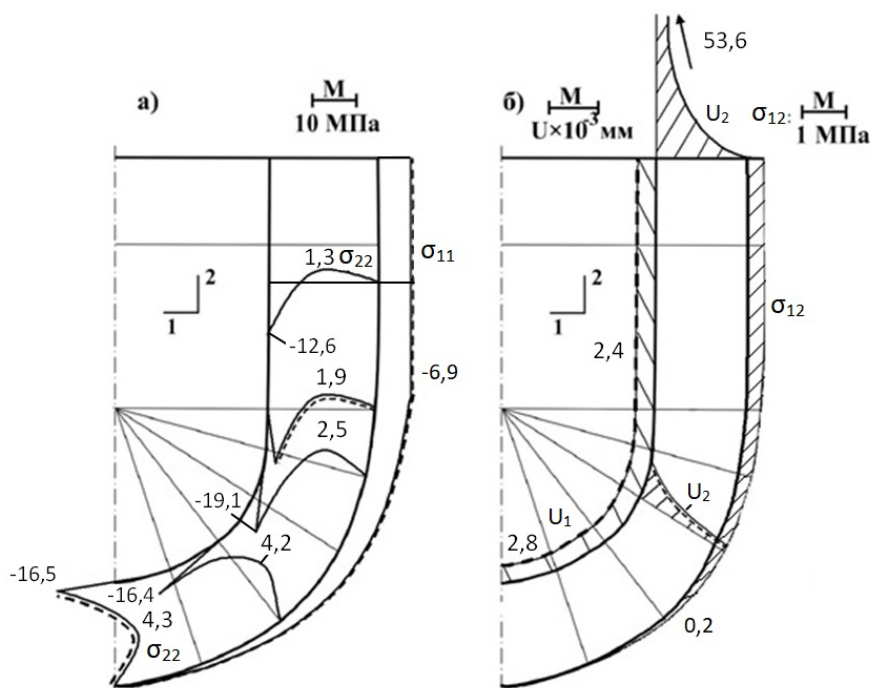


Рис. 5. Поля напряжений σ_{11} , σ_{22} (а) и перемещений U_1 , U_2 (б) по толщине оболочки при ——— $\psi^*=40$; - - - - - $\psi^*=80$

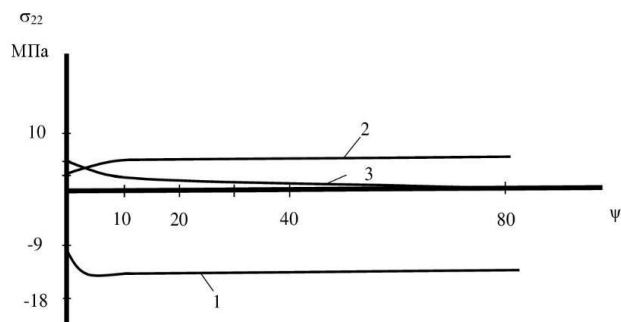


Рис. 6. Изменения напряжений σ_{22} по толщине ОФ в зависимости ψ^* : 1 – облицовочный слой; 2 – внутренний (промежуточный) слой; 3 – наружный слой

Как видно, растягивающие напряжения σ_{22} (рис. 8, а) полностью отсутствуют, а значения сжимающих напряжений σ_{22} по сечению оболочки меньше, чем в ранее рассмотренном случае (рис. 7). Напряжения σ_{22} на поверхности S'_4 очень значительные (рис. 8, а). Кривая давления P на поверхности S'_4 приведена на рис. 8, б. Расчетом

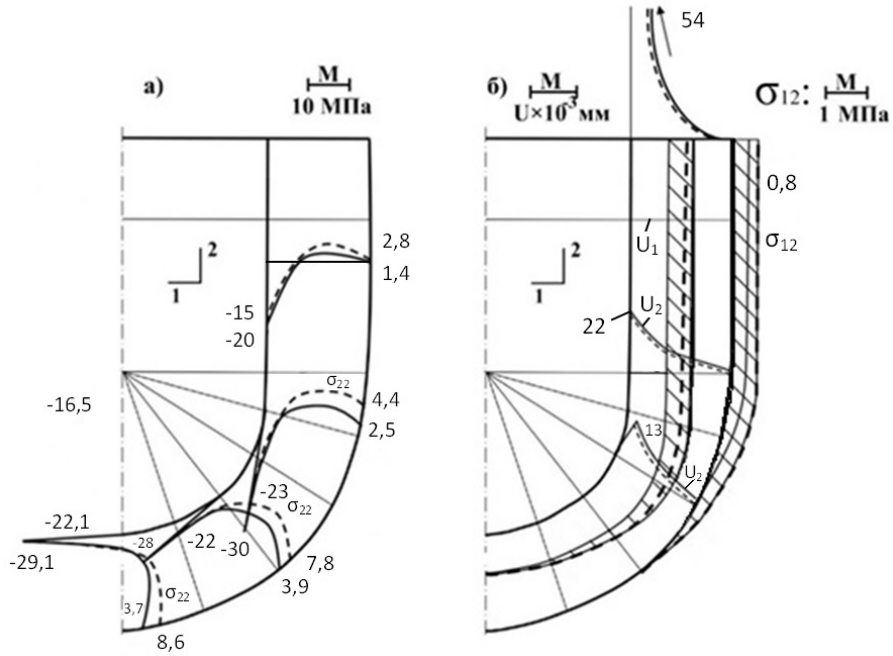


Рис. 7. Поля напряжений σ_{11} , σ_{22} (а) и перемещений U_1 , U_2 (б) по толщине оболочки при — — — $\psi=0,006$; - - - - - $\psi=0,01$

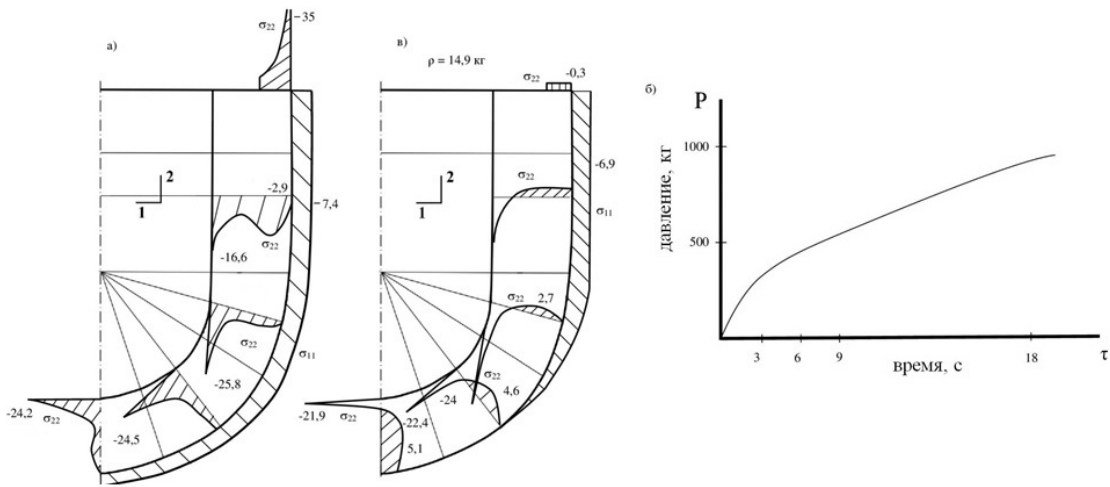


Рис. 8. Поля напряжений σ_{11} , σ_{22} (а, в) и кривая давления P (б) на поверхность S_4 при $\tau=18,65$ сек.

установлено, что за принятое расчетное время охлаждения формирующейся отливки в ОФ в 18,65 сек (время при котором построены все предыдущие эпюры) давление на

поверхности S'_4 равно $P=859$ кг, что гарантированно приводит к полному разрушению ОФ.

На рис. 8 приведены результаты решения задачи по воздействию на поверхность S'_4 ($S'_4 = 3$ мм) равномерной нагрузки $\sigma_{22} = -0,3$ МПа (соответствует $P = 25$ кг). Видно, что напряжения σ_{22} практически совпадают с напряжениями σ_{22} при свободной поверхности S_4 , т.е. закрывать поверхность S_4 нет никакого резона из-за гарантированного разрушения при этом ОФ.

4. Выводы 1. Построена математическая модель, разработано программное средство и осуществлено теоретическое моделирование охлаждения отливки и многослойной ОФ с учетом изменения межслойного трения внутренних слоев ОФ и трения при контакте ОФ с ОН.

2. Наличие трения между ОН и ОФ обеспечивает повышение стойкости ОФ к образованию в ней микро и макротрещин при охлаждении формирующейся отливки и ОФ в ОН.

3. Закрытие (нагружение) поверхности S_4 гарантированно приводит к полному разрушению ОФ.

4. Методология и результаты работы могут быть использованы и полезны при теоретических исследованиях других оболочечных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иванов В. Н., Казенов С.А., др. Б. С. Курчман и. Литье по выплавляемым моделям. Москва: Машиностроение, 1984. 408 с.
- [2] Одинокое В.И., Севастьянов Г.М., Сапченко И.Г. Эволюция напряженного состояния керамической формы при нестационарном внешнем тепловом воздействии // Математическое моделирование. 2010. № 11. С. 97–108.
- [3] Влияние внешнего теплового воздействия на напряженное состояние оболочковых форм по выплавляемым моделям / А.И. Евстигнеев, В.И. Одинокое, Э.А. Дмитриев [и др.] // Математическое моделирование. 2021. № 1. С. 63–76.
- [4] Тимофеев Г.И., Огорельцев В.П., Черепнин А.Ю. Влияние температурного фактора на напряженно-деформированное состояние оболочковых форм // Изв. ВУЗов. Черная металлургия. 1990. № 8. С. с.69–71.
- [5] Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., др. В.И. Одинокое и. Способ заливки металла в холодную литейную оболочковую форму. Патент РФ № 2722955. Опубликовано. 05.06.2020.
- [6] Голенков Ю.В., Рыбкин В.А., Юсипов Р.Ф. Силовое взаимодействие опорного материала с оболочкой формы при литье по выплавляемым моделям // Литейное производство. 1988. № 2. С. с.14–15.
- [7] Севастьянов Г.М., Одинокое В.И., Сапченко И.Г. Трещинообразование в керамических формах при заливке металла // Деформация и разрушение материалов. 2010. № 10. С. 25–28.
- [8] Одинокое В.И., Дмитриев Э.А., др. А.И. Евстигнеев и. Моделирование и оптимизация выбора свойств материалов и структур оболочковых форм по выплавляемым моделям // Изв. ВУЗов. Черная металлургия. 2020. № 9. С. 742–754.
- [9] Репах С. И. Технологические основы литья по выплавляемым моделям. Днепропетровск: Лира, 2006. 1056 с.
- [10] Севастьянов Г.М., Севастьянов А.М., Одинокое В.И. Об одной начально краевой задаче теплопроводности в системе с фазовыми переходами // Математическое моделирование. 2013. № 3. С. 119–133.
- [11] Моделирование внешнего силового воздействия на оболочковую форму для заливки стали / А.И. Евстигнеев, Э.А. Дмитриев, Д.В. Чернышова [и др.] // Математическое моделирование. 2022. № 5. С. 61–72.
- [12] Математическое моделирование сложных технологических процессов / В.И. Одинокое, Б.Г. Каплунов, А.В. Песков [и др.]. Москва: Наука, 2008. 176 с.

- [13] Математическое моделирование процессов получения отливок в керамические оболочковые формы / В.И. Одинокоев, Э.А. Дмитриев, А.И. Евстигнеев [и др.]. Москва: Инновационное машиностроение, 2020. 224 с.
- [14] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №20216121 16.04.2021г / В. И. Одинокоев, Э.А. Дмитриев, А.И. Евстигнеев [и др.].

A.I. Evstigneev, A.A. Evstigneeva, E.A. Dmitriev, E.P. Ivankova,

V.I. Odinokov, D.V. Chernyshova

ON THE FORCE EFFECT OF THE SUPPORT FILLER AND INTERLAYER FRICTION ON THE STRESS STATE OF A MULTILAYER SHELL MOLD DURING CASTING ACCORDING TO SMELTED MODELS

Komsomolsk-on-Amure State University, Komsomolsk-on-Amure, Russia

Abstract. The paper presents the results of a theoretical study of the stress state of the shell mold depending on the force exerted on it by the support filler and interlayer friction during casting according to the smelted models.

Keywords: multilayer shell shape, stress state, stress, displacement, cracking.

REFERENCES

- [1] Ivanov V. N., Kazenov S., Kurchman B. Casting by smelted models. Moscow: Mechanical engineering, 1984. 408 p. (in Russian).
- [2] Odinokov V., Sevastianov G., Sapchenko I. Evolution of the stress state of a ceramic mold under nonstationary external thermal action // Mathematical Modelling. 2010. no. 11. P. 97–108. (in Russian).
- [3] The influence of external thermal action on the stress state of shell molds according to the smelted models / A. I. Evstigneev, V. I. Odinokov, E. A. Dmitriev et al. // Mathematical Modelling. 2021. no. 1. P. 63–76. (in Russian).
- [4] Timofeev G., Ogoreltsev V., Cherepnin A. Influence of the temperature factor on the stress-strain state of shell forms // Izvestiya. Ferrous Metallurgy. 1990. no. 8. P. 69–71. (in Russian).

Odinokov Valery Ivanovich

Dr. Sci. Tech., Professor, Leading Research Worker, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Dmitriev Eduard Anatolievich

Dr. Sci. Tech., Associate Professor, Rector, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Evstigneev Alexey Ivanovich

Dr. Sci. Tech., Professor, Leading Research Worker, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Evstigneeva Anna Alexeevna

Third-year student, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Ivankova Evgenia Pavlovna

Dr. Sci. Tech., Associate Professor of the Department of Industrial Electronics, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

Chernyshova Darya Vitalevna

Postgraduate student, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

-
- [5] Evstigneev A. I., Dmitriev E. A., Odinkov V. I. A method of pouring metal into a cold casting shell mold. RU Patent no. 2722955. Publ. 05.06.2020. (in Russian).
- [6] Golenkov Y. V., Rybkin V., Yusipov R. Force interaction of the support material with the shell of the mold during casting according to the smelted models // Foundry production. 1988. no. 2. P. 14–15. (in Russian).
- [7] Sevastianov G., Odinkov V., Sapchenko I. Cracking in ceramic molds when pouring metal // Deformation and destruction of materials. 2010. no. 10. P. 25–28. (in Russian).
- [8] Odinkov V. I., Dmitriev E. A., Evstigneev A. I. Modeling and optimization of the choice of properties of materials and structures of shell forms according to the smelted models // Izvestiya. Ferrous Metallurgy. 2020. no. 9. P. 742–754. (in Russian).
- [9] Repyah S. Technological basics of casting by smelted models. Dnepropetrovsk: Lyra, 2006. 1056 p. (in Russian).
- [10] Sevastianov G., Sevastianov A., Odinkov V. I. On an initial boundary value problem of thermal conductivity in a system with phase transitions // Mathematical Modelling. 2013. no. 3. P. 119–133. (in Russian).
- [11] Modeling of external force action on a shell mold for pouring steel / A. I. Evstigneev, E. A. Dmitriev, D. Chernyshova et al. // Mathematical Modelling. 2022. no. 5. P. 61–72. (in Russian).
- [12] V. I. Odinkov B.G. Kaplunov A. P. A. B. Mathematical modeling of complex technological processes. Moscow: Science, 2008. 176 p. (in Russian).
- [13] Sevastianov G., Sevastianov A., Odinkov V. I. Mathematical modeling of the processes of obtaining castings in ceramic shell molds. Moscow: Innovative mechanical engineering, 2020. 224 p. (in Russian).
- [14] Certificate of state registration of a computer program no. 20216121 . Publ. 16.04.2021 / V. I. Odinkov, A. N. Prokudin, A. M. Sergeeva et al. (in Russian).

С. В. Матвеев¹, А. Н. Матвеева², А. Х. Александров¹

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

¹ Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

² Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено решение задачи определения упругопластического состояния тяжелого пространства, ослабленного отверстием эллиптической формы. Материал среды обладает свойствами анизотропии. Решение задачи выполнялось методом малого параметра. Учет силы тяжести, анизотропных свойств материала и эллиптичности осуществлялся в первом приближении.

Ключевые слова: сила тяжести, анизотропия, упругопластическое состояние, эллиптичность

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.006

УДК: 539.374

Рассмотрим тяжелое пространство ослабленное отверстием, материал пространства будем считать идеальнопластическим, обладающим анизотропией. Для данного тела, согласно [1, 2] будут иметь место следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= \gamma \sin \theta, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= \gamma \cos \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

© Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Александров А. Х 2023

Матвеев Сергей Владимирович

e-mail: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матвеева Алёна Николаевна

e-mail: goshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Александров Андрей Харитонович

e-mail: aax13@list.ru, кандидат экономических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.12.2022

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$ – компоненты напряжения, γ – массовая сила. Будем считать, что контур отверстия, ослабляющего рассматриваемое пространство, обладает небольшой эллиптичностью и он может быть описан в виде выражения

$$\frac{x^2}{a^2(1+\varepsilon)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon)^2} = 1. \quad (2)$$

Примем, что $\varepsilon = \delta d_1$, $0 \leq d_1 \leq 1$. В частном случае, при значении $\varepsilon = 0$, будет иметь место случай кругового отверстия радиуса a . Решение будем искать в полярной системе координат используя метод возмущения по малому параметру, для этого все величины, указывающие длину приведем к безразмерному виду поделив их на радиус упругопластической зоны ρ_s^0 в нулевом приближении. Выражение (2) в полярной системе координат примет вид

$$\rho = \frac{\alpha(1-\delta^2 d_1^2)}{\sqrt{1-2\delta d_1 \cos 2\theta + \delta^2 d_1^2}} = \alpha \left[-1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 d_1^2 (1 - \cos 4\theta) + \right. \\ \left. + \frac{5}{8} \delta^3 d_1^3 (\cos 2\theta + \cos 6\theta) \right] + \dots, \quad \rho = \frac{1}{\rho_s^0}, \quad \alpha = \frac{a}{\rho_s^0}, \quad \alpha = 1. \quad (3)$$

где δ – малый параметр. Анизотропные свойства материала укажем в условии пластичности аналогично работе [2]:

$$A(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p)^2 + 4B\tau_{\rho\theta}^p{}^2 = 4k^2; \quad k - const, \quad (4)$$

где A, B – константы анизотропии материала. Будем считать, что в нулевом приближении материал является изотропным, анизотропные свойства будем учитывать в первом приближении.

$$A = 1 + a\delta, \quad B = 1 + b\delta; \quad a, b - const. \quad (5)$$

Решение будем искать согласно [2–7] разложением в ряд по малому параметру δ

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma'_{ij} + \delta^2 \sigma''_{ij} + \dots, \\ \rho_s = \rho_s^0 + \delta \rho'_s + \delta^2 \rho''_s + \dots, \quad q = \delta c_1, \\ \gamma = \delta c_2; \quad c_1, c_2 - const. \quad (6)$$

В нулевом приближении на бесконечном удалении от центра отверстия в материале будет действовать гидростатическое давление

$$\sigma_\rho^{(0)e} |_{\rho \rightarrow \infty} = -p. \quad (7)$$

Согласно (1), (3) – (7) для нулевого приближения в пластической области будет справедливо:

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p_0 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p_0 + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha} \right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (8)$$

Тогда в упругой области получим следующие выражения:

$$\sigma_\rho^{(0)e} = -p - \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = -p + \frac{1}{\rho^2}, \quad p + 1 = 2 \ln \alpha. \quad (9)$$

Согласно (1), (4) – (6), (8), (9) для первого приближения будет справедлива система уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma'_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma'_{\rho} - \sigma'_{\theta}}{\rho} &= c_2 \sin \theta, \\
\frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau'_{\rho\theta}}{\rho} &= c_2 \cos \theta, \\
(\sigma'_{\theta} - \sigma'_{\rho}) &= ak.
\end{aligned} \tag{10}$$

Частным решением неоднородного уравнения является

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\rho_1} &= ak \ln \rho + \frac{ak}{2} + \frac{5c_2 - c_1}{4} \rho \sin \theta - \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \rho \sin 3\theta, \\
\sigma'_{\theta_1} &= ak \ln \rho + \frac{3}{2} ak + \frac{7c_2 - 3c_1}{4} \rho \sin \theta + \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \rho \sin 3\theta, \\
\tau'_{\rho\theta_1} &= -\frac{c_2 - c_1}{4} \rho \cos \theta - \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \rho \cos 3\theta.
\end{aligned} \tag{11}$$

Общее решение для пластической области в первом приближении согласно [4] будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\rho} &= ak \ln \rho + \frac{ak}{2} + \frac{5c_2 - c_1}{4} \rho \sin \theta + \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \rho \sin 3\theta + C_{00} + \frac{C_{12}}{\rho} \sin \theta + \\
&+ \frac{1}{\rho} [(C_{31}(-8) + \sqrt{8}C_{32}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + \\
&(-\sqrt{8}C_{31} + C_{32}(-8)) \sin(\sqrt{8} \ln \rho)] \cdot \sin 3\theta + \\
&+ \frac{2d_1\alpha}{\rho} [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})] \cos 2\theta, \\
\sigma'_{\theta} &= ak \ln \rho + \frac{3}{2} ak + \frac{7c_2 - 3c_1}{4} \rho \sin \theta + \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \rho \sin 3\theta + \\
&+ C_{00} + \frac{C_{12}}{\rho} \sin \theta + \frac{1}{\rho} [(C_{31}(-8) + \sqrt{8}C_{32}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + \\
&+ (-\sqrt{8}C_{31} + C_{32}(-8)) \sin(\sqrt{8} \ln \rho)] \cdot \sin 3\theta + \\
&+ \frac{2d_1\alpha}{\rho} [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})] \cos 2\theta, \\
\tau'_{\rho\theta} &= -\frac{c_2 - c_1}{4} \rho \cos \theta - \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \rho \cos 3\theta - \frac{C_{12}}{\rho} \cos \theta - \frac{4d_1\alpha}{\rho} \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) \sin 2\theta - \\
&- \frac{1}{\rho} [3\sqrt{8} \{C_{32} \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - C_{31} \sin(\sqrt{8} \ln \rho)\} \cos 3\theta],
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -8 \cos(\sqrt{8} \ln \alpha) - \sqrt{8} \sin(\sqrt{8} \ln \alpha), \quad b_1 = -\frac{3(c_2 - c_1)\alpha^2}{4}, \\
a_{12} &= \sqrt{8} \cos(\sqrt{8} \ln \alpha) - 8 \sin(\sqrt{8} \ln \alpha), \quad b_2 = \frac{3(c_2 - c_1)\alpha^2}{4}, \\
C_{00} &= -a \ln \alpha - \frac{ak}{2}, \quad C_{31} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad C_{32} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.
\end{aligned}$$

Поскольку компоненты $\sigma'_{\rho}, \tau'_{\rho\theta}$ на границе пластической области ($\rho = 1$) непрерывны, то из (12) получим

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\rho} &= \sigma'_{\rho}^e = -ak \ln \alpha + \frac{5c_2 - c_1}{4} \sin \theta - \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \sin 3\theta + \\
&+ C_{12} \sin \theta + (C_{31}(-8) + \sqrt{8}C_{32}) \cdot \sin 3\theta, \\
\sigma'_{\theta} &= \sigma'_{\theta}^e = -2ak \ln \alpha + Ak + \frac{7c_2 - 3c_1}{4} \sin \theta + \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \sin 3\theta + \\
&+ C_{12} \sin \theta + (C_{31}(-8) + \sqrt{8}C_{32}) \cdot \sin 3\theta, \\
\tau'_{\rho\theta} &= \tau'_{\rho\theta}^e = -\frac{c_2 - c_1}{4} \cos \theta - \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \cos 3\theta - \\
&- C_{12} \cos \theta - 3\sqrt{8}C_{32} \cos 3\theta, \quad \rho = 1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Перепишем выражения (13) в виде

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\rho}^e &= b''_0 + b''_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b''_3 \sin 3\theta, \\
\tau'_{\rho\theta}^e &= a'''_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + a'''_3 \cos 3\theta, \quad \rho = 1,
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} a'''_1 &= -\left(C_{12} + \frac{c_2 - c_1}{4}\right), \quad a'''_3 = -\left(3\sqrt{8}C_{32} + \frac{3(c_2 - c_1)}{4}\right), \\ a_2 &= \frac{2d_1\alpha}{\rho} \left[\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right) - \cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right)\right], \\ b''_0 &= -ak \ln \alpha, \quad b''_1 = C_{12} + \frac{5c_2 - c_1}{4}, \quad b''_3 = -8C_{31} + \sqrt{8}C_{32} + \frac{3(c_2 - c_1)}{4}. \end{aligned}$$

Согласно (14) компоненты напряжения в упругой области в первом приближении, запишем в виде [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{\prime e} &= \frac{c_1 + 3c_2}{4} \rho \sin \theta + \frac{c_1 - c_2}{4} \rho \sin 3\theta + \left[\frac{\rho}{\beta} \tilde{b}_1 + \right. \\ &+ \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} \left(\tilde{b}_1 + \tilde{a}'_1 \right) \left(\frac{1+\beta^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \frac{1}{\beta^4-1} \left(\tilde{b}_1 - \tilde{b}'_1 \beta \right) \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \left. \right] \sin \theta + \\ &+ \frac{1}{2N} \left\{ 3 \left[2 - 3\beta^2 + \beta^{-6} \right] \rho + 3 \left[4 - 3\beta^2 - \beta^6 \right] \rho^{-5} + \right. \\ &+ \left[4 - 3\beta^{-2} - \beta^{-6} \right] \rho^3 + 5 \left[2 - 3\beta^{-2} + \beta^6 \right] \rho^{-3} \left. \right\} \cdot \tilde{b}''_3 \sin 3\theta + \\ &+ \frac{1}{2N} \left\{ \left[-10 + 9\beta^2 + \beta^{-6} \right] \rho + \left[4 + 6\beta^6 - 9\beta^2 \right] \rho^{-5} + \right. \\ &+ \left[-4 + 5\beta^{-2} - \beta^{-6} \right] \rho^3 + \left[10 - 5\beta^{-2} - 5\beta^6 \right] \rho^{-3} \left. \right\} \cdot \left(-\tilde{a}'''_3 \sin 3\theta \right) + \\ &+ \frac{1}{\beta^2-1} \left(-\tilde{b}''_0 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \tilde{b}''_0 \right) + d_1 \alpha \left[\left(2 + \beta^2 \right) + 3\beta^2 \frac{1}{\rho^4} - 2 \left(1 - 2\beta^2 \right) \frac{1}{\rho^2} \right] \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \left. \right\} \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta}^{\prime e} &= \frac{3c_1 + c_2}{4} \rho \sin \theta - \frac{c_1 - c_2}{4} \rho \sin 3\theta + \left[\frac{3\rho}{\beta} b_1 + \right. \\ &+ \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} \left(b_1 + a'_1 \right) \left(-\frac{m-1}{3m+1} \cdot \frac{1+\beta^2}{\rho} + \frac{\beta^2}{\rho^3} - 3\rho \right) + \\ &+ \frac{1}{\beta^4-1} \left(b_1 - b''_1 \beta \right) \left(\frac{3\rho}{\beta} + \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \left. \right] \sin \theta + \\ &+ \frac{1}{2N} \left\{ 3 \left[-2 + 3\beta^2 - \beta^{-6} \right] \rho + 3 \left[-4 + 3\beta^2 + \beta^6 \right] \rho^{-5} + \right. \\ &+ 5 \left[-4 + 3\beta^{-2} + \beta^{-6} \right] \rho^3 + \left[-2 + 3\beta^{-2} - \beta^6 \right] \rho^{-3} \left. \right\} \cdot b''_3 \sin 3\theta + \\ &+ \frac{1}{2N} \left\{ \left[10 - 9\beta^2 - \beta^{-6} \right] \rho + \left[-4 - 6\beta^6 + 9\beta^2 \right] \rho^{-5} + \right. \\ &+ 5 \left[4 - 5\beta^{-2} + \beta^{-6} \right] \rho^3 + \left[-2 + \beta^{-2} + \beta^6 \right] \rho^{-3} \left. \right\} \cdot \left(-a'''_3 \sin 3\theta \right) + \\ &+ \frac{1}{\beta^2-1} \left(-b''_0 - \frac{\beta^2}{\rho^2} b''_0 \right) + d_1 \alpha \left[\left(2 + \beta^2 \right) + 3\beta^2 \frac{1}{\rho^4} - 6\rho^2 \right] \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \left. \right\} \cos 2\theta, \\ \tau'_{\rho\theta} &= \frac{c_2 - c_1}{4} \rho \left(\cos \theta - \cos 3\theta \right) - \left[\frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} \left(b_1 + a'_1 \right) \times \right. \\ &\times \left(-\frac{m-1}{3m+1} \cdot \frac{1+\beta^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \frac{1}{\beta^4-1} \left(b_1 - b''_1 \beta \right) \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \left. \right] \cos \theta + \\ &+ \frac{1}{2N} \left\{ 3 \left[-2 + 3\beta^2 - \beta^{-6} \right] \rho + 3 \left[4 - 3\beta^2 - \beta^6 \right] \rho^{-5} + \right. \\ &+ 3 \left[-4 + 3\beta^{-2} + \beta^{-6} \right] \rho^3 + 3 \left[2 - 3\beta^{-2} + \beta^6 \right] \rho^{-3} \left. \right\} \cdot \left(-b''_3 \cos 3\theta \right) + \\ &+ \frac{1}{2N} \left\{ \left[10 - 9\beta^2 - \beta^{-6} \right] \rho + \left[4 - 9\beta^2 + 6\beta^6 \right] \rho^{-5} + \right. \\ &+ \left[12 - 15\beta^{-2} + 3\beta^{-6} \right] \rho^3 + \left[6 - 3\beta^{-2} - 3\beta^6 \right] \rho^{-3} \left. \right\} \cdot a'''_3 \cos 3\theta + \\ &+ d_1 \alpha \left[\left(2 + 2\beta^2 \right) - 3\beta^2 \frac{1}{\rho^4} - 3\rho^2 + \left(1 + 2\beta^2 \right) \frac{1}{\rho^2} \right] \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \left. \right\} \sin 2\theta, \end{aligned} \tag{15}$$

где $N = 16 - 9(\beta^{-2} + \beta^2) + (\beta^{-8} + \beta^8)$, $m = \frac{1}{\mu}$, μ – коэффициент Пуассона. Из условий сопряжения [4], согласно (8), (15), получим

$$\rho'_s = M + M_1 \sin \theta + M_2 \cos 2\theta + M_3 \sin 3\theta, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{(-b''_0 - \beta^2 b''_0)}{4(\beta^2 - 1)} + \frac{ak}{4} (\ln \alpha - 1) \\
 M_1 &= \frac{1}{4} \left[\frac{b_1}{\beta} + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} (b_1 + a'_1) \left(-\frac{m-1}{3m+1} \cdot (1 + \beta^2) + \beta^2 - 3 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\beta^4 - 1} (b_1 - b''_1 \beta) \left(\frac{3}{\beta} + \beta^3 \right) - \frac{3(c_2 - c_1)}{2} - C_{12} \right], \\
 M_2 &= \frac{2\beta^2}{\beta^2 - 1} \left[\frac{d_2}{\beta^3} + \frac{2\sqrt{3}d_1\alpha}{\beta^2 - 1} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\beta}{\alpha} \right) + d_1 \alpha \frac{(\beta^2 + 1)}{\beta^2} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\beta}{\alpha} \right) \right], \\
 M_3 &= \frac{1}{8N} \left\{ [-40 + 18\beta^2 + 18\beta^{-2} + 2\beta^6 + 2\beta^{-6}] \cdot b''_3 - \right. \\
 &\quad \left. - [24 - 24\beta^{-2} - 5\beta^6 + 4\beta^{-6}] \cdot a'''_3 - \frac{c_2 - c_1}{2} + 16C_{31} - 2\sqrt{8}C_{32} \right\}.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д. Ершов Л. В. етод возмущений в теории упругопластического тела. Наука: Москва, 1978. 208 с.
- [2] С.В. Матвеев. Упругопластическое состояние анизотропной среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. № 3-1(55). С. 12–18.
- [3] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Рыбакова Т.И. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). С. 59–65.
- [4] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). С. 95–103.
- [5] Ефремов В.Г. Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Равномерное растяжение тонкой неоднородной пластины с круговым отверстием, при условии предельного сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). С. 95–103.
- [6] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Равномерное растяжение многослойной тонкой анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1(39). С. 94–101.
- [7] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Двусное растяжение тонкой пластины из упругопластического материала при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4(46). С. 182–189.

S. V. Matveev¹, A. N. Matveeva², A. H. Aleksandrov¹

THE LIMITING STATE OF BODIES DURING SEPARATION IN THE CASE OF THE GENERAL PLANE PROBLEM

¹ I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

² I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. The paper considers the solution of the problem of determining the elastoplastic state of a heavy space weakened by an elliptical hole. The heavy medium material has the properties of anisotropy. The problem was solved by the small parameter method. The force of gravity, anisotropic properties of the material, and ellipticity were taken into account in the first approximation.

Keywords: Plasticity, stresses, ellipticity, gravity, anisotropy.

REFERENCES

- [1] Ivlev D.D., V. Ershov L. perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Science: Moscow, 1978. 208 с.
- [2] Matveev S.V. Elastoplastic state of an anisotropic medium weakened by a horizontal cylindrical cavity, taking into account gravity // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. 2007. № 3-1(55). С. 12–18.
- [3] Matveev S.V. and Matveeva A., Rybakova T. Uniform stretching of a thin anisotropic plate weakened by an elliptical hole, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2017. no. 4 (34). P. 59–65.
- [4] Matveev S.V. and Matveeva A., Tikhonov S. Uniform stretching of a thin anisotropic plate with a circular hole, reinforced by inclusion, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2017. no. 4 (34). P. 95–103.
- [5] Uniform stretching of a thin non-uniform plate with a circular hole, subject to ultimate pull-off strength / V. Efremov, S. Matveev, A. Matveeva et al. // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2019. no. 3 (41). P. 95–103.
- [6] Matveev S., Matveeva A., Tikhonov S. Uniform stretching of a multilayer thin anisotropic plate with an elliptical hole, subject to tear resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2019. no. 1 (39). P. 94–101.
- [7] Matveev S.V., Matveeva A.N. Biaxial tension of a thin plate made of elastoplastic material under the condition of resistance to separation // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2020. № 4(46). С. 182–189.

Matveev Sergey Vladimirovich, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Matveeva Alena Nikolaevna, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Aleksandrov Andrey Kharitonovich, Ph.D. in Economics, Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

В. Н. Орлов, А. М. Барзини

ВОЗМУЩЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе представлено продолжение ранее полученных авторских результатов. Доказано влияние возмущения исходных данных на аналитическое приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. Представлены результаты численного эксперимента, подтверждающие теоретические результаты, а также дан вариант оптимизации априорных оценок с помощью апостериорных. Представленные результаты являются завершающим этапом обоснования аналитического приближенного метода решения для дифференциальных уравнений, в общем случае не разрешимых в квадратурах.

Ключевые слова: погрешность исходных данных, аналитическое решение, нелинейное уравнение дифференциальное, априорная и апостериорная оценки.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.007

УДК: 517.928.4

1. Введение Отметим применение нелинейных дифференциальных уравнений в: гидродинамике [1]; в изучении устойчивости установившегося свободного падения авторотирующего тела в среде с сопротивлением [2]; в задачах физики при определении времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины [3]; в механике строительных конструкций [4]; в механике [5, 6]; в расчетах конструкций атомных реакторов [7]; в исследовании нелинейной диффузии [8]. Как показывает обзор работы [9], ее авторы проводят исследования колебаний в эластичной балке с помощью математической модели на основе дифференциального уравнения

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0 \quad (1)$$

© Орлов В. Н., Барзини А. М., 2023

Орлов Виктор Николаевич

e-mail: orlovvn@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия,

Барзини Александр Минчев

e-mail: zettinks@yandex.ru, магистрант второго курса Института цифровых технологий и моделирования в строительстве, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 11.02.2023

с краевыми условиями (2)

$$0 \leq t \leq 1, u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \quad . \quad (2)$$

Неявный вид функции $f(t, u(t))$ в уравнении (1) может иметь как линейную, так и нелинейную структуру относительно искомой функции. В первом случае решение задачи (1)-(2) не вызывает сложностей в ее решении, нет веских аргументов для отклонения классических методов решения поставленной задачи. Во втором случае функция $f(t, u(t))$ будет нелинейной относительно искомой функции и поэтому возникают сложности. Одним из аспектов нелинейности дифференциального уравнения является подвижная особая точка. Поэтому для получения решения задачи (1)-(2) требуется обоснование отсутствия подвижных особых точек в рассматриваемой области, а предлагаемый метод верхних и нижних границ этого не гарантирует. Отметим, что на данный момент существуют два варианта решения нелинейных дифференциальных уравнений. К первому случаю относят ситуацию, когда с помощью специфической замены переменной удается разрешить нелинейное дифференциальное уравнение в квадратурах [10–16]. Во втором случае применяется аналитический приближенный метод решения [17–21]. В статье [22] рассматривается вариант решения дифференциального уравнения (1) в вещественной области. В данной работе представлено завершение исследований работы [22], решение математической задачи: доказательство зависимости аналитического приближенного решения рассматриваемой задачи Коши от погрешности исходных данных. В случае когда неявная функция $f(t, u(t))$ имеет полиномиальную структуру шестой степени относительно искомой функции и уравнение (1) принимает вид

$$y''' = a_0(x) \cdot y^6 + a_1(x) \cdot y^5 + a_2(x) \cdot y^4 + a_3(x) \cdot y^3 + a_4(x) \cdot y^2 + a_5(x) \cdot y^1 + a_6(x). \quad (3)$$

Учитывая новую замену переменных

$$y = \sqrt[5]{\frac{1}{a_0}} \cdot g(x) - \frac{a_1(x)}{6 \cdot a_0}, \quad (4)$$

приводим уравнение (3) к нормальной форме

$$g''' = g^6 + (r(x)), \quad (5)$$

при выполнении условий:

$$\begin{cases} a_0(x) = a_0 = const \neq 0, \\ a_2(x) = \frac{5a_1^2(x)}{4a_0}, a_3(x) = \frac{-55a_1^3(x)}{54a_0^2}, a_4(x) = \frac{145a_1^4(x)}{432a_0^3}, a_5(x) = -\frac{624a_1^5(x)+870a_0a_1^4}{1296a_0^4}, \\ r(x) = \frac{a_1'''(x)}{6 \cdot a_0} + \frac{4439a_1^6(x)}{46656a_0^5} + \frac{870a_1^5(x)}{7776a_0^4} + a_6. \end{cases} \quad (6)$$

Указанная замена переменной значительно расширяет класс, рассматриваемых нелинейных дифференциальных уравнений в работе [22]. Приведем работы [4, 17–21], где используемый математический аппарат успешно реализован для нелинейных дифференциальных уравнений в вещественной и комплексной областях.

2. Результаты исследования

Рассматривается задача Коши

$$y''' = y^6 + r(x), \quad (7)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad (8)$$

В работе [22] доказано существование и единственность решения задачи (7)-(8) и получена структура приближенного решения в виде

$$y_N(x) = \sum_0^N C_n(x - x_0)^n. \quad (9)$$

Так как исходные данные имеют возмущения, то (8) и (9) принимает вид

$$\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0, \tilde{y}'(x_0) = \tilde{y}_1, \tilde{y}''(x_0) = \tilde{y}_2, \quad (10)$$

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_0^N \tilde{C}_n(x - x_0)^n. \quad (11)$$

Теорема. При выполнении условий:

1) $r(x) \in C^\infty$ в области $|x - x_0| < \rho_1$ где $\rho < 0 = const$;

2) $\exists M_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!} \leq M_n; M_n = const, n \in \mathbb{N}$.

приближенное решение (11) задачи (7), (10) имеет оценку погрешности

$$\Delta \tilde{y}(x) \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

где Δ_0, Δ_1 будут соответственно равны:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^6 |x - x_0|^3}{1 - (\Delta M + M + 1)^5 |x - x_0|^3} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{|x - x_0|}{24} + \frac{|x - x_0|^2}{60} \right),$$

$$\Delta_2 = \frac{(M + 1)^{\frac{5N+8}{3}} |x - x_0|^{N+3}}{1 - (M + 1)^5 |x - x_0|^3} \left(\frac{1}{(N + 1)N(N - 1)} + \frac{|x - x_0|}{(N + 1)(N + 2)N} + \frac{|x - x_0|^2}{N(N + 2)(N + 3)} \right).$$

При этом

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M + \Delta M + 1)^5}} \right\}, \quad M = \max \left\{ |\tilde{y}_0|, |\tilde{y}_1|, |\tilde{y}_2|, \sup \frac{|r^n(x_0)|}{n!} \right\},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad \Delta M = \max \{ \Delta \tilde{y}_0, \Delta \tilde{y}_1, \Delta \tilde{y}_2 \}.$$

Доказательство:

$$\Delta \tilde{y}_N(x) = |y(x) - \tilde{y}_N(x)| \leq |y(x) - \tilde{y}(x)| + |\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)| = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Рассмотрим выражение

$$\Delta_2 = |\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(x - x_0)^n - \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n(x - x_0)^n \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \tilde{C}_n(x - x_0)^n \right|.$$

Переходим к оценке Δ_2 . Учитывая оценки для коэффициентов C_n в работе [22] :

$$|C_{3k}| \leq \frac{(M + 1)^{5k+1}}{3k(3k - 1)(3k - 2)}, |C_{3k+1}| \leq \frac{(M + 1)^{5k+1}}{3k(3k + 1)(3k - 1)}, \quad (12)$$

$$|C_{3k+2}| \leq \frac{(M + 1)^{5k+1}}{3k(3k + 1)(3k + 2)},$$

для Δ_2 получаем, в случае $N+1=3k$:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \right| = \left| C_{3k} (x - x_0)^{3k} + C_{3k+1} (x - x_0)^{3k+1} + C_{3k+2} (x - x_0)^{3k+2} + \right. \\ &\quad \left. + C_{3k+3} (x - x_0)^{3k+3} + C_{3k+4} (x - x_0)^{3k+4} + C_{3k+5} (x - x_0)^{3k+5} + \dots \right| = \\ &= \left| (C_{3k} (x - x_0)^{3k} + C_{3k+3} (x - x_0)^{3k+3} + C_{3k+6} (x - x_0)^{3k+6} + \dots) + \right. \\ &\quad \left. + (C_{3k+1} (x - x_0)^{3k+1} + C_{3k+4} (x - x_0)^{3k+4} + C_{3k+7} (x - x_0)^{3k+7} + \dots) + \right. \\ &\quad \left. + (C_{3k+2} (x - x_0)^{3k+2} + C_{3k+5} (x - x_0)^{3k+5} + C_{3k+8} (x - x_0)^{3k+8} + \dots) \right|. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение в место коэффициентов C_n соответствующие оценки (12), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_2 &\leq \left(\frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+3}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} + \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+6}}{(3k+5)(3k+4)(3k+3)} + \dots \right) + \\ &+ \left(\frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)} + \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+4}}{(3k+3)(3k+4)(3k+2)} + \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+7}}{(3k+5)(3k+6)(3k+7)} + \dots \right) + \\ &+ \left(\frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)} + \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+5}}{(3k+3)(3k+4)(3k+5)} + \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+8}}{(3k+6)(3k+7)(3k+8)} + \dots \right) \leq \\ &\leq \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{(3k+6)(3k+7)(3k+5)} \left(1 + \frac{(M+1)^5 |x-x_0|^3}{1} + \frac{(M+1)^{10} |x-x_0|^6}{1} + \dots \right) + \\ &+ \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)} \left(1 + (M+1)^5 |x-x_0|^3 + (M+1)^{10} |x-x_0|^6 + \dots \right) + \\ &+ \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)} \left(1 + (M+1)^5 |x-x_0|^3 + (M+1)^{10} |x-x_0|^6 + \dots \right) = \\ &= \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{1 - (M+1)^5 |x-x_0|^3} \left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{(M+1)^5 |x-x_0|}{3k(3k+1)(3k-1)} + \frac{(M+1)^{10} |x-x_0|^2}{3k(3k+1)(3k+2)} \right). \end{aligned}$$

Учитывая связь индексов $N+1=3k$, получаем выражение оценки для Δ_2 через индекс N :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &\leq \frac{(M+1)^{\frac{5}{3}(N+1)} |x-x_0|^{N+1}}{1 - (M+1)^5 |x-x_0|^3} \left(\frac{1}{(N+1)3N(N-1)} + \frac{|x-x_0|}{(N+1)(N+2)N} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x-x_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)} \right). \end{aligned}$$

Оценка для выражение Δ_2 получена для аргумента x в области

$$|x - x_0| < \frac{1}{(M+1)^{3/5}}.$$

Переходим к оценке Δ_1 :

$$\Delta_1 = |y(x) - \tilde{y}(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n (x - x_0)^n \right|.$$

Предварительно получим оценку для $\Delta\tilde{C}_n$. Предположим для $\Delta\tilde{C}_n$ гипотезу:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{C}_{3k} &\leq \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{5k+1}}{3k(3k-1)(3k-2)}, \Delta\tilde{C}_{3k+1} \leq \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)}, \\ \Delta\tilde{C}_{3k+2} &\leq \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Докажем ее для случая $\Delta\tilde{C}_{3k+3}$.

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{C}_{3k+3} &\leq \left| C_{3k+3} - \tilde{C}_{3k+3} \right| \leq \left| \frac{C_{3k}^{***} + B_{3k}}{3k(3k+2)(3k+1)} - \frac{\tilde{C}_{3k}^{***} + B_{3k}}{3k(3k+2)(3k+1)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \times \left| C_{3k}^{***} - \tilde{C}_{3k}^{***} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+3} C_i^* C_{3k-i}^{**} - \sum_{i=0}^{3k+3} \tilde{C}_i^* \tilde{C}_{3k-i}^{**} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+3} \left(\sum_{j=0}^i C_j C_{i-j} \right) \left(\sum_{l=0}^{3k-i} C_l^* C_{3k-i-l}^* \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{3k+3} \left(\sum_{j=0}^i \tilde{C}_j \tilde{C}_{i-j} \right) \left(\sum_{l=0}^{3k-i-j} \tilde{C}_l^* \tilde{C}_{3k-i-j-l}^* \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+3} \left(\sum_{j=0}^i C_j C_{i-j} \right) \left(\sum_{l=0}^{3k-i} \left(\sum_{n=0}^l C_n C_{l-n} \right) \left(\sum_{m=0}^{3k-i-l} C_m C_{3k-i-l-m} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{3k+3} \left(\sum_{j=0}^i \tilde{C}_j \tilde{C}_{i-j} \right) \left(\sum_{l=0}^{3k-i-j} \left(\sum_{n=0}^l \tilde{C}_n \tilde{C}_{l-n} \right) \left(\sum_{m=0}^{3k-i-j-l} \tilde{C}_m \tilde{C}_{3k-i-j-l-m} \right) \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+3} \left(\sum_{j=0}^i (\tilde{C}_j + \Delta\tilde{C}_j) \right) (\tilde{C}_{i-j} + \Delta\tilde{C}_{i-j}) \times \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{l=0}^{3k-li} \left(\sum_{n=0}^l (\tilde{C}_n + \Delta\tilde{C}_n) \right) (\tilde{C}_{l-n} + \Delta\tilde{C}_{l-n}) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left(\sum_{m=0}^{3k-i-l} (\tilde{C}_m + \Delta\tilde{C}_m) \right) (\tilde{C}_{3k-i-l-m} + \Delta\tilde{C}_{3k-i-l-m}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{3k+3} \left(\sum_{j=0}^i \tilde{C}_j \tilde{C}_{i-j} \right) \left(\sum_{l=0}^{3k-i-j} \left(\sum_{n=0}^l \tilde{C}_n \tilde{C}_{l-n} \right) \left(\sum_{m=0}^{3k-i-j-l} \tilde{C}_m \tilde{C}_{3k-i-j-l-m} \right) \right) \right|. \end{aligned}$$

В последнее выражение подставляем вместо \tilde{C}_n и $\Delta\tilde{C}_n$ соответствующие оценки (12) и (13). После ряда преобразований получаем:

$$\Delta\tilde{C}_{3k+3} \leq \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{5k+1}}{(3k+3)(3k+1)(3k+2)} \leq \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+1)(3k+2)}.$$

Тогда для Δ_2 получаем оценку

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &\leq \left(\frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+3}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} + \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+6}}{(3k+5)(3k+4)(3k+3)} + \dots \right) + \\
 &\left(\frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)} + \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+4}}{(3k+3)(3k+4)(3k+2)} + \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+7}}{(3k+5)(3k+6)(3k+7)} + \dots \right) + \\
 &\left(\frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)} + \frac{(M+1)^{5k+6} |x-x_0|^{3k+5}}{(3k+3)(3k+4)(3k+5)} + \frac{(M+1)^{5k+11} |x-x_0|^{3k+8}}{(3k+6)(3k+7)(3k+8)} + \dots \right) \leq \\
 &\leq \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{(3k)(3k-1)(3k-2)} \left(1 + \frac{(M+1)^5 |x-x_0|^3}{1} + \frac{(M+1)^{10} |x-x_0|^6}{1} + \dots \right) + \\
 &+ \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)} \left(1 + (M+1)^5 |x-x_0|^3 + (M+1)^{10} |x-x_0|^6 + \dots \right) + \\
 &+ \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+1)} \left(1 + (M+1)^5 |x-x_0|^3 + (M+1)^{10} |x-x_0|^6 + \dots \right) \leq \\
 &\leq \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{3k(3k-1)(3k-2)} \left(\frac{1}{1 - (M+1)^5 |x-x_0|^3} \right) + \\
 &+ \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)} \left(\frac{1}{1 - (M+1)^5 |x-x_0|^3} \right) + \\
 &+ \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)} \left(\frac{1}{1 - (M+1)^5 |x-x_0|^3} \right) = \frac{(M+1)^{5k+1} |x-x_0|^{3k}}{1 - (M+1)^5 |x-x_0|^3} \times \\
 &\times \left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{|x-x_0|}{3k(3k+1)(3k-1)} + \frac{|x-x_0|^2}{3k(3k+1)(3k+2)} \right) \leq \\
 &\leq \frac{(M+1)^{\frac{5N+8}{3}} |x-x_0|^{N+3}}{1 - (M+1)^5 |x-x_0|^3} \left(\frac{1}{(N+1)N(N-1)} + \frac{|x-x_0|}{(N+1)(N+2)N} + \frac{|x-x_0|^2}{N(N+2)(N+3)} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом для Δ_2 получаем оценку

$$\Delta_2 \leq \frac{(M+1)^{\frac{5N+8}{3}} |x-x_0|^{N+3}}{1 - (M+1)^5 |x-x_0|^3} \left(\frac{1}{(N+1)N(N-1)} + \frac{|x-x_0|}{(N+1)(N+2)N} + \frac{|x-x_0|^2}{N(N+2)(N+3)} \right).$$

Переходим к оценке Δ_1 :

Подставляя в выражение для Δ_1 вместо $\Delta \tilde{C}_n$ полученные оценки (13), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n (x-x_0)^n \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^{5k+1}}{3k(3k-1)(3k-2)} (x-x_0)^{3k} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)} (x-x_0)^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)} (x-x_0)^{3k+2} \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{6} \Delta M (M + \Delta M + 1)^6 |x-x_0|^3 \frac{1}{1 - (M + \Delta M + 1)^5 |x-x_0|^3} + \\
 &+ \frac{1}{24} \Delta M (M + \Delta M + 1)^6 |x-x_0|^3 \frac{1}{1 - (M + \Delta M + 1)^5 |x-x_0|^3} +
 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{60}\Delta M(M+\Delta M+1)^6|x-x_0|^3\frac{1}{1-(M+\Delta M+1)^5|x-x_0|^3}.$$

Или

$$\Delta_1 \leq \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^6|x-x_0|^3}{1-(\Delta M+M+1)^5|x-x_0|^3} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{|x-x_0|}{24} + \frac{|x-x_0|^2}{60} \right).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{y}_N(x) = \Delta_1 + \Delta_2 &\leq \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^6|x-x_0|^3}{1-(\Delta M+M+1)^5|x-x_0|^3} \left(\frac{1}{6} + \frac{|x-x_0|}{24} + \frac{|x-x_0|^2}{60} \right) + \\ &+ \frac{(M+1)^{\frac{5N+8}{3}}|x-x_0|^{N+3}}{1-(M+1)^5|x-x_0|^3} \left(\frac{1}{(N+1)N(N-1)} + \frac{|x-x_0|}{(N+1)(N+2)N} + \frac{|x-x_0|^2}{N(N+2)(N+3)} \right). \end{aligned}$$

При получении оценки для Δ_1 получаем область сходимости соответствующих рядов

$$|x-x_0| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(M+\Delta M+1)^5}}.$$

В аналогичной ситуации с оценкой для Δ_2 получаем область $|x-x_0| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}$. Следовательно, оценка для выражения $\Delta \tilde{y}_N(x)$ справедлива в области

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+\Delta M+1)^5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\right\}.$$

Таким образом, завершаем доказательство теоремы.

Доказанная теорема позволяет строить аналитическое продолжение решения задачи Коши (7), (10).

Пример. Рассмотрим задачу Коши (7), (10),

$$x_0 = 1.4; \tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0 = 1.403817; \tilde{y}'(x_0) = \tilde{y}_1 = 1.9210816; \tilde{y}''(x_0) = \tilde{y}_2 = 2.83595; r(x) = 0.$$

$$\Delta \tilde{y}_0 = 0.0005; \Delta \tilde{y}_1 = 0.00001; \Delta \tilde{y}_2 = 0.00003; x_1 = 1.5.$$

По начальным данным $M = 2, 8359$, в структуре приближенного решения (11) имеет радиус

$$\rho_2 = 0,106405; \quad x_0 = 1,4; \quad x_1 \in |x-x_0| < \rho_2.$$

Характеристики численного расчета рассматриваемого примера представлены в таблице 1.

x_1	$\tilde{y}_5(x_1)$	$\Delta \tilde{y}_5(x_1)$	Δ_3
1,5	1.62377	0.00189	0.0009

Таблица 1. Характеристики численного расчета

где, $\tilde{y}_5(x_1)$ —приближенное решение; $\Delta \tilde{y}_5(x_1)$ —априорная оценка; Δ_1 - составляющая априорной оценки, показывает какую апостериорную оценку мы можем рассматривать. Если апостериорная оценка оказывается меньше погрешности исходных данных $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2$, тогда следует уменьшить возмущение начальных данных, таким образом можем достичь точности предполагаемой апостериорной оценки. В нашей

ситуации $\Delta_3 = 0.0009$. Следовательно, нет необходимости уменьшать величину погрешности исходных данных $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2$. Для $\Delta_3 = 0.0009$ по теореме следует, что такую точность можем достичь при значении $N = 10$, для которого априорная оценка $\Delta \tilde{y}_5(x) \leq 0.000058$. Учтем, что $cN = 6$ по 10 слагаемые в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-4}$. Таким образом приближенное решение $\tilde{y}_5(x_1)$ имеет погрешность $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-4}$.

3. Заключение В статье завершено исследование приближенного решения рассматриваемой задачи Коши (7),(10) в области аналитичности. Получена зависимость аналитического приближенного решения от возмущения исходных данных, получена априорная оценка. Теоретические результаты сопровождаются численными расчетами. С помощью апостериорной оценки существенно удается оптимизировать априорную оценку. Таким образом, при решении рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений можно осуществлять аналитическое продолжение решения в области аналитичности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дышко А. Л., Конохова А. И., Суков Н. Б. О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 7. с. 1158–1178.
- [2] Привалов В. А., Самсонов В. А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58. с. 37–48.
- [3] Самодуров А. А. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. № 1. с. 9–10.
- [4] Orlov V. N., Kovalchuk O. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012127.
- [5] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. 1977. Vol. 13. p. 93–104.
- [6] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. by D. G. Wilson, A. Solomon, P. Boggs. New York: 1978. p. 129–145.
- [7] Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization. 1974.
- [8] Axford R. A. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. LA, 1970. Vol. 4514. p. – 34.
- [9] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.
- [10] Conte R., Musette M. The Painlevé Handbook. 3300 AA Dordrecht, The Netherlands. 2008: Published by Springer Science+Business Media B.V. P.O. Box 17.
- [11] Filipuk G., Chichurin A. The Properties of Certain Linear and Nonlinear Differential Equations // Advances in Mechanics and Mathematics. 2019. Vol. 41. p. 193–200.
- [12] Chichurin A., Shvychkina H. Computer simulation of two chemostat models for one nutrient resource // Mathematical Biosciences. 2016. Vol. 278. p. 30–36.
- [13] Evtushenko S. A Nonlinear System of Differential Equations in Supercritical Flow Spread Problem and Its Solution Technique // Axioms. 2023. URL: <https://doi.org/10.3390/axioms12010011>.
- [14] Dukhnovskii S. A. Global existence theorems of a solution of the Cauchy problem for systems of the kinetic Carleman and Godunov–Sultangazin equations // Eurasian Math. J. 2021. Vol. 12, no. 1. p. 97–102.
- [15] Dukhnovsky A. A self-similar solution and the tanh-function method for the kinetic Carleman system // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 2022. no. 1. p. 99–110.
- [16] Dukhnovsky S. A. New exact solutions for the time fractional Broadwell system // Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal. 2022. Vol. 15, no. 1. p. 53–66.

-
- [17] Orlov V., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020. Vol. 1425. p. 012129.
- [18] Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // *Axioms*. 2022. Vol. 11. p. 637.
- [19] Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // *Mathematics*. 2022. Vol. 10. p. 3984.
- [20] Orlov V., Chichurin A. About Analytical Approximate Solutions of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // *Fractal Fract.* 2023. Vol. 7. p. 228.
- [21] Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // *Mathematics*. 2022. Vol. 10. p. 3984.
- [22] Орлов В. Н., Разакова Р. В. Приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка в области аналитичности // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 1(43). с. 92–99.

V. N. Orlov, A. M. Barzini

PERTURBATION OF INITIAL DATA AND ANALYTICAL APPROXIMATE SOLUTION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER IN THE REAL DOMAIN*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

Abstract. The paper presents a continuation of the previously obtained author's results. The dependence of the analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations on the perturbation of the initial data is established. A numerical experiment was carried out, confirming the theoretical results, and a variant of optimizing a priori estimates using a posteriori ones was also given. The presented results are the final stage in the substantiation of an analytical approximate solution for nonlinear differential equations that are generally not solvable in quadratures.

Keywords: Perturbation of initial data, analytical approximate solution, nonlinear differential equation, a priori and a posteriori estimates.

REFERENCES

- [1] Dyshko A. L., Konyukhova A. I., Sukov N. B. On a singular problem for a non-linear third-order ordinary differential equation arising in hydrodynamics // *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2007. Vol. 47, no. 7. p. 1158–1178.
- [2] Privalov V. A., Samsonov V. A. Comparison of stability properties of two autorotation modes // *Izv. RAN. PMM*. 1994. Vol. 58. p. 37–48.
- [3] Samodurov A. A. A simple way to determine the delay time of a superradiant bosonic avalanche // *Report. Academy of Sciences of the BSSR*. 1985. no. 1. p. 9–10.
- [4] Orlov V. N., Kovalchuk O. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // *Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. 2020. Vol. 1425. p. 012127.
- [5] Hill J. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // *Internat. J. Solids Structures*. 1977. Vol. 13. p. 93–104.
- [6] Ockendon J. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // *Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. by D. Wilson, A. Solomon, P. Boggs*. New York: 1978. p. 129–145.
- [7] Axford R. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization. 1974.
- [8] Axford R. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to nonlinear diffusion // *Los Alamos Report. LA*, 1970. Vol. 4514. P. –34.
- [9] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.
- [10] Conte R., Musette M. *The Painlevé Handbook*. 3300 AA Dordrecht, The Netherlands. 2008: Published by Springer Science+Business Media B.V. P.O. Box17.
- [11] Filipuk G., Chichurin A. *The Properties of Certain Linear and Nonlinear Differential Equations // Advances in Mechanics and Mathematics*. 2019. Vol. 41. p. 193–200.
- [12] Chichurin A., Shvychkina H. Computer simulation of two chemostat models for one nutrient resource // *Mathematical Biosciences*. 2016. Vol. 278. p. 30–36.
- [13] Evtushenko S. A Nonlinear System of Differential Equations in Supercritical Flow Spread Problem and Its Solution Technique // *Axioms*. 2023. URL: <https://doi.org/10.3390/axioms12010011>.

Viktor Nikolaevich Orlov, Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Aleksandr Minchev Barzini, Undergraduate, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

-
- [14] Dukhnovskii S. Global existence theorems of a solution of the Cauchy problem for systems of the kinetic Carleman and Godunov–Sultangazin equations // Eurasian Math. J. 2021. Vol. 12, no. 1. p. 97–102.
- [15] Dukhnovsky A. A self-similar solution and the tanh-function method for the kinetic Carleman system // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. mold. Mat. 2022. no. 1. p. 99–110.
- [16] Dukhnovsky S. New exact solutions for the time fractional Broadwell system // Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal. 2022. Vol. 15, no. 1. p. 53–66.
- [17] Orlov V., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. Vol. 1425. p. 012129.
- [18] Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // Axioms. 2022. Vol. 11. p. 637.
- [19] Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022. Vol. 10. p. 3984.
- [20] Orlov V., Chichurin A. About Analytical Approximate Solutions of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Fractal Fract. 2023. Vol. 7. p. 228.
- [21] Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022. Vol. 10. p. 3984.
- [22] Orlov V. N., Razakova R. V. Approximate solution of one class of non-linear differential equations of the third order in the domain of analyticity // I. Ya Yakovlev Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the limit state. 2020. no. 1(43). p. 92–99.

Ю. В. Немировский

ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЕ ФОРМЫ ИЗГИБАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛОСКИХ ОДНОРОДНЫХ И ГИБРИДНЫХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН С ЧЕЧЕВИЦЕПОДОБНЫМИ ФОРМАМИ ЗАКРЕПЛЕННЫХ КОНТУРОВ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. При использовании классических кинематических гипотез Кирхгофа рассмотрены задачи о предельно допустимых состояниях деформирования гибридных полиметаллических пластин в условиях квазистатического нагружения распределенным поперечным давлением. Рассматриваются пластинки с чечевицепоподобными формами закрепленного контура при их защемлении и шарнирном опирании. Топология расположения фазовых материалов соответствует попарно-симметричным относительно срединной плоскости слоям постоянной толщины. Получено общее разрешающее системы дифференциальных уравнений для различных модификаций контуров и разработаны соответствующие процедуры численного и аналитического решения для двух основных допускаемых состояний предельного деформирования: 1 – предельно-упругого и 2 – состояния предразрушения при различных модификациях форм закрепления контура.

Ключевые слова: гибридные полиметаллические пластины с чечевицепоподобными закреплениями опорных контуров, основные физико-механические характеристики фазовых материалов: модули Юнга, пределы упругости, первая (предельно-упругая) деформация, вторая (деформация предразрушения), пределы прочности, нагрузки и предельно-допустимые перемещения при этих состояниях, критерии сравнения проектов с различными требованиями: вес, стоимость, допустимые нагрузки, максимально-допустимые деформации.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.008

УДК: 539.374

© Немировский Ю. В., 2023

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Поступила 10.02.2023

1. Введение Введение. Исследование процессов изгибного деформирования плоских тонкостенных конструкций при воздействии на них внешних квазистатических и динамических нагрузок является одной из важнейших проблем механики твердого деформируемого тела, вызывающих повышенный интерес к новым разработкам в этом направлении. Оно тесно связано со стремлением ускоренного промышленно-технического развития в наиболее важных отраслях хозяйственной деятельности, нацеленных на развитие машиностроения, судостроения, авиа-космических отраслей и новейших отраслей строительной индустрии. Особо важную роль здесь имеют постоянно нарастающие требования к надежной эксплуатации создаваемых объектов в течение длительного времени с жесткими требованиями экономии материальных и экономических ресурсов. В течение последних десятилетий в России и ряде зарубежных стран разработаны промышленно-технологические цепочки создания устройств и изделий, отвечающих современным требованиям, предъявленным при их эксплуатации. В основном это касается плоских и криволинейных тонкостенных конструкций и опорных стержневых конструкций из различных конструктивных материалов и их композиций. Многообразные успешные технологические разработки позволяют, в принципе, создавать конструкции различных геометрических форм как из однородных конструкционных материалов, так и из любых их композиций.

Разработка расчетных методов исследований деформированного состояния тонкостенных однородных и слоистых плоских конструкций получила успешные результаты, в основном, для прямоугольных, круглых и кольцевых пластин при различных законах распределения давления по поверхности для защемленных и шарнирно-опертых закреплений контуров. Получены также отдельные решения задач для треугольных, ромбовидных и эллиптических пластин, в рамках закономерностей линейно-упругого деформирования. Найти какие-либо решения задач изгибного деформирования пластин с чечевицепоподобными контурами в научно-технической литературе не удалось, хотя по своим геометрическим особенностям различные модификации контура могут создавать существенно изменяющиеся поля деформационного изгиба пластины при одинаковых условиях нагружения в случае незначительных трансформаций контура.

Описание чечевицеобразного контура. Классический чечевицеобразный в декартовой плоской системе координат может быть определен как совокупность двух одинаковых парабол (рис. 1), развернутых выпуклостью вдоль оси параболы к началу координат на расстояние b^0 (полуширина пояса) и пересекающихся в точках $x = \pm a^0$ (рис. 2), где $2a^0$ - полная длина сечения. К классу чечевицепоподобных контуров относим также контура с обрезанными вершинами на расстояниях $y = \pm y_0 < b_0$ (рис.3) или одновременно отрезанными поясами (рис. 4). При реализации каждого из вариантов отдельный соответствующий контур является односвязным, и полученное для него решение – решения задачи для пластины с соответствующим односвязным. Если же в рассматриваемой пластине, наряду с внешним односвязным контуром вследствие создания концентратора необходимо будет использовать один из перечисленных вариантов с чечевицепоподобным контуром, то решение соответствующей задачи мы будем относить к решению задач с двухконтурными закрепленными контурами.

Однородные пластинки. Деформирование при поперечном изгибе распределенными нагрузками и закреплении контура. Пусть однородная (эталонная) пластинка чечевицеобразной формы из материала с характеристиками ρ_0 (удельная плотность), E_0 (модуль упругости), σ_0^0 (предел упругости), σ_0^* (предел прочности) имеет параметры чечевицеобразного контура на рис. 1 равные a_0^0 и b_0^0 в декартовой системе координат x, y и ось Oz

направлена перпендикулярно к плоскости контура. Будем считать, что внешняя нагрузка, распределенная по пластинке является постоянной и толщина пластинки $2h_0$ одинакова вдоль всей пластины. В зависимости от уровня внешней нагрузки пластина может находиться в двух предельно допустимых состояниях: в предельно упругом, когда в наиболее напряженной точке будет достигнут предел упругости, и в предельном состоянии разрушения, когда в наиболее напряженной точке будет достигнут предел прочности материала рассматриваемой пластины. При этом в пластине могут развиваться различные подобласти упругих и неупругих состояний, которые требуют развития особых процедур численного решения. Мы здесь будем последовательно рассматривать возникающие ситуации и разрабатывать для их решения необходимые методы.

Однородные предельно упругие пластины в декартовой системе координат. Рассмотрим сначала тонкие однородные изотропные пластины. Справедливы кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява при поперечном изгибе. Связи деформаций ε_x , ε_y , ε_{xy} и прогибов имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= z\kappa_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= z\kappa_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}z\kappa_{xy} = -\frac{1}{2}z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\quad (1)$$

где w – прогиб пластины. Закон упругого деформирования имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= -\frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}(\kappa_{yy} + \nu\kappa_{xx}) \\ \sigma_{xy} &= -\frac{Ez}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}[(1-\nu)\kappa_{xy}]\end{aligned}$$

Квадрат интенсивности напряжений на поверхности $z = h_0$ пластины

$$\sigma_u^2|_{z=h_0} = (\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2)|_{z=h_0} = \frac{E^2 h_0^2}{(1-\nu^2)^2} \sigma_u^2|_{z=h_0}$$

Изгибающий и крутящий моменты в упругой пластинке равны

$$\begin{aligned}M_{xx} &= \frac{2}{3}\frac{Eh_0^3}{(1-\nu^2)}(\kappa_x + \nu\kappa_y), \\ M_{yy} &= \frac{2}{3}\frac{Eh_0^3}{(1-\nu^2)}(\kappa_y + \nu\kappa_x), \\ M_{xy} &= \frac{2}{3}\frac{Eh_0^3}{(1-\nu^2)}(1-\nu)\kappa_{xy}, \\ D_0 &= \frac{2}{3}\frac{Eh_0^3}{(1-\nu^2)}\end{aligned}$$

Пусть площадь, необходимая для защиты от внешних воздействий будет равна $S_0 = \alpha_0 a_0 b_0$, где a_0 и b_0 - параметры рассматриваемой пластинки с очевидным контуром. Удельный объем используемой пластинки равен $V_0 = 2h_0 S_0$, а удельный вес равен $B_0 = \rho_0 V_0$, а стоимость собственно равна $C_0 = c_0 \rho_0 B_0$ где c_0 – стоимость единичного объема используемого материала.

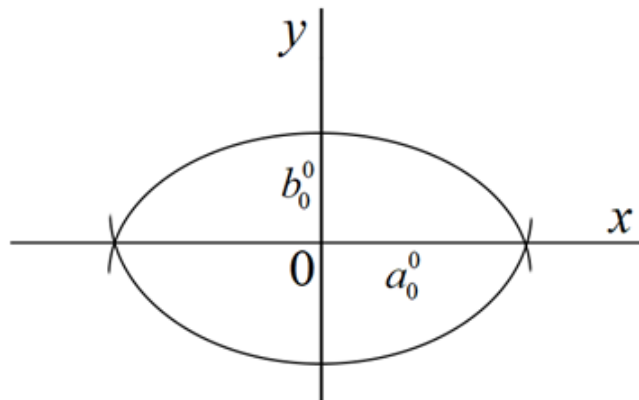


Рис. 1.

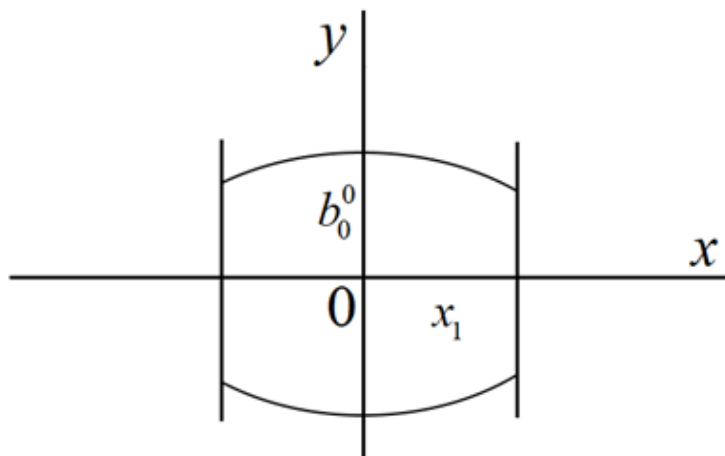


Рис. 2.

Полиметаллические слоистые тонкостенные пластины. При анализе слоистых тонкостенных пластин, ограничимся рассмотрением конструктивно-неоднородных полиметаллических n -слойных фазовых элементов с толщинами Δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), располагающихся попарно симметрично относительно отсчетной (нейтральной) поверхности $z = 0$ (рис. 4)

Все основные характеристики входящих в пакет слоистой пластины считаются известными, а паспортные диаграммы для каждого i -го фазового материала при испытаниях образцов на растяжение и сжатие. Полагаем также, что рассматриваемые слоистые пакеты конструкционных материалов деформируются без поперечных обжатий и взаимных сдвигов или отрывов начала нагружения пластинки и до разрушения.

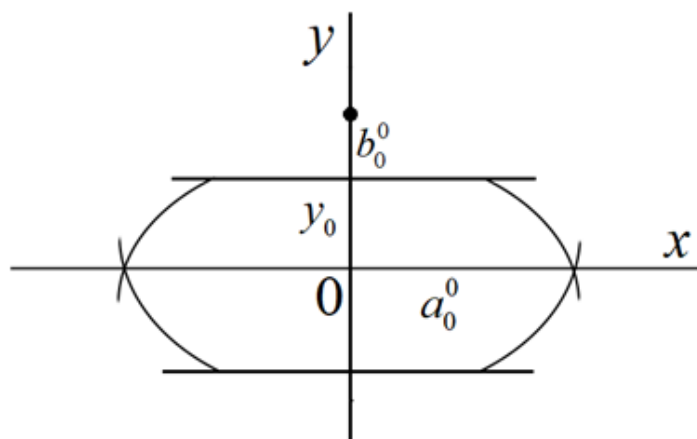


Рис. 3.

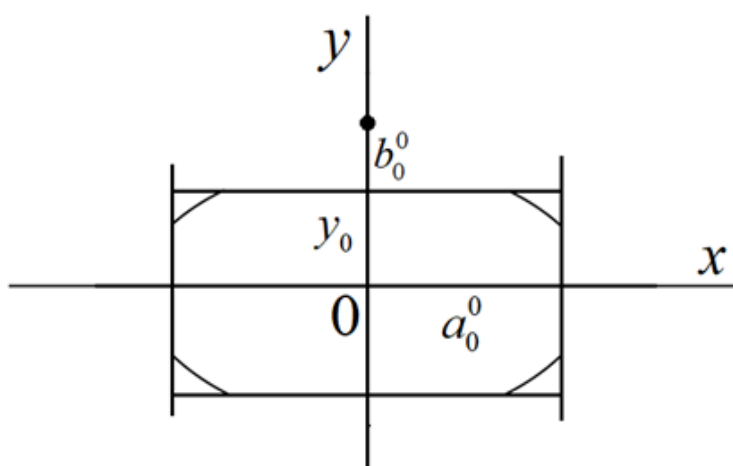


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жемочкин Б. Н. Теория упругости. М.: Гостройиздат, 1957. 257 с.
- [2] Рудницын М. Н., Артемов П. Я., Любошиц М. И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Под общ. ред. М.Н. Рудницына. Минск: Высшая школа, 1970. 630 с.
- [3] Александров А. В., Потапов В. Д. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высшая школа, 1990. 398 с.
- [4] Теребушко О. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Наука, 1984. 319 с.
- [5] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37
- [6] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

Yu. V. Nemirovskii

**MAXIMUM PERMISSIBLE FORMS OF BENDING OF ISOTROPIC FLAT
HOMOGENEOUS AND HYBRID POLYMETALLIC PLATES WITH
LENTIL-SHAPED FIXED CONTOURS**

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. Using the classical kinematic hypotheses of Kirchhoff, the problems of the maximum permissible states of deformation of hybrid polymetallic plates under conditions of quasi-static loading by distributed transverse pressure are considered. Plates with lenticular forms of a fixed contour are considered when they are pinched and hinged. The topology of the arrangement of phase materials corresponds to layers of constant thickness that are pairwise symmetrical with respect to the median plane. A general resolving system of differential equations for various modifications of contours has been obtained and the corresponding procedures for numerical and analytical solutions have been developed for two main permissible states of limiting deformation: 1 - limiting elastic and 2 - pre-fracture states with various modifications of the forms of fixing the contour.

Keywords: hybrid polymetallic plates with lenticular fastenings of support contours, the main physical and mechanical characteristics of phase materials: Young's moduli, elastic limits, first (ultimate elastic) deformation, second (pre-fracture deformation), strength limits, loads and maximum permissible displacements under these conditions, criteria for comparing projects with different requirements: weight, cost, allowable loads, maximum allowable deformations.

REFERENCES

- [1] Vlasov W. Z. Thin-walled spatial systems. Moscow: Gosstroyizdat, 1958. 502 p.
- [2] Koshur W. D., Nemirovsky Y. V. Continuous and discrete models of dynamic deformation structural elements. Novosibirsk: Nauka, 1990. 190 p.
- [3] Nemirovsky Y. V. Nonlinear Deformation Prediction of Hybrid composite materials // Problems of non-linear mechanics of a deformable solid body. Proceedings of the second international conference. Kazan: Kazan State University, 2009.
- [4] Nemirovsky Y. V. Dynamics of plastic laminated fibrous plates // Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics deformable rigid body. Samara: Samara State Technical University, 2017. P. 106–110.
- [5] Nemirovsky Y. V. Second limit state of polymetallic round and ring plates // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University them. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2015. no. 1(23). P. 189–195.
- [6] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. Mir: Moscow, 1988. 352 p.
- [7] Vygodsky M. Y. Handbook of Higher Mathematics. Eighth edition. Nauka: Moscow, 1966. 870 p.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

Р. И. Непершин

ВДАВЛИВАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Аннотация. Приведено моделирование вдавливания эллиптического цилиндра в идеально пластическое полупространство при плоской деформации с учетом контактного трения численным интегрированием уравнений плоского пластического течения с контролем положительности диссипативной функции. Криволинейная свободная граница пластической области вычисляется из условия пластической несжимаемости в зависимости от глубины вдавливания. Моделирование удовлетворяет полной системе уравнений теории плоской деформации при условии пластичности Мизеса. Область применимости модели при увеличении глубины вдавливания ограничена вырождением централизованного веера линий скольжения при уменьшении кривизны границы контакта, или появлением зоны с отрицательными значениями диссипативной функции при увеличении кривизны границы контакта.

Ключевые слова: идеально пластическое полупространство, вдавливание, эллиптический цилиндр, плоская деформация, контактное трение, линии скольжения, годограф скоростей, диссипативная функция

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.009

УДК: 539.374

Введение. Задача идеальной пластичности о поперечном вдавливании жесткого цилиндра в пластическое полупространство имеет актуальное значение для оценки несущей способности полупространства и в технологии пластического деформирования поверхностного слоя в машиностроении. При малой глубине вдавливания жесткого цилиндра граница контакта приближается к плоской с давлением по Прандтлю $q = 2k(1 + \pi/2)$ при отсутствии скольжения на границе контакта с жесткой зоной, не зависящей от контактного трения, где $k = \sigma_Y/\sqrt{3}$, где σ_Y – напряжение текучести [1–3]. В случае гладкого штампа Хилла [1] возможно скольжение по всей границе контакта с давлением q совпадающим с решением Прандтля.

© Непершин Р. И. 2023

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin_ri@rambler.ru, доктор технических наук, профессор кафедры системы пластического деформирования, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 01.02.2023

В [2, 4] приведены решения о начальном пластическом течении полупространства при давлении круглого цилиндра с линиями скольжения, определяемыми прямолинейной границей полупространства. Эти решения дают нижнюю статическую оценку давления на цилиндр, соответствующую граничным условиям для напряжений при прямолинейной границе полупространства вследствие отрицательности диссипативной функции в области однородного напряженного состояния около этой границы [5]. Численное моделирование нестационарного процесса поперечного вдавливания круглого цилиндра в идеальнопластическое полупространство с учетом контактного трения с вычислениями линий скольжения, поля скоростей и криволинейной границы пластической области при положительности диссипативной функции приведено в [5].

В настоящей работе приведено численное моделирование нестационарного процесса поперечного вдавливания жесткого эллиптического цилиндра в идеально пластическое полупространство по уравнениям плоского пластического течения [2, 3]. Линии скольжения и годограф скоростей вычисляются с учетом контактного трения по Прандтлю с криволинейной границей материала, вытесняемого цилиндром, и контролем положительности диссипативной функции. Направления главных осей нормального сечения эллиптического цилиндра совпадают с направлениями осей координат x, y . При вытянутой форме эллиптического сечения параллельно границе полупространства по оси x длина границы контакта быстро возрастает, и при малой глубине вдавливания приближается к решениям Прандтля или Хилла для плоского штампа в зависимости от контактного трения. При вытянутой форме эллиптического сечения по нормали к границе полупространства по оси y решение приближается к задаче о вдавливании клина с выпуклой криволинейной границей и уменьшением кривизны границы контакта при увеличении глубины вдавливания.

Пластическую область и глубину вдавливания цилиндра вычисляем в зависимости от максимального угла наклона касательной α_A к границе контакта с пластической областью в точке A . Границу пластической области находим интегрированием степенной функции для угла наклона касательной к этой границе при заданной глубине вдавливания. Структура линий скольжения в пластической области с сингулярной точкой A на пересечении границы контакта с криволинейной границей пластической области и последовательность решения задач Коши, Гурса и смешанного типа для гиперболических уравнений плоского пластического течения с контролем знака диссипативной функции и численные алгоритмы [6, 7] аналогичны задаче о вдавливании круглого цилиндра [5].

Основные уравнения. На рис.1 показаны линии скольжения в пластической области на плоскости x, y нормального сечения эллиптического цилиндра справа от линии симметрии $x = 0$ при вдавливании по нормали к горизонтальной границе полупространства. Главные оси эллиптического сечения направлены по нормали и параллельно к границе полупространства. Граница контакта и пластическая область зависят от отношения длин полуосей эллипса a/b по осям x, y и увеличиваются от нуля до области, ограниченной границей контакта OA и свободной границей AB . При вычислениях за единицу длины принимаем полудлину b по оси y , сохраняя обозначение a для безразмерной полудлины по оси x . При контактном трении $0 \leq \mu \leq 1/2$ по Прандтлю около линии симметрии образуется жесткая область OEE_1 без скольжения на границе контакта OE_1 . Жесткопластическая граница $BCDE$ смещается по оси y на расстояние $-y_E$.

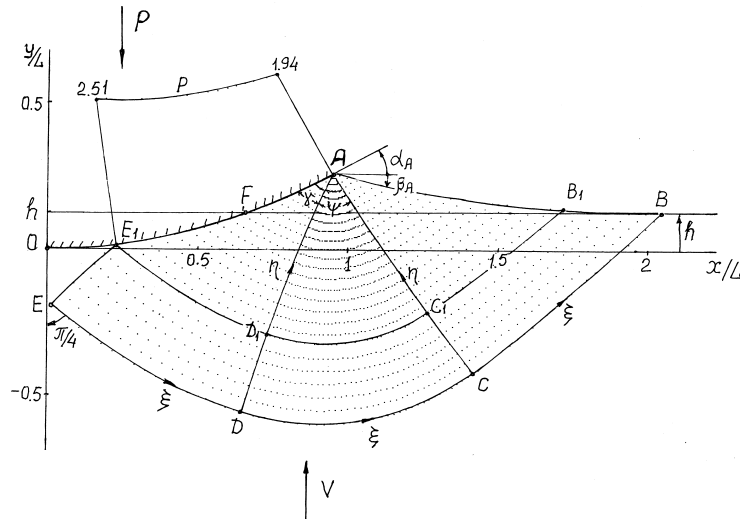


Рис. 1. Линии скольжения и контактное давление при вдавливании эллиптического цилиндра в идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения.

$$a = 0.5, \mu = 0.15, \alpha_A = 0.5$$

Цилиндр принимаем неподвижным, а полупространство перемещающимся со скоростью $V = 1$ по оси y . При выводе на экран монитора линий скольжения за единицу длины принимаем длину L границы контакта OA . Начало координат x, y принимаем в нижней точке контакта O . Каноническое уравнение контактной границы в координатах x, y с центром эллипса в точке $(0,1)$ имеет вид

$$x^2/a^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq a; \quad (1)$$

зависимость $y(x)$ и угол наклона касательной α в точке x, y находим из уравнений

$$y(x) = 1 - \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{a^2(1 - y)}. \quad (2)$$

Длину L дуги контакта

$$L = \int_0^{x_A} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dx, \quad \text{где } x_A = a^2 \operatorname{tg} \alpha_A (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_A)^{-1/2}, \quad (3)$$

находим численным интегрированием, используя уравнения (2), и зависимости координат x, y от угла α

$$x = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad y = 1 - (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A. \quad (4)$$

Угол α_A принимаем за параметр, определяющий глубину вдавливания h , которую находим по условию сохранения объема вытесняемого цилиндром материала с образованием "наплыва" над границей полупространства $y = h$.

Угол наклона касательной β к границе пластической области AB задаем степенной функцией с показателем степени m в зависимости от координаты x [5]

$$\beta(x) = \beta_A [\zeta^m - 1], \quad \zeta = (x - x_A)/(x_B - x_A), \quad x_A < x < x_B, \quad (5)$$

где $\beta = -\beta_A$ в точке A и $\beta = 0$ в точке B . Показатель степени m позволяет изменять кривизну границы AB . Уравнение границы AB находим численным интегрированием дифференциального соотношения $dy = \text{tg}\beta dx$. Угол β_A зависит от граничных условий на границе контакта и от глубины вдавливания h . Координата x_B точки B является неизвестным параметром задачи [5].

За единицу напряжения принимаем удвоенную пластическую постоянную $2k = 2\sigma_Y/\sqrt{3}$ по условию пластичности Мизеса, где σ_Y – напряжение текучести. Гиперболические дифференциальные уравнения для напряжений и скоростей перемещений при плоской деформации идеально пластического тела [1–4] приводятся к соотношениям Генки и Гейрингер на линиях скольжения ξ, η для угла наклона касательной φ к линиям скольжения ξ к оси x , среднего напряжения σ , нормального к линиям скольжения, и проекций V_ξ, V_η вектора скорости на линии скольжения ξ и η

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\varphi, \quad \sigma - \varphi = \text{const}, \quad dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \quad \text{для } \xi, \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\text{ctg}\varphi, \quad \sigma + \varphi = \text{const}, \quad dV_\eta - V_\xi d\varphi = 0 \quad \text{для } \eta. \quad (7)$$

Компоненты напряжения в координатах x, y находим по формулам

$$\sigma_x = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi. \quad (8)$$

Проекции вектора скорости в координатах x, y связаны с V_ξ и V_η соотношениями

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi, \quad (9)$$

$$V_\xi = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_\eta = V_y \cos \varphi - V_x \sin \varphi. \quad (10)$$

Вдоль свободной границы AB по условию пластичности известны главные напряжения $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1$; диссипативная неотрицательна, если скорость деформации $\varepsilon_2 \leq 0$. В регулярных узлах сетки линий скольжения знак диссипативной функции находим численной проверкой неравенства для максимальной скорости сдвига вдоль линий скольжения

$$\Gamma = \frac{\partial V_\xi}{\partial \eta} - V_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} + V_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \geq 0. \quad (11)$$

Граничные условия. На границе скольжения E_1A принимаем касательное напряжение трения μ по Прандтлю, и из третьего уравнения (8) находим угол наклона η линии скольжения $\gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu)$ к касательной контактной границы при $\tau_{x_1y_1} = -\mu$ в координатах x_1, y_1 , направленных по касательной и нормали. В точках пересечения границы E_1A с линиями скольжения находим угол наклона касательной φ к линиям скольжения ξ

$$\varphi = \gamma(\mu) + \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \mu < \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Уравнение границы AB находим численным интегрированием дифференциального соотношения $dy = \text{tg}\beta(x)dx$ при известной функции $\beta(x)$ в (5), и из условия одноосного сжатия $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1$ находим значения σ и φ на AB

$$\sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \beta(x) + \frac{\pi}{4}. \quad (13)$$

Точка A является вырожденной ξ линией скольжения с веером η линий скольжения с углом ψ в точке A

$$\psi = \frac{3\pi}{4} - (\alpha_A + \beta_A + \gamma). \quad (14)$$

Значения σ и φ , изменяющиеся в точке A от границы AB до границы E_1A , находим из соотношения Генки (6)

$$\sigma = -(1/2 + \theta), \quad \varphi = \beta_A + \pi/4 - \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \psi. \quad (15)$$

В области ABC решаем задачу Коши для уравнений (6) и (7) с соотношениями Генки и граничными условиями (13). В области ACD решаем задачу Гурса по известным значениям σ и φ на η линии скольжения AC и (15) в сингулярной точке A . В области AD_1E_1 решаем задачу смешанного типа по значениям σ и φ на η линии скольжения AD_1 и граничным условиям (12). В области EE_1D_1D решаем задачу Гурса по известным значениям σ и φ на линиях скольжения E_1D_1 и DD_1 . В точке E при $\tau_{xy} = 0$ должны выполняться два условия на линии симметрии.

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad x = 0. \quad (16)$$

Координаты x_{B_1} и x_B точек B_1 и B границы AB принимаем за неизвестные параметры при вычислениях линий скольжения в полосе BEE_1B_1 , которые определяют угол φ и координаты x, y точки E и должны удовлетворять двум условиям (16). При $\mu > 0$ координаты точки E_1 на границе контакта находим вычислениями линий скольжения в области AB_1E_1 с неизвестным углом ψ веера линий скольжения в точке A , который принимаем третьим параметром задачи. Угол β_A в точке A свободной границы AB находим из уравнения (14) при известных значениях ψ, α_A и γ . При отсутствии трения ($\mu = 0, \gamma = \pi/4$) условия (16) выполняются в точке O на границе контакта при $\alpha = 0$ в граничном условии (12). Жесткая область на границе контакта стягивается в точку O ; точки B_1 и B совпадают. Граница скольжения E_1A совпадает со всей границей контакта OA . В этом случае линии скольжения определяются двумя параметрами ψ и x_B .

По условию пластической несжимаемости при плоской деформации площадь S_1 полусегмента эллипса при глубине вдавливания h равна площади S_2 криволинейного треугольника ABF пластического материала над горизонтальной границей полупространства. Координату x_F точки F , разделяющую площади S_1 и S_2 , находим из первого уравнения (2) при $y_F = y_B = h$

$$x_F = a\sqrt{h(2-h)}, \quad (17)$$

где координата y_B точки B известна после вычисления границы AB .

Площадь $S_1 = hx_F - \int_0^{x_F} y(x)dx$, где функция $y(x)$ определяется первым уравнением (2), находим по формуле

$$S_1 = (h-1)x_F + \frac{1}{2a} \left[x_F \sqrt{a^2 - x_F^2} + a^2 \arcsin(x_F/a) \right]. \quad (18)$$

Площадь $S_2 = \int_{x_F}^{x_A} y(x)dx + \int_{x_A}^{x_B} y(x)dx - h(x_B - x_F)$, где зависимость $y(x)$ в первом интеграле определяется первым уравнением (2), а во втором интеграле – уравнением свободной границы AB . Второй интеграл находим численным методом, и формула для площади S_2 имеет вид

$$\begin{aligned} S_2 &= (h-1)(x_F - x_A) - h(x_B - x_A) + I_1 + \int_{x_A}^{x_B} y(x)dx, \\ I_1 &= -\frac{1}{2a} \left[x_A \sqrt{a^2 - x_A^2} - x_F \sqrt{a^2 - x_F^2} + a^2 (\arcsin(x_A/a) - \arcsin(x_F/a)) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где координата x_A точки A определяется первой формулой (4) по заданному углу контакта α_A , и координата x_B точки B – заданный параметр задачи.

Два условия (16) и равенство $S_1 = S_2$ используем для вычисления трех параметров ψ , x_{B_1} и x_B , определяющих линии скольжения с жесткой зоной OEE_1 , зависящей от контактного трения μ . В случае $\mu = 0$ параметры ψ и x_B находим по условиям $S_1 = S_2$ и $x = 0$ в точке O на жесткопластической границе $O - B$.

Скорости перемещений находим решением уравнений Гейрингер в (6) и (7) по граничным условиям на жесткопластических границах $B - E$, EE_1 и на границе скольжения E_1A . При движении жесткой области полупространства относительно неподвижной жесткой зоны OEE_1 в точке E имеют место разрывы скорости $[V]_\xi = [V]_\eta = 1/\sqrt{2}$ вдоль линий скольжения $B - E$ и EE_1 , и из условия непрерывности нормальной скорости к линиям скольжения при $\mu > 0$ находим граничные условия

$$V_\xi = \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad V_\eta = \cos \varphi \quad \text{на } B - E \quad (20)$$

$$V_\xi = 0, \quad V_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{на } EE_1. \quad (21)$$

Равенство нулю нормальной скорости на границе скольжения E_1A приводит к условию

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } E_1A. \quad (22)$$

Разрыв скорости $[V]_\eta = 1/\sqrt{2}$ вдоль η линии скольжения EE_1 вследствие условия (22) приводит к разрыву скорости $[V]_\xi = 1/\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$ в точке E_1 вдоль ξ линии скольжения $E_1 - B_1$. При пересечении этой линии нормальные скорости V_η непрерывны, а скорости V_ξ изменяются скачком

$$V_\xi^+ = V_\eta^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } E_1 - B_1, \quad (23)$$

где V_ξ^- и V_ξ^+ – скорости V_ξ ниже и выше линии скольжения $E_1 - B_1$. В случае $\mu = 0$ имеет место один разрыв скорости в точке O , равный $\sqrt{2}$, который остается постоянным на $O - B$, и граничные условия (20) принимают вид

$$V_\xi = \sin \varphi + \sqrt{2}, \quad V_\eta = \cos \varphi \quad \text{на } O - B; \quad (24)$$

и на OA , вследствие $\gamma = \pi/4$ в граничном условии (22) имеет место равенство $V_\xi = V_\eta$.

Численное решение. Решение системы уравнений (6) и (7) с приведенными граничными условиями находим численным интегрированием. Для вычислений написана

ФОРТРАН – программа с использованием циклических процедур решения задач Коши, Гурса и смешанного типа, и конечно-разностной аппроксимации уравнений теории плоской деформации, приведенными в [6,7] для регулярных узлов сетки линий скольжения. Значения $x, y, \sigma, \varphi, V_\xi, V_\eta$, необходимые для решения текущих краевых задач, сохраняются на линиях скольжения ξ и η с целью уменьшения оперативной памяти компьютера, и выводятся на экран монитора с использованием графических программ ФОРТРАНа.

При решении задачи смешанного типа в области E_1AD_1 используем конечно-разностную аппроксимацию дифференциального уравнения для ξ линий скольжения в (6) и условие (12) для угла φ на границе E_1A при $\mu > 0$, или на границе OA при $\mu = 0$

$$y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi), \quad \varphi = \gamma + \alpha - \pi/2, \quad (25)$$

где нижним индексом 1 обозначены известные значения переменных в ближайшем к границе скольжения узле ξ линии скольжения. Подстановка в (25) координаты y из второго уравнения (2) на границе контакта при заданном в первом приближении значении угла $\varphi = \varphi_1 = \tilde{\varphi}$ на этой границе приводит к квадратному уравнению для координаты x на границе контакта в виде

$$(\operatorname{tg}^2 \tilde{\varphi} + 1/a^2)x^2 - 2\operatorname{tg} \tilde{\varphi}(y_1 - 1 - x_1 \operatorname{tg} \tilde{\varphi})x + (y_1 - 1 - x_1 \operatorname{tg} \tilde{\varphi})^2 - 1 = 0. \quad (26)$$

Из уравнения (26) находим значение x в первом приближении, затем из второго уравнения (2) находим угол α на границе контакта, второе приближение для угла φ в (25), координаты x, y из уравнения (26) и второго уравнения (2). По соотношению Генки вдоль ξ линии скольжения находим $\sigma = \sigma_1 + \varphi - \varphi_1$ и давление $p = -\sigma + \frac{1}{2} \sin 2\gamma$ на границе контакта, где σ_1 – значение σ в точке 1 на ξ линии скольжения. Среднее давление q на проекцию площади контакта на границу полупространства и погонную силу P по длине оси цилиндра находим численным интегрированием распределения нормального σ и касательного $\tau = 1/2$ напряжений на жесткопластической границе $B-E$

$$q = -\frac{1}{x_A} \int_E^B (\sigma \cos \varphi + 1/2 \sin \varphi) ds, \quad P = 2qx_A. \quad (27)$$

Входными данными вычислительной программы являются относительная полудлина a горизонтальной оси эллипса, контактное трение μ , угол наклона касательной α_A к контактной границе в точке A , угловой шаг $\Delta\varphi$ веера линий скольжения в точке A , число точек N на свободной границе AB и начальные значения параметров ψ, x_{B1}, x_B . Граничные условия (16) выполняются с точностью 10^{-3} варьированием параметров x_{B1}, x_B . Интегральное условие пластической несжимаемости $S_1 = S_2$ при глубине вдавливания h в уравнениях (17)–(19) выполняется с точностью 10^{-6} при варьировании угла ψ и определяет угол наклона касательной β_A к свободной границе в точке A в зависимости от параметров задачи μ и α_A .

Поле скоростей перемещений находим численным интегрированием уравнений Гейрингер с граничными условиями (20)–(24) с использованием значений x, y, σ, φ на жесткопластических границах $E - B$ и EE_1 и на границе скольжения E_1A . По этим

данным вычисляем сетку линий скольжения и скорости перемещений в обратном направлении от жесткопластических границ к свободной границе AB с проверкой неравенства (11) для диссипативной функции в регулярных узлах сетки линий скольжения и неравенства $\varepsilon_2 \leq 0$ на границе AB . Скорости отображаются на экране монитора в виде годографа на плоскости V_x, V_y с использованием уравнений (9). Алгоритм вычислений поля скоростей с контролем неравенства (11) для диссипативной функции приведен в [5].

Численные результаты. Ниже приведены результаты расчета вдавливания цилиндра с относительными длинами главных полуосей эллиптического сечения $a = 0.5$ и $a = 2$ при контактном трении $\mu = 0.15$ в зависимости от угла наклона касательной α_A в точке A на границе контакта. За единицу длины принята полуось главной оси эллипса b по нормали к границе полупространства. Линии скольжения и годографы скоростей вычислены при $m = 0.8$ в уравнении (5), определяющем форму свободной границы пластической области AB . Сетки линий скольжения вычислены с числом точек $N = 26$ на границе AB и угловым шагом $\delta\varphi = 0.025$ вера η линий скольжения в точке A .

На рис.1 показаны линии скольжения и распределение контактного давления p на границе скольжения для $a = 0.5$ при $\alpha_A = 0.5$ и длине контактной границы $L = 0.138$. Параметры $\psi = 0.966$, $x_B/L = 2.05$ и $x_{B_1}/L = 1.72$ удовлетворяют условиям (16) на линии симметрии $x = 0$ и равенству площадей S_1 и S_2 в уравнениях (17)–(19). Эти параметры определяют границу AB с углом наклона $\beta_A = -0.258$ в точке A , среднее давление $q = 2.298$, погонную силу $P = 0.606$ по длине оси цилиндра и глубину вдавливания $h = 0.0179$. На оси симметрии образуется жесткая зона EE_1O при малой кривизне линии скольжения EE_1 . Контактное давление p на границе скольжения E_1A увеличивается от 1.943 в точке A до 2.508 в точке E_1 , приближаясь к предельному значению $1 + \pi/2$ при уменьшении контактного трения и стягивании жесткой зоны EE_1O в точку O .

На рис. 2 показан годограф скоростей для сетки линий скольжения, приведенной на рис.1. Жесткопластические границы $BCDE$ и EE_1 отображаются на годографе окружностями с центрами $(0,1)$ и $(0,0)$ с центральными углами $\pi/2$ и $\pi/4 + \varphi_{E_1}$ и радиусами равными разрыву скорости $1/\sqrt{2}$. Скорости в области EE_1B_1B (рис 1) определяются граничными условиями (20), (21) и отображается на годографе криволинейной полосой с теми же обозначениями до разрыва скорости на ξ линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$. В области BB_1C_1C скорости меняются незначительно вследствие малой кривизны линий скольжения. Разрыв скорости $1/\sqrt{2}\text{tg}\gamma$ вдоль ξ линии скольжения E_1-B_1 приводит к смещению по нормали точек этой линии на годографе скоростей. Область AE_1D_1 отображается на годографе узким криволинейным треугольником вследствие малой кривизны и малого изменения скоростей на η линиях скольжения. В области AC_1D_1 происходит наибольшее изменение скоростей вдоль ξ линий скольжения с сингулярной точкой A . В области AB_1C_1 скорости изменяются незначительно вследствие малой кривизны свободной границы AB и линий скольжения ξ и η . В регулярных узлах сетки линий скольжения и на линиях разрыва скоростей скорость сдвига Γ положительна. На границе AB , где $\sigma_2 = -1$, скорость деформации ε_2 отрицательна. Диссипативная функция положительна во всей пластической области.

На рис. 3 показаны линии скольжения с распределением контактного давления на границе скольжения при $a = 0.5, \mu = 0.15, \alpha_A = 0.2$, длине $L = 0.0508$ контактной границы и глубине вдавливания $h = 0.0028$. Жесткая область на границе контакта

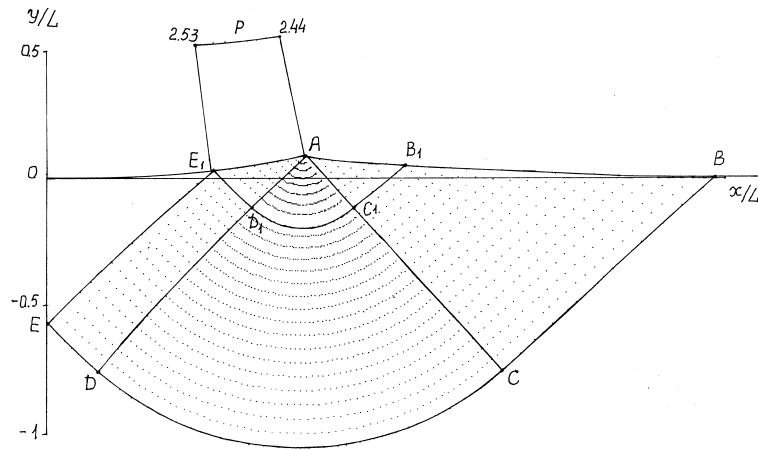


Рис. 3. Линии скольжения и контактное давление при $a = 0.5$, $\mu = 0.15$, $\alpha_A = 0.2$

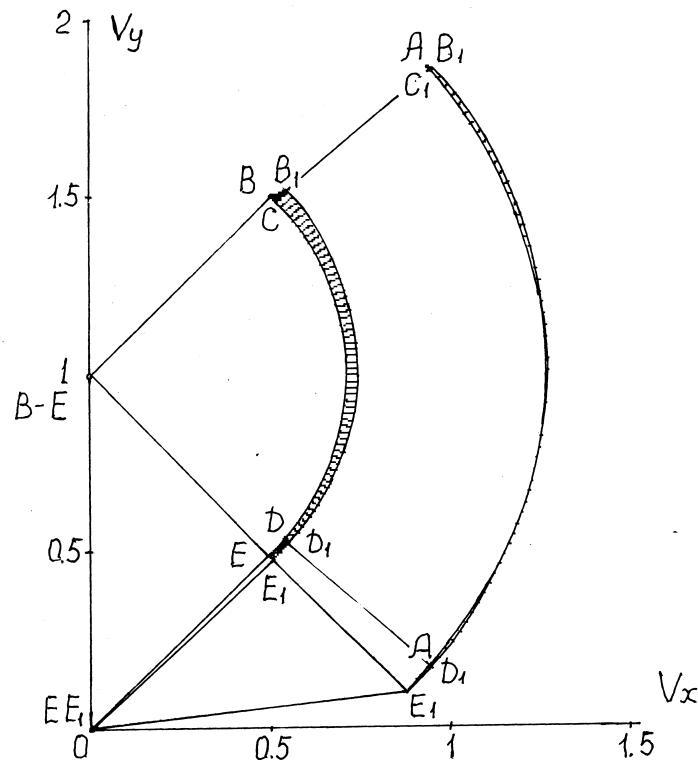


Рис. 4. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 3

оси симметрии (рис. 5). Увеличивается неравномерность распределения контактного давления p от 1.158 в точке A до 2.515 в точке E_1 , среднее давление q снижается до 2.033 при длине дуги контакта $L = 0.318$ и увеличении силы и глубины вдавливания до значений $P = 1.084$, $h = 0.0742$. На годографе скоростей (рис. 6) область BB_1E_1EB с

разрывом скорости $1/\sqrt{2}$ изображается узкой полосой. После разрыва скорости вдоль линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$ скорости в области AD_1E_1 с границей скольжения AE_1 , в области центрированного веера AC_1D_1 и в области AC_1B_1 со свободной границей AB_1 изменяются в широком диапазоне.

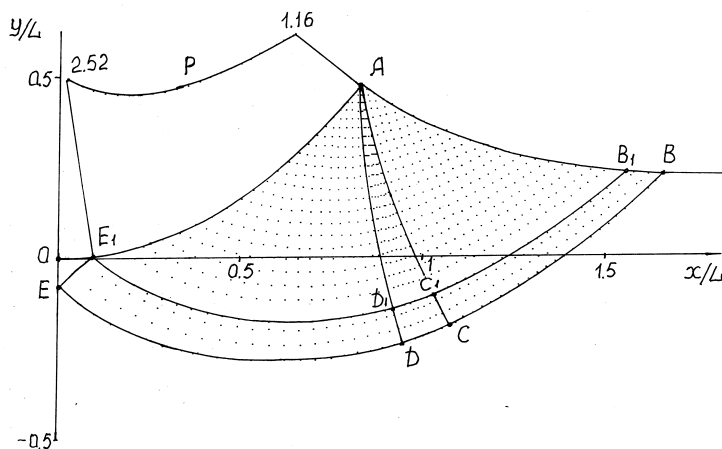


Рис. 5. Линии скольжения и контактное давление при $a = 0.5, \mu = 0.15, \alpha_A = 0.9$

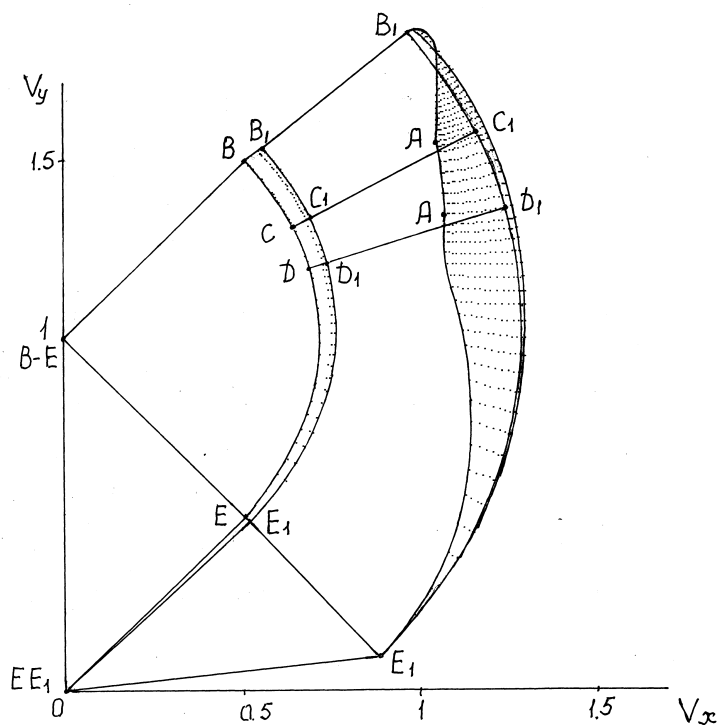


Рис. 6. Голограф скоростей для линий скольжения на рис. 5

Таблица 1. Вдавливание эллиптического цилиндра в идеальнопластическое полупространство. $a = 0.5$, $\mu = 0.15$

α_A	ψ	$-\beta_A$	L	x_A	y_A	x_B	$h \times 10$	q	P
0.1	1.572	0.051	0.025	0.025	0.001	0.071	0.002	2.547	0.128
0.2	1.460	0.063	0.051	0.050	0.005	0.131	0.028	2.514	0.254
0.3	1.312	0.111	0.078	0.076	0.012	0.184	0.066	2.476	0.378
0.4	1.151	0.172	0.106	0.103	0.022	0.235	0.140	2.450	0.508
0.5	0.966	0.258	0.138	0.132	0.035	0.283	0.179	2.298	0.606
0.6	0.792	0.331	0.173	0.162	0.054	0.340	0.271	2.267	0.734
0.7	0.596	0.427	0.214	0.194	0.078	0.398	0.388	2.184	0.848
0.8	0.390	0.533	0.261	0.229	0.111	0.457	0.542	2.096	0.960
0.9	0.182	0.642	0.318	0.266	0.154	0.528	0.742	2.033	1.084

В табл. 1 приведены основные параметры линий скольжения – углы ψ , β_A , длина дуги контакта L , координаты точек A и B , глубина вдавливания h , среднее давление q и сила P , вычисленные для вдавливания эллиптического цилиндра при $a = 0.5$, $\mu = 0.15$ и изменении угла α_A в точке A от 0.1 до 0.9. Линии скольжения и поля скоростей удовлетворяют условию неотрицательности диссипативной функции пластического течения. При $\alpha_A \rightarrow 1$ угол вера линий скольжения $\psi \rightarrow 0$. С увеличением угла контакта α_A угол ψ и давление q уменьшаются; модуль угла наклона β_A касательной в точке A к границе AB и кривизна этой границы увеличиваются; сила P возрастает вследствие увеличения L и h , при снижении производной dP/dh вследствие снижения среднего давления q .

Ниже приведены результаты расчета вдавливания цилиндра при $a = 2$ и $\mu = 0.15$ с эллиптическим сечением, вытянутым в направлении горизонтальной границы полупространства, при увеличении угла контакта α_A в точке A от 0.1 до 0.7. В этом случае кривизна границы контакта увеличивается при увеличении угла α_A , в отличие от уменьшения кривизны границы контакта при $a = 0.5$ и $\mu = 0.15$, в приведенных выше результатах расчета, что приводит к существенному изменению напряжений и скоростей перемещений в пластической области. Предельный угол контакта $\alpha_A \approx 0.7$ уменьшается по сравнению со случаем $a = 0.5$, вследствие появления и роста зон с отрицательной диссипативной функцией в области со свободной границей около сингулярной точки A при $\alpha_A > 0.7$. При малых углах $\alpha_A < 0.1 \div 0.2$ линии скольжения и годограф скоростей приближаются к штампу Прандтля с жесткой областью по всей границе контакта, также как и при $a = 0.5$, $\mu = 0.15$, но при большей длине границы контакта и большей силе вдавливания.

На рис. 7 показаны линии скольжения с распределением контактного давления p на границе скольжения AE_1 при $a = 2$, $\mu = 0.15$, $\alpha_A = 0.4$. Линии скольжения определяются параметрами $\psi = 1.1735$, $x_B/L = 2.265$ и $x_{B_1}/L = 1.658$ при $L = 1.321$, удовлетворяющими граничным условиям (16) и равенству площадей S_1 и S_2 в уравнениях (17)–(19). Получены значения угла наклона касательной $\beta_A = -0.258$ к свободной границе в точке A , координат $x_A = 1.291$, $y_A = 0.236$, $x_B = 2.922$ точек A и B , глубины вдавливания $h = 0.123$, среднего давления и силы вдавливания $q = 2.425$, $P = 6.264$. При увеличении угла контакта α_A жесткая область OEE_1 уменьшается, а длина границы контактного скольжения увеличивается. Давление p на этой границе увеличивается

от 2.15 в точке A до 2.518 в точке E_1 . Соответствующий годограф скоростей, показанный на рис. 8, определяется двумя разрывами скоростей на жесткопластических границах $BCDE$ и EE_1 и в пластической области на линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$. Скорости в пластических зонах ниже и выше линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$ отображаются на годографе узкими полосами при малом изменении скоростей в области ABC с разрывом скорости на свободной границе в точке B_1 . Диссипативная функция во всей пластической области положительна.

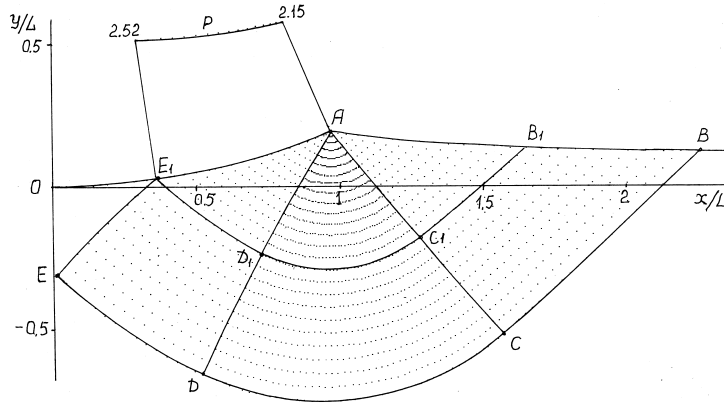


Рис. 7. Линии скольжения и контактное давление при $a = 2, \mu = 0.15, \alpha_A = 0.4$

На рис. 9 и 10 показаны линии скольжения и годограф скоростей при $a = 2, \mu = 0.15$ для угла контакта $\alpha_A = 0.7$, при котором диссипативная функция остается положительной в пластической области. Параметры $\psi = 0.744, x_B/L = 2.048$ и $x_{B_1}/L = 1.69$ при $L = 1.821$ определяют линии скольжения (рис.9) при уменьшении жесткой области OEE_1 , где линии скольжения практически прямолинейны. Контактное давление p на границе скольжения изменяется от 1.721 в точке A до 2.51 в точке E_1 при среднем давлении $q = 2.302$, силе $P = 7.910$ и глубине вдавливания $h = 0.237$. Неоднородность скоростей в пластической области выше границы разрыва скорости на линии скольжения $B_1C_1D_1E_1$ увеличивается (рис. 10).

В табл. 2 приведены основные параметры линий скольжения, среднего давления q и силы P , вычисленные при вдавливании цилиндра с эллиптическим сечением при $a = 2, \mu = 0.15$ и увеличении угла контакта до $\alpha_A = 0.7$. По сравнению с вдавливанием цилиндра с большей длиной главной оси по нормали к границе полупространства (табл.1), в рассматриваемом случае увеличиваются значения угла веера ψ , длины контакта L , глубины h , давления q и силы вдавливания P ; модуль угла наклона β_A касательной к границе AB в точке A и кривизна этой границы уменьшаются.

При $\alpha_A > 0.7$ вектор скорости пластической границы в точке A приближается к касательной с углом наклона α_A , вследствие быстрого увеличения кривизны границы контакта. На границе AB пластической области вблизи точки A появляется увеличивающаяся зона с возрастающей по модулю отрицательной диссипативной функцией, что является признаком начала пластической разгрузки и образования жесткой зоны над пластической границей при потере контакта с границей цилиндра. Изменение формы пластической области при большой глубине вдавливания жесткого цилиндра в идеально пластическое полупространство остается открытой проблемой.

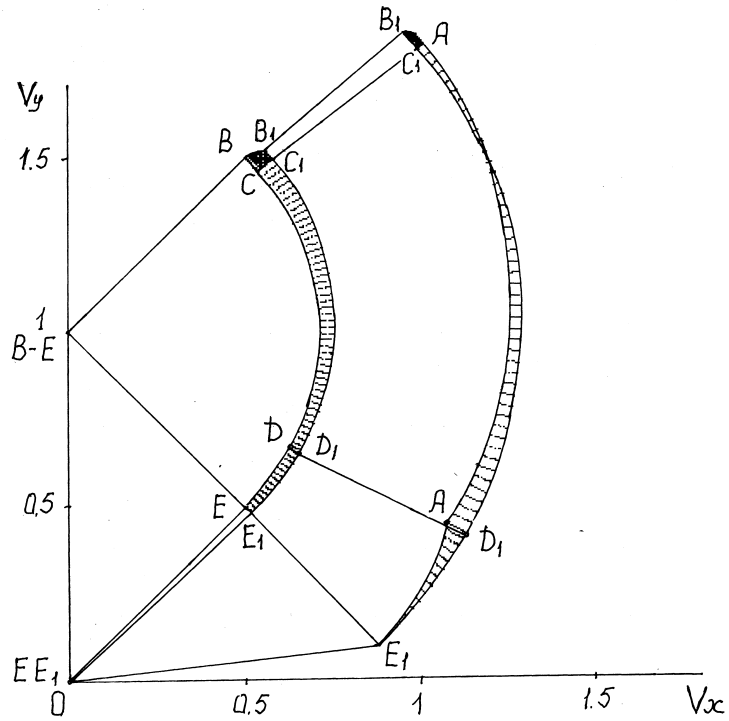
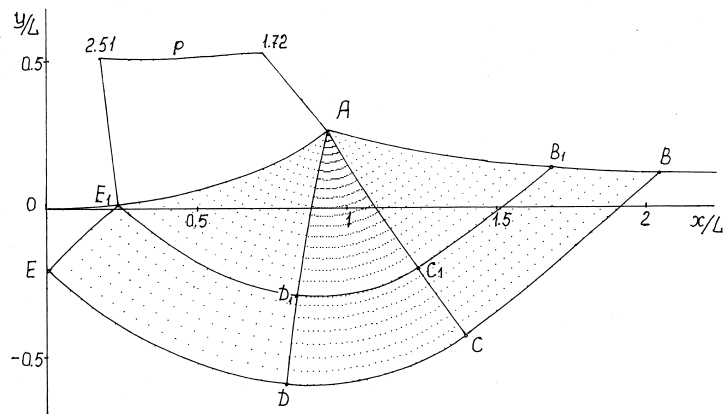


Рис. 8. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 7

Рис. 9. Линии скольжения и контактное давление при $a = 2, \mu = 0.15, \alpha_A = 0.7$

Заключение. Приведено моделирование вдавливания жесткого цилиндра в идеально пластическое полупространство с контактной границей, зависящей от отношения длин главных осей эллиптического сечения цилиндра с учетом контактного трения по Прандтлю. Численным интегрированием полной системы дифференциальных уравнений теории плоской деформации вычислены линии скольжения и годографы скоростей пластического течения, при которых диссипативная функция пластического течения положительна.

При длинной оси эллипса параллельной границе полупространства кривизна границы контакта и глубина вдавливания увеличиваются. В этом случае моделирование ограничено появлением зон с отрицательной диссипативной функцией около сингулярной точки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, 1956.
- [2] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
- [4] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Metallurgy, 1972. 408 с.
- [5] Непершин Р. И. О вдавливании цилиндра в идеально-пластическое полупространство с учетом контактного трения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 4, № 38. С. 102–119.
- [6] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.
- [7] Druyanov V. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 406 p.
- [8] Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 402 с.

R. I. Nepershin

IDEAL PLASTIC HALF-SPACE INDENTATION BY THE ELLIPTICAL CYLINDER

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Numerical simulation of the plane strain ideal plastic half-space indentation by the rigid elliptical cylinder with Prandtl's contact friction consideration is presented. The slip lines and velocities on the hodograph plane with positive plastic dissipative function are defined by numerical calculation of differential equations of the plane strain plastic flow theory. Curved form of the stress free boundary of the plastic region, which is function of the cylinder indentation depth, is defined by the plastic incompressibility condition. The numerical simulation satisfies the full equations system of the plane strain ideal plastic theory with Mises yield criterion and positive dissipative function in the plastic region. The simulation is constrained by the limit indentation depth, when in the case of the contact boundary curvature decreasing the centered fan slip lines region is degenerated, or in the case of the contact boundary curvature increasing by nucleation of small regions with negative plastic dissipative function, with indentation depth increase.

Keywords: ideal plastic half-space, indentation, rigid elliptical cylinder, plane strain theory, contact friction, slip lines, velocities hodograph, plastic dissipative function.

REFERENCES

- [1] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1985. 366 p.
- [2] Sokolovskii V. V. The Theory of Plasticity. Vyshaya shkola: Moscow, 1969. 608 c.
- [3] Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical Theory of Plasticity. Fizmatlit: Moscow, 2001. 704 c.
- [4] Tomlenov A. D. Theory of the Metals Plastic Deformation. Metallurgia: Moscow, 1972. 408 c.
- [5] Nepershin R. I. On the ideal plastic half-space indentation by the cylinder with contact consideration // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2018. № 4 (34). С. 102–119.
- [6] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. MSTU "STANKIN": Moscow, 2016. 310 c.
- [7] Druyanov B. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Elsevier: Amsterdam, 1994. 406 c.
- [8] Prager W., Hodge P. Theory of Perfectly Plastic Solids. Dover: New York, 1968. 264 p.

Nepershin Rostislav Ivanovich, Doctor of technical sciences, Professor of the Plastic Deformation Systems Dep., Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПРЕДЕЛЬНО-УПРУГИХ БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

² *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

³ *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования, получены соотношения для определения границы раздела упругой и нелинейно-неупругой областей деформирования стержня. Рассмотрены различные случаи положения указанной границы раздела областей в зависимости от внешних нагрузок. Приведены выражения предельных нагрузок для каждого из характерных случаев расположения указанных границ: первой (деформация достигает значения предельной неупругой) и второй (деформация достигает значения деформации предразрушения).

Ключевые слова: бетонные стержни, аналитические решения, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010

УДК: 539.374

Ввиду простоты изготовления и доступности при достаточно хороших эксплуатационных характеристиках, изделия из бетона завоевали широкую популярность в строительстве. При этом расчеты в научной литературе в основном посвящены упругим решениям и не учитывают существенную нелинейность диаграмм растяжения и сжатия бетонов [1–4]. Одними из основных элементов в многоэтажных зданиях связевого

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2023

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.01.2023

каркаса являются колонны и ригели [5]. Бетонные стержни в таких сооружениях испытывают продольные и поперечные нагрузки. В случае поперечного изгиба стержня, в зависимости от положения нейтральной линии, участки стержня в сечении испытывают различные деформации и за счет использования многослойных бетонных конструкций и подбора материалов соответствующих слоев можно существенно повысить несущую способность конструкции при сопоставимом весе или стоимости материалов. Примеры таких расчетов стержней численными методами приведены в работах [1, 6, 7], а многослойных бетонных плит в работе [8]. Аналитические решения задачи центрального растяжения и сжатия физически нелинейных бетонных стержней, где отдельные участки деформируются упруго, а остальные нелинейно-неупруго, приведены в работе [9]. В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования, получены соотношения для определения границы раздела упругой и нелинейной-неупругой областей стержня.

Рассмотрим бетонный стержень с поперечным сечением и с параметрами, аналогично рассмотренными в работе [10] (рис. 1).

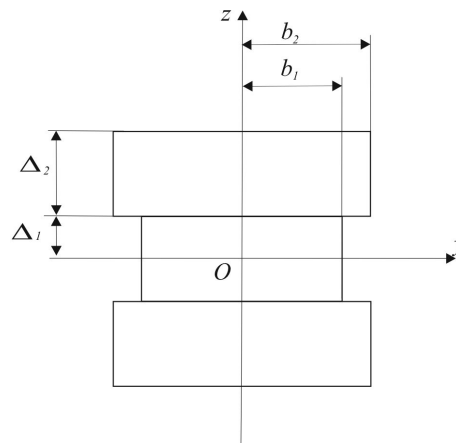


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

Примем, что связь между напряжениями и деформациями в стержне в i -ом слое определяется зависимостями при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{0i}^+$

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad (1)$$

а при $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$, равной [11–13],

$$\sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2. \quad (2)$$

В последующих расчетах перейдем к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{l} = 1, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tilde{\Delta}_i = \frac{\Delta_i}{l}, \\ \tilde{q} &= q \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{Q} = Q \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{N} = N \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{M} = M \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{l}, \end{aligned} \quad (3)$$

где обезразмеривающие величины такие: σ_{1*}^- – предел прочности при сжатии бетона марки В10, l – длина стержня, q – величина распределенной нагрузки, Q – величина перерезывающей силы, M – величина изгибающего момента, N – продольного усилия, w – величина прогиба стержня.

Для простоты обозначений индекс « \sim » опустим.

Положим, что на стержень действует равномерная нагрузка q (рис. 2).

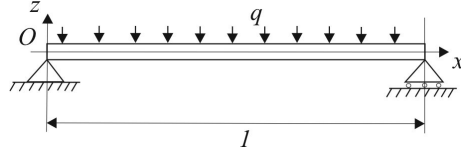


Рис. 2. Шарнирно опертый стержень

Примем справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\varepsilon(x, z) = -z\kappa_z(x), \quad \kappa_z(x) = \frac{d^2w_0(x)}{dx^2}, \quad (4)$$

где $\kappa_z(y)$ – кривизна осевой линии стержня, $w(x)$ – величина прогиба стержня.

Для случая прямого изгиба уравнения равновесия примут вид

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = q(x), \quad Q = \frac{dM_y}{dx}, \quad (5)$$

где $M_y(x)$ – проекция вектора изгибающего момента на ось Oy , Q – величина перерезывающей силы. Из условия закрепления стержня имеем

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 0, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(1) = 0. \quad (6)$$

Из соотношений (5), (6) можно получить выражение для изгибающего момента

$$M_y = q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right). \quad (7)$$

В зависимости от параметров стержня, вида марок бетонов слоев и действующих нагрузок, возможны случаи сочетания областей упругого и нелинейного деформирования бетона на разных участках стержня (рис. 3), где заштрихованной линией обозначена область нелинейно-неупругого деформирования стержня. Здесь мы учли тот факт, что при $z = 0$ деформация равна нулю и, следовательно, область нелинейно-неупругого деформирования там не может быть достигнута при любых нагрузках.

В данной работе будем ограничиваться случаем, когда область нелинейно-неупругого деформирования возникает только в области растяжения стержня.

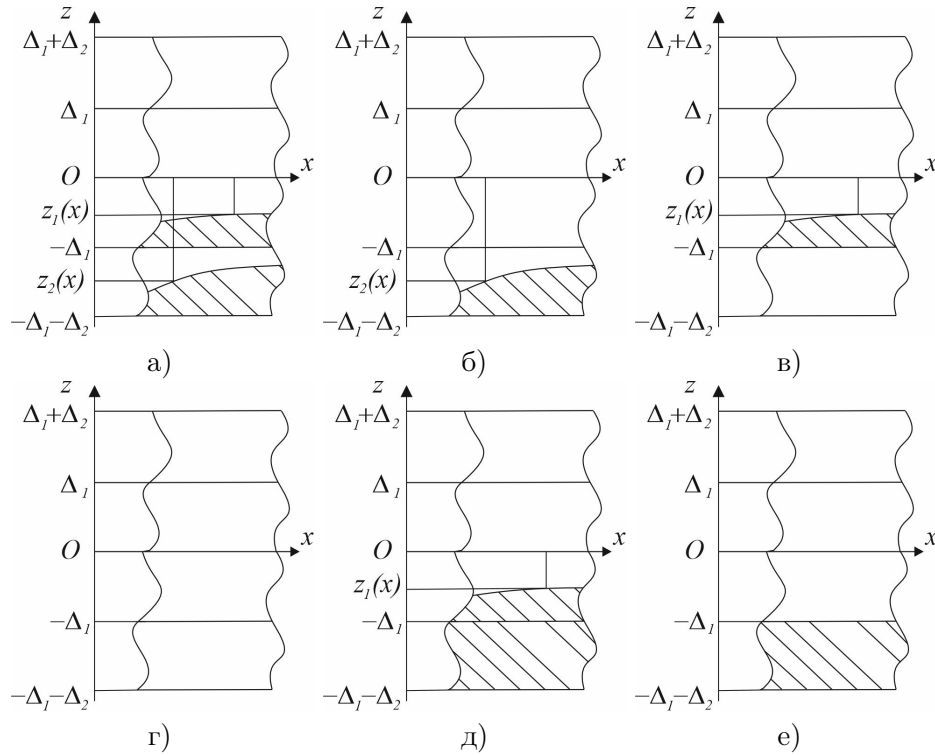


Рис. 3. Возможные случаи взаимного расположения областей упругого и нелинейного неупругого деформирования в слоях стержня

В случае наличия только области упругого деформирования (рис. 3г) значение изгибающего момента определяется из соотношений

$$\begin{aligned}
 M_y(x) &= -4 \left(\int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} z \sigma_1^e dy + \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} z \sigma_2^e dy \right) = & (8) \\
 &= 4 \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \left(E_1 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} z^2 dy + E_2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} z^2 dy \right) = \\
 &= \frac{4}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \left(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \left((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3 \right) \right).
 \end{aligned}$$

Из соотношений (7), (8) можно получить дифференциальное уравнение для определения прогиба

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \left(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \left((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3 \right) \right) = \frac{3}{8} q (x^2 - x). \quad (9)$$

В случае участка, изображенного на рис. 3б, будем иметь

$$\begin{aligned}
M_y(x) = & -4 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - 2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - \\
& -2 \int_{-\Delta_1 - \Delta_2}^{z_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy = \frac{1}{2} A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - z_2^4(x)) \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 + \\
& + \frac{2}{3} (2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + b_2 E_2 (-\Delta_1^3 - z_2^3) + \\
& + b_2 A_{12} (z_2^3 + (\Delta_1 + \Delta_2)^3)) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Приравнивая выражение момента (7), (10), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - z_2^4) + \\
& + \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0}{dx^2} (E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + \\
& + (A_{12} b_2 - E_2 b_2) z_2^3) - q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) = 0, \tag{11}
\end{aligned}$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{1,1} + f_{1,2} z_2^3}{f_{1,3} - f_{1,4} z_2^4} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x - x^2)}{f_{1,3} - f_{1,4} z_2^4} = 0, \tag{12}$$

где коэффициенты $f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{1,3}$, $f_{1,4}$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned}
f_{1,1} &= 4 (E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + 2E_1 b_1 \Delta_1^3), \\
f_{1,2} &= 4b_2 (A_{12} - E_2), \quad f_{1,3} = 3A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4, \quad f_{1,4} = 3A_{22} b_2.
\end{aligned}$$

Неизвестная граница $z_2(x)$ определяется из равенства

$$-z_2(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \varepsilon_{02}^+$$

и уравнения (12), откуда получим

$$\left(-\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2(x)} \right)^2 + \frac{f_{1,1} + f_{1,2} z_2^3}{f_{1,3} - f_{1,4} z_2^4} \left(-\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2(x)} \right) + \frac{3q(x - x^2)}{f_{1,3} - f_{1,4} z_2^4} = 0$$

и преобразуем его к виду

$$((\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,2}) z_2^4(x) + 3q(x^2 - x) z_2^2(x) + \varepsilon_{02}^+ f_{1,1} z_2(x) - (\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,3} = 0. \tag{13}$$

Соотношение (13) перепишем

$$z_2^4(x) + b_1(x) z_2^2(x) + c_1 z_2(x) + d_1 = 0, \tag{14}$$

где

$$b_1(x) = \frac{3q(x^2 - x)}{(\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,2}}, \quad c_1 = \frac{\varepsilon_{02}^+ f_{1,1}}{(\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,2}}, \quad d_1 = -\frac{(\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,3}}{(\varepsilon_{02}^+)^2 f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,2}}.$$

Для решения уравнения четвертой степени (14) составим характеристическое уравнение

$$\xi^3(x) - b_1(x) \xi^2(x) - 4d_1 \xi(x) + 4b_1(x) d - c_1^2 = 0. \tag{15}$$

Следуя формуле Кардано [14], воспользуемся заменой

$$\xi(x) = \mu(x) + b_1(x)/3, \quad (16)$$

откуда из (15), (16) получим

$$\mu^3(x) - \frac{12d_1 + b_1^2(x)}{3}\mu(x) + \frac{72b_1(x)d_1 - 2b_1^3(x) - 27c_1^2}{27} = 0. \quad (17)$$

С учетом обозначения

$$f_{1,5}(x) = -\left(\frac{12d_1 + b_1^2(x)}{9}\right)^3 + \left(\frac{72b_1(x)d_1 - 2b_1^3(x) - 27c_1^2}{54}\right)^2,$$

уравнение (17) будет иметь три решения

$$\mu_1(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad \mu_{2,3}(x) = -\frac{\alpha(x) + \beta(x)}{2} \pm i\frac{\alpha(x) - \beta(x)}{2}\sqrt{3}, \quad (18)$$

где

$$\alpha(x) = \sqrt[3]{-\frac{72b_1(x)d_1 - 2b_1^3(x) - 27c_1^2}{54} + \sqrt{f_{1,5}(x)}},$$

$$\beta(x) = \sqrt[3]{-\frac{72b_1(x)d_1 - 2b_1^3(x) - 27c_1^2}{54} - \sqrt{f_{1,5}(x)}},$$

причем $\alpha(x)$, $\beta(x)$ берутся удовлетворяющими условию

$$\alpha(x)\beta(x) = \frac{12d_1 + b_1^2(x)}{9}.$$

Если среди найденных решений $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ взять любое действительное решение $\mu_i(x)$, тогда по формуле (16) получим действительное решение $\xi_i(x)$ уравнения (15). Тогда, согласно методу Феррари, уравнение (14) будет иметь 4 корня, которые являются корнями уравнения

$$z_2^2(x) + \frac{\xi_1(x)}{2} = \pm\sqrt{(-b_1(x) + \xi_1(x))z_2^2(x) - c_1z_2(x) + \frac{\xi_1(x)^2}{4} - d_1},$$

которое можно преобразовать к виду

$$z_2^2(x) \pm \sqrt{\xi_i(x) - b_1(x)}z_2(x) + \frac{\xi_i(x)}{2} \pm \frac{-c_1}{2\sqrt{\xi_i(x) - b_1(x)}} = 0,$$

где знаки плюс-минус должны быть выбраны одинаково.

Окончательно решение примет вид

$$z_2(x) = \pm_* \frac{1}{2} \sqrt{\xi_i(x) - b_1(x)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\xi_i(x) - b_1(x) - 2\xi_i(x) \pm_* \frac{-2c_1}{\sqrt{\xi_i(x) - b_1(x)}}}. \quad (19)$$

Рассмотрим случай, соответствующий рис. 3в. В этом случае выражение для момента будет иметь вид

$$\begin{aligned}
M_y(x) = & -2 \int_{z_1}^0 dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{-\Delta_1}^{z_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^n z dy - 2 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - \\
& -4 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy = \frac{1}{2} A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4(x)) \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 + \\
& + \frac{2}{3} (-2E_1 b_1 z_1^3(x) + A_{11} b_1 (\Delta_1^3 + z_1^3(x)) + E_1 b_1 (\Delta_1^3 + z_1^3(x)) + \\
& + 2E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3)) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \tag{20}
\end{aligned}$$

из которого, с учетом выражения для момента, получим выражение для прогиба конструкции

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4) + \\
& + \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0}{dx^2} (2E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + A_{11} b_1 \Delta_1^3 + E_1 b_1 \Delta_1^3 + \\
& + (A_{11} b_1 - E_1 b_1) z_1^3) - q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) = 0. \tag{21}
\end{aligned}$$

Уравнение (21) перепишем в виде

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{2,1} + f_{2,2} z_1^3}{f_{2,3} - f_{2,4} z_1^4} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x - x^2)}{f_{2,3} - f_{2,4} z_1^4} = 0, \tag{22}$$

где величины $f_{2,1}$, $f_{2,2}$, $f_{2,3}$, $f_{2,4}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
f_{2,1} = & 8E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 4A_{11} b_1 \Delta_1^3 + 4E_1 b_1 \Delta_1^3, \quad f_{2,2} = 4b_1 (A_{11} - E_1), \\
f_{2,3} = & 3A_{21} b_1 \Delta_1^4, \quad f_{2,4} = 3A_{21} b_1.
\end{aligned}$$

Границу $z_1(x)$ для указанного случая можно получить из уравнений (12)-(19) с помощью замены ε_{01}^+ на ε_{01}^+ , $z_2(x)$ на $z_1(x)$, $f_{1,5}(x)$ на $f_{2,5}(x)$, $f_{1,1}$ на $f_{2,1}$, $f_{1,2}$ на $f_{2,2}$, $f_{1,3}$ на $f_{2,3}$, $f_{1,4}$ на $f_{2,4}$.

Для случая, соответствующего рис. 3а, имеем две неизвестные границы $z_1(x)$, $z_2(x)$. Тогда выражение для определения момента примет вид

$$\begin{aligned}
M_y(x) = & -2 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - \\
& -2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - \\
& -2 \int_{z_1}^0 dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{-\Delta_1}^{z_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^n z dy - \\
& -2 \int_{-\Delta_1-\Delta_2}^{z_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy = \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \{ E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + \\
& + A_{11} b_1 \Delta_1^3 + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + z_1^3 (A_{11} b_1 - E_1 b_1) + z_2^3 (A_{12} b_2 - E_2 b_2) \} + \tag{23}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 \{ A_{21} b_1 \Delta_1^4 + A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4 - A_{21} b_1 z_1^4 - A_{22} b_2 z_2^4 \}.$$

Неизвестные границы $z_1(x)$, $z_2(x)$ можно определить, учитывая, что деформация равна в этих точках предельной упругой для соответствующего материала слоя

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{01}^+}{z_1(x)}, \quad \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2(x)}. \quad (24)$$

Из уравнений (24) можно получить соотношения между z_1 и z_2

$$z_1(x) = \frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} z_2(x), \quad (25)$$

тогда выражение для момента (23) примет вид

$$\begin{aligned} M_y(x) = & \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \{ E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + \\ & + A_{11} b_1 \Delta_1^3 + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + \\ & + z_2^3 \left(\left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} \right)^3 (A_{11} b_1 - E_1 b_1) + (A_{12} b_2 - E_2 b_2) \right) \} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 \left\{ A_{21} b_1 \Delta_1^4 + A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \left(A_{21} b_1 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} \right)^4 + A_{22} b_2 \right) z_2^4 \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (26) получим

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{6,1} + f_{6,2} z_2^3}{f_{6,3} - f_{6,4} z_2^4} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x-x^2)}{f_{6,3} - f_{6,4} z_2^4} = 0, \quad (27)$$

где величины $f_{6,1}$, $f_{6,2}$, $f_{6,3}$, $f_{6,4}$ определяются соотношениями

$$f_{6,1} = 4E_1 b_1 \Delta_1^3 + 4E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + 4A_{11} b_1 \Delta_1^3 + 4A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3,$$

$$f_{6,2} = 4 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} \right)^3 (A_{11} b_1 - E_1 b_1) + 4(A_{12} b_2 - E_2 b_2),$$

$$f_{6,3} = 3A_{21} b_1 \Delta_1^4 + 3A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4, \quad f_{6,4} = 3A_{21} b_1 \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} \right)^4 + 3A_{22} b_2.$$

Границу $z_2(x)$ для указанного случая можно получить из уравнений (12)-(19) с помощью замены $f_{1,5}(x)$ на $f_{6,5}(x)$, $f_{1,1}$ на $f_{6,1}$, $f_{1,2}$ на $f_{6,2}$, $f_{1,3}$ на $f_{6,3}$, $f_{1,4}$ на $f_{6,4}$, граница $z_1(x)$ определяется из уравнения (25) из найденной на предыдущем шаге $z_2(x)$.

Рассмотрим случай, соответствующий рис. 3д. Тогда для изгибающего момента справедливо

$$\begin{aligned}
M_y(x) &= -2 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - 2 \int_{z_1}^0 dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - \\
&\quad - 2 \int_{-\Delta_1-\Delta_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy - 2 \int_{-\Delta_1}^{z_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^n z dy = \\
&= \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \{ E_1 b_1 (\Delta_1^3 - z_1^3) + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + A_{12} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + \\
&\quad + A_{11} b_1 (\Delta_1^3 - z_1^3) \} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 \{ A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4) + \\
&\quad + A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4) \}. \tag{28}
\end{aligned}$$

Из (7), (28) получим

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{3,1} + f_{3,2} z_1^3}{f_{3,3} - f_{3,4} z_1^4} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x-x^2)}{f_{3,3} - f_{3,4} z_1^4} = 0, \tag{29}$$

где величины $f_{3,1}$, $f_{3,2}$, $f_{3,3}$, $f_{3,4}$ определяются соотношениями

$$f_{3,1} = 4E_1 b_1 \Delta_1^3 + 4E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 4A_{12} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 4A_{11} b_1 \Delta_1^3,$$

$$f_{3,2} = 4b_1 (A_{11} - E_1), \quad f_{3,3} = 3A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4) + 3A_{21} b_1 \Delta_1^4, \quad f_{3,4} = 3A_{21} b_1.$$

Границу $z_1(x)$ для указанного случая можно получить из уравнений (12)-(19) с помощью замены ε_{02}^+ на ε_{01}^+ , $z_2(x)$ на $z_1(x)$, $f_{1,5}(x)$ на $f_{3,5}(x)$, $f_{1,1}$ на $f_{3,1}$, $f_{1,2}$ на $f_{3,2}$, $f_{1,3}$ на $f_{3,3}$, $f_{1,4}$ на $f_{3,4}$.

Для случая, соответствующего рис. 3е, имеем соотношение для момента

$$\begin{aligned}
M_y(x) &= -4 \int_0^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{-\Delta_1-\Delta_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy - \\
&\quad - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy = \frac{1}{2} A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4) \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{2}{3} \left(A_{12} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) \right) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \tag{30}
\end{aligned}$$

тогда из (7), (30) получим

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{5,1}}{f_{5,2}} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x-x^2)}{f_{5,2}} = 0, \tag{31}$$

где

$$f_{5,1} = 4 \left(A_{12} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) \right),$$

$$f_{5,2} = 3A_{22} b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4).$$

Исходя из соображений симметрии, решение достаточно рассматривать на участке $[0; 0, 5]$, решение на участке $[0, 5; 1]$ будет получаться из $[0; 0, 5]$ путем замены x на $(1-x)$.

Рассмотрим случай, когда весь стержень деформируется упруго, то есть имеет место случай, изображенный на рис. 3г, по всей длине стержня. В этом случае имеем из условия закрепления на концах стержня

$$\left. \frac{dw_0(x)}{dx} \right|_{x=0,5} = 0, \quad w_0(0) = 0. \quad (32)$$

Из (9), (32) получим

$$w(x) = \frac{q}{32 (3E_2b_2\Delta_1^2\Delta_2 + 3E_2b_2\Delta_1\Delta_2^2 + E_2b_2\Delta_2^3 + E_1b_1\Delta_1^3)} (x^4 - 2x^3 + x). \quad (33)$$

Значение нагрузки, при которой справедливо для прогиба решение (32), будет зависеть от формы поперечного сечения и состава фазовых материалов стержня. Предельная упругая деформация с повышением нагрузки впервые будет возникать в первом слое стержня при параметрах, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} < \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad (34)$$

причем величина предельной упругой нагрузки в этом случае будет равна

$$q_{1,1} = -\frac{32}{3} (b_1E_1\Delta_1^3 + b_2E_2\Delta_2^3 + 3E_2b_2\Delta_1^2\Delta_2 + 3E_2b_2\Delta_1\Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1}. \quad (35)$$

Из неравенства (34) следует, что оптимальным (все слои начинают «работать» вместе, и область нелинейного деформирования будет появляться сразу в двух слоях при одной и той же нагрузке) будет распределение толщины слоев и фазовых материалов, удовлетворяющее равенству

$$\frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.$$

В случае нарушения неравенства (34) область нелинейного деформирования будет возникать во втором слое стержня. Тогда предельная нагрузка будет определяться выражением

$$q_{1,2} = -\frac{32}{3} (b_1E_1\Delta_1^3 + b_2E_2\Delta_2^3 + 3E_2b_2\Delta_1^2\Delta_2 + 3E_2b_2\Delta_1\Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2}. \quad (36)$$

Значение нагрузки $q = q_{1,1n}$ при котором в первом слое появляется область нелинейного деформирования, а второй слой полностью в области нелинейного деформирования определяется равенством

$$q_{1,1n} = -\frac{16}{3} \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} ((A_{12}b_2 + E_2b_2) ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 2E_1b_1\Delta_1^3) - \quad (37)$$

$$-4 \left(\frac{\varepsilon_{1*}}{\Delta_1} \right)^2 A_{22}b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4). \quad (38)$$

Упругое решение (33) будет справедливо при

$$0 < |q| < \min\{|q_{1,1}|, |q_{1,2}|\}.$$

В случае же, если нагрузка превышает предельную упругую, т.е. при

$$|q| \geq \min\{|q_{1,1}|, |q_{1,2}|\},$$

в стержне в середине пролета будет область нелинейно-неупругого деформирования. Область нелинейно-неупругого деформирования может возникнуть как полностью во всем слое на некоторых участках стержня, так и быть разделенной функциями $z_1(x)$ или $z_2(x)$ в зависимости от слоя, в котором она возникла.

Рассмотрим случай, когда $z_2(x)$ достигнет границы разделяющей первый и второй слою. Значение нагрузки $q = q_{1,3}$, при которой $z_2(x)$ достигнет границы первого слоя в середине пролета, можно определить из уравнения

$$z_2(0,5) = -\Delta_1. \quad (39)$$

Тогда, решая совместно (13) и (39), можно определить значение предельной нагрузки $q_{1,3}$

$$q_{1,3} = -4 \left(\frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1} \right)^2 A_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^4 - \Delta_1^4) - \frac{16 \varepsilon_{02}^+}{3 \Delta_1} ((E_2 b_2 + A_{12} b_2) ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 2\Delta_1^3 E_1 b_1). \quad (40)$$

В случае, если нагрузка q и параметры стержня таковы, что $|q_{1,2}| \leq |q| < \min\{|q_{1,1}|, |q_{1,3}|\}$, тогда будем иметь случай, изображенный на рис. 3б, для случая $|q_{1,1}| \leq |q| < |q_{1,2}|$ имеем расположение границы, изображенное на рис. 3а.

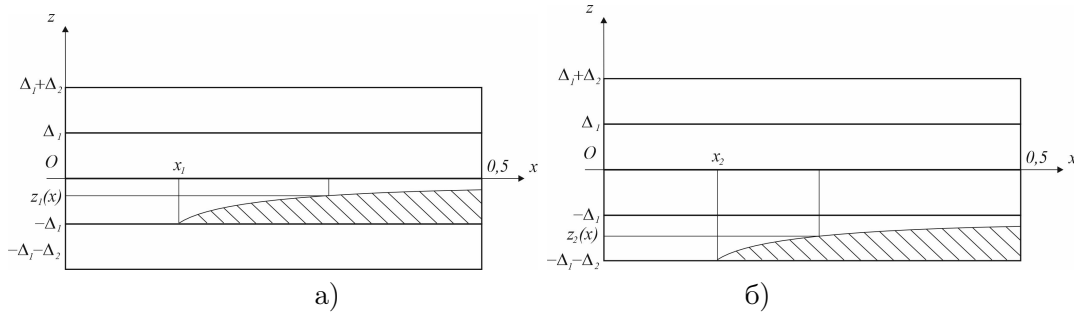


Рис. 4. Расположение зон упругого и нелинейного деформирования при а) $|q_{1,1}| \leq |q| < |q_{1,2}|$ и б) $|q_{1,2}| \leq |q| < \min\{|q_{1,1}|, |q_{1,3}|\}$

В случае наличия границы нелинейно-неупругого деформирования в первом слое стержня (рис. 3а) на участке $[0, x_1]$ будет справедливо упругое деформирование (случай 3г), определяемое выражениями (9), а на участке $[x_1, 1/2]$ упругое и нелинейно-неупругое, определяемое выражениями (22), соответствующее случаю 3в.

Значения x_1 и x_2 определяются из равенства деформации значению предельной упругой на соответствующих границах, тогда получим соотношения

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{q_{11}}{q}}, \quad (41)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{q_{12}}{q}}. \quad (42)$$

Для определения прогиба конструкции справедливы условия на концах стержня

$$w(0) = 0, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=1/2} = 0, \quad (43)$$

а также условия непрерывности прогиба и производной прогиба для упругой ($0 < x < x_1$) и нелинейной областей $x_1 < x < 1/2$.

$$w(x)|_{x=x_1-0} = w(x)|_{x=x_1+0}, \quad \left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=x_1-0} = \left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=x_1+0}. \quad (44)$$

Для случая, изображенного на рис. 4б, будем иметь на участке $[0, x_2]$ упругое деформирование (рис. 4г), а на участке $[x_2, 1/2]$ упругое и нелинейное (рис. 4б), определяемое выражениями (19).

В случае, если $\max\{|q_{1,1}|, |q_{1,2}|\} < |q| < |q_{1,3}|$, тогда будут справедливыми случаи, изображенные на рис. 5. При этом случай рис. 5а будет иметь место при $x_1 < x_{2n}$, а случай рис. 5б при $x_2 < x_{1n}$.

Значение x_{1n} (случай 5б) можно определить из уравнений (25), (27) и соотношений для прогиба и границы

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1}, \quad z_1(x_1) = -\Delta_1,$$

тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} \right) \{ 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + \\ & + z_2^3 (A_{12} b_2 - E_2 b_2) \} + \left(\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} \right)^2 \{ A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4 - A_{22} b_2 z_2^4 \} - q \left(\frac{x_{1n}^2}{2} - \frac{x_{1n}}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

и соотношения для второй границы z_2

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2}, \quad z_1(x_1) = -\Delta_1,$$

тогда из (25), (27) получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(-\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2} \right) \{ 2E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + \\ & + z_2^3 (A_{12} b_2 - E_2 b_2) \} + \left(\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2} \right)^2 \{ A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4 - A_{22} b_2 z_2^4 \} - q \left(\frac{x_{1n}^2}{2} - \frac{x_{1n}}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Решая совместно уравнения (45), (46) относительно z_1, x_{1n} , получим искомую границу x_{1n} .

Если окажется, что нагрузка больше $|q| > |q_{1,3}|$, то тогда возможны случаи образования нелинейно-неупругой области в первом слое (рис. 6) при нагрузках и параметрах стержня, удовлетворяющих условию $\max\{|q_{1,3}|, |q_{1,1n}|\} < |q|$, или отсутствия нелинейно-неупругой области в первом слое (рис. 7) при выполнении условия $|q_{1,3}| < |q| < |q_{1,1n}|$. Граница x_{1n*} определяется в этом случае из соотношения

$$x_{1n*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{q_{1,1n}}{q}}. \quad (47)$$

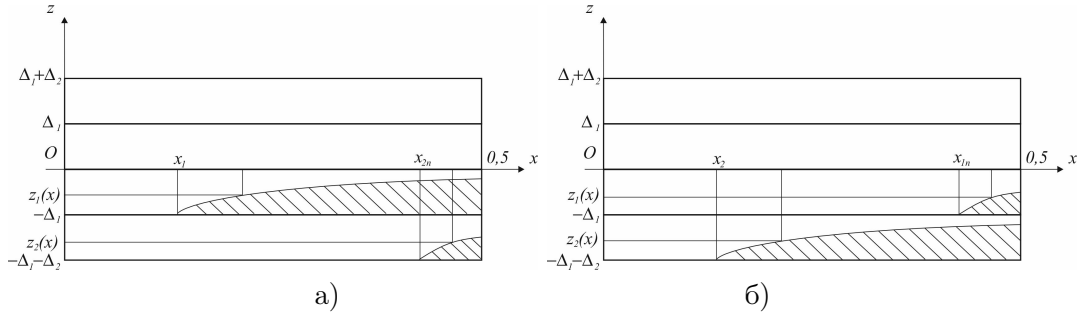


Рис. 5. Расположение зон упругого и нелинейного деформирования при $\max\{|q_{1,1}|, |q_{1,2}|\} < |q| < |q_{1,3}|$

Для случая изображенном на рис. 7 значение границы $x_{2,2}$ определяется выражением

$$x_{22} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{q_{1,3}}{q}}. \quad (48)$$

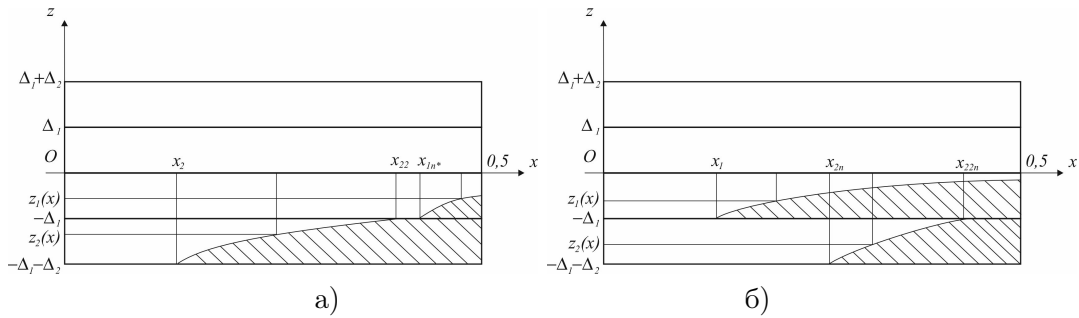


Рис. 6. Расположение зон упругого и нелинейного деформирования при $\max\{|q_{1,1n}|, |q_{1,3}|\} < |q|$

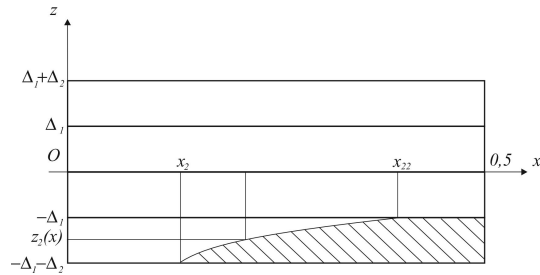


Рис. 7. Расположение зон упругого и нелинейного деформирования при $|q_{1,3}| < |q| < |q_{1,1n}|$

Указанные решения будут справедливыми до достижения деформацией предельного значения предразрушения в первом ($\varepsilon = \varepsilon_{*1}^+$) или втором ($\varepsilon = \varepsilon_{*2}^+$) слое. Очевидно,

что указанное значение будет достигнуто в середине пролета стержня на верхней контактной границе соответствующего слоя.

Сечение, соответствующее достижению деформацией предельного значения предразрушения, может возникнуть для случая, изображенного на рис. 3д. Тогда из соотношений (4), (21) получим выражение для соответствующих предельных нагрузок

$$q_{2,1} = -\frac{4}{3} \left((f_{3,3} - f_{3,4}z_1^4) \left(\frac{\varepsilon_{*1}^+}{\Delta_1} \right)^2 + (f_{3,1} + f_{3,2}z_1^3) \frac{\varepsilon_{*1}^+}{\Delta_1} \right),$$

$$q_{2,2} = -\frac{4}{3} \left((f_{3,3} - f_{3,4}z_1^4) \left(\frac{\varepsilon_{*2}^+}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)^2 + (f_{3,1} + f_{3,2}z_1^3) \frac{\varepsilon_{*2}^+}{\Delta_1 + \Delta_2} \right),$$

где z_1 определяется из уравнения, которое можно получить из (13) путём замены коэффициентов $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{1,4}$ на $f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, f_{3,4}$, предельной деформации ε_{02}^+ на ε_{01}^+ , границы $z_2(x)$ на $z_1(x)$.

Все полученные решения будут справедливы при нагрузке $|q| < \min\{|q_{2,1}|, |q_{2,2}|\}$. При этом при $|q_{2,1}| < |q_{2,2}|$ предельная деформация предразрушения будет достигнута в первом слое, в противном случае – во втором.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары: Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.
- [2] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [3] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.
- [4] Немировский Ю. В., Батурин А. А. Метод расчета деформативности и прочности одноставровых и двуставровых железобетонных стержней // Известия вузов. Строительство. 2015. № 10. С. 82–93.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение несущей способности многоэтажных зданий из физически нелинейных бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 19–35.
- [6] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.
- [7] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1(117). С. 40–46.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Deformation of multilayered physically nonlinear concrete slabs by quasi-static loads // E3S Web of Conferences. 2023. Vol. 365. p. 02011.
- [9] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность физически-нелинейного композитного бетонного стержня при центральном растяжении // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении: материалы VI Дальне-восточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г. ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2022. С. 192–199.
- [10] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельно упругий изгиб многослойных бетонных и железобетонных многослойных стержней при квазистатических нагрузках // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 95–107.

- [11] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146.
- [12] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.
- [13] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [14] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 720 с.

Yu. V. Nemirovskii^{1,2}, S. V. Tikhonov³

DETERMINATION OF LIMIT LOADS AT TRANSVERSE BENDING OF MULTILAYER ULTIMATE ELASTIC CONCRETE RODS

¹*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

³*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. In this paper, the problem of bending of a multilayered rod by transverse loads in the presence of zones of elastic and nonlinear-inelastic deformation is considered, the ratios are obtained to determine the boundary between the elastic and nonlinear-inelastic areas of deformation of the rod. Various cases of the position of the specified boundary between areas are considered, depending on external loads. The expressions for ultimate loads are given for each of the characteristic cases of the location of these boundaries: the first (deformation reaches the limit elastic value) and the second (deformation reaches the value of pre-fracture deformation).

Keywords: concrete rods, analytical solutions, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads

REFERENCES

- [1] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Bearing capacity of multilayer concrete bars. Cheboksary: Publishing house of the Chuvash University, 2022. 180 p.
- [2] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of the Belgorod State Technological University. V.G. Shukhov. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [3] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered bar systems. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 p.
- [4] Nemirovsky Y. V., Baturin A. A. Method for calculating the deformability and strength of single-tee and double-tee reinforced concrete bars // News of universities. Construction. 2015. no. 10. P. 82–93.
- [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Determination of the bearing capacity of multi-storey buildings from physically non-linear concrete bars // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2022. no. 2(52). P. 19–35.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

-
- [6] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2020. no. 1. P. 60–73.
- [7] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel-fiber-reinforced concrete bars // News of the Altai State University. 2021. no. 1(117). P. 40–46.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Deformation of multilayered physically nonlinear concrete slabs by quasi-static loads // E3S Web of Conferences. 2023. Vol. 365. p. 02011.
- [9] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Bearing capacity of a physically non-linear composite concrete bar under central tension // Fundamental and Applied Problems of Deformable Solid Mechanics and Advanced Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering: Proceedings of the VI Far East Conference with International Participation, Komsomolsk-on-Amur, October 5-7, 2022. FGBOU VO «KnAGU», 2022. P. 192–199.
- [10] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimately elastic bending of multilayer concrete and reinforced concrete multilayer bars under quasi-static loads // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2022. no. 4(54). P. 95–107.
- [11] Mishchenko A. V., Nemirovskiy Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements during longitudinal-transverse bending // News of universities. Construction. 2013. no. 4. P. 133–146.
- [12] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity: Proceedings of the XIX All-Russian Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005. P. 184–188.
- [13] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [14] Korn G., Korn T. Handbook of mathematics (for scientists and engineers). M.: Science, 1973. 720 p.

Е. В. Мурашкин, Т. К. Нестеров, Н. Э. Стадник

УСЛОВИЯ СОВМЕСТИМОСТИ В МОДЕЛЯХ ПОЛУИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе обсуждаются условия совместности на поверхностях слабых и сильных разрывов, распространяющихся в сплошных полуизотропных термоупругих средах. Для вывода таких граничных условий применяется хорошо известная теория Югонио–Адамара, существенно развитая Г. И. Быковцевым, обобщенная на случай псевдотензорных физических полей. Рассматриваются вопросы дифференцирования по псевдоскалярному времени и его преобразования при зеркальных отражениях и инверсиях пространства. Получены геометрические и кинематические условия совместности первого порядка в терминах псевдотензоров. Выведены условия совместности для слабых разрывов перемещений и микровращений в полуизотропном микрополярном континууме. Получены условия совместности на сильных разрывах в полуизотропном термоупругом континууме.

Ключевые слова: поверхность разрыва, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, псевдоскалярное время, условие совместности, микрополярная упругость, перемещение, микровращение

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.011

УДК: 539.374

1. Введение. Для моделирования поведения континуумов, которые не обладают инвариантностью к зеркальным отражениям и инверсиям пространства, необходимо использовать алгебру псевдотензоров. Это особенно актуально для таких материалов, как метаматериалы и биоматериалы. В таких средах динамические процессы,

© Мурашкин Е. В., Нестеров Т. К., Стадник Н. Э. 2023

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Нестеров Тимофей Константинович

e-mail: nesterovtim4@gmail.com, аспирант, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Стадник Никита Эдуардович

e-mail: nik-122@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

Поступила 20.02.2023

например, процессы аддитивных технологий, связаны с распространением поверхностей уровня псевдоскалярных физических полей. Работы [1-3] посвящены разработке соответствующего математического аппарата.

В механике континуума существует проблема постановки двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов физических полей. Эта задача является нетривиальной и требует использования специального математического аппарата, который был разработан в работах [5,6] по вариационному исчислению. Условия совместности на ударных волнах в газе были получены Ренкиным и Югонио [7,8]. В монографии [9] изложена теория геометрических и кинематических условий совместности первого и второго порядка, которые используются для решения задач, связанных с распространением волн в сплошных средах.

Для моделирования процессов распространения поверхностей разрывов в необратимо деформируемых средах был разработан лучевой метод решения динамических задач Г.,И. Быковцевым [10-12]. Он основан на специальном выборе "внутренней" параметризации поверхности разрыва и представляет собой эффективный подход к решению данной проблемы (см. также дополнительные главы в монографиях по механике континуума [13,14]). Во всех вышеуказанных публикациях [5-14] для описания динамических процессов использовались абсолютные тензоры.

2. Геометрические условия совместности первого порядка.

Допустим теперь, что поверхность уровня Σ псевдоскалярного поля $f(x^i)$, задается внутренней Гауссовой параметризацией u^α ($\alpha = 1, 2$)

$$x^k = x^k(u^1, u^2, t). \quad (1)$$

В формуле (1) x^k являются пространственными "внешними" координатами для Σ , а u^α — "внутренними". В работах Г. И. Быковцева показано, что использование специальной Гауссовой параметризации [13, с. 224], при которой псевдовектор $\partial. x^i$ направлен вдоль псевдовектора нормали $n^{[W]i}$ к поверхности Σ приводит к соотношению

$$\partial. x^i = e^{[W]} G^{[W]i} n^{[W]i}. \quad (2)$$

Г.И. Быковцев систематически использовал уравнение (29) в работах по механике деформируемого твердого тела [10-12].

Пусть задано физическое контравариантное псевдовекторное поле $\varphi^{[P]k}(x^s, t)$ веса P .¹ Предположим, что $\varphi^{[P]k}$ непрерывно и дифференцируемо на каждой стороне поверхности Σ . Величину разрыва $[\varphi^{[P]k}]$ поля $\varphi^{[P]k}$ определим равенством

$$[\varphi^{[P]k}] = \varphi^{[P]k}_+ - \varphi^{[P]k}_-, \quad (3)$$

¹Поясним, что контравариантный псевдовектор $\varphi^{[P]k}$ используется как "модель", т.е. вместо него можно использовать любое псевдотензорное поле.

где $+$ и $-$ относятся к соответствующим сторонам \sum_+ и \sum_- поверхности Σ . Аналогичным образом определяются разрывы производных ∂_i поля $\varphi^{[P]k}$ по пространственным координатам x^i . Введем следующие обозначения

$$[\varphi^{[P]k}] = A^k, \quad [\partial_i \varphi^{[P]k}] = B^k n_i, \quad [\partial_i \partial_j \varphi^{[P]k}] = C^k n_i n_j, \quad (4)$$

где n_j — единичный псевдовектор нормали к поверхности Σ , направленный в сторону от \sum_- к \sum_+ . Здесь, с особой осторожностью, следует учитывать четность (не четность) веса W псевдовекторного поля $\varphi^{[P]k}$, т.к. при преобразованиях инверсии пространства и зеркальных отражениях направление псевдовектора нормали n_j может измениться.

Легко заметить, что

$$\partial_\alpha A^k = [\partial_\alpha \varphi^{[P]k}] = [\partial_i \varphi^{[P]k}] \partial_\alpha x^i. \quad (5)$$

Используя известное тождество

$$g^{\alpha\beta} x_\alpha^i x_\beta^j = g^{ij} - e^{-2W} n_i n_j, \quad (6)$$

после несложных преобразований получим

$$[\partial_i \varphi^{[P]k}] = B^k n_i + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha A^k \partial_\beta x_i, \quad (7)$$

где $g^{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой фундаментальной квадратичной формы поверхности Σ .

3. Дифференцирование по псевдоскалярному времени и кинематические условия совместности первого порядка. Рассмотрим два положения поверхности Σ : $\Sigma(t)$ и $\Sigma(t + \delta t)$.

Построим вектор единичной нормали n^k в некоторой точке P поверхности Σ , а через P' обозначим точку, в которой нормаль n^k пересекает поверхность $\Sigma(t + \delta t)$. Пусть точка P имеет координаты x^k , а P' — координаты $x^k + \delta x^k$.

Нормальная скорость распространения поверхности Σ определяется согласно правилу

$$G^{[-W]} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\delta t}. \quad (8)$$

Устремляя к нулю расстояние между поверхностями $\Sigma(t)$ и $\Sigma(t + \delta t)$, т.е. устремляя δt к нулю, можно получить следующие выражения для δ -производных

$$\frac{\delta \varphi^k}{\delta t} = \frac{[-W]_{[P]k}}{\delta \varphi^k_+}, \quad \frac{\delta \varphi^k}{\delta t} = \frac{[-W]_{[P]k}}{\delta \varphi^k_-}, \quad \frac{\delta A^k}{\delta t} = \frac{[-W]_{[P]k}}{\delta A^k}, \quad (9)$$

откуда не сложно получить кинематические условия совместности первого порядка

$$\begin{aligned} \left[\frac{[-W]_{[P]k}}{\delta \varphi^k} \right] &= \frac{[-W]_{[P]k}}{\delta \varphi^k_+} - \frac{[-W]_{[P]k}}{\delta \varphi^k_-} = \frac{[-W]_{[P]k}}{\delta A^k}, \\ \frac{[-W]}{\delta} x^i &= e^{-W} \frac{[-W]}{G} \frac{[-W]}{n^i}, \\ \left[\frac{[-W]_{[P]k}}{\delta \varphi^k} \right] &= -e^W \frac{[-W]}{B} \frac{[-W]}{k} \frac{[-W]}{G} + \frac{[-W]_{[P]k}}{\delta A^k}, \end{aligned} \quad (10)$$

Используя полученные соотношения первого порядка не сложно получить условия совместности второго и более высоких порядков.

4. Слабые разрывы перемещений и микровращений

Исследуем закономерности распространения слабых разрывы перемещений u^k и микровращений ϕ^k в микрополярном континууме. Отметим, что система уравнений динамики содержит частные производные не выше второго порядка. Пусть в трехмерном пространстве с нормальной скоростью G распространяется фронт (волновая поверхность) Σ слабых разрывов перемещений u^k и микровращений ϕ^k . Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара—Томаса (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned} [\partial_i \partial_j u^k] &= C^{[-2W]k} \frac{[-W]}{n_i} \frac{[-W]}{n_j}, & [\partial_i \partial_j \phi^k] &= S^{[1-2W]k} \frac{[-W]}{n_i} \frac{[-W]}{n_j}, \\ [\partial_i \partial_j u^k] &= -e^W \frac{[-W]}{G} C^{[-2W]k} \frac{[-W]}{n_i}, & [\partial_i \partial_j \phi^k] &= -e^W \frac{[-W]}{G} S^{[1-2W]k} \frac{[-W]}{n_i}, \\ [\partial_i \partial_j u^k] &= e^{2W} \frac{[-W]}{G} \frac{[-W]}{G} C^{[-2W]k}, & [\partial_i \partial_j \phi^k] &= e^{2W} \frac{[-W]}{G} \frac{[-W]}{G} S^{[1-2W]k}. \end{aligned} \quad (11)$$

5. Условия совместности сильных разрывов в термоупругих микрополярных средах. Условия совместности для сильных разрывов физических полей необходимо дополнить геометрическими и кинематическими условиями совместности Адамара—Томаса [9] второго и первого порядка справедливыми для произвольного поля φ^k .

Плотность действия термоупругого микрополярного континуума зададим в форме

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho g_{is} \partial_i u^i \partial_s u^s + \frac{1}{2} \rho g_{is} \mathcal{I} \partial_i \phi^i \partial_s \phi^s - \psi(\epsilon_{is}, \kappa^{[+1]is}, \theta). \quad (12)$$

Здесь $\mathcal{I}^{[-2]}$ — микроинерция, ρ — плотность, g_{ij} — метрический тензор, ψ — плотность свободной энергии Гельмгольца, ϵ_{is} — асимметричный тензор деформаций, $\kappa^{[+1]is}$ — тензор изгиба кручения.

Уравнения поля в этом случае для декартовой системы координат принимают вид:

$$\begin{aligned} \partial_s t_{is} - \rho \partial_{..} u_i &= 0, \\ \partial_s [\mu]_{is}^{[-1]} - 2 [\tau]_i^{[-1]} - \rho \mathfrak{I} [\partial_{..} \phi]_s^{[+1]} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

и дополняются определяющими уравнениями:

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad t_{is} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{is}}, \quad [\mu]_{is}^{[-1]} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial [\kappa]_{is}^{[+1]}}, \quad J^j = J^j(\nabla_k \ln \theta). \quad (14)$$

Приняв обозначения для 4-псевдотензора Пиола–Кирхгофа и 4-псевдотензора энергии–импульса поля

$$S_4^{\beta \cdot k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad T_{\cdot \alpha}^{\beta \cdot} = \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad (15)$$

условия совместности в трехмерной форме имеют вид

$$\begin{aligned} -c [T_{\cdot 4}^{\lambda \cdot}] + n_\mu [T_{\cdot 4}^{\mu \cdot}] &= 0, \quad -c [T_{\cdot \lambda}^{\lambda \cdot}] + n_\mu [T_{\cdot \lambda}^{\mu \cdot}] = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3), \\ -c [S_{\cdot 4}^{\lambda \cdot}] + n_\mu [S_{\cdot 4}^{\mu \cdot}] &= 0 \quad (\mu = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (16)$$

где c — нормальная скорость распространения поверхности Σ , n_μ — единичный вектор 3-нормали.

Условия совместности на поверхности сильного разрыва поля в микрополярной упругой среде, согласно (16), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} c[\psi] + n_i [t_{is} \partial_{..} u_s + [\mu]_{is}^{[-1]} \partial_{..} \phi]_s^{[+1]} &= 0, \\ c[\frac{1}{2} \rho \partial_{..} u_s \partial_i u_s + \frac{1}{2} \rho \mathfrak{I} \partial_{..} \phi]_s \partial_i \phi]_s^{[+1]} + s \partial_i \vartheta + n_k [\mathcal{L} \delta_{ik} + t_{ks} \partial_i u_s + [\mu]_{ks}^{[-1]} \partial_i \phi]_s^{[+1]} &= 0, \\ c\rho [\partial_{..} u_i] = n_s [t_{is}], \quad c\rho \mathfrak{I} [\partial_{..} \phi]_i^{[+1]} = n_s [\mu]_{is}^{[-1]}, \\ c[s] &= n_i [j_i]. \end{aligned} \quad (17)$$

Заключение. В настоящей работе обсуждаются условия совместности на поверхностях слабых и сильных разрывов, распространяющихся в сплошных полужизотропных термоупругих средах. Для вывода таких граничных условий применяется хорошо известная теория Югионо–Адамара, существенно развитая Г. И. Быковцевым, обобщенная на случай псевдотензорных физических полей. Рассматриваются вопросы дифференцирования по псевдоскалярному времени и его преобразования при зеркальных отражениях и инверсиях пространства. Получены геометрические и кинематические условия совместности первого порядка в терминах псевдотензоров. Выведены условия совместности для слабых разрывов перемещений и микровращений в полужизотропном микрополярном континууме. Получены условия совместности на сильных разрывах в полужизотропном термоупругом континууме.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 38–46.
- [2] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики полужизотропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.

- [3] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 3. С. 424–444.
- [4] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Arseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия “Физико-математические науки.” 2020. Т. 24, No 4. С. 752–761.
- [5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, 1865.
- [6] Erdmann G. Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
- [7] Rankine W.J.M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
- [8] Hugoniot P. H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits, 2e Partie // Journal de l'École Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3–97.
- [9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
- [10] Быковцев Г.И., Мяснянкин Ю.М. О поверхностях скольжения в трехмерных жестко-пластических телах // ДАН СССР 1966. Т. 167. № 6. С.1260–1262.
- [11] Быковцев Г.И., Крегова Л.Д. О волнах ускорений в идеальных упруго- пластических телах // Инж. журнал МТТ. 1967. № 1. С.102–110.
- [12] Быковцев Г.И., Власова И.А. Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности // Мех. деформируемых твердых тел, Вып. 2. Куйбышев, 1977. С.33-68.
- [13] Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
- [14] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

E. V. Murashkin, T. K. Nesterov, N. E. Stadnik

COMPATIBILITY CONDITIONS IN MODELS OF SEMI-ISOTROPIC THERMOELASTIC SOLIDS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we discuss the compatibility conditions on the surfaces of weak and strong discontinuities propagating in continuous semi-isotropic thermoelastic media. To derive such boundary conditions, the well-known Yugonio–Hadamard theory, substantially developed by G. I. Bykovtsev, and generalized to the case of pseudotensor physical fields, is used. The questions of differentiation with respect to pseudoscalar time and its transformation under mirror reflections and space inversions are considered. First-order geometric and kinematic compatibility conditions are obtained in terms of pseudotensors. Compatibility conditions are derived for weak discontinuities of displacements and microrotations in a hemitropic micropolar continuum. Compatibility conditions are obtained for strong discontinuities in a semi-isotropic thermoelastic continuum.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, constitutive pseudoscalars, micropolar hemitropic continuum, elastic potential, primary wave mode, mirror mode

REFERENCES

- [1] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.
- [2] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics. 2020, T. 24, No 3. P. 424–444.
- [3] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of Samara State Technical University, Series “ Physics and Mathematics. ” 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761.
- [4] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On one differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing bodies // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Rigid Body Mechanics. 2019. No. 6. P. 38–46.
- [5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin / New York Berlin, New York, 1865.
- [6] Erdmann G. Ueber unstetige L "o sungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
- [7] Rankine W. J. M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
- [8] Hugoniot P.H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et sp 'e cialement dans les gaz parfaits, 2e Part // Journal de l' 'E cole Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3-97.
- [9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
- [10] Bykovtsev G.I., Myasnyankin Yu.M. Sliding surfaces in three-dimensional rigid-plastic bodies // DAN SSSR 1966. Vol. 167. No. 6. pp. 1260-1262.
- [11] Bykovtsev G.I., Kretova L.D. On waves of accelerations in ideal elastoplastic bodies // Inzh. magazine MTT. 1967. No. 1. P.102-110.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc. (Phys.-Math.), MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Timofei K. Nesterov, post graduate student, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Nikita E. Stadnik, Minor Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

-
- [12] Bykovtsev G.I., Vlasova I.A. Properties of the equations of the spatial problem of the theory of ideal plasticity // *Mekh. deformed. solid, solid*, Vol. 2. Kuibyshev, 1977. S. 33-68.
- [13] Ivlev D.D., Bykovtsev G.I. The theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971. 232 p.
- [14] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. The theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p.

Е. В. Мурашкин

О СВЯЗИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ СОСТОЯНИЯ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе обсуждаются некоторые вопросы моделирования полуизотропных упругих сред. Вводятся квадратичные энергетические формы термодинамического потенциала состояния. Исследуемые энергетические формы полагаются абсолютными инвариантами по отношению к произвольным преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях). В результате применения специальных координатных представлений полуизотропных псевдотензоров четвертого ранга можно определить все 9 ковариантно постоянных определяющих псевдоскаляров, характеризующих полуизотропную упругую среду. Выполнено сравнение и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры и псевдоскаляры нейберовской, конвенциональной, первой и второй основных естественных энергетических форм, в том числе, с конвенционально используемыми полуизотропными псевдоскалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной (являющейся псевдоскаляром отрицательного веса, чувствительным к отражениям трехмерного пространства), и шестью безразмерными псевдоскалярами.

Ключевые слова: псевдотензор, квадратичная энергетическая форма, термодинамический потенциал состояния, определяющий псевдотензор, характерная микродлина, хиральная среда, микрополярный полуизотропный континуум

DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012

УДК: 539.374

1. Введение. С использованием специальных координатных представлений для полуизотропных тензоров четвертого ранга можно выполнить редукцию линейного анизотропного микрополярного тела к полуизотропной среде, что позволяет существенно сократить количество определяющих скаляров до девяти. В стандартном подходе, такие скаляры включают модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характеристический размер микроструктуры, а также шесть безразмерных параметров.

© Мурашкин Е. В., 2023

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

Поступила 20.03.2023

Наиболее распространенной в современной научной литературе энергетической формой потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений является термодинамический потенциал состояния предложенный в работах [1–3]. Альтернативные подходы к формулировке потенциала напряжений можно найти в работах [4–8]. В данной работе производится анализ различных основных естественных энергетических форм и получены соотношения между определяющими скалярами, включая полуизотропные скаляры, которые широко используются в научных исследованиях.

В статьях [8, 9] были рассмотрены проблемы формулировки энергетических форм упругих микрополярных потенциалов для полуизотропных сред в терминах псевдотензоров, которые играют ключевую роль в моделировании таких систем. Было проведено сравнение и получены соотношения между определяющими скалярами и псевдоскалярами конфенциональной, первой и второй естественных энергетических форм, включая конвенциональные полуизотропные псевдоскаляры. В настоящей работе проводится сравнение указанных основных энергетических форм с энергетической формой, введенной в научный оборот Нейбером в работе [5]. Следовательно, данная работа является продолжением публикаций [8, 9].

2. Кинематика микрополярного тела. Полные псевдовекторы микроповорота в микрополярных теориях задаются как модулированные вектора поворота

$$\phi^{[+1]h} = -\frac{1}{2}\epsilon^{hkl}\lambda_{[kl]}, \quad \phi_h^{[-1]} = -\frac{1}{2}\epsilon_{hkl}\lambda^{[kl]}. \quad (1)$$

Ковариантный вектор вихря $\omega_h^{[-1]}$ отрицательного веса определяется согласно:

$$\omega_h^{[-1]} = \frac{1}{2}\epsilon_{h.l}^{[-1].k}\nabla_k u^l,$$

где ∇_k — ковариантная производная, $\epsilon_{h.l}^{[-1].k}$ специальный символ перестановок, определяемый согласно правилу

$$\epsilon_{h.l}^{[-1].k} = g^{ks}\epsilon_{hsl}. \quad (2)$$

Ковариантный псевдовектор относительного микроповорота $\varphi_h^{[-1]}$ отрицательного веса -1 можно определить согласно:

$$\varphi_h^{[-1]} = \phi_h^{[-1]} - \omega_h^{[-1]}.$$

В дальнейшем примем условие малости псевдовектора относительного микроповорота (т.е., $\varphi_h^{[-1]}$ стремится к нулю).

Асимметричный тензор малых деформаций может быть введен в рассмотрение согласно

$$\epsilon^{kl} = \epsilon^{(lk)} + \epsilon^{[lk]} = \nabla^{(l} u^{k)} - \epsilon^{[+1]klh}\varphi_h^{[-1]} = \nabla^l u^k - \epsilon^{[+1]klh}\varphi_h^{[-1]},$$

а тензор изгиба кручения

$$\kappa_{lk}^{[-1]} = \nabla_l \phi_k^{[-1]}.$$

3. Первая основная естественная форма потенциала силовых и моментных напряжений. Микрополярное тело называется полуизотропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т.е. полуизотропны, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства. Введем микрополярный упругий потенциал \mathcal{U} [7], рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с псевдотензорными аргументами

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \overset{[+1]}{\kappa}_{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}_i, \kappa_i), \quad (3)$$

Упругий потенциал \mathcal{U} по физическому смыслу является объективной величиной и не может меняться при повороте осей системы координат. Поэтому он (также как и его первая вариация $\delta\mathcal{U}$) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется сбалансированной по весам суммой абсолютных скаляров

$$\delta\mathcal{U} = t^{(ij)}\delta\epsilon_{(ij)} + \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)}\delta\overset{[+1]}{\kappa}_{(ij)} + 2\overset{[-1]}{\tau}_i\delta\overset{[+1]}{\varphi}_i + 2\mu^i\delta\kappa_i, \quad (4)$$

где $\overset{[-1]}{\tau}_j$ — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$2\overset{[-1]}{\tau}_j = -\epsilon_{jik}t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj}\overset{[-1]}{\tau}_j. \quad (5)$$

Ассоциированный (сопутствующий) абсолютный вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (5)

$$2\mu^i = \epsilon^{iks}\overset{[-1]}{\mu}_{[ks]}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = e_{isj}\mu^j. \quad (6)$$

В итоге, определяющие уравнения примут вид:

$$t^{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\epsilon_{(ij)}}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}_{(ij)}}, \quad 2\overset{[-1]}{\tau}_i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\overset{[+1]}{\varphi}_i}, \quad 2\mu^i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\kappa_i}. \quad (7)$$

В качестве потенциала \mathcal{U} , который как указывалось выше инвариантен относительно поворотов, трансляций пространства, его инверсий и зеркальных отражений, для анизотропного упругого тела примем

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & C_{1\ islm}^a \epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + C_{2\ islm}^{[-2]} \overset{[+1]}{\kappa}_{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + C_{3\ islm}^{[-1]} \epsilon_{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + \\ & + C_{4\ is}^{[-2]} \overset{[+1]}{\varphi}_i\overset{[+1]}{\varphi}_s + C_{5\ is\kappa_i\kappa_s} + C_{6\ is\kappa_i}^{[+1]}\overset{[+1]}{\varphi}_s, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\overset{[g]}{C}_{\alpha\ islm}^a, \overset{[g]}{C}_{\alpha\ is}^a$ — определяющие псевдотензоры, для которых выполняются условия симметрии

$$\overset{[g]}{C}_{\alpha\ islm}^a = \overset{[g]}{C}_{\alpha\ lmis}^a, \quad \overset{[g]}{C}_{\alpha\ is}^a = \overset{[g]}{C}_{\alpha\ si}^a.$$

Первой основной энергетической формой потенциала (8) для полуизотропного упругого тела будем называть:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & A_1 g^{is} g^{lm} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + \frac{A_2^{[-2]}}{2} g_{is} g_{lm} \kappa^{[+1](is)} \kappa^{[+1](lm)} + A_3 g^{is} g^{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(sm)} + \\ & + \frac{A_4^{[-2]}}{4} g_{is} g_{lm} \kappa^{[+1](il)} \kappa^{[+1](sm)} + \frac{A_5^{[-2]}}{5} g_{is} \varphi^{[+1]_i} \varphi^{[+1]_s} + A_6 g^{is} \kappa_i \kappa_s + \\ & + \frac{A_7^{[-1]}}{7} g^{is} g_{lm} \epsilon_{(is)} \kappa^{[+1](lm)} + \frac{A_8^{[-1]}}{8} \epsilon_{(is)} \kappa^{[+1](is)} + \frac{A_9^{[-1]}}{9} \kappa_i \varphi^{[+1]_i}, \quad (9) \end{aligned}$$

где определяющие псевдоинварианты $\overset{[g]}{A}_a$ ($a = 1, \dots, 9$; $g = 0, \pm 1, \pm 2$) с соответствующими весами собственно и задают модель полуизотропной упругой среды. Только три из них, а именно $\overset{[-1]}{A}_7$, $\overset{[-1]}{A}_8$, $\overset{[-1]}{A}_9$, оказываются чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства.

Анизотропные определяющие псевдотензоры для полуизотропной среды примут вид

$$\begin{aligned} C_{1islm} &= A_1 g^{is} g^{lm} + A_3 g^{il} g^{sm}, \\ C_{2islm} &= A_2 g^{is} g^{lm} + A_4 g^{il} g^{sm}, \\ C_{3islm} &= A_7 g^{is} g^{lm} + A_8 g^{il} g^{sm}, \\ C_{4is} &= A_5 g_{is}, \quad C_{5is} = A_6 g_{is}, \quad C_{6is} = A_9 g_{is}. \end{aligned} \quad (10)$$

Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений в терминах псевдотензоров в произвольной криволинейной системе координат получаются в виде

$$\begin{cases} t^{(is)} = 2A_1 g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + 2A_3 g^{il} g^{sm} \epsilon_{(lm)} + \frac{A_7^{[-1]}}{7} g^{is} g_{lm} \kappa^{[+1](lm)} + \frac{A_8^{[-1]}}{8} \kappa^{[+1](is)}, \\ \mu^{[-1](is)} = 2 \frac{A_2^{[-2]}}{2} g_{is} g_{lm} \kappa^{[+1](lm)} + 2 \frac{A_4^{[-2]}}{4} g_{il} g_{sm} \kappa^{[+1](lm)} + \frac{A_7^{[-1]}}{7} g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \frac{A_8^{[-1]}}{8} \epsilon_{(is)}, \\ 2\tau_i^{[-1]} = 2 \frac{A_5^{[-2]}}{5} g_{is} \varphi^{[+1]_s} + \frac{A_9^{[-1]}}{9} \kappa_i, \\ 2\mu^i = 2A_6 g^{is} \kappa_s + \frac{A_9^{[-1]}}{9} \varphi^{[+1]_i}. \end{cases} \quad (11)$$

Вместо девяти определяющих псевдоскаляров $\overset{[g]}{A}_a$, появляющихся в выражении для упругого потенциала (9), удобнее ввести другие определяющие псевдоскаляры:

$$\begin{aligned} \overset{[-2]}{A}_1 &= G\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad \overset{[-1] [-1]}{A}_2 = G \overset{[-2]}{L} \overset{[-1] [-1]}{L} c_3, \quad \overset{[-1]}{A}_3 = G, \\ \overset{[-2]}{A}_4 &= G \overset{[-1] [-1]}{L} \overset{[-1]}{L}, \quad \overset{[-2]}{A}_5 = 2G \overset{[-2]}{c}_1, \quad \overset{[-1] [-1] [+2]}{A}_6 = G \overset{[-1] [-1]}{L} \overset{[-1] [+2]}{L} c_2, \\ \overset{[-1]}{A}_7 &= G \overset{[-1]}{L} c_4, \quad \overset{[-1]}{A}_8 = G \overset{[-1]}{L} c_5, \quad \overset{[-1]}{A}_9 = G \overset{[-1]}{L} c_6, \end{aligned} \quad (12)$$

с тем чтобы в итоге пришлось бы иметь дело с двумя размерными и семью безразмерными параметрами:

G — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений);
 ν — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности);
 L — характеристическая микродлина;
 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности скаляры и псевдоскаляры.

В результате вместо (11) приходим к определяющим уравнениям полуизотропной микрополярной среды:

$$\begin{cases} t^{(is)} = 2G \left(\nu(1 - 2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm} \right) \epsilon_{(lm)} + G \frac{[-1]}{L} (c_4 g^{is} g_{lm} \kappa^{[+1](lm)} + c_5 \kappa^{[+1](is)}), \\ \mu_{(is)}^{[-1]} = 2G \frac{[-1][-1]}{L} (c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \kappa^{[+1](lm)} + G \frac{[-1]}{L} (c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}), \\ \tau_i^{[-1]} = 2G \frac{[-2]}{L} c_1 g_{is} \varphi^{[+1]s} + \frac{1}{2} G \frac{[-1]}{L} c_6 \kappa_i, \\ \mu^i = G \frac{[-1][-1][+2]}{L} c_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} G \frac{[-1]}{L} c_6 \varphi^i. \end{cases} \quad (13)$$

4. Вторая основная естественная форма потенциала силовых и моментных напряжений. Введем далее в рассмотрение микрополярный упругий потенциал \mathcal{U} , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема $d\tau$,² с естественными псевдотензорными асимметричными аргументами (пока нет разделения на симметричную и антисимметричную части)

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{ij}, \kappa_{i.s}^{[+1]}), \quad (14)$$

где ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформации; $\kappa_{i.s}^{[+1]}$ — псевдотензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал полагается абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим в том числе от зеркальных отражений и центральной инверсии трехмерного пространства.

Определяющие уравнения в этом случае примут вид

$$t^{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \mu_{i.k}^{[-1]} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa_{i.k}^{[+1]}}. \quad (15)$$

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела вторая основная энергетическая форма в произвольной системе координат записывается в виде:

$$2\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + \frac{[-2]}{2} H^{islm} \kappa_{is}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[+1]} + \frac{[-1]}{3} H^{islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}^{[+1]}. \quad (16)$$

Отметим, что единственным определяющим псевдотензором четвертого ранга чувствительным к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства оказывается определяющий псевдотензор $H_3^{[-1]islm}$ отрицательного веса -1 .

²По поводу инвариантных и псевдоинвариантных элементов объема см., например, публикации [10, 11].

Воспользовавшись определяющими соотношениями (15), получим

$$\begin{aligned} t^{is} &= H_1^{islm} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]isl.[+1].m} \kappa_{l.m}, \\ \mu_{.s}^{[-1]i.} &= H_2^{[-2]i.l.[+1].m} \kappa_{l.m} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]lmi.} \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для определяющих полуизотропных тензоров и псевдотензоров координатные представления получаются в форме [12]

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a g^{is} g^{lm} + b g^{il} g^{sm} + c g^{im} g^{sl}, \\ H_2^{[-2]islm} &= \frac{a}{2} g^{is} g^{lm} + \frac{b}{2} g^{il} g^{sm} + \frac{c}{2} g^{im} g^{sl}, \\ H_3^{[-1]islm} &= \frac{a}{3} g^{is} g^{lm} + \frac{b}{3} g^{il} g^{sm} + \frac{c}{3} g^{im} g^{sl}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\overset{[g]}{a}$, $\overset{[g]}{b}$, $\overset{[g]}{c}$, ($\mathbf{a} = 1, 2, 3; g = 0, -1, -2$) — девять определяющих псевдоскаляров полуизотропного микрополярного упругого тела. “Метаиндекс” \mathbf{a} — нумерует определяющие псевдоскаляры. С точки зрения тензорной алгебры $\overset{[g]}{a}$, $\overset{[g]}{b}$, $\overset{[g]}{c}$, как минимум, являются полуизотропными (полуизотропными) инвариантами.

Подставив координатные представления (18) в определяющие соотношения (15), получим

$$\left\{ \begin{aligned} t^{is} &= (a g^{is} g^{lm} + b g^{il} g^{sm} + c g^{im} g^{sl}) \epsilon_{lm} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{3} g^{is} g^{lm} + \frac{b}{3} g^{il} g^{sm} + \frac{c}{3} g^{im} g^{sl} \right) \kappa_{lm}^{[+1]}, \\ \mu^{[-1]is} &= \left(\frac{a}{2} g^{is} g^{lm} + \frac{b}{2} g^{il} g^{sm} + \frac{c}{2} g^{im} g^{sl} \right) \kappa_{lm}^{[+1]} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{3} g^{is} g^{lm} + \frac{b}{3} g^{il} g^{sm} + \frac{c}{3} g^{im} g^{sl} \right) \epsilon_{lm}. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Выделяя симметричную и антисимметричную части в соотношениях (??), получим

$$\left\{ \begin{aligned} t^{(is)} &= a g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + (b + c) \epsilon^{(is)} + \frac{1}{2} \frac{a^{[-1]}}{3} g^{is} g^{lm} \kappa_{(lm)}^{[+1]} + \frac{1}{2} \left(\frac{b^{[-1]}}{3} + \frac{c^{[-1]}}{3} \right) \kappa^{[+1](is)}, \\ \mu^{[-1](is)} &= \frac{a^{[-2]}}{2} g^{is} g^{lm} \kappa_{(lm)}^{[+1]} + \left(\frac{b^{[-2]}}{2} + \frac{c^{[-2]}}{2} \right) \kappa^{[+1](is)} + \frac{1}{2} \frac{a^{[-1]}}{3} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \frac{1}{2} \left(\frac{b^{[-1]}}{3} + \frac{c^{[-1]}}{3} \right) \epsilon^{(is)}, \\ t^{[is]} &= (b - c) \epsilon^{[is]} + \frac{1}{2} \left(\frac{b^{[-1]}}{3} - \frac{c^{[-1]}}{3} \right) \kappa^{[+1][is]}, \\ \mu^{[-1][is]} &= \left(\frac{b^{[-2]}}{2} - \frac{c^{[-2]}}{2} \right) \kappa^{[+1][is]} + \frac{1}{2} \left(\frac{b^{[-1]}}{3} - \frac{c^{[-1]}}{3} \right) \epsilon^{[is]}. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Для ассоциированных псевдовекторов (5) следует

$$\begin{aligned} 2\tau_s^{[-1]} &= 2e^{-2} \binom{[+1]}{1} \binom{[-1]}{1} \varphi_s - \left(\binom{[-1]}{3} - \binom{[-1]}{3} \right) \kappa_s, \\ 2\mu^s &= 2e^2 \left(\binom{[-2]}{2} - \binom{[-2]}{2} \right) \kappa^s - \left(\binom{[-1]}{3} - \binom{[-1]}{3} \right) \binom{[+1]}{3} \varphi^s. \end{aligned} \quad (21)$$

Вместо определяющих псевдоскаляров $\binom{[g]}{a}$, $\binom{[g]}{b}$, $\binom{[g]}{c}$ можно перейти к конвенциональным определяющим псевдоскалярам (см. [7]).

5. Конвенциональная энергетическая форма полуизотропной упругой среды. Конвенциональной энергетической формой полуизотропной упругой среды будем считать упругий потенциал линейного анизотропного микрополярного тела, предложенный в работах [1–3]. В произвольной системе координат, в терминах абсолютных тензоров конвенциональная энергетическая форма представляется в виде:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} a^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} c^{islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + b^{islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}. \quad (22)$$

Обратим внимание, что в (22) множитель $\frac{1}{2}$ отсутствует в последнем слагаемом. Воспользовавшись определяющими соотношениями (15), получим

$$\begin{aligned} t^{is} &= a^{islm} \epsilon_{lm} + b^{islm} \kappa_{lm}, \\ \mu^{is} &= c^{islm} \kappa_{lm} + b^{islm} \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (23)$$

Координатные представления для определяющих полуизотропных тензоров получаются в форме [13]

$$\begin{aligned} a^{islm} &= \lambda g^{is} g^{lm} + (\mu + \alpha) g^{il} g^{sm} + (\mu - \alpha) g^{im} g^{sl}, \\ b^{islm} &= \varkappa g^{is} g^{lm} + (\chi + \nu) g^{il} g^{sm} + (\chi - \nu) g^{im} g^{sl}, \\ c^{islm} &= \beta g^{is} g^{lm} + (\gamma + \varepsilon) g^{il} g^{sm} + (\gamma - \varepsilon) g^{im} g^{sl}, \end{aligned} \quad (24)$$

Выделим в (23) симметричные и антисимметричные конститuentы

$$\begin{aligned} t^{is} &= \lambda g^{is} g^{lm} \epsilon_{lm} + 2\mu \epsilon^{(is)} + 2\alpha \epsilon^{[is]} + \varkappa g^{is} g^{lm} \kappa_{lm} + 2\chi \kappa^{(is)} + 2\nu \kappa^{[is]}, \\ \mu^{is} &= \beta g^{is} g^{lm} \kappa_{lm} + 2\gamma \kappa^{(is)} + 2\varepsilon \kappa^{[is]} + \varkappa g^{is} g^{lm} \epsilon_{lm} + 2\chi \epsilon^{(is)} + 2\nu \epsilon^{[is]}. \end{aligned} \quad (25)$$

6. Нейберовская энергетическая форма потенциала силовых и моментных напряжений. Применение формализма псевдотензорного анализа к теории микрополярной упругости Нейбера позволяет несколько прояснить ее физический смысл. Нейберовская энергетическая форма анизотропной микрополярной упругой среды в произвольной системе координат, в терминах абсолютных тензоров представляется в виде [5]:

$$2\mathcal{A} = E^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + M^{islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + 2K^{islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}. \quad (26)$$

Воспользовавшись определяющими соотношениями (15), получим

$$\begin{aligned} t^{is} &= E^{islm} \epsilon_{lm} + K^{islm} \kappa_{lm}, \\ \mu^{is} &= M^{islm} \kappa_{lm} + K^{islm} \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (27)$$

Координатные представления для определяющих центральносимметричных тензоров получаются в форме

$$\begin{aligned} E^{islm} &= G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} g^{is} g^{lm} + (1+a) g^{il} g^{sm} + (1-a) g^{im} g^{sl} \right), \\ K^{islm} &= 0, \\ M^{islm} &= 4Gl^2 \left(c g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm} + b g^{im} g^{sl} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

Подстановка (28) в определяющие уравнения (27) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} t^{is} &= G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} g^{is} g^{lm} + (1+a) g^{il} g^{sm} + (1-a) g^{im} g^{sl} \right) \epsilon_{lm}, \\ \mu^{is} &= 4Gl^2 \left(c g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm} + b g^{im} g^{sl} \right) \kappa_{lm}. \end{aligned} \quad (29)$$

7. Взаимосвязь определяющих скаляров конвенциональной и второй основной энергетических форм. Сравнивая энергетические формы микрополярных упругих потенциалов (16), (22) и (26), можно сразу же заключить:

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a^{islm} = E^{islm}, \\ H_2^{islm} &= c^{islm} = M^{islm}, \\ H_3^{islm} &= 2b^{islm} = 2K^{islm}. \end{aligned} \quad (30)$$

Определяющие скаляры, участвующие в записи различных энергетических форм потенциалов напряжений полуизотропного упругого тела [2, 7, 8], сведены в таблицу.

8. Заключение. В данной работе, с целью установления формул, связывающих различные наборы определяющих постоянных, проведено сравнение конвенциональной, первой, второй основной и Нейберовской энергетических форм упругих потенциалов полуизотропных сред.

- (1) В основе развиваемого в статье подхода лежит принцип инвариантности энергии, по отношению к любым преобразованиям трехмерного Евклидова пространства (в том числе, при зеркальных отражениях).
- (2) Выполнено сравнение и получены соотношения, связывающие определяющие скаляры конвенциональной, первой, второй естественных и Нейберовской энергетических форм, в том числе, с конвенционально используемыми полуизотропными скалярами: модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характерной микродлиной, и 6 безразмерными постоянными.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.
- [2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5.
- [4] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2, no. 1. P. 48–69.

Таблица 1. полуизотропные определяющие скаляры

Скаляры первой основной энергетической формы	Скаляры конвенциональной энергетической формы	Скаляры второй основной энергетической формы	Материальные скаляры	Скаляры Неуберовской энергетической формы
A_1	$\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{2}a_1$	$G\nu(1-2\nu)^{-1}$	$G\nu(1-2\nu)^{-1}$
A_2	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{1}{2}a_2$	GL^2c_3	$2Gl^2c$
A_3	μ	$\frac{1}{2}(b_1+c_1)$	G	G
A_4	γ	$\frac{1}{2}(b_2+c_2)$	GL^2	$2Gl^2(1+b)$
A_5	2α	b_1-c_1	$2Gc_1$	$2Ga$
A_6	2ε	b_2-c_2	$2GL^2c_2$	$4Gl^2(1-b)$
A_7	\varkappa	$\frac{1}{2}a_3$	GLc_4	—
A_8	2χ	$\frac{1}{2}(b_3+c_3)$	GLc_5	—
A_9	-4ν	$\frac{c-b}{3}$	GLc_6	—

- [5] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics. 1966. P. 153–158.
- [6] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua. 1968. P. 109–113.
- [7] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
- [8] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциалов асимметричных тензоров напряжений в механике гемитропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 3(53). С. 118–127.
- [9] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 108–115.
- [10] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 2. p. 205–213.
- [12] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического

университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.

[13] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.

E. V. Murashkin

ON THE RELATIONSHIP OF MICROPOLAR CONSTITUTIVE PARAMETERS OF THERMODYNAMIC STATE POTENTIALS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to some problems concerning modeling semi-isotropic elastic media. Several quadratic energy forms of a thermodynamic state potential are introduced in terms of pseudotensors. These energy forms are assumed to be absolute invariants with respect to arbitrary transformations of the three-dimensional Euclidean space (including mirror reflections). As a result of applying special coordinate representations of semi-isotropic (semi-isotropic) pseudotensors of the fourth rank, it is possible to determine 9 covariantly constant constitutive pseudoscalars characterizing a semi-isotropic elastic medium. The Neuber's, conventional, first and second base natural energy forms are compared and equations are derived for constitutive scalars and pseudoscalars, including the conventional semi-isotropic pseudoscalars: shear modulus, Poisson's ratio, characteristic microlength (a pseudoscalar of negative weight, sensitive to reflections of three-dimensional space), and six dimensionless pseudoscalars.

Keywords: pseudotensor, quadratic energy form, thermodynamic state potential, constitutive pseudotensor, characteristic microlength, chiral medium, micropolar semi-isotropic continuum

REFERENCES

- [1] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 286 p.
- [2] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Hemitropic medium // Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. P. 281–332. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7_5.
- [4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517.
- [5] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциалов асимметричных тензоров напряжений в механике гемитропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 3(53). С. 118–127.
- [6] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 108–115.
- [7] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2, no. 1. P. 48–69.
- [8] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics. 1966. P. 153–158.
- [9] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua. 1968. P. 109–113.
- [10] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sci. (Phys.-Math.), MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

- [11] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57, no. 2. p. 205–213.
- [12] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [13] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). с. 106–115.
- [14] Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). С. 118–127.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О.</i> К моделированию больших деформаций разномодульных упругих сред	5
<i>Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б.</i> Об определении компонент деформации в случае кручения изотропных стержней, находящихся под действием внешнего давления	13
<i>Зубчанинов В. Г., Гультяев В. И., Алексеев А. А., Двужилов А. С.</i> Экспериментальные исследования сложного нагружения латуни Л63 на двузвенных ломаных траекториях типа “смещенный веер”	18
<i>Зубчанинов В. Г., Гультяев В. И., Двужилов А. С.</i> Исследование латуни Л63 по гладкой криволинейной траектории типа “веер смещенных окружностей”	26
<i>Евстигнеев А. И., Евстигнеева А. А., Дмитриев Э. А., Иванкова Е. П., Одинокоев В. И., Чернышова Д. В.</i> О силовом влиянии опорного наполнителя и межслойного трения на напряженное состояние керамической оболочковой формы по выплавляемым моделям	33
<i>Матвеев С. В., Матвеева А. Н.</i> Упругопластическое состояние анизотропной среды, ослабленной горизонтальной эллиптической полостью с учетом силы тяжести	46
<i>Орлов В. Н., Барзини А. М.</i> Возмущение начальных данных и аналитическое приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в вещественной области	52
<i>Немировский Ю. В.</i> Предельно допустимые формы изгиба изотропных плоских однородных и гибридных полиметаллических пластин с чечевицепоподобными формами закрепленных контуров	63
<i>Непершин Р. И.</i> Вдавливание эллиптического цилиндра в идеально пластическое полупространство	69
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Определение предельных нагрузок при поперечном изгибе многослойных предельно-упругих бетонных стержней	86
<i>Мурашкин Е. В., Нестеров Т. К., Стадник Н. Э.</i> Условия совместности в моделях полуизотропных термоупругих тел	102
<i>Мурашкин Е. В.</i> О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния	110
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	122
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	125
СОДЕРЖАНИЕ	127

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2023. № 1 (55)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 02.06.2023. Выход в свет 06.06.2023.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 16,3.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 51

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38