

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 4(58)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2023

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 4(58)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

Ю. Д. Щеглова

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ТРЕХСЛОЙНОГО АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. В работе рассматривается упругопластическое кручение анизотропного трехслойного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения. Внутренний слой стержня находится в упругопластическом состоянии, два внешних слоя полностью пластические. При известном напряженном состоянии, известном перемещении в упругой области внутреннего слоя и известной упругопластической границе определено поле перемещений в пластических зонах. Предполагается пластическая анизотропия, частными случаями которой являются анизотропия по Хиллу и трансляционная анизотропия. Параметры анизотропии каждого слоя различны. Используется метод малого параметра. Поле перемещений определено в первом приближении.

Ключевые слова: упругопластическое кручение, анизотропия согласно Хиллу, трансляционная анизотропия, метод малого параметра, перемещение в пластической области

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.001

УДК: 539.375

Введение

Метод малого параметра применялся в работах [1–5] для задач упругопластического кручения анизотропных стержней. Напряженно-деформированное состояние анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения определено в работе [1]. Далее, в работе [2] исследовалась задача упругопластического кручения двухслойного слабоанизотропного стержня. Двухслойный цилиндр при взаимодействии различных видов пластической анизотропии рассмотрен в работах [3, 4]. При этом определено поле напряжений и поле перемещений. Определению напряженного состояния, поля перемещений в упругой зоне внутреннего слоя и упругопластической границе трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения посвящена работа [5]. В представленной работе

© Щеглова Ю. Д., 2023
Щеглова Юлия Дмитриевна
e-mail: scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.12.2023

определяется поле перемещений в пластических зонах для стержня, рассмотренного в работе [5]. Дано развитие метода малого параметра к определению поля перемещений в пластических областях. Поле перемещений определено в первом приближении.

Постановка задачи

Рассматривается упругопластическое кручение [6] трехслойного пластически анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения. Контуры поперечного сечения представлены замкнутыми кривыми: L_1 - внешняя граница стержня, L_2 и L_3 - границы раздела слоев, L_4 - внутренняя граница. Следуя постановке задачи, описанной в работе [5], предположим, что величина крутящего момента M такова, что внутренний слой находится в упругопластическом состоянии, а два внешних - в пластическом. Пластическая анизотропия слоев подчиняется условию частной анизотропии по Хиллу и трансляционной анизотропии, при этом параметры анизотропии различны для каждого слоя. Используется цилиндрическая система координат $(\rho, \theta, z$, ось z направлена по оси стержня).

Для определения поля перемещений в пластических областях запишем систему уравнений в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести внутреннего слоя k_3 , а величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу упругопластической границы в нулевом приближении $r_s^{(0)}$. Далее символ "e" вверху означает принадлежность величин к упругой области, символ "p" - к пластической. Условие пластичности в каждом слое примем в форме [1]

$$A_i \left(\tau_{\rho zi}^p \cos \theta - \tau_{\theta zi}^p \sin \theta - k_i \right)^2 + B_i \left(\tau_{\rho zi}^p \sin \theta - \tau_{\theta zi}^p \cos \theta - \chi_i \right)^2 = K_i^2, \quad (1)$$

где $i = 1, 2, 3$; A_i, B_i, k_i, χ_i - параметры анизотропии.

Ассоциированный закон пластического течения согласно (1) будет представлен соотношениями

$$d\varepsilon_{\rho zi}^p = d\lambda_i \left((A_i \cos^2 \theta + B_i \sin^2 \theta) \tau_{\rho zi}^p + (B_i - A_i) \tau_{\theta zi}^p \cos \theta \sin \theta - A_i k_i \cos \theta - B_i \chi_i \sin \theta \right), \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{\theta zi}^p = d\lambda_i \left((A_i \sin^2 \theta + B_i \cos^2 \theta) \tau_{\theta zi}^p + (B_i - A_i) \tau_{\rho zi}^p \cos \theta \sin \theta - A_i k_i \sin \theta - B_i \chi_i \cos \theta \right), \quad (3)$$

где λ_i - неизвестные скалярные множители.

Исключая из (2) и (3) $d\lambda_i$, получим ассоциированный закон в виде

$$\begin{aligned} & d\varepsilon_{\rho zi}^p \left((A_i \sin^2 \theta + B_i \cos^2 \theta) \tau_{\theta zi}^p + \right. \\ & \left. + (B_i - A_i) \tau_{\rho zi}^p \cos \theta \sin \theta - A_i k_i \sin \theta - B_i \chi_i \cos \theta \right) = \\ & = d\varepsilon_{\theta zi}^p \left((A_i \cos^2 \theta + B_i \sin^2 \theta) \tau_{\rho zi}^p + \right. \\ & \left. + (B_i - A_i) \tau_{\theta zi}^p \cos \theta \sin \theta - A_i k_i \cos \theta - B_i \chi_i \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Полные деформации во внешних двух слоях совпадают с пластическими деформациями

$$\varepsilon_{\rho zi} = \varepsilon_{\rho zi}^p, \quad \varepsilon_{\theta zi} = \varepsilon_{\theta zi}^p, \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

В третьем внутреннем слое полная деформация складывается из пластической и упругой составляющих

$$\varepsilon_{\rho z 3} = \varepsilon_{\rho z 3}^p + \varepsilon_{\rho z 3}^e, \quad \varepsilon_{\theta z 3} = \varepsilon_{\theta z 3}^p + \varepsilon_{\theta z 3}^e. \quad (6)$$

Упругая составляющая связана с напряжениями законом Гука

$$\varepsilon_{\rho z 3}^e = \frac{\tau_{\rho z 3}^p}{2G}, \quad \varepsilon_{\theta z 3}^e = \frac{\tau_{\theta z 3}^p}{2G}. \quad (7)$$

Связь между полными деформациями и перемещениями в пластической области представлена соотношениями Коши

$$\varepsilon_{\rho z i} = \frac{1}{2} \frac{\partial w_i^p}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_i^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right). \quad (8)$$

Постановка задачи дополняется условиями непрерывности перемещений на границах раздела слоев L_2 и L_3

$$w_1^p|_{L_2} = w_2^p|_{L_2}, \quad (9)$$

$$w_2^p|_{L_3} = w_3^p|_{L_3} \quad (10)$$

и условиями непрерывности перемещений на упругопластической границе внутреннего слоя L_S

$$w_3^p|_{L_S} = w_3^e|_{L_S}. \quad (11)$$

Соотношения (4)-(11) служат для определения функций перемещения в пластических областях цилиндрического стержня.

Применение метода малого параметра. Определение первого приближения

Как и в работе [5] будем использовать метод малого параметра [7], который позволяет получить приближенное аналитическое решение поставленной задачи. Ограничимся нулевым и первым приближениями.

Параметры анизотропии представим в виде, следуя [1],

$$A_i = 1 + \delta a_i, \quad B_i = 1 + \delta b_i, \quad k_i = \delta k_i^{(1)}, \quad \chi_i = \delta \chi_i^{(1)}, \quad (12)$$

где δ - безразмерный малый параметр, $\delta \ll 1$, $i = 1, 2, 3$.

Согласно [5], уравнения контуров L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) представим в виде

$$\rho = \alpha_i (1 + d_i \delta \cos m \theta), \quad (13)$$

где $-1 \leq d_i \leq 1$, причем $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$.

Функции напряжений, деформаций и перемещений представим в виде разложений [7]

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \delta \tau_{ij}^{(1)}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \delta \varepsilon_{ij}^{(1)}, \quad w = w^{(0)} + \delta w^{(1)}. \quad (14)$$

Упругопластическая граница будет иметь вид

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \delta \rho_s^{(1)}. \quad (15)$$

В нулевом приближении имеем задачу упругопластического кручения трехслойного изотропного цилиндрического стержня кругового поперечного сечения, решение которой имеет вид

$$\tau_{\rho z i}^{p(0)} = 0, \quad \tau_{\theta z i}^{p(0)} = K_i, \quad w_i^{p(0)} = 0, \quad \varepsilon_{\rho z i}^{p(0)} = 0, \quad \varepsilon_{\theta z i}^{p(0)} = 0, \quad \rho_s^{(0)} = 1. \quad (16)$$

В работе [5] получены соотношения для компонент напряжений $\tau_{\rho zi}^{p(1)}$ в первом приближении. Они имеют вид

$$\tau_{\rho z1}^{p(1)} = \left(k_1^{(1)} \cos \theta + \chi_1^{(1)} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{4} \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\alpha_1}{\rho} \right) - \frac{\alpha_1}{\rho} K_1 d_1 m \sin m\theta, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z2}^{p(1)} = & \left(k_2^{(1)} \cos \theta + \chi_2^{(1)} \sin \theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{4} \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\rho} \right) + \\ & + \left(k_1^{(1)} \cos \theta + \chi_1^{(1)} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{4} \sin 2\theta \right) \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho} - \\ & - \frac{(\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1))}{\rho} m \sin m\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z3}^{p(1)} = & \left(k_3^{(1)} \cos \theta + \chi_3^{(1)} \sin \theta + \frac{K_3 (a_3 - b_3)}{4} \sin 2\theta \right) \left(1 - \frac{\alpha_3}{\rho} \right) + \\ & + \left(k_2^{(1)} \cos \theta + \chi_2^{(1)} \sin \theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{4} \sin 2\theta \right) \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)}{\rho} + \\ & + \left(k_1^{(1)} \cos \theta + \chi_1^{(1)} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{4} \sin 2\theta \right) \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho} - \\ & - \frac{(\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2))}{\rho} m \sin m\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Также в работе [5] определена в первом приближении и функция депланации в упругой зоне внутреннего слоя. Она имеет форму

$$\begin{aligned} w^e(1) = & -\frac{1}{G\omega (1 - \alpha_4^2)} (M_1 \cos \theta + M_2 \sin \theta) \left(\rho + \frac{\alpha_4^2}{\rho} \right) - \\ & - \frac{1}{2G\omega (1 - \alpha_4^4)} M_3 \left(\rho^2 + \frac{\alpha_4^4}{\rho^2} \right) \sin 2\theta + \\ & + \left(M_4 \left(\rho^m + \frac{\alpha_4^{2m}}{\rho^m} \right) + \frac{d_4 \alpha_4^{m+2}}{\rho^m} \right) \sin m\theta, \end{aligned} \quad (20)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} M_1 &= k_3^{(1)} (\alpha_3 - 1) + k_2^{(1)} (\alpha_2 - \alpha_3) + k_1^{(1)} (\alpha_1 - \alpha_2), \\ M_2 &= \chi_3^{(1)} (\alpha_3 - 1) + \chi_2^{(1)} (\alpha_2 - \alpha_3) + \chi_1^{(1)} (\alpha_1 - \alpha_2), \\ M_3 &= \frac{K_3 (a_3 - b_3)}{2} (\alpha_3 - 1) + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{2} (\alpha_2 - \alpha_3) + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{2} (\alpha_1 - \alpha_2), \\ M_4 &= \frac{1}{G\omega (1 - \alpha_4^{2m})} (\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2)). \end{aligned}$$

Перейдем к определению поля перемещений в пластических областях в первом приближении.

Ассоциированный закон пластического течения в первом приближении получим подстановкой (12) и (14) в (4)

$$\begin{aligned} & d\varepsilon_{\rho zi}^{p(0)} \left((a_i \sin^2 \theta + b_i \cos^2 \theta) \tau_{\theta zi}^{p(0)} + \tau_{\theta zi}^{p(1)} + (b_i - a_i) \tau_{\rho zi}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta - \right. \\ & \quad \left. - k_i^{(1)} \sin \theta - \chi_i^{(1)} \cos \theta \right) + d\varepsilon_{\rho zi}^{p(1)} \tau_{\theta zi}^{p(0)} = \\ & = d\varepsilon_{\theta zi}^{p(0)} \left((a_i \cos^2 \theta + b_i \sin^2 \theta) \tau_{\rho zi}^{p(0)} + \tau_{\rho zi}^{p(1)} + (b_i - a_i) \tau_{\theta zi}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta - \right. \\ & \quad \left. - k_i^{(1)} \cos \theta - \chi_i^{(1)} \sin \theta \right) + d\varepsilon_{\theta zi}^{p(1)} \tau_{\rho zi}^{p(0)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая нулевое приближение (16) и соотношение (17) для компоненты $\tau_{\rho z1}^{p(1)}$, в первом внешнем слое из (21) получим

$$d\varepsilon_{\rho z1}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z1}^{p(0)} \left(-\frac{\alpha_1}{\rho} \right) \Omega_1, \quad (22)$$

где введено обозначение

$$\Omega_1 = \frac{k_1^{(1)}}{K_1} \cos \theta + \frac{\chi_1^{(1)}}{K_1} \sin \theta + \frac{a_1 - b_1}{2} \sin 2\theta + d_1 m \sin m\theta.$$

Для второго слоя из (21) с учетом (16) и соотношения (18) для компоненты $\tau_{\rho z2}^{p(1)}$ будем иметь

$$d\varepsilon_{\rho z2}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z2}^{p(0)} \left(-\frac{1}{\rho} \right) \Omega_2, \quad (23)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & (\alpha_1 - \alpha_2) \left(\frac{k_1^{(1)}}{K_2} \cos \theta + \frac{\chi_1^{(1)}}{K_2} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{2K_2} \sin 2\theta \right) + \\ & + \alpha_2 \left(\frac{k_2^{(1)}}{K_2} \cos \theta + \frac{\chi_2^{(1)}}{K_2} \sin \theta + \frac{(a_2 - b_2)}{2} \sin 2\theta \right) + \\ & + \left(\frac{\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1)}{K_2} \right) m \sin m\theta. \end{aligned}$$

В пластической области внутреннего слоя соотношение (21) подстановкой в него (16) и соотношения (19) для компоненты напряжений $\tau_{\rho z3}^{p(1)}$ дает

$$d\varepsilon_{\rho z3}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z3}^{p(0)} \left(-\frac{1}{\rho} \right) \Omega_3, \quad (24)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & (\alpha_1 - \alpha_2) \left(\frac{k_1^{(1)}}{K_3} \cos \theta + \frac{\chi_1^{(1)}}{K_3} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{2K_3} \sin 2\theta \right) + \\ & + (\alpha_2 - \alpha_3) \left(\frac{k_2^{(1)}}{K_3} \cos \theta + \frac{\chi_2^{(1)}}{K_3} \sin \theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{2K_3} \sin 2\theta \right) + \\ & + \alpha_3 \left(\frac{k_3^{(1)}}{K_3} \cos \theta + \frac{\chi_3^{(1)}}{K_3} \sin \theta + \frac{(a_3 - b_3)}{2} \sin 2\theta \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2)}{K_3} \right) m \sin m\theta .$$

В соотношениях (22)-(24) присутствуют величины $d\varepsilon_{\theta zi}^{p(0)}$, которые необходимо найти для последующего интегрирования этих соотношений. Для определения $d\varepsilon_{\theta zi}^{p(0)}$ воспользуемся соотношениями ассоциированного закона пластического течения в нулевом приближении

$$d\varepsilon_{zi}^{p(0)} = d\lambda_i^{(0)} \tau_{\theta zi}^{p(0)} .$$

Учитывая (16), из них получим

$$d\lambda_i^{(0)} = \frac{1}{K_i} d\varepsilon_{zi}^{p(0)} .$$

Для двух внешних слоев с учетом (5), (8) и (16) будем иметь

$$d\varepsilon_{\theta zi}^{p(0)} = d\varepsilon_{\theta zi}^{(0)} = d \left(\frac{1}{2} \left(\omega\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_i^{p(0)}}{\partial \theta} \right) \right) = d \left(\frac{\omega\rho}{2} \right) , \quad \text{где } i = 1, 2 . \quad (25)$$

Тогда для неизвестных скалярных множителей получим

$$d\lambda_i^{(0)} = d \left(\frac{\omega\rho}{2K_i} \right) ,$$

$$\lambda_i^{(0)} = \frac{\omega\rho}{2K_i} , \quad \text{где } i = 1, 2 . \quad (26)$$

Во внутреннем слое выполняются соотношения (6), учет которых совместно с (7) и (8) дает

$$d\varepsilon_{\theta z3}^{p(0)} = d\varepsilon_{\theta z3}^{(0)} - d\varepsilon_{\theta z3}^{e(0)} = d \left(\frac{1}{2} \left(\omega\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_3^{p(0)}}{\partial \theta} \right) - d \left(\frac{\tau_{\theta z3}^{p(0)}}{2G} \right) \right) = d \left(\frac{G\omega\rho - K_3}{2G} \right) . \quad (27)$$

Тогда для неизвестного скалярного множителя в третьем слое будем иметь

$$\lambda_3^{(0)} = \frac{G\omega\rho - K_3}{2GK_3} . \quad (28)$$

Выражения (26) и (27) позволяют в соотношениях (22)-(24) перейти от интегрирования по $\lambda_i^{(0)}$ к интегрированию по радиусу упругопластической границы. В первом и втором слоях безразмерный радиус будет меняться от α_2 и α_3 , соответственно, до некоторого значения ρ . В третьем слое в процессе нагружения точка тела переходит в пластическое состояние в момент прохождения через нее упругопластической границы, что соответствует $\rho = 1$. Следовательно, в процессе пластического деформирования безразмерный радиус в точке будет изменяться от 1 до некоторого значения ρ , соответствующего текущему значению приложенных внешних усилий [8].

Проинтегрируем соотношения (22)-(24), учитывая (25) и (27), получим соотношения для компонент пластических деформаций $\varepsilon_{\rho zi}^{p(1)}$. Они имеют вид

$$\varepsilon_{\rho z1}^{p(1)} = \frac{\omega\alpha_1}{2} \Omega_1 \ln \frac{\alpha_2}{\rho} , \quad (29)$$

$$\varepsilon_{\rho z2}^{p(1)} = \frac{\omega}{2} \Omega_2 \ln \frac{\alpha_3}{\rho} , \quad (30)$$

$$\varepsilon_{\rho z3}^{p(1)} = \frac{\omega}{2} \Omega_3 \ln \frac{1}{\rho} . \quad (31)$$

Перейдем к определению функций перемещений в пластических областях.

В первом и втором слое будем использовать первое соотношение (5) и первое соотношение (8). Отметим, что в первом приближении вид этих соотношений не изменяется.

Подставляя в (5) (8) и (29) и интегрируя полученное выражение, получим перемещение во внешнем слое с точностью до неизвестной функции $\varphi_1(\theta)$

$$w_1^{p(1)} = \omega \alpha_1 \Omega_1 \left(\rho \ln \frac{\alpha_2}{\rho} + \rho \right) + \varphi_1(\theta) . \quad (32)$$

Интегрирование соотношения, полученного подстановкой в (5) (8) и (30) дает функцию перемещений во втором слое

$$w_2^{p(1)} = \omega \Omega_2 \left(\rho \ln \frac{\alpha_3}{\rho} + \rho \right) + \varphi_2(\theta) , \quad (33)$$

где $\varphi_2(\theta)$ - неизвестная функция координаты θ .

Функции $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$ определяются из условий непрерывности перемещений на границе раздела слоев L_2 и L_3 , соответственно, то есть из соотношений (9) и (10).

Перемещение во внутреннем слое определим с использованием первых соотношений (6)-(8). Подставим (7), (8) и (31) в (6), получим

$$\frac{\partial w_3^{p(1)}}{\partial \rho} = \omega \Omega_3 \ln \frac{1}{\rho} + \frac{\tau_{\rho z 3}^{p(1)}}{G} .$$

Подставляя в это соотношение выражение для $\tau_{\rho z 3}^{p(1)}$ (19), преобразуем его к виду

$$\frac{\partial w_3^{p(1)}}{\partial \rho} = \omega \Omega_3 \ln \frac{1}{\rho} + \Omega_4 \left(\frac{\alpha_3}{\rho} - 1 \right) + \Omega_5 \frac{1}{\rho} , \quad (34)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_4 &= -\frac{1}{G} \left(k_3^{(1)} \cos \theta + \chi_3^{(1)} \sin \theta + \frac{K_3 (a_3 - b_3)}{2} \sin 2\theta \right) , \\ \Omega_5 &= -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{G} \left(k_1^{(1)} \cos \theta + \chi_1^{(1)} \sin \theta + \frac{K_1 (a_1 - b_1)}{2} \sin 2\theta \right) - \\ &\quad - \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)}{G} \left(k_2^{(1)} \cos \theta + \chi_2^{(1)} \sin \theta + \frac{K_2 (a_2 - b_2)}{2} \sin 2\theta \right) - \\ &\quad - \frac{1}{G} (\alpha_1 d_1 K_1 + \alpha_2 d_2 (K_2 - K_1) + \alpha_3 d_3 (K_3 - K_2)) m \sin m\theta . \end{aligned}$$

Интегрируя (34), получим функцию перемещения в пластической зоне внутреннего слоя

$$w_3^{p(1)} = \omega \Omega_3 \left(\rho \ln \frac{1}{\rho} + \rho \right) + \Omega_4 (\alpha_3 \ln \rho - \rho) + \Omega_5 \ln \rho + \varphi_3(\theta) , \quad (35)$$

где $\varphi_3(\theta)$ - неизвестная функция, которая определяется из условия непрерывности перемещений на упругопластической границе L_S (11).

Условия непрерывности (9)-(11) в первом приближении получим подстановкой в них разложений (13)-(15) и нулевого приближения (16), в результате будем иметь

$$w_1^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_2} = w_2^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_2} , \quad (36)$$

$$w_2^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_3} = w_3^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha_3} , \quad (37)$$

$$w_3^{p(1)} \Big|_{\rho=1} = \omega w_3^{e(1)} \Big|_{\rho=1} . \quad (38)$$

Сначала определим функцию $\varphi_3(\theta)$ из условия (38). Подставим в него (35) и (20) и выразим $\varphi_3(\theta)$, получим

$$\varphi_3(\theta) = \Omega_6 - \omega \Omega_3 + \Omega_4 ,$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} \Omega_6 = \omega w_3^{e(1)} \Big|_{\rho=1} &= -\frac{(1 + \alpha_4^2)}{G\omega(1 - \alpha_4^2)} (M_1 \cos \theta + M_2 \sin \theta) - \\ &- \frac{(1 + \alpha_4^4)}{2G\omega(1 - \alpha_4^4)} M_3 \sin 2\theta + (M_4(1 + \alpha_4^{2m}) + d_4 \alpha_4^{m+2}) \sin m\theta . \end{aligned}$$

Из условия (37) подстановкой в него (33) и (35) получим функцию $\varphi_2(\theta)$, она будет иметь вид

$$\varphi_2(\theta) = \omega \alpha_3 \Omega_3 \left(\ln \frac{1}{\alpha_3} + 1 \right) + \Omega_4 \alpha_3 (\ln \alpha_3 - 1) + \Omega_5 \ln \alpha_3 - \omega \alpha_3 \Omega_2 + \varphi_3(\theta) .$$

Функция $\varphi_1(\theta)$ определяется из условия (36) подстановкой (32) и (33), в результате чего будем иметь

$$\varphi_1(\theta) = \omega \alpha_2 \Omega_2 \left(\ln \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + 1 \right) - \omega \alpha_1 \alpha_2 \Omega_1 + \varphi_2(\theta) .$$

Заключение

Таким образом, в работе с использованием метода малого параметра определены функции перемещений в пластических областях трехслойного анизотропного цилиндрического стержня при упругопластическом кручении. Поле перемещений определено в первом приближении при известном напряженном состоянии и известном поле перемещений в упругой области и известной упругопластической границе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Упругопластическое состояние толстостенного стержня некругового поперечного сечения при кручении в случае анизотропии общего вида // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С. 42–54.
- [2] Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Применение метода возмущений при определении напряженно-деформированного состояния двухслойного слабоанизотропного стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении // Вестн. Самарского. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. № 2. С. 292–307.
- [3] Щеглова Ю. Д. Применение метода малого параметра в задаче упругопластического кручения двухслойного анизотропного цилиндра // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. Вып. 15 / [редкол. : А. И. Пашкин (гл. редактор) и др.] ; Воронежский государственный университет ; факультет прикладной математики, информатики и механики. 2021. С. 233–238.
- [4] Щеглова Ю. Д. К определению поля перемещений в задаче упругопластического кручения двухслойного анизотропного цилиндра // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. Вып. 16 / [редкол. : С. Н. Медведев (гл. редактор) и др.] ; Воронежский государственный университет ; факультет прикладной математики, информатики и механики. 2023. С. 157–167.

- [5] Щеглова Ю. Д. Метод возмущений при исследовании напряженного состояния трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 72–82.
- [6] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
- [7] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [8] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи уруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2004. 219 с.

Yu. D. Shcheglova

PERTURBATION METHOD FOR DETERMINING THE DISPLACEMENT FIELD OF A THREE-LAYER ANISOTROPIC CYLINDRICAL ROD OF NON-CIRCULAR CROSS-SECTION UNDER ELASTOPLASTIC TORSION

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The paper considers elastoplastic torsion of an anisotropic three-layer cylindrical rod of non-circular cross-section. The inner layer of the rod is in an elastic-plastic state, the two outer layers are completely plastic. With a known stress state, known displacement in the elastic region of the inner layer and a known elastoplastic boundary, the displacement field in the plastic zones is determined. Plastic anisotropy is assumed, special cases of which are Hill anisotropy and translational anisotropy. The anisotropy parameters of each layer are different. The small parameter method is used. The displacement field is determined to a first approximation.

Keywords: elastoplastic torsion, anisotropy according to Hill, translational anisotropy, stress state, elastoplastic boundary, small parameter method.

REFERENCES

- [1] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Elastic-plastic state of a thick-walled bar of non-circular cross section under torsion in the case of general anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. № 4(30). С. 42–54.
- [2] Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. Application of the perturbation method in determining the stress-strain state of a two-layer weakly anisotropic rod of non-circular cross section under elastoplastic torsion // Bulletin of Samara. state technical university. Series Phys.-Math. Sciences. 2017. № 2. С. 292–307.
- [3] Shcheglova Yu. D. Application of the small parameter method to the problem of elastoplastic torsion of a two-layer anisotropic cylinder // Bulletin of the Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. Vol. 15 / [ed. : A.I. Shashkin (chief editor), etc.] ; Voronezh State University; Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. 2021. № 15. С. 233–238.
- [4] Shcheglova Yu. D. To determine the displacement field in the problem of elastoplastic torsion of a two-layer anisotropic cylinder // Bulletin of the Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. Vol. 16 / [ed. : S. N. Medvedev (editor-in-chief), etc.] ; Voronezh State University; Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. 2023. № 16. С. 157–167.
- [5] Shcheglova Yu. D. Perturbation method in studying the stressed state of a three-layer anisotropic cylindrical rod of non-circular cross section under elastic-plastic torsion // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2022. № 4(54). С. 72–82.
- [6] Качанов Л. М. Fundamentals of the theory of plasticity. Moscow: Science, 1969. 420 с.
- [7] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Science, 1978. 208 с.
- [8] Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Yu. D. Non-One-Dimensional Problems of Elastic-Viscoplasticity with an Unknown Boundary. Voronezh: Voronezh State University, 2004. 219 с.

Shcheglova Yuliya Dmitrievna, Candidate Sci. Phys. and Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia

В. В. Горяйнов¹, С. Ф. Кузнецов², О. Ю. Никифорова², И. Г. Рукин²

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЕ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПО ВСЕЙ ДЛИНЕ ОДНОЙ СТОРОНЫ И В УГЛАХ ПРОТИВОПОЛОЖНОЙ СТОРОНЫ

¹Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия,

²Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж,
Россия

Аннотация. Построено точное решение задачи о прогибах прямоугольной мембраны, закрепленной по всей длине одной из ее сторон и на противоположной стороне только в угловых точках. Приводится анализ распределения напряжений в мембране, из которого следует, что изменение формы мембраны с квадратной на прямоугольную приводит к изменению количества точек с $\bar{\sigma}_{\max}$ и увеличению значения $\bar{\sigma}_{\max}$.

Ключевые слова: прогиб мембраны, компоненты напряжений, прямоугольник, точное решение, уравнение Пуассона.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.002

УДК: 517.518.454

Введение. Среди тонкостенных конструкций, сочетающих легкость с высокой прочностью, особо выделяются мембранные конструкции, которые находят широкое применение во всех отраслях производства и жизнедеятельности, например, [1, 2]. Мембрану можно закрепить различными способами. Чаще всего мембрану жестко закрепляют по всему контуру [3 - 6]. В работе [7] использовано жесткое перемещение

© Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю., Рукин И. Г., 2023

Горяйнов Виталий Валерьевич

e-mail: gorvit77@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия.

Кузнецов Сергей Федорович

e-mail: sfs134@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Никифорова Ольга Юрьевна

e-mail: niki22@mail.ru, старший преподаватель кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Рукин Иван Геннадьевич

e-mail: thenotnick@gmail.com, аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.12.2023

контура круглой мембраны. В [8, 9] прямоугольная мембрана закреплена только на длинных сторонах. В данной работе будет проведено исследование напряженного состояния прямоугольной мембраны, закрепленной по всей длине одной из сторон и на противоположной ей стороне закрепление будет только в угловых точках. Подобный вид крепления мембраны можно встретить в работе [10].

1. Постановка задачи и ее решение в общем виде. Покажем в общем виде решение уравнения прогибов мембраны, которые описываются уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{\square}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (1)$$

где $F(x, y)$ нагрузка на мембрану.

Граничные условия запишем в виде

$$w|_{x=0} = f_1(y), \quad w|_{y=0} = f_2(x), \quad w|_{x=a} = f_3(y), \quad w|_{y=b} = f_4(x). \quad (2)$$

Решение краевой задачи (1), (2) должно удовлетворять условиям согласований

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_2(a) = f_3(0), \quad f_3(b) = f_4(a), \quad f_1(b) = f_4(0), \quad (3)$$

$$w_{xx}(0, 0) + w_{yy}(0, 0) + F(0, 0) = 0, \quad w_{xx}(a, 0) + w_{yy}(a, 0) + F(a, 0) = 0,$$

$$w_{xx}(0, b) + w_{yy}(0, b) + F(0, b) = 0, \quad w_{xx}(a, b) + w_{yy}(a, b) + F(a, b) = 0.$$

Равенства (3) следуют из независимости величины прогибов $w(x, y)$ от направления подхода к этим углам.

Функцию $w(x, y)$ представим конечным выражением в виде суммы граничной функции второго порядка и ряда Фурье по синусам, в котором учтены два коэффициента Фурье [11]

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^4 A_i(y) P_i(x) + A_5(y) \sin \pi \frac{x}{a} + A_6(y) \sin 2\pi \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (4)$$

$$A_i(y) = \sum_{j=1}^4 A_{i,j} P_j(y) + A_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + A_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \quad i = 1 \div 6, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$P_1(y) = 1 - \frac{y}{b}, \quad P_2(y) = \frac{y}{b}, \quad P_3(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}, \quad P_4(y) = \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6},$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{x}{a}, \quad P_2(x) = \frac{x}{a}, \quad P_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}, \quad P_4(x) = \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}.$$

Таким образом, искомая функция $w(x, y)$ представлена в виде конечной двойной суммы, содержащей 36 неизвестных коэффициентов

$$A_{i,j}, \quad i = 1 \div 6, \quad j = 1 \div 6. \quad (5)$$

Зададим функции $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$, входящие в граничные условия (2), следующим образом

$$f_1(y) = \sum_{j=1}^4 f_{1,j} P_j(y) + f_{1,5} \sin \pi \frac{y}{b} + f_{1,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \quad (6)$$

$$f_2(x) = \sum_{j=1}^4 f_{2,j} P_j(x) + f_{2,5} \sin \pi \frac{x}{a} + f_{2,6} \sin 2\pi \frac{x}{a},$$

$$f_3(y) = \sum_{j=1}^4 f_{3,j} P_j(y) + f_{3,5} \sin \pi \frac{y}{b} + f_{3,6} \sin 2\pi \frac{y}{b},$$

$$f_4(x) = \sum_{j=1}^4 f_{4,j} P_j(x) + f_{4,5} \sin \pi \frac{x}{a} + f_{4,6} \sin 2\pi \frac{x}{a},$$

где постоянные $f_{i,j}$, $i = 1 \div 4$, $j = 1 \div 6$ считаем известными величинами.

Нагрузку на мембрану $F(x, y)$ запишем конечной суммой по аналогии с зависимостью (4):

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^4 F_i(y) P_i(x) + F_5(y) \sin \pi \frac{x}{a} + F_6(y) \sin 2\pi \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (7)$$

$$F_i(y) = \sum_{j=1}^4 F_{i,j} P_j(y) + F_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + F_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \quad i = 1 \div 6, \quad 0 \leq y \leq b$$

Все коэффициенты $F_{i,j}$, $i = 1 \div 6$, $j = 1 \div 6$ в выражении (7) для нагрузки считаем известными, так как $F(x, y)$ – заданная функция.

В работе [11] приведено решение уравнения (1) с заданной нагрузкой на мембрану в виде (7), которое точно удовлетворяет граничным условиям (2) и условиям согласований (3).

Таким образом, значения коэффициентов $A_{i,j}$ будут определяться равенствами [11]:

$$A_{1,j} = f_{1,j}, \quad A_{2,j} = f_{3,j}, \quad j = 1 \div 6, \quad (8)$$

$$A_{3,1} = f_{2,3}, \quad A_{3,2} = f_{4,3}, \quad A_{3,3} = -F_{1,3}, \quad A_{3,4} = -F_{1,4}, \quad A_{3,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{1,5} - F_{1,5},$$

$$A_{3,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{1,6} - F_{1,6},$$

$$A_{4,1} = f_{2,4}, \quad A_{4,2} = f_{4,4}, \quad A_{4,3} = -F_{4,1}, \quad A_{4,4} = -F_{2,4}, \quad A_{4,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{3,5} - F_{2,5},$$

$$A_{4,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{3,6} - F_{2,6},$$

$$A_{5,1} = f_{2,5}, \quad A_{5,2} = f_{4,5}, \quad A_{5,3} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{2,5} - F_{5,1}, \quad A_{5,4} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{4,5} - F_{5,2},$$

$$A_{5,5} = F_{5,5} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), \quad A_{5,6} = F_{5,6} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right),$$

$$A_{6,1} = f_{2,6}, \quad A_{6,2} = f_{4,6}, \quad A_{6,3} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{2,6} - F_{6,1}, \quad A_{6,4} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{4,6} - F_{6,2},$$

$$A_{6,5} = F_{6,5} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), \quad A_{6,6} = F_{6,6} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right).$$

Подставив коэффициенты из (8) в выражение (4), будем иметь точное решение задачи.

При задании граничных условий (2) и нагрузки на мембрану (7) должны выполняться следующие условия:

$$f_{1,1} = f_{2,1}, \quad f_{2,2} = f_{3,1}, \quad f_{3,2} = f_{4,2}, \quad f_{1,2} = f_{4,1}, \quad (9)$$

$$F_{3,3} = F_{3,4} = F_{4,3} = F_{4,4} = 0. \quad (10)$$

$$f_{1,3} = -f_{2,3} - F_{1,1}, \quad f_{1,4} = -f_{4,3} - F_{1,2}, \quad f_{3,3} = -f_{2,4} - F_{2,1}, \quad f_{3,4} = -f_{4,4} - F_{2,2}. \quad (11)$$

$$F_{1,3} = F_{3,1}, \quad F_{1,4} = F_{3,2}, \quad F_{4,1} = F_{2,3}, \quad F_{2,4} = F_{4,2}. \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
f_{1,5} &= \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{\pi^2} F_{3,5} + F_{1,5} \right), & f_{1,6} &= \frac{b^2}{4\pi^2} \left(\frac{b^2}{4\pi^2} F_{3,6} + F_{1,6} \right), \\
f_{2,5} &= \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{a^2}{\pi^2} F_{5,3} + F_{5,1} \right), & f_{2,6} &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{a^2}{4\pi^2} F_{6,3} + F_{6,1} \right), \\
f_{3,5} &= \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{\pi^2} F_{4,5} + F_{2,5} \right), & f_{3,6} &= \frac{b^2}{4\pi^2} \left(\frac{b^2}{4\pi^2} F_{4,6} + F_{2,6} \right), \\
f_{4,5} &= \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{a^2}{\pi^2} F_{5,4} + F_{5,2} \right), & f_{4,6} &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{a^2}{4\pi^2} F_{6,4} + F_{6,2} \right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, решение (8) имеет место, когда выполнены условия (9) – (13).

2. Построение точного решения задачи о прогибах прямоугольной мембраны, закрепленной по всей длине одной из сторон и на противоположной ей стороне в угловых точках. Пусть на мембрану действует постоянная нагрузка. Подобную нагрузку можно получить из выражений (7) и условия (11) при выполнении равенств

$$F_1(y) = F_2(y), \quad F_3(y) = F_4(y) = F_5(y) = F_6(y) = 0. \tag{14}$$

Условие $F_1(y) = F_2(y)$ в равенствах (14) означает равенство коэффициентов

$$F_{1,1} = F_{1,2} = F_{2,1} = F_{2,2} = Q \tag{15}$$

с одновременным равенством нулю остальных коэффициентов:

$$F_{1,3} = F_{1,4} = F_{1,5} = F_{1,6} = F_{2,3} = F_{2,4} = F_{2,5} = F_{2,6} = 0. \tag{16}$$

Таким образом, при выполнении равенств (14) – (16) имеем постоянную нагрузку на мембрану

$$F(x, y) = Q. \tag{17}$$

Запишем граничные условия, которые будут выполняться для нагрузки (17). Для этого, с учетом равенств (15) перепишем равенства (11) в виде

$$f_{1,3} + f_{2,3} + Q = 0, \quad f_{1,4} + f_{4,3} + Q = 0, \quad f_{2,4} + f_{3,3} + Q = 0, \quad f_{4,4} + f_{3,4} + Q = 0. \tag{18}$$

Пусть в формулах (6) только коэффициенты, входящие в равенства (18), могут быть отличны от нуля. Для этого случая возможны несколько вариантов граничных условий, соответствующих разным комбинациям значений коэффициентов в равенствах (18). Пусть

$$f_{1,3} = f_{1,4} = f_{2,4} = f_{4,4} = 0, \quad f_{2,3} = f_{4,3} = f_{3,3} = f_{3,4} = -Q. \tag{19}$$

Тогда, если учесть значения коэффициентов из равенств (19), то граничные условия (2) примут вид

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=a} = -\frac{Q}{2} (y^2 - by), \quad w|_{y=0} = w|_{y=b} = -Q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right). \tag{20}$$

Подставляя в выражения (8) коэффициенты из равенств (16) и (19), получим:

$$A_{2,3} = A_{2,4} = A_{3,1} = A_{3,2} = -Q.$$

После упрощений точное решение уравнения (1), соответствующее условиям (20), с постоянной нагрузкой (17) принимает вид

$$w(x, y) = -\frac{Q}{2} (y^2 - by) \frac{x}{a} - Q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right). \tag{21}$$

Равенство (21) позволяет вычислить прогиб прямоугольной мембраны в любой точке. Например, при подстановке в (21) $x = a/2$ и $y = b/2$ имеем формулу для прогиба в центре мембраны под действием постоянной нагрузки

$$w\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) = \frac{Q}{16}(a^2 + b^2). \quad (22)$$

Из формулы (22) следует, что при $a = b$ прогиб в центре квадратной мембраны пропорционален второй степени ее линейного размера.

Выберем в качестве материала мембраны конструкционную углеродистую сталь обыкновенного качества марки ВСтЗпс [2] со следующими характеристиками [12, 13]

$$R_y = 2.35 \cdot 10^8 \text{ Па}, \nu = 0,25, E = 2,13 \cdot 10^{11} \text{ Па},$$

где R_y - расчетное сопротивление материала мембраны.

Значения параметров a , b , Q подбирались так, чтобы напряжения не превосходили расчетное сопротивление материала мембраны при двухосном напряженном состоянии [1, 4]

$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2} = \tilde{\sigma} \leq R_y \quad (23)$$

где

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2. \quad (24)$$

Вид прогиба мембраны под действием нагрузки (17) для данных

$$Q = 1 \cdot 10^{-2}, a = 0.5 \text{ м.}, b = 0.5 \text{ м.} \quad (25)$$

показан на рис. 1. Компоненты напряжений, вычисленные по формулам (24), показаны на рис. 2, а распределение $\tilde{\sigma}$, рассчитанное по формуле (23), изображено на рис. 3

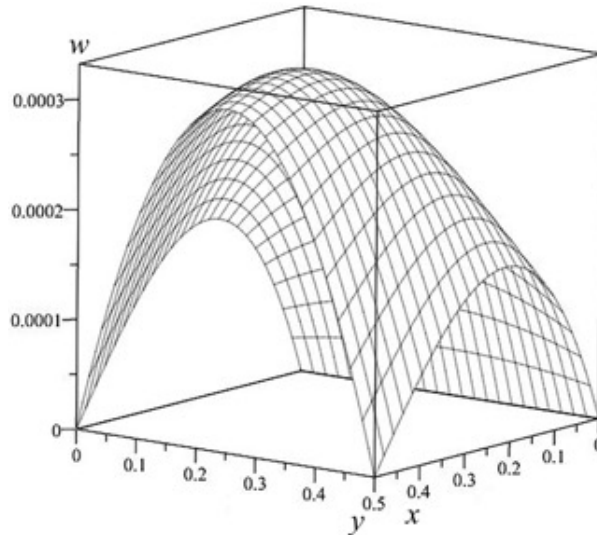
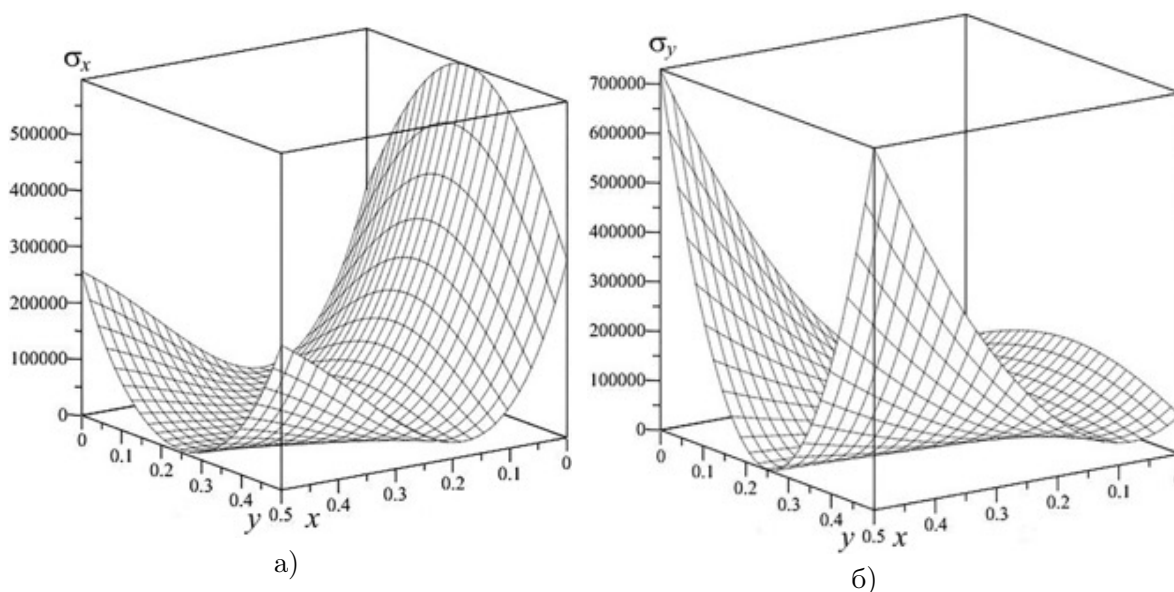
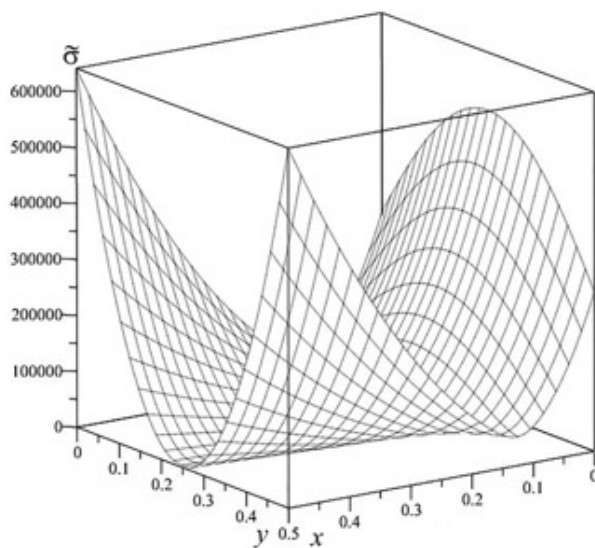


Рис. 1. Прогиб квадратной мембраны

Рис. 2. Компоненты напряжений в квадратной мембране: а) σ_x ; б) σ_y Рис. 3. Распределение $\tilde{\sigma}$ в квадратной мембране

Как видно из рис. 1- рис. 3 прогиб мембраны, компоненты напряжений и распределение $\tilde{\sigma}$ симметричны относительно плоскости $y = b/2$. В отличие от максимального прогиба мембраны, закрепленной по всему периметру [3 – 6], максимальный прогиб квадратной мембраны, закрепленной по всей длине одной стороны и в углах противоположной стороны, находится не в центре области мембраны, а смещен относительно центра в точку $(0.71a; b/2)$. Также при задании граничных условий (20) меняется

расположение точек с максимальным напряжением $\tilde{\sigma}_{\max}$ по отношению к граничным условиям [3 – 6]. В нашем случае распределение $\tilde{\sigma}$ (см. рис. 3) имеет две точки с максимальным напряжением $\tilde{\sigma}_{\max}$, которые расположены на границе $x = a$ в точках $(a; b)$ и $(a; 0)$.

Изменение формы мембраны с квадратной на прямоугольную приводит к изменению вида прогиба мембраны и вида распределения $\tilde{\sigma}$. Так, значения максимального прогиба w_{\max} прямоугольной мембраны будут смещаться вдоль плоскости симметрии $y = b/2$ вправо или влево в зависимости от того какая из двух смежных сторон прямоугольника увеличивается. Если возрастает длина закрепленной стороны, то значение w_{\max} смещается влево относительно точки $(0.71a; b/2)$, и при соотношении сторон $a/b \leq 5/6$ значение w_{\max} будет расположено в точке $(a; b/2)$. Если возрастает длина стороны смежной к закрепленной, то значение w_{\max} смещается вправо относительно точки $(0.71a; b/2)$, и при соотношении сторон $a/b \geq 4$ значение w_{\max} будет расположено на плоскости $y = b/2$ в окрестности точки $(0.44a; b/2)$. Примеры прогибов прямоугольной мембраны при размерах $a = 1/2, b = 2$ и $a = 2, b = 1/2$ представлены на рис. 4.

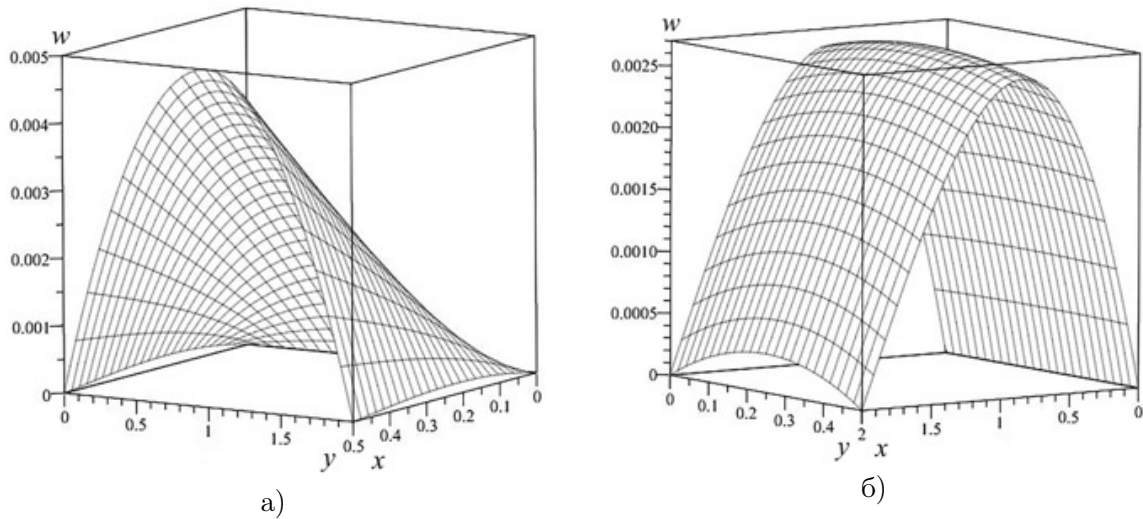


Рис. 4. Прогиб прямоугольной мембраны: а) $a = 1/2$ и $b = 2$; б) $a = 2$ и $b = 1/2$

Опишем изменения распределения $\tilde{\sigma}$, вызванные увеличением длины одной из сторон мембраны. Так, при увеличении длины полностью закрепленной стороны возрастают напряжения в плоскости симметрии $y = b/2$. При отношении сторон мембраны $a/b = 36/125$ величина напряжений в точке $(0; b/2)$ становится равной величине напряжений в точках $(a; b)$ и $(a; 0)$. Таким образом, при данном соотношении сторон имеем три точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$. При дальнейшем увеличении длины полностью закрепленной стороны величина напряжений в точке $(0; b/2)$ становится больше, чем напряжения в угловых точках $(a; b)$ и $(a; 0)$, т.е. распределение $\tilde{\sigma}$ будет иметь только одно значение с $\tilde{\sigma}_{\max}$. Подобное распределение $\tilde{\sigma}$ показано на рис. 5а. Уменьшение длины полностью закрепленной стороны приводит к снижению напряжений в углах противоположной стороны и при отношении $a/b > 1.19$ напряжения в угловых точках $(a; b)$, $(a; 0)$ будут

меньше чем напряжения в середине закрепленной стороны (точка $(0; b/2)$). Характерное распределение $\tilde{\sigma}$ в прямоугольной мембране для случая $a/b > 1.19$ изображено на рис. 5б.

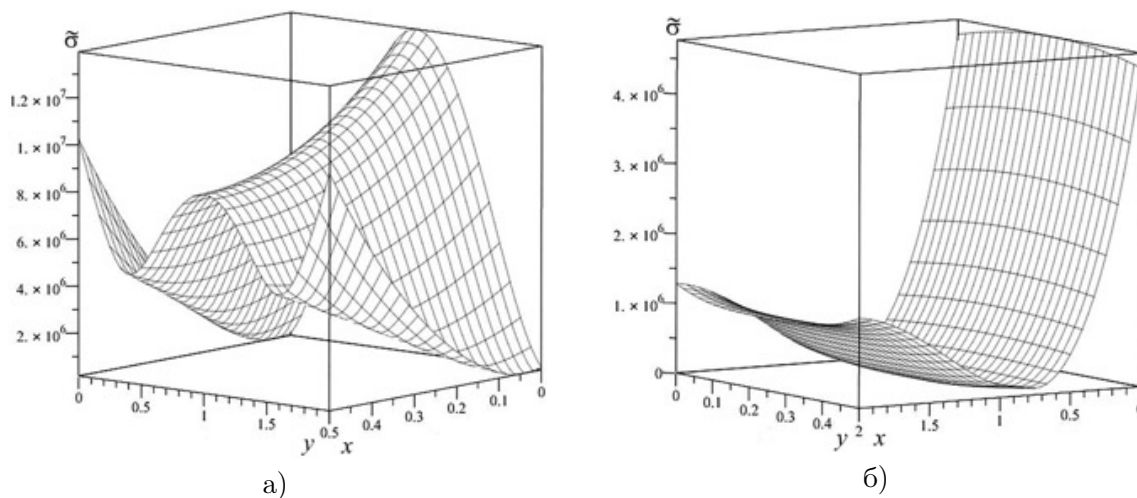


Рис. 5. Распределение $\tilde{\sigma}$ в прямоугольной мембране: а) $a = 1/2$ и $b = 2$; б) $a = 2$ и $b = 1/2$

Таким образом, изменение формы мембраны с квадратной на прямоугольную приводит к изменению количества точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$. Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ и их координаты в зависимости от отношения сторон a/b приведены в табл. 1 и табл. 2

Размеры мембраны, м	$a = 1/2$						
	$b = 1/2$	$b = 1$	$b = 3/2$	$b = 1.576$	$b = 2$	$b = 5/2$	$b = 3$
Отношение a/b	1	1/2	1/3	36/125	1/4	1/5	1/6
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	2	2	2	3	1	1	1
Координаты точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	$(a; b), (a; 0)$	$(a; b), (a; 0)$	$(a; b), (a; 0)$	$(a; b), (a; 0), (0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$

Таблица 1. Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ и их координаты при закреплении длинной стороны мембраны

Из табл. 1 видно, что при отношении сторон $a/b > 36/125$ у прямоугольной мембраны будут две точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$ с теми же координатами, что и у квадратной мембраны. При $a/b = 36/125$ величина напряжений в точке $(0; b/2)$ становится равной величине напряжений в точках $(a; b)$ и $(a; 0)$. Таким образом, при данном соотношении сторон

имеем три точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$. При $a/b < 36/125$ величина напряжений в точке $(0; b/2)$ становится больше, чем напряжения в угловых точках $(a; b)$ и $(a; 0)$, т.е. распределение $\tilde{\sigma}$ будет иметь только одно значение с $\tilde{\sigma}_{\max}$. При закреплении мембраны по короткой стороне (см. табл. 2) максимальные напряжения $\tilde{\sigma}_{\max}$ находятся в точках с теми же координатами, что и при закреплении мембраны по длинной стороне. Отметим только, что напряженное состояние с тремя точками $\tilde{\sigma}_{\max}$ при закреплении мембраны по короткой стороне наступает гораздо быстрее, чем при закреплении мембраны по длинной стороне.

Размеры мембраны, м	$b = 1/2$						
	$a = 1/2$	$a = 0.595$	$a = 1$	$a = 3/2$	$a = 2$	$a = 5/2$	$a = 3$
Отношение a/b	1	1.19	2	3	4	5	6
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	2	3	1	1	1	1	1
Координаты точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	$(a; b),$ $(a; 0)$	$(a; b),$ $(a; 0),$ $(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$	$(0; b/2)$

Таблица 2. Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ и их координаты при закреплении короткой стороны мембраны

Результаты исследований, приведенные в табл. 1 и табл. 2, соответствуют мембранам различной площади, и какое соотношение сторон a/b является оптимальным с точки зрения наименьшего значения $\tilde{\sigma}_{\max}$ определить нельзя. Поэтому для выяснения наилучшего соотношения сторон a/b в расчетах будем выбирать размеры сторон мембраны таким образом, чтобы площадь ее сечения оставалась постоянной. Результаты вычислительных экспериментов приведены в табл. 3 и табл. 4, из которых видно, что в квадратной мембране значение $\tilde{\sigma}_{\max}$ будет минимальным.

Размеры мембраны, м	$a = b = 1/2$	$a = 1, b = 1/4$	$a = 3/2, b = 1/6$	$a = 2, b = 1/8$
Отношение a/b	1	4	9	16
Значение $\tilde{\sigma}_{\max}$, Па	$0.64 \cdot 10^6$	$1.19 \cdot 10^6$	$2.58 \cdot 10^6$	$4.56 \cdot 10^6$
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	2	1	1	1

Таблица 3. Значения $\tilde{\sigma}_{\max}$ в мембранах одинаковой площади и различного отношения a/b при закреплении короткой стороны

Если необходимо использовать прямоугольную мембрану, то с целью уменьшения в ней напряжений следует выбрать короткую сторону в качестве стороны для жесткого

Размеры мембраны, м	$a = b = 1/2$	$a = 1/4, b = 1$	$a = 1/6, b = 3/2$	$a = 1/8, b = 2$
Отношение a/b	1	1/4	1/9	1/16
Значение $\tilde{\sigma}_{\max}$, Па	$0.64 \cdot 10^6$	$3.48 \cdot 10^6$	$3.11 \cdot 10^7$	$1.67 \cdot 10^8$
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	2	1	1	1

Таблица 4. Значения $\tilde{\sigma}_{\max}$ в мембранах одинаковой площади и различного отношения a/b при закреплении длинной стороны

закрепления (см. табл. 3 и табл. 4), а габаритные размеры должны быть приближены к квадратным.

Заключение. Если прямоугольная мембрана закреплена по всей длине одной из сторон и на противоположной ей стороне только в угловых точках, то габаритные размеры мембраны влияют на количество точек с максимальным напряжением $\tilde{\sigma}_{\max}$ и на величину $\tilde{\sigma}_{\max}$. У квадратной мембраны имеется две точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенные в углах $(a; b)$ и $(a; 0)$. У прямоугольной мембраны количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ зависит от отношения сторон a/b . Возможны три варианта расположения точек: 1) две точки в углах $(a; b)$ и $(a; 0)$; 2) три точки - в углах $(a; b)$, $(a; 0)$ и середине противоположной стороны $(0; b/2)$; 3) одна точка - $(0; b/2)$. Напряженное состояние мембраны, имеющей три точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$, наступает при различном отношении a/b в зависимости от того какая сторона закреплена длинная или короткая. Для длинной стороны $a/b = 0.288$, а для короткой $a/b = 1.19$. Также в ходе вычислительных экспериментов установлено, что наименьшие напряжения $\tilde{\sigma}_{\max}$, из всех возможных отношений a/b , наблюдаются у квадратной мембраны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Еремеев П.Г. Пространственные тонколистовые металлические конструкции покрытий. Москва: Издательство ассоциации строительных вузов. 2006. 560 с.
- [2] Якупов С.Н., Якупов Н.М. Тонкослойные покрытия // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 1. С. 6–14.
- [3] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука. 1979. 560 с.
- [4] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. Москва: Наука. 1966. 636 с.
- [5] Васильев В. В., Лурье С. А. Обобщенное решение задачи о круглой мембране, нагруженной сосредоточенной силой // Известия РАН. МТТ. 2016. № 3. С. 115 – 119.
- [6] Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки / А.Д. Чернышов, В.В. Горайнов, С.Ф. Кузнецов [и др.] // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 127 – 142.
- [7] Александров В.М., Саламатова В.Ю. Изгиб круглой мембраны на линейно-деформируемом основании // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, № 4. С. 672 – 676.
- [8] Локощенко А.М., Терауд В.В. Ползучесть длинной узкой мембраны в стесненных условиях вплоть до разрушения // ПМТФ. 2013. Т. 54, №3. С. 126-133.
- [9] Ларин С.Н., Бессмертный А.В. Изотермическое свободное деформирование узкой прямоугольной мембраны из анизотропного листового материала при кратковременной ползучести // Известия ТулГУ. Технические науки. 2010. Вып. 1. С. 44-51.

- [10] Рекомендации по проектированию мембранных покрытий на прямоугольном плане для реконструируемых зданий и сооружений. Москва: ЦНИИСК им. Кучеренко. 1989. 90 с.
- [11] Using of fast expansions in the construction of twodimensional exact solutions of the Poisson equation / A.D. Chernyshov, V.V. Goryainov, M.I. Popov et al. // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. 1479. 012146.
- [12] <http://www.vashdom.ru/snip/II-23-81/index-7.htm>
- [13] http://metallichekiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3s

V.V. Goryainov¹, S. F. Kuznetsov², O. Yu. Nikiforova², I. G. Rukin²

STRESS STUDY IN A RECTANGULAR MEMBRANE FIXED ALONG THE ENTIRE LENGTH OF ONE SIDE AND IN THE CORNERS OF THE OPPOSITE SIDE

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia¹,
Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia².

Abstract. An exact solution to the problem of deflections of a rectangular membrane fixed along the entire length of one of its sides and on the opposite side only at corner points is constructed. An analysis of the stress distribution in the membrane is presented, from which it follows that changing the shape of the membrane from square to rectangular leads to a change in the number of points with $\tilde{\sigma}_{\max}$ and an increase in the value of $\tilde{\sigma}_{\max}$.

Keywords: membrane deflection, stress components, rectangle, exact solution, Poisson equation.

REFERENCES

- [1] Ereemeev P.G. Spatial light-gage metal construction coatings. Moscow: Izdatel'stvo assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2006.560 p. (in Russian).
- [2] Yakupov S.N., Yakupov N.M. Thin-layer coatings // Structural mechanics of engineering structures and structures. 2017. no. 1. P. 6–14. (in Russian).
- [3] Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1979. 560 p. (in Russian).
- [4] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. Moscow: Nauka, 1966. 636 p. (in Russian).
- [5] Vasil'ev V.V., Lurie S.A. Generalized solution of the problem on a circular membrane loaded by a lumped force. // Mechanics of Solids. no. 51(3). 2016. P. 334–338.
- [6] Application of fast expansions to obtain exact solutions to a problem on rectangular membrane deflection under alternating load/ A.D. Chernyshov, V.V. Goryainov, S.F. Kuznetsov et al. // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. no. 70. 2021. P. 127–142.
- [7] Aleksandrov V.M., Salamatova V.Y. The bending of a circular membrane on a linearly deformed foundation // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. no. 75(4). 2011. P. 472–475.
- [8] Lokoshchenko A.M., Teraud V.V. Creep of a long narrow membrane up to fracture under constrained conditions // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. no. 54(3). P. 451–457.

Goryainov Vitaly Valerievich, Ph.D. in Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia.

Kuznetsov Sergey Fedorovich, Ph.D. in Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Nikiforova Olga Yurievna, Senior Lecturer, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

Rukin Ivan Gennadievich, post-graduate student, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia.

-
- [9] Larin S.N., Bessmertny A.V. The free isothermal deforming of the narrow orthogonal membrane from the anisotropic sheet material in the mode of short-durated creeping conditions // Izvestia of Tula State University. Technical science. no. 1. 2010. P. 44-51. (in Russian).
- [10] Recommendations for the design of membrane coverings on a rectangular plan for reconstructed buildings and structures. Moscow: TsNIISK im. Kucherenko. 1989. 90 p. (in Russian).
- [11] Using of fast expansions in the construction of twodimensional exact solutions of the Poisson equation / A.D. Chernyshov, V.V. Goryainov, M.I. Popov et al. //IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. no. 1479. P. 012146.
- [12] <http://www.vashdom.ru/snip/II-23-81/index-7.htm>
- [13] http://metallichekiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3ps

В. К. Гончарук, Н. Ю. Зайко, А. А. Ратников, К. К. Шелковников

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АДГЕЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ЗОНЕ КОНТАКТА СТЕКЛА И АЛЮМИНИЯ В СТЕКЛОМЕТАЛЛОКОМПОЗИТНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. При создании стекло-металлических соединений, в том числе нового конструкционного материала стеклометаллокомпозиата, используется способность стекла надежно соединяться с металлами при определенном уровне температур стекла и металла. Адгезия горячего стекла тесно связана с физико-химическими процессами, протекающими на границе раздела «стекло – металл». Соединение зависит от температуры металлических обшивок и расплава стекла, времени выдержки, давления, состава стекла и металла. В данной работе экспериментально исследуется влияние технологических параметров центробежного литья на прочностные свойства конструкционного элемента стеклометаллокомпозиата, как результата контактного взаимодействия слоев, сила сцепления которых определяет основные механические свойства соединения. Предлагается экспериментальный метод определения адгезионной силы при исследовании конструктивных цилиндрических образцов стеклометаллокомпозиата на сдвиг.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, стеклометаллокомполит, адгезионная сила, стекло-металлическое соединение.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.003

УДК: 531.534

© Гончарук В. К., Зайко Н. Ю., Ратников А. А., Шелковников К. К., 2023

Гончарук Владимир Кириллович

e-mail: gon@ich.dvo.ru, доктор химических наук, профессор, заведующий лабораторией оптических материалов, Институт химии Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Россия.

Зайко Надежда Юрьевна

e-mail: golobokovanu@dvvu.ru, старший преподаватель Политехнического института, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Ратников Александр Александрович, заведующий лабораторией компьютерного моделирования, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Шелковников Константин Константинович

e-mail: shelkovnikov.kk@dvvu.ru, аспирант департамента морской техники и транспорта, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Поступила 01.12.2023

Введение. Исследования контактного взаимодействия тел цилиндрической формы сохраняют теоретическую и прикладную актуальность, которая связана не только с тем, что полый цилиндр является наиболее распространенной деталью в машиностроении, но и с новыми видами материалов используемыми в современной промышленности для цилиндрических деталей. Развитие индустрии композиционных материалов обозначает ряд проблем из которых проблема моделирования и экспериментального исследования контактного взаимодействия слоев является основной особенной при проектировании слоистых композитов с материалами слоев существенно различающихся по физико-механическим свойствам. Безусловно к таким материалам относится новый композиционный материал на основе стекла и металла - стеклометаллокомпозит (рис. 1а), перспективы его применения изложены в работах [1–3], а основные результаты исследований в работах [4–6]. При создании стеклометаллокомпозита используется способность стекла надежно соединяться с металлами при определенном уровне температур стекла и металла [3]. Стеклометаллокомпозит является принципиально новым конструкционным материалом, не имеющим аналогов в мире. Стекло теоретически обладает огромными прочностными свойствами. Но на практике его прочность намного меньше из-за микротрещин на поверхности стекла (рис. 1б). Зависимость прочности соединения для некоторых стекол с металлами от температуры материалов и геометрии поверхности металла исследована в работе [7]. В работах [7–9] исследована связь между температурой прилипания и вязкостью стекломассы установлено, что адгезия стекла к металлу находится в прямой зависимости от степени предварительного нагрева стекла и металла (Рисунок 1с). Для борьбы с усадкой стеклообразователя технология изготовления СМК предусматривает использование дополнительного давления. При осуществлении процесса стеклования под давлением наблюдается переход стекла в более твердое аморфное состояние. При этом достигается уплотнение силикатного стекла на 10 % и даже выше, а плотность стекла по плотности приближается к кристаллическим формам. Это означает, что в процессе уплотнения появляется иной механизм молекулярной подвижности, чем при размягчении стекла. Для релаксации напряжений в СМК и стабилизации физико-механических свойств стеклянного слоя производится отжиг оболочки при температуре стеклования. Все существующие количественные сведения о протекании процессов релаксации и стабилизации физико-механических свойств стекла при отжиге получены на основе анализа температурно-временных зависимостей свойств стеклообразующих жидкостей. Показано, что при фиксированной структуре процесс релаксации характеризуется сравнительно небольшими временами релаксации и энергией активации, и этот процесс главным образом отвечает за релаксацию напряжений в стекле в интервале стеклования. При вязкости стекломассы, превышающей 1016–1017 Па·с, время релаксации становится настолько большим, что при решении практических задач структуру стекла можно считать стабильной, не изменяющейся во времени. Технология изготовления стеклометаллокомпозита требует обеспечения надежного соединения стеклянного слоя с металлическими обшивками [1–3]. Это означает, что температура обшивок в момент контакта с расплавом стекла должна составлять 500–750° С в зависимости от состава стекла и используемого металла. Температурные напряжения в стеклометаллокомпозите, даже при условии равномерного распределения температуры являются в первую очередь следствием разных механических и физико-химических свойств материалов, из которых выполнены сопряженные элементы или слои. В механике контактного взаимодействия контакт упругого

бандажа с упругим цилиндром исследованы в монографии [10]. Осесимметричная контактная задача обжатия длинного круглого цилиндра насаженным с натяжением упругим кольцом рассмотрена в [11]. Получена формула, определяющая контактное давление в зависимости от величины натяжения. Результаты исследования контакта с зазором цилиндра и обоймы приведены в монографии [12], внешний контакт пары вращающихся круговых цилиндров с учетом тепловыделения от действия сил трения рассмотрен в [13]. В работе [14] исследована упругая, а в [15] — термоупругая при стационарном тепловыделении задача обжатия длинного цилиндра упругим, обеспечивающего начальный ненагруженный контакт тел по поверхности кольца или по контуру окружности. В тоже время существенное влияние на общую картину температурных напряжений оказывают свойства сопряжения разнородных материалов и тип полученного соединения: склейка, сварка, или горячая посадка; идеальный контакт, свободное или частичное проскальзывание в разных направлениях. В работах [4, 16] предложено феноменологическое условие и метод математического моделирования совместного деформирования соосных цилиндров при разных условиях сопряжения по боковым поверхностям: от свободного проскальзывания вдоль оси до идеального контакта, с учетом частичного (ограниченного) проскальзывания. В данной работе, в том числе ставится задача разработки экспериментального метода, позволяющего оценить контакт слоев, за счет силы сопротивления при сдвиге. Разрабатываемый метод должен позволять также оптимизировать технологические процессы, выбора толщины оболочки металлического слоя, метода химической обработки поверхности, как инструмента влияния на адгезионные характеристики и температурный режим. В работе рассматривается влияние технологических параметров центробежного литья на прочностные свойства диффузионный слой, возникающего в процессе изготовления СМК. При этом поставлена задача проведения испытаний изготовленных цилиндрических образцов СМК на сдвиг.

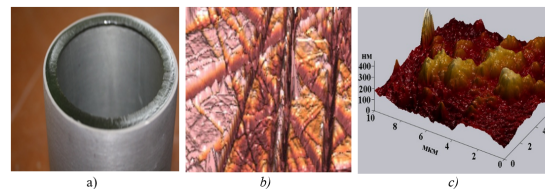


Рис. 1. а) Образец СМК, б) Микротрещины на поверхности стекла. в) Вид контактной зоны после разрыва слоев

1. Метод, материалы и результаты экспериментальных исследований.

Целью испытаний на сдвиг является определение максимального касательного напряжения, являющегося пределом прочности соединения металлической облицовки со стеклом, которое может возникнуть в диффузионном слое между стеклом и металлом. Для сдвиговых испытаний были изготовлены образцы, представляющие из себя трубку из АМг-2 длиной от 20 до 40 мм, внутренним диаметром 16, 20 и 24 мм и наружным 40 мм с залитым внутрь расплавом стекла каждого из трёх выбранных составов. АМг2 — это сплав алюминия системы Алюминий — Магний (Al — Mg), который относится к числу деформируемых давлением сплавов. Помимо этого, данный

материал выделяется среди прочих высокой коррозионной стойкостью, пластичностью и хорошей свариваемостью. По прочности он превосходит АМц, но уступает ему в пластичности. Теплопроводность же и электропроводность этого материала ниже, чем у алюминий-марганцевого сплава. В этой связи интересно продемонстрировать, сравнительную гистограмму, на которой изображены предел прочности и текучести разных сплавов алюминия. И мы видим здесь, что АМг2 примерно равен по этим свойствам АМг3. Однако, коррозионная стойкость у АМг2, естественно выше. Химический состав АМг2 можно назвать сбалансированным. Содержание магния в нём не превышает 4 %, что положительным образом сказывается на пластичности, коррозионной стойкости и свариваемости данного материала. В то же время содержание Mg превышает 2 %, что положительным образом сказывается на прочности сплава. Для упрочнения соединения внутренняя поверхность алюминиевой трубы обрабатывалась одним из трех способов: заливка стекла “всухую”, то есть заливка в алюминиевую форму без предварительной обработки поверхности алюминия; заливка с предварительной обработкой внутренней поверхности алюминия порошком В2О3; заливка изнутри образца расплавленным В2О3, названные 0,1 и 2 соответственно. Испытания проводились на испытательной машине Shimadzu Autograph AGS-X series. Также были изготовлены Т-образный стальной поршень и железная трубка длиной 45 мм, внутренним диаметром 23 мм и наружным 38 мм, представлены на рис. 2. SHIMADZU AUTOGRAPH AGS-X SERIES универсальная настольная испытательная машина серии AGS-X предназначена для исследования на сжатие. Максимально допустимая нагрузка — 50 кН. Новые модели испытательных машин серии AGS-X позволяют провести испытания на высоком уровне, имеют интуитивно понятное управление и обеспечивают максимальную степень безопасности. Испытание материала на сжатие, проводится в программном обеспечении TRAPEZIUM. Также испытательные машины серии AGS-X могут работать автономно без подключения к ПК с использованием тестовых методик, созданных непосредственно на машине. В случае автономной работы (без подключения к ПК) управление испытательной машиной производится при помощи панели управления. Панель управления обеспечивает разработку и сохранение условий испытаний; джойстик панели управления позволяет управлять захватами или автоматическим экстензометром. Панель управления подвижна, что позволяет установить ее под удобным углом. Кроме того, высокоскоростная выборка данных (1 мс) гарантирует отсутствие пропусков в изменении прочности. Перед испытанием каждый образец вертикально устанавливался на железную трубку, предварительно поставленную на неподвижную подставку, сверху в стеклянный слой упирался Т-образный поршень, который сверху придавливался прессом испытательной машины. В ходе испытания столб стекла под давлением должен был оторваться от алюминиевой облицовки и постепенно выйти в железную трубку. На рис. 3 показаны готовые к испытаниям образцы из стекломаталлокомпозита.

После проведения испытаний, испытательной машиной выводились следующие данные: время, сила и ход. Используя значения силы и площади соприкосновения, вычислены нормальные напряжения на верхнем торце стеклянного слоя σ_B и нижнем торце алюминиевого слоя σ_H :

$$\sigma_B = \frac{F}{\pi * R_{cc}}, \quad (1)$$

$$\sigma_H = \frac{F}{\pi * R_o^2 - \pi * R_{cc}^2}, \quad (2)$$



Рис. 2. Устройства для выдавливания.

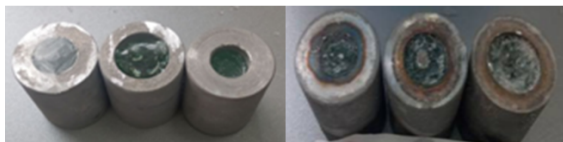


Рис. 3. Образцы для испытания.

где F - приложенная сила, R_{cc} - радиус стеклянного слоя, R_o - радиус всего образца. В таблице 1 представлены результаты вычислений. На графиках рис.4-5 представлены результаты некоторых образцов на графиках время-напряжение и сила-напряжение. Синяя линия обозначает нормальные напряжения на верхнем торце стеклянного слоя, красная – нормальные напряжения на нижнем торце алюминиевого слоя.

Вычисляя средние значения нормальных напряжений верхнего и нижнего торцов по технологиям заливки: мы можем видеть, что наибольшие напряжения испытывали образцы с технологией.

2. Моделирование в CAE Ansys. Так как данных с испытательной машины оказалось недостаточно для полной оценки прочности диффузионного слоя, была

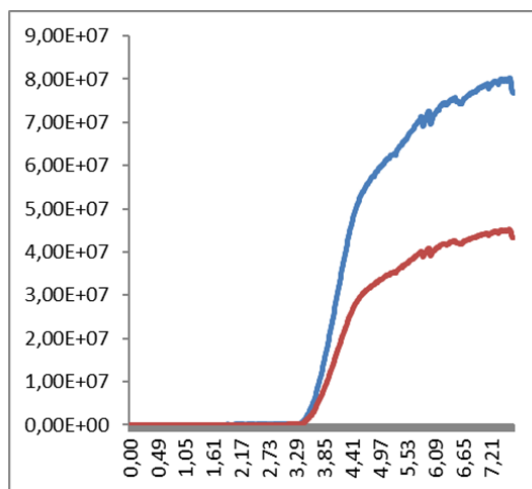


Рис. 4. Нормальные напряжения в образце 12.

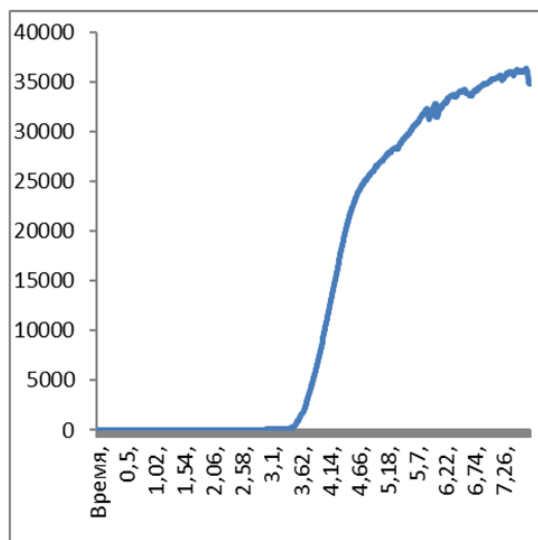


Рис. 5. Приложенная сила в образце 12.

создана компьютерная модель для расчетов в пакете программ Ansys. Для реализации данной задачи были выбраны два модуля: Transient Structural для моделирования выдержки образца и выдавливания и Explicit Dynamics для моделирования разрыва слоя стекла. Была построена геометрия моделей испытуемых образцов для двух модулей и созданы материалы Amg2, B2O3 для библиотеки Engineering Data. В Transient Structural выдавливание происходит с помощью функции Displacement на то расстояние, в котором значение силы с показателями Shimadzu является максимальным. Для учета температурных напряжений добавлена функция Thermal Condition

№ образца	Технология заливки	Среднее, верхний торец	Среднее, нижний торец	Средняя верхнего 450-565
1-6	0	106,78	31,90	93,60
7-14	1	88,31	37,46	89,65
15-20	2	141,45	43,43	88,43

Таблица 1. Средние значения напряжений

с указанием температуры выдержки, температура среды указана такая же. Выдержка происходит в течение 1-ой секунды. Для контакта между слоями был подобран тип контакта Frictional. При расчете в программе Ansys требовалось вычислить такой коэффициент трения, чтобы нормальные напряжения в программе совпадали с нормальными напряжениями самих образцов. В Ansys при типе контакта Frictional нормальная составляющая силы такая же, как и при контакте без трения. Чтобы сравнить результаты экспериментов, проведенных в устройстве Shimadzu и результаты моделирования в Ansys, были вычислены нормальные напряжения на верхнем торце стеклянного слоя и нижнем торце алюминиевого слоя, используя значения силы и хода из данных Shimadzu. Используя подобранный в Ansys коэффициент трения были вычислены силы трения на нижних и верхних торцах (табл. 2):

$$\sigma * U = F_1, \sigma * U = F_2, \quad (3)$$

№ образца	D, мм	σ_1 на верхнем торце, МПа	σ_2 на нижнем торце, МПа	μ , Коэфф. трения	$4F_1$, Сила трения на верхнем торце	Среднее значение по технологии	$4F_2$, Сила трения на нижнем торце	Среднее значение по технологии
4	16	156	29,5	0,24	37,44		8,99	7,23
6	20	137	45,6	0,2	27,40	27,40	5,48	
9	24	90	50,7	0,21	18,90	37,35	3,97	10,35
13	16	186	42	0,3	55,80		16,74	
15	20	121	40,4	0,35	42,35	66,00	14,82	29,75
16	16	157	29,9	0,4	62,80		25,12	
19	20	163	50	0,55	89,65		49,31	

Таблица 2. Вычисление силы трения

Средние значения сил трения показывают, что испытываемые напряжения у образцов с технологией заливки 2 выше, чем у образцов с технологией заливки 1. А у образцов с технологией заливки 0 меньше, чем у образцов с технологией 1. Сравнение результатов вычисления нормальных напряжений на нижнем торце в устройстве Shimadzu и в программе Ansys представлены в табл. 3.

№ образца	Напряжения на нижнем торце (Ansys), МПа	Напряжения на нижнем торце (Shimadzu), МПа	Коэффициент трения	Технология заливки
6	40	45,6	0,2	0
9	48,9	50,7	0,21	1
13	40	42	0,3	1
19	52	50	0,55	2

Таблица 3. Сравнение результатов компьютерного расчета и натуральных испытаний

Заключение Предварительные оценки показали, что наилучшие результаты достигаются на образцах, изготовленных при заливке расплава бора на поверхность алюминия перед стеклом. По результатам исследования наиболее эффективной является технология предварительной обработки поверхности алюминиевой трубы расплавом бора В2О3, что подтверждается на компьютерной модели испытаний. Построенная компьютерная модель может быть использована для определения геометрических размеров и параметров заливки для следующей серии испытаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пикуль В.В. Перспективы создания прочных корпусов глубоководной техники из стеклометаллокомпозиата // Судостроение. 2000. № 4. С. 14–16.
- [2] Пикуль В.В. Способ изготовления стеклометаллокомпозиата // Пат. № 2304117 РФ. 2007.
- [3] Пикуль В.В., Ратников А.А. Математическое моделирование деформирования цилиндрической оболочки из стеклометаллокомпозиата в процессе ее изготовления. № 3. 2007. С. 10–15.
- [4] Любимова О.Н. Стеклометаллокомполит: механические свойства, структурные механизмы деформации при повышенных температурах, моделирование процессов формирования структуры и свойств: диссертация ... доктора физико-математических наук : 01.02.04. 2020.
- [5] Любимова О. Н., Морковин А. В. Свойства, макро- и микроструктура слоистого конструкционного элемента на основе неорганического стекла и стали - стеклометаллокомполитного стержня // Металлург. 2022. № 9. С. 100–104.
- [6] Бочарова А. А. Математическое моделирование процесса формирования прочного корпуса глубоководных аппаратов из стеклометаллокомполита. № 4. 2015. С. 18–23.
- [7] Алексеев М. П. Когезия и адгезия горячего стекла. 1969. 175 с.
- [8] Эйгенсон Л.С. Термические основы формирования стекла. 1950. 380 с.
- [9] Мазурин О.В. Отжиг снаев стекла с металлом. Львов: Выща школа, 1980. 140 с.
- [10] Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении // Машиностроение. 1986.
- [11] Арутюнян Н. Х. О контактном взаимодействии упругого кольца с упругим цилиндром // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 2. С. 204–206.
- [12] Панасюк В. В., Теплый М. И. Некоторые контактные задачи теории упругости. Киев: Наук. Дум., 1975.
- [13] Ю. Н. Дроздов Д. В. Грилицкий В. П. Левицкий. Контакт пары вращающихся круговых цилиндров с учетом теплообразования от трения. 1991.
- [14] Грилицкий Д. В., Краснюк П. П. Упругий контакт двух цилиндров. 1997.
- [15] Краснюк П. П., Б. Чаповская Р. Термоупругий контакт бандажа и цилиндра в условиях фрикционного теплообразования // Физ.-хим. механика материалов. 2000. № 36(3). С. 42–52.
- [16] Любимова О. Н., Зайко Н.Ю. Температурные напряжения в соосных сопряженных цилиндрических системах и композиционных материалах с разной степенью проскальзывания по границе контакта // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 5–13.

V. K. Goncharuk, N. Yu. Zaiko, A. A. Ratnikov, K. K. Shelkovnikov

**EXPERIMENTAL STUDIES OF ADHESIVE INTERACTION IN THE
CONTACT ZONE OF GLASS AND ALUMINUM IN A GLASS-METAL
COMPOSITE ELEMENT**

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

Abstract. When creating glass-metal compounds, including a new structural material of glass-metal composite, the ability of glass to reliably connect with metals at a certain temperature level of glass and metal is used. The adhesion of hot glass is closely related to the physico-chemical processes occurring at the glass-metal interface. The connection depends on the temperature of the metal sheaths and the melt of the glass, the holding time, the pressure, the composition of the glass and metal. In this paper, the influence of technological parameters of centrifugal casting on the strength properties of a structural element of a glass-metal composite is experimentally investigated as a result of the contact interaction of layers, the adhesion strength of which determines the basic mechanical properties of the compound. An experimental method for determining the adhesive force in the study of structural cylindrical samples of glass-metal composite for shear is proposed.

Keywords: thermally stressed state, contact problem, coaxial cylindrical systems, layered composite materials.

REFERENCES

- [1] Pikul V. Prospects for the creation of durable hulls of deep-sea equipment made of glass-metal composite // Shipbuilding. 2000. P. 14–16. (in Russian).
- [2] Pikul V. The method of manufacturing a glass metal composite // Patent No. 2304117 of the Russian Federation. 2007. 344 p. (in Russian).
- [3] Pikul V., Ratnikov A. Mathematical modeling of deformation of a cylindrical shell made of glass-metal composite in the process of its manufacture. No. 3. Moscow: Science, 2007. P. 10–15. (in Russian).
- [4] Lyubimova O. Glass-metal composite: mechanical properties, structural mechanisms of deformation at elevated temperatures, modeling of the processes of formation of structure and properties: dissertation ... Doctor of Physical and Mathematical Sciences : 02/01/04. 2020. (in Russian).
- [5] Lyubimova O. N., Morkovin A. Properties, macro- and microstructure of a layered structural element based on inorganic glass and steel - a glass-metal composite rod // Metallurgist. 2022. no. 9. P. 100–104. (in Russian).
- [6] Bocharova A. Mathematical modeling of the formation of a durable hull of deep-sea vehicles made of glass-metal composite. 2015. 18-23 p. (in Russian).
- [7] vv ll jj fyear. Cohesion and adhesion of hot glass. 1969. p. 170. (in Russian).
- [8] Eigenson L. Thermal foundations of glass formation. 1950. 380 p. (in Russian).
- [9] Mazurin O. Annealing of glass-metal junctions. 1980. (in Russian).

Goncharuk Vladimir Kirillovich, Doctor of Chemical Sciences, Professor, Head of the Laboratory of Optical Materials, Institute of Chemistry of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia.

Zaiko Nadezhda Yurevna, senior lecturer of the Polytechnic Institute of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

Alexander Alexandrovich Ratnikov, Head of the Laboratory of Computer Modeling of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

Shelkovnikov Konstantin Konstantinovich, Postgraduate student of the Department of Marine Engineering and Transport of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

- [10] Alexandrov V. M., Romalis B. L. Contact tasks in mechanical engineering // Mechanical engineering. 1986. (in Russian).
- [11] Harutyunyan N. H. On the contact interaction of an elastic ring with an elastic cylinder // Izv. RAS. Solid state mechanics. 1994. (in Russian).
- [12] Panasyuk V. V., Teply M. I. Some contact problems of elasticity theory. Kiev: Science. Doom., 1975. (in Russian).
- [13] Drozdov Y. N., Grilitsky D. V., Levitsky V. P. Contact of a pair of rotating circular cylinders taking into account heat generation from friction. Yerevan University Publishing House, 1991. P. 974–980. (in Russian).
- [14] Grilitsky D. V., Krasniuk P. P. Elastic contact of two cylinders. No. 33(3). 1997. P. 31–38. (in Russian).
- [15] Krasniuk P. P., B.Chapovskayaa R. Thermoelastic contact of the bandage and the cylinder under conditions of frictional heat generation // Phys.-chemical. mechanics of materials. 2000. no. 24(1). P. 42–52. (in Russian).
- [16] Lyubimova O. N., Zaiko N. Temperature stresses in coaxial coupled cylindrical systems and composite materials with varying degrees of slippage along the contact boundary // Bulletin of the I.Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the limit state. 2022. no. 4(54). P. 5–13. (in Russian).

М. А. Лаврентьева, Л. В. Левина, В. Б. Пеньков

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ АНАЛИЗА ТЕРМОЭЛАСТОСТАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ 3D-ОБЪЕКТОВ

Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. Состояние однородной теплопроводной линейно-упругой изотропной равновесной среды описывается уравнениями теплопроводности, Коши, равновесия, законом Дюамеля-Неймана. Выделены наборы характеристик, составляющих внутреннее и граничное состояние тела. Введены скалярные произведения, определяющие пространства внутренних и граничных состояний как гильбертовы. Установлен их изоморфизм. Назначены универсальные алгоритмы формирования базисов пространств, позволяющих применять метод граничных состояний при постановках краевых задач, решение которых может не допускать декомпозицию. Сформулирована и решена задача о «колбасе», в которой тело, заключенное в оболочку, испытывает напряженное состояние за счет разности температурных деформаций волокон сцепленных сред. Выполнено иллюстрирование и проведено комментирование результатов счета.

Ключевые слова: метод граничных состояний, МГС, внутреннее состояние тела, граничное состояние, термоупругость, термоэластостатика.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.004

УДК: 539.3

Введение. Определяющие соотношения линейной изотропной однородной термоупругой уравновешенной среды описаны в классических руководствах по механике деформируемого твердого тела [1,2]. Применение современного эффективного метода

© Лаврентьева М. А., Левина Л. В., Пеньков В. Б., 2023

Лаврентьева Мария Алексеевна

e-mail: masy1997@gmail.com, студент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Левина Любовь Владимировна

e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Пеньков Виктор Борисович

e-mail: vbrenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей механики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Поступила 10.12.2023

граничных состояний подробно изложено в монографии [3]. Важные аспекты, касающиеся организации базисов пространств внутренних и граничных состояний для произвольных ограниченных и неограниченных, односвязных и многополостных тел, отражены в работе [4]. Вопросы, связанные с эффективным построением частных решений задач термостатики и эластостатики, рассмотрены в статье [5]. Ниже внимание уделено общему алгоритму решения задач термоэластостатики, позволяющему эффективно строить решения задач как со связанными, так и с несвязанными на границе тела характеристиками упругих и температурных полей. Возникла необходимость в конструировании избыточных наборов характеристик элементов пространств внутренних и граничных состояний для МГС и определении скалярных произведений в соответствующих гильбертовых пространствах состояний, позволяющих эффективно проводить ортогонализацию их базисов, генерировать разрешающую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСУ) относительно коэффициентов Фурье, выписывать результаты решения в численно-аналитической форме.

1. Термоэластостатическое состояние однородной изотропной среды.

Физически однородная теплопроводная линейно-упругая изотропная среда занимает область $V \subset R^3$ с границей ∂V . Геометрические характеристики области V не ограничиваются: возможны односвязная ограниченная область, однополостная неограниченная, многополостные неограниченные и ограниченные варианты.

Термостатическое состояние описывается уравнением Пуассона, которое в тензорно-индексной форме записи имеет вид

$$T_{,ii} + \frac{1}{k}Q = 0, x \in V \quad (1.1)$$

Здесь T — температура, отсчитываемая от некоторого фиксированного уровня T_0 , k — параметр температуропроводности, Q — объемная плотность тепловых источников в теле, $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ [1].

Упругое состояние описывается набором характеристик $\xi^E = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\} \in \Xi^E$. Здесь в списке представлены компоненты вектора перемещений u_i , компоненты тензоров упругих деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} , ξ^E — элемент пространства внутренних состояний Ξ^E упругого тела.

Компоненты тензора деформаций и вектора перемещений линейной среды связаны уравнением Коши [2]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2)$$

Учет температурного расширения $\varepsilon_{ij}^T = 2T\delta_{ij}$ вносит поправку в закон Гука в форме Ламе, превращая его в закон Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\delta_{ij} \quad (1.3)$$

Здесь $\theta = \varepsilon_{kk}$ — объемная упругая деформация, λ, μ — упругие параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера, α — параметр температурного расширения среды.

При наличии объемных сил X_i поле напряжений подчинено уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0. \quad (1.4)$$

Если объемные силы порождены только полем температуры, то

$$X_i = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,i}. \quad (1.5)$$

Система дифференциальных уравнений Ламе принимает вид

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,i} = 0. \quad (1.6)$$

Совместно с (1.1) она образует замкнутую систему уравнений в частных производных относительно температуры и перемещений. Структура этой системы подсказывает следующий порядок решения: сначала определить температурное состояние $\xi^T = \{T, T_{,i}\} \in \Xi^T$ как элемент пространства внутренних состояний термостатического пространства Ξ^T и ему отвечающее граничное состояние $\gamma^T = \left\{ T, \frac{dT}{d\mathbf{n}} \right\} \in \Gamma^T$, затем восстановить упругие состояния ε^E, γ^E . Это возможно, если набор $\xi = \xi^E \cup \xi^T = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, T, T_{,i}\} \in \Xi, x \in V$ не «завязывается» в граничных условиях через компоненты изоморфного ему граничного состояния $\gamma = \gamma^E \cup \gamma^T = \left\{ u_i, p_i, T, \frac{dT}{d\mathbf{n}} \right\} \in \Gamma, x \in \partial V$. В противном случае декомпозиция термоэластостатической задачи становится невозможной и возникает необходимость решения задачи в пространствах $\Xi \leftrightarrow \Gamma$. В общем случае декомпозицию проводить необязательно.

2. Универсальный вариант метода граничных состояний для решения термоэластостатических задач. Пространства состояний Ξ, Γ являются линейными. Они изоморфны при условии, что информация о граничном состоянии γ единственным образом восстанавливает внутреннее состояние ξ . Это возможно, если жесткая составляющая движения тела V зафиксирована. Например, полюс $O(0, 0, 0)$ является неподвижным для всех элементов пространства Ξ и вектор малого поворота вокруг полюса O равен нулю. Будем полагать таковыми все элементы счетного базиса пространства Ξ . Это обеспечивается при формировании исходного базиса пространства.

Чтобы линейное бесконечномерное пространство Ξ было гильбертовым, необходимо снабдить его скалярным произведением. Это обеспечит его метрику, полноту и плотность. Классическими примерами таковых пространств является гильбертовы пространства эластостатических и термостатических внутренних состояний Ξ^E, Ξ^T .

Эластостатика. Внутренне и граничные состояния для тела V имеют наборы

$$\xi^E = \{u_i^E, \varepsilon_{ij}^E, \sigma_{ij}^E\} \in \Xi^E, \gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E. \quad (2.1)$$

Их изоморфизм $\xi^E \leftrightarrow \gamma^E$ достигается при $p_i^E = \sigma_{ij}^E n_j$, где $\{n_j\}$ — компоненты вектора внешней нормали к границе ∂V тела и упомянутой выше нормировкой жёсткого движения тела.

Скалярное произведение изоморфных пар элементов в пространствах $\Xi^E \leftrightarrow \Gamma^E$ равны между собой в силу принципа возможных перемещений:

$$(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E = \int_V \sigma_{ij}^{E(m)} \varepsilon_{ij}^{E(n)} dV = \int_{\partial V} p_i^{E(m)} u_i^{E(n)} dS = (\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E \quad (2.2)$$

благодаря чему возник термин «гильбертов изоморфизм».

При организации базисов используются общие решения Аржаных-Слободянского [2] системы уравнений Ламе

$$\mu u_{i,jj}^E + (\lambda + \mu) u_{j,ji}^E = 0 \quad (2.3)$$

Конструированию базисов способствует наличие базисов гармонических многочленов и их инверсий [4].

Термостатика. Избыточные наборы элементов пространств внутренних и граничных состояний имеют вид

$$\xi^T = \{T, T_{,i}\} \in \Xi^T, \gamma^T = \left\{ T, \frac{dT}{d\mathbf{n}} \right\} \in \Gamma^T \quad (2.4)$$

Они изоморфны ($\xi^T \leftrightarrow \gamma^T$) благодаря равенству $\frac{dT}{d\mathbf{n}} = T_{,i}n_i$ и фиксированию общего отсчетного уровня температуры T_0 .

Скалярные произведения изоморфных пар элементов пространств $\Xi^T \leftrightarrow \Gamma^T$ равны между собой благодаря свойствам гармонических функций, из которых собственно и набирается базис:

$$(\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_{\Xi^T} = \int_V T_{,i}^{(m)} T_{,i}^{(n)} dV = \int_{\partial V} T^{(m)} \frac{dT^{(n)}}{dn} dS = (\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_{\Gamma^T} \quad (2.5)$$

Базис пространства Ξ^T состоит именно из гармонических функций, поскольку каждый элемент его отвечает уравнению Лапласа

$$T_{,ii} = 0$$

Термоэластостатика. Для универсального описания элементов ξ, γ пространств внутренних и граничных состояний их избыточные наборы удобно представлять в формах

$$\xi = \{u_i^E, u_i^T, \varepsilon_{ij}^E, \varepsilon_{ij}^T, \sigma_{ij}^E, \sigma_{ij}^T, T, T_{,i}\} \in \Xi, x \in V, \gamma = \left\{ u_i^E, u_i^T, p_i^E, p_i^T, T, \frac{dT}{d\mathbf{n}} \right\} \in \Gamma, x \in \partial V \quad (2.6)$$

где индексные символы "E", "T" указывают на принадлежность соответствующих объектов к «чисто упругим» и «чисто температурным» следствиям. В частности, здесь присутствуют «приобретенные» деформации

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha T \delta_{ij}, \quad (2.7)$$

образованные температурным расширением среды, и «потерянные» напряжения

$$\sigma_{ij}^T = (3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}, \quad (2.8)$$

не востребованные для формирования «приобретенных» деформаций.

«Чисто упругие» поля ξ^E, γ^E отвечают уравнению Коши (1.2), уравнениям равновесия (1.4) без учета температурных объемных сил X_i^T , и обобщенному закону Гука

$$\sigma_{ij}^E = \lambda \theta^E \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^E, \theta^E = \varepsilon_{kk}^E \quad (2.9)$$

и, как следствие, уравнениям Ламе (записанных без учета объемных сил X_i^E) (2.3).

Поскольку частное решение для неоднородных уравнений Ламе строится с высокой точностью [5], то базисы пространства состояний Ξ^E набираются при использовании набора гармонических многочленов

$$\Phi = \{x, y, z, xy, xz, yz, x^2 - y^2, x^2 - z^2, xyz, \dots\} \quad (2.10)$$

Общее решение Аржаных–Слободянского для внутренности односвязной ограниченной области дает:

$$u_i^E = 4(1 - \nu)\varphi_i + x_j \varphi_{i,j} - x_i \varphi_{j,j}, \varphi_k \in \Phi \quad (2.11)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Для внешности односвязной ограниченной полости решения Аржаных–Слободянского выражаются через инверсии гармонических многочленов [6]

$$u_i^E = 4(1 - \nu)\varphi_i - (x_j\varphi_j)_{,i}, \varphi_k \in \Psi, \quad (2.12)$$

$$\Psi \in \left\{ \frac{1}{r}, \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}, \frac{yz}{r^5}, \frac{xz}{r^5}, \dots \right\}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В многополостном случае базис наполняется линейно-независимыми вариантами, обусловленными выбором центром инверсий внутри каждой отдельной полости.

К назначению скалярного произведения следуют подойти аккуратно. Коммутативность скалярного произведения

$$(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E = (\xi^{E(n)}, \xi^{E(m)})_E$$

не может быть переписана напрямую при организации свертки $\langle \sigma_{ij}^{(m)}, \varepsilon_{ij}^{(n)} \rangle = \int_V \sigma_{ij}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} dV$ в задаче термоэластостатики, поскольку $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^T$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}^T$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^{(m)}, \varepsilon_{ij}^{(n)} \rangle &= \langle \sigma_{ij}^{E(m)} - \sigma_{ij}^{T(m)}, \varepsilon_{ij}^{E(n)} + \varepsilon_{ij}^{T(n)} \rangle = \\ &= \langle \sigma_{ij}^{E(m)}, \varepsilon_{ij}^{E(n)} \rangle - \langle \sigma_{ij}^{T(m)}, \varepsilon_{ij}^{T(n)} \rangle + \langle \sigma_{ij}^{E(m)}, \varepsilon_{ij}^{T(n)} \rangle - \langle \sigma_{ij}^{T(m)}, \varepsilon_{ij}^{E(n)} \rangle \neq \langle \sigma_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(m)} \rangle. \end{aligned}$$

В неравенстве легко убедиться, положив $n = m$.

В качестве скалярного произведения допустимо назначать

$$(\xi^{(m)}, \xi^{(n)})_{\Xi} = \tilde{\alpha}(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E + \tilde{\beta}(\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_T, \quad (2.13)$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ — положительные действительные числа.

Эта комбинация использует всю информацию о пространстве Ξ (с учетом положенных ограничениях нормировки элементов). В пространстве Γ ей отвечает равное для изоморфных пар элементов скалярное произведение

$$(\gamma^{(m)}, \gamma^{(n)})_{\Gamma} = \tilde{\alpha}(\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E + \tilde{\beta}(\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_T. \quad (2.14)$$

Таким образом, оба термоэластостатических пространства $\Xi \leftrightarrow \Gamma$ благодаря $(\xi^{(m)}, \xi^{(n)})_{\Xi} = (\gamma^{(m)}, \gamma^{(n)})_{\Gamma}$ удовлетворяют «гильбертову изоморфизму».

Любой элемент гармонического базиса порождает три состояния пространства Ξ^E (см. общее решение Аржаных–Слободянского [2]), и независимо от этого, один элемент пространства Ξ^T . Их «чистка» формирует базисы соответствующих пространств. Следовательно: каждый элемент пространства гармонических функций позволяет построить: 1) три элемента вида $\xi = \{u_i^E, \{0\}, \varepsilon_{ij}^E, \{0\}, \sigma_{ij}^E, \{0\}, 0, \{0\}\} \in \Xi$; 2) один элемент вида $\xi = \{\{0\}, u_i^T, \{0\}, \varepsilon_{ij}^T, \{0\}, \sigma_{ij}^T, T, T, i\} \in \Xi$, где символом T помечены частные решения от объемных сил температурного характера (1.5).

После ортогонализации базиса, использования разложения Фурье

$$\xi = \sum_k c_k \xi^{(k)}, \gamma = \sum_k c_k \gamma^{(k)} \quad (2.15)$$

и обработки граничных условий система уравнений (1.1), (1.6) приводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов

Фурье c_j

$$\sum_j a_{kj} c_j = b_k, \quad (2.16)$$

где коэффициенты a_{kj} определяются через поверхностные интегралы от базисных элементов $\gamma^{(k)}, \gamma^{(j)}$ либо через объемные интегралы от $\xi^{(k)}, \xi^{(j)}$, а правые части используют кроме $\gamma^{(k)}$ еще и содержимое граничных условий.

Решение усеченной БСУ проводится с учетом двух факторов: 1) насыщение суммы Бесселя; 2) невязка построенного граничного состояния с условиями на границе тела.

3. Постановка задачи о «колбасе». Изотропное однородное термоэластостатическое тело занимает область V с границей ∂V . В каждой точке гладкой поверхности определена нормаль \mathbf{n} и две касательные (касательная $\boldsymbol{\tau}$ и бикасательная \mathbf{b}): $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$, $|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{n}| = |\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}$.

Область V по поверхности ∂V сцеплена с тонкой анизотропной оболочкой типа ткани: волокна «основа» и «уток» ориентированы по координатным линиям, определяющим форму тела. Коэффициент линейного температурного расширения α_0 оболочки незначителен по сравнению с таковым α для однородной изотропной линейно упругой среды, содержащейся в области V : $\alpha_0 \ll \alpha$; волокна в окрестности любой точки x оболочки получают относительные удлинения только за счет изменения температуры $T(x)$, равные $\varepsilon = \alpha_0 T$.

При отсутствии внешних силовых факторов, кроме нормального воздействия со стороны оболочки, приповерхностные точки тела в области V имеют только нормальные деформации:

$$\hat{\varepsilon} = T \cdot \text{diag}\{\alpha, \alpha - \alpha_0, \alpha - \alpha_0\} \approx \alpha T \cdot \text{diag}\{1, -1, -1\}.$$

Тензор деформаций представлен в «естественной» системе координат $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}$. Объемная деформация составляет $\theta = \varepsilon_n + \varepsilon_\tau + \varepsilon_b = (2\alpha_0 - \alpha)T \approx -\alpha T$.

Чисто упругие напряжения подчинены закону Гука:

$$\sigma_n = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_n = [2\lambda\alpha_0 + (2\mu - \lambda)\alpha]T \approx (2\mu - \lambda)\alpha T$$

$$\sigma_\tau = \sigma_b = [2\alpha_0(\lambda + \mu) - \alpha(\lambda + 2\mu)]T \approx -\alpha(\lambda + 2\mu)T.$$

При отсутствии внешних механических воздействий (кроме нормального усилия со стороны оболочки) касательная составляющая деформаций и напряжений отсутствуют. Тензор напряжений вблизи границы имеет оценку

$$\hat{\sigma} = \alpha T \cdot \text{diag}\{2\mu - \lambda, \lambda, \lambda\}$$

Тензор напряжений $\hat{\sigma}$ формирует на границе ∂V тела поверхностное усилие

$$\mathbf{p} = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = (2\mu - \lambda)\alpha T \cdot \mathbf{n}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим вариант граничных условий, когда поверхность ∂V тела V свободна от внешних механических воздействий, а возмущение состояния происходит только заданным температурным потоком $\frac{dT}{dn}, x \in \partial V$.

Для формирования разрешающей БСУ воспользуемся скалярным произведением в пространстве граничных состояний Γ , полагая $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$. После ортогонализации

имеем определение для коэффициента Фурье c_k :

$$c_k = \int_{\partial V} p u^{(k)} dS + \int_{\partial V} \frac{dT}{d\mathbf{n}} T^{(k)} dS.$$

Учитывая, что $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{jk} c_j = c_k$, $T = \sum_{j=1}^{\infty} c_j T^{(j)}$ и переходя к тензорно-индексной форме записи, получаем разрешающую систему уравнений в матричной форме, усеченную до размерности N :

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (3.2)$$

$$a_{jk} = [\delta_{jk} + \int_{\partial V} p_i^{T^{(j)}} u_i^{E^{(k)}} dS], b_j = \int_{\partial V} \left[\frac{dT}{d\mathbf{n}} T^{(j)} + p_i u_i^{E^{(j)}} \right] dS,$$

где символами T, E помечены составляющие граничных состояний, относящиеся строго к температурным и упругим эффектам.

Ниже рассмотрен вариант граничных условий (ГУ) Неймана $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \cos 2\varphi$, где φ — угол, отсчитываемый вокруг продольной оси осесимметричного тела (рис. 1) от сечения $y = 0, x > 0$. В безразмерном виде заданы следующие параметры среды: $\lambda = \mu = 1, \alpha = 0.2$.

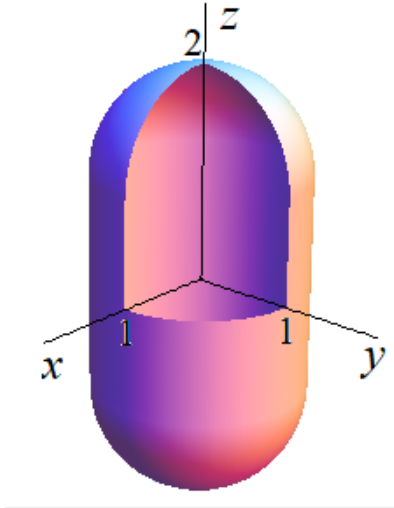


Рис. 1. Рассматриваемое тело

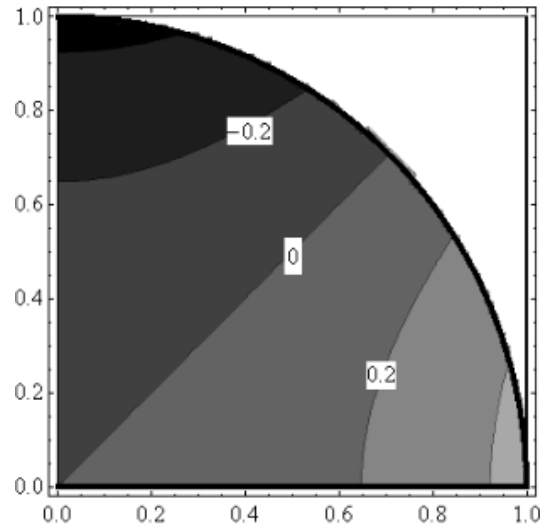


Рис. 2. Распределение температуры в сечении $z = 0$

Отрезок базиса пространства внутренних состояний сформирован набором гармонических многочленов до порядка 5 включительно и составлен из 137 элементов. Поля напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$ приведены на рис.3 в виде изолиний для трех вариантов сечения: $\varphi \in \left\{ 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\}$. На рис. 4 представлены распределения этих же величин в сечениях $z \in \{0; 1; 1.5\}$.

Анализ термоупругого состояния позволяет сделать ряд выводов: 1) в сечении $\varphi = 0$ поток тепла выходит из тела наружу. В цилиндрической части тела это приводит к

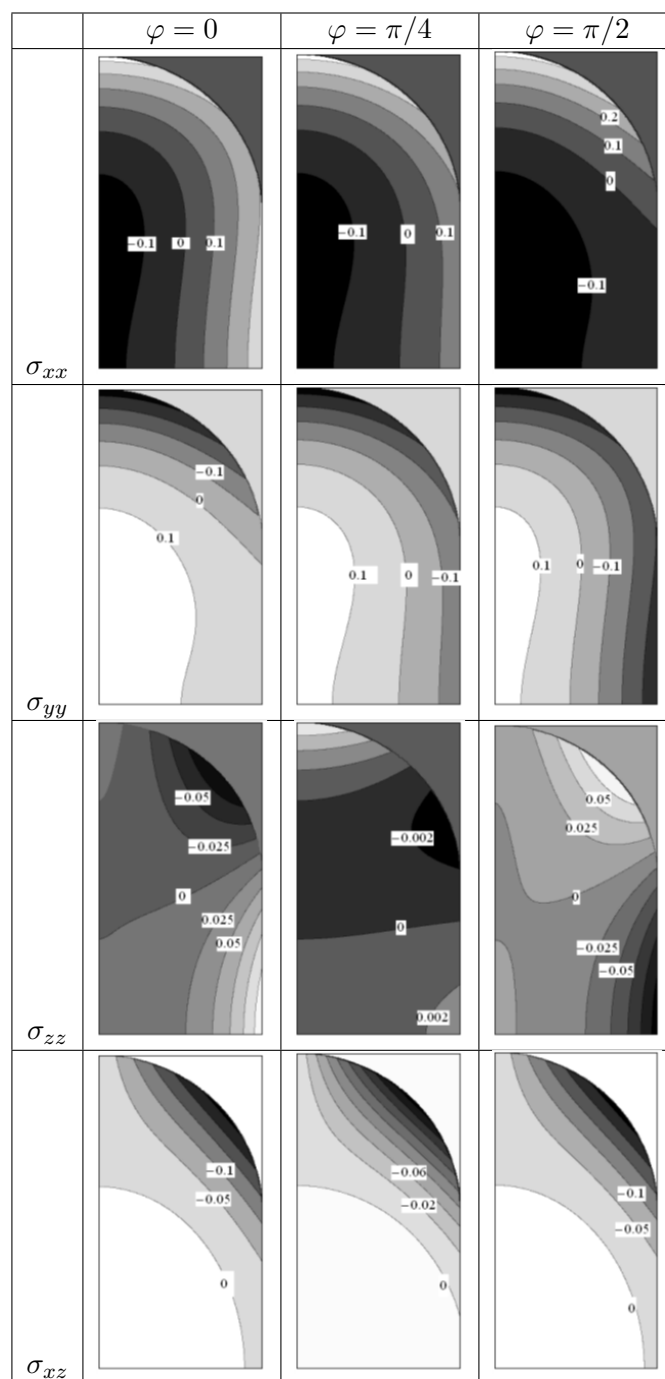


Рис.3. Распределение напряжений в осевых сечениях

ощутимым растягивающим радиальным напряжениям (σ_{xx}), но вблизи оси симметрии $x = y = 0$ они — сжимающие; уровень напряжений σ_{xx} снижается в сечении $\varphi = \pi/4$; 2) окружные напряжения (σ_{yy} при $\varphi = 0$) — растягивающие вблизи оси симметрии и становятся сжимающими около оболочки; 3) осевые напряжения (σ_{zz} при $\varphi = 0$)

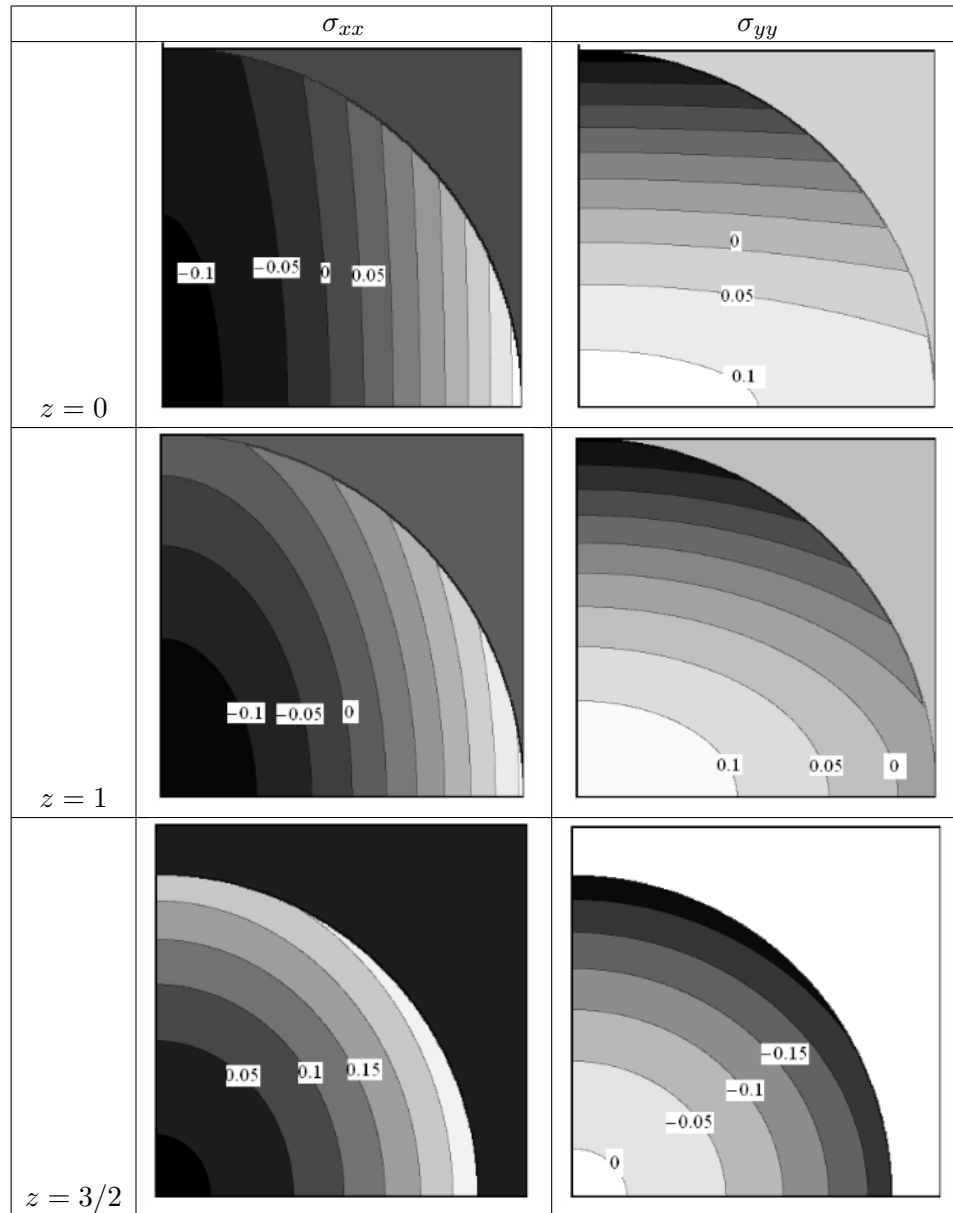


Рис.4. Распределение напряжений в поперечных сечениях

растягивающие у цилиндрической части поверхности и сжимающие вблизи вершин тела; при повороте сечения их уровень заметно снижается; 4) в срединной части тела ($|z| < 1, |x| < 1$) искажения формы тела не наблюдаются. Закругления у вершин ($z \approx 1.5$, вблизи поверхности) становятся более пологими, «распрямляются».

Выводы подтверждаются анализом кушор тела в сечениях $z \in \{0; 1; 1.5\}$ (рис.4).

Заключение. 1. Разработан эффективный аппарат анализа термоэластостатического состояния тел произвольной геометрической конфигурации, в котором не производится декомпозиция задачи на последовательность задач термостатики и эластостатики. Этот подход позволяет строить решения задач с граничными условиями, в которых характеристики напряженно-деформированного и температурного состояний «завязаны» в ГУ.

2. Универсальный подход применен к решению задач о «колбасе», в которой ГУ формируются за счёт взаимодействия оболочки и тела. Построено и иллюстрировано решение задачи, в которой напряженное состояние формируется как следствие установившегося потока тепла через границу области, что обуславливает режим взаимодействия оболочки и тела.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трёхмерные задачи математической теории упругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелешвили [и др.]. Наука, 1976. с. 664.
- [2] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. Наука, 1979. с. 744.
- [3] Пеньков В.Б., Саталкина Л.В. Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. с. 108.
- [4] Алгоритм аналитического решения основных задач для упругих тел с полостями и поверхностными дефектами / В.Б. Пеньков, О.С. Новикова, Л.В. Левина [и др.] // Журнал физики: Серия конференций «Текущие проблемы». 2018. с. 012016.
- [5] Пеньков В.Б., Левина Л.В. Метод опорного базиса построения частного решения линейного неоднородного операторного уравнения математической физики // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2022. № 3. С. 91–101.
- [6] Пеньков В.Б., Саталкина Л.В., Шульмин А.С. Применение метода граничных состояний для анализа упругой среды с полостями и включениями // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, № 4. С. 542–556.

M. A. Lavrentieva, L. V. Levina, V. B. Penkov

AN EFFECTIVE APPROACH FOR ANALYZING THERMOELASTOSTATIC STATES OF 3D-OBJECTS

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

Abstract. The state of a homogeneous, heat-conducting, linearly elastic, isotropic equilibrium medium is described by the equations of heat conduction, Cauchy, equilibrium, and the Duhamel-Neumann law. Sets of characteristics that constitute the internal and boundary state of the body are identified. Scalar products defining the spaces of internal and boundary states as Hilbert spaces have been introduced. Their isomorphism is established. Universal algorithms for forming the bases of spaces have been assigned, allowing the application of the boundary state method in the settings of boundary value problems, the solution of which may not allow decomposition. The problem of the 'sausage' has been formulated and solved, in which a body enclosed in a shell experiences a stressed state due to the difference in temperature deformations of fibers of coupled media. Illustration and commentary of the results of the calculation have been performed.

Keywords: boundary state method, BSM, internal state of the body, boundary state, thermoelasticity, thermoelastostatics.

REFERENCES

- [1] Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity / V. Kupradze, T. Gegelia, M. Basheleishvili et al. Nauka, 1976. p. 664.
- [2] Rabotnov Y. Mechanics of Deformable Solid Body. Nauka, 1979. p. 744.
- [3] Penkov V., Satal'kina L. Boundary State Method with Perturbations: Non-Homogeneous and Nonlinear Problems of the Theory of Elasticity and Thermoelasticity. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. p. 108.
- [4] An Algorithm for Analytical Solution of Basic Problems for Elastostatic Bodies with Cavities and Surface Flaws / V. Penkov, O. Novikova, L. Levina et al. // Journal of Physics: Conference Series Current Problems. 2018. p. 012016.
- [5] Penkov V., Levina L. The Method of Support Basis for Constructing a Particular Solution of a Linear Non-Homogeneous Operator Equation in Mathematical Physics // Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2022. no. 3. P. 91–101.
- [6] Penkov V., Satal'kina L., Shulmin A. Application of the Boundary State Method for Analysis of Elastic Media with Cavities and Inclusions // Applied Mathematics and Mechanics. 2014. Vol. 78, no. 4. P. 542–556.

Lavrentyeva Maria Alekseevna

e-mail: masy1997@gmail.com, Student, Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

Levina Lyubov Vladimirovna

e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru, PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

Penkov Viktor Borisovich

e-mail: vbpenkov@mail.ru, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of General Mechanics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

Б. Г. Миронов¹, Ю. Б. Миронов²

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ СЕКТОРА КОЛЬЦА

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе исследуются напряженное и деформированное состояния сектора кольца из идеального жесткопластического материала при деформации кручения. В работе [1] исследовано упругое, чисто пластическое и упруго-пластическое распределение напряжений при кручении стержней, основываясь на полубратном методе Сен-Венана. В [2] рассмотрены основные уравнения и граничные условия теории кручения идеально пластических стержней, определены напряженное и деформированное состояния стержней, найдены разрывные решения. Исследовано кручение различных стержней, сектора кругового кольца, стержней переменного сечения из идеального жестко-пластического материала. В [3] определены общие соотношения теории кручения стержней при одном виде анизотропии – трансляционной анизотропии. В работе [4] исследуется диссипативная функция теории трансляционной идеально пластической анизотропии при кручении. [5] посвящена изучению предельного состояния трансляционно анизотропных стержней при деформации кручения. В [6] исследуется кручение изотропного сектора толстостенной трубы. В работе [7], при условии нахождения стержня под действием внешнего давления, решена задача определения компонент деформации в случае кручения.

Ключевые слова: кручение, изотропия деформация кручения, компоненты напряжения, условие пластичности, тензор деформации, уравнения равновесия, перемещения.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.005

УДК: 539.374

Рассмотрим сектор кольца из идеального жестко-пластического изотропного материала. Предположим, что он ориентирован в цилиндрической системе координат $\rho\theta z$, имеет внутренний радиус равный r и внешний радиус - R . Осью симметрии кольца

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2023

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и естественных наук, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru, кандидат технических наук, декан факультета «Сети и системы связи», Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 20.11.2023

является ось z . Сектор ограничен сверху и снизу плоскостями $z = \pm a$. Боковая поверхность сектора предполагается свободной от нагрузок и он полностью находится в пластическом состоянии.

Напряженное состояние, возникающее в секторе кольца, описывается условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6(\tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho z}^2) = 6k^2, \quad (k - const) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения напряженного состояния воспользуемся полуобратным методом Сен-Венана и положим

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{\rho z} = 0,$$

В соответствии с этим из системы уравнений (1) и (2) получим

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}(\rho, z), \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(\rho, z) \quad (3)$$

$$\tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho\theta}^2 = k^2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \quad (5)$$

$$\tau_{\rho\theta} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial z} + \tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Представим с уравнение (5) в виде

$$\tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = \frac{-2\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\rho} \quad (7)$$

Тогда из соотношений (6) и (7) следует

$$\tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} - \tau_{\rho\theta} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial z} = \frac{-2\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}{\rho}. \quad (8)$$

Для определения характеристик уравнения (8) и соотношений вдоль характеристик имеем следующую систему соотношений

$$\frac{d\rho}{\tau_{\theta z}} = -\frac{dz}{\tau_{\rho\theta}} = \frac{\rho d\tau_{\rho\theta}}{-2\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}}. \quad (9)$$

Согласно (9) компонента напряжения $\tau_{\rho\theta}$ определяется из уравнения

$$\frac{d\tau_{\rho\theta}}{d\rho} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \quad (10)$$

Согласно (10) находим компоненту напряжения $\tau_{\rho\theta}$ в виде

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{c_1}{\rho^2} \quad (11)$$

где $c_1 = const$ вдоль характеристики.

Согласно (11) компоненту напряжения $\tau_{\theta z}$ находим из (4)

$$\tau_{\theta z} = \pm \sqrt{k^2 - \frac{c_1^2}{\rho^4}}. \quad (12)$$

Согласно равенствам (11) и (12) из соотношений (9) получим уравнение характеристик $dz = \pm \frac{c_1}{\sqrt{k^2\rho^4 - c_1^2}} d\rho$

Рассмотрим поперечное сечение $\theta = const$ сектора кольца, которое задается следующими неравенствами $r \leq \rho \leq R$, $-a \leq z \leq a$.

В силу того, что боковая поверхность кольца свободна от нагрузок, вектор касательного напряжения $\tau = (\tau_{\rho\theta}, \tau_{\theta z})$ направлен по касательной к контуру поперечного сечения сектора кольца. Поэтому при $\rho = R$ и в области, примыкающей к ней, имеем

$$\tau_{\theta z} = k \text{ и } \tau_{\rho\theta} = 0. \quad (13)$$

Аналогично, при $z = a$ и в области, примыкающей к ней, справедливы равенства

$$\tau_{\rho\theta} = -k \text{ и } \tau_{\theta z} = 0. \quad (14)$$

В соответствии с соотношениями (13) и (14) находим линию разрыва напряжений, выходящей из вершины с координатами $\rho = R$, $z = a$ контура сечения сектора кольца

$$z = \rho - R + a \quad (15)$$

В соответствии с ассоциированным законом пластического течения определяются компоненты скоростей деформации. С учетом уравнения (4) имеем

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \varepsilon_{\rho z} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}\varepsilon_{\theta z} = \tau_{\theta z}\varepsilon_{\rho\theta} \quad (16)$$

где $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\rho\theta}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{\rho z}$ – компоненты тензора скоростей деформации.

Пологая, что в начальный момент деформирования все компоненты деформации равны нулю, и, интегрируя соотношения (16) получим

$$e_\rho = e_\theta = e_z = e_{\rho z} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}e_{\theta z} = \tau_{\theta z}e_{\rho\theta} \quad (17)$$

где $e_\rho, e_\theta, e_z, e_{\rho\theta}, e_{\theta z}, e_{\rho z}$ – компоненты тензора деформации.

Воспользуемся соотношениями связи между компонентами тензора деформации $e_\rho, e_\theta, e_z, e_{\rho\theta}e_{\theta z}, e_{\rho z}$ и компонентами перемещений u, v, w

$$e_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad e_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{\rho z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \quad (18)$$

$$e_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \quad e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (19)$$

Согласно соотношениям (17) (18) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0. \quad (20)$$

Пологая

$$u = 0, \quad w = \xi\theta, \quad v = v(\rho, z) \quad (21)$$

где $\xi = const$ удовлетворим соотношениям (20).

С учетом (19) и (21) имеем

$$\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \frac{\partial e_{\rho\theta}}{\partial z} = -\frac{3\xi}{2\rho^2} + \frac{e_{\theta z}}{\rho} \quad (22)$$

Находя частные производные по переменной z от обеих частей последнего соотношения исистемы (17), получим

$$\tau_{\rho\theta} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial z} - \tau_{\theta z} \frac{\partial e_{\rho\theta}}{\partial z} = e_{\rho\theta} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} - e_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial z} \quad (23)$$

Тогда, согласно (22) и (23), имеем

$$\tau_{\theta z} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial z} = \tau_{\theta z} \left(-\frac{3\xi}{2\rho^2} + \frac{e_{\theta z}}{\rho} \right) - e_{\rho\theta} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + e_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial z} \quad (24)$$

Характеристики и соотношения вдоль характеристик уравнения (24) найдем из системы

$$\frac{d\rho}{\tau_{\theta z}} = -\frac{dz}{\tau_{\rho\theta}} = \frac{de_{\theta z}}{\tau_{\theta z} \left(-\frac{3\xi}{2\rho^2} + \frac{e_{\theta z}}{\rho} \right) - e_{\rho\theta} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + e_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial z}}. \quad (25)$$

Согласно (9) и (25), характеристики соотношений (8) и (24) совпадают. С учетом (11) и (12) из системы уравнений (25) имеем

$$\frac{d\rho}{\tau_{\theta z}} = -\frac{dz}{\tau_{\rho\theta}} = \frac{de_{\theta z}}{\tau_{\theta z} \left(-\frac{3\xi}{2\rho^2} + \frac{e_{\theta z}}{\rho} \right)}. \quad (26)$$

Из уравнения

$$\frac{de_{\theta z}}{d\rho} - \frac{e_{\theta z}}{\rho} = -\frac{3\xi}{2\rho^2}. \quad (27)$$

определим компоненту тензора деформации $e_{\theta z}$

$$e_{\theta z} = \frac{3\xi}{4\rho} + c_2\rho \quad (28)$$

где $c_2 = \text{const}$ вдоль характеристики

Учитывая равенства (11), (12) и (28), из уравнения (17) находим компоненту тензора деформации $e_{\rho\theta}$

$$e_{\rho\theta} = \pm \frac{c_1}{\sqrt{k^2\rho^4 - c_1^2}} \left(\frac{3\xi}{4\rho} + c_2\rho \right). \quad (29)$$

Компоненты тензора деформации $e_{\theta z}$, $e_{\rho\theta}$ на линии разрыва напряжений равны нулю. Следовательно, в области, примыкающей к части контура $\rho = R$, имеем

$$e_{\theta z} = \frac{3\xi\rho}{4} \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{(R+z-a)^2} \right), \quad e_{\rho\theta} = 0, \quad (30)$$

а в области, примыкающей к части контура $z = a$, имеем

$$e_{\theta z} = 0, \quad e_{\rho\theta} = \frac{3\xi}{2\rho^2} (z - a - \rho + R). \quad (31)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. с. 398.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. с. 232.
- [3] Миронов Б. Г., Тихонов С. В. Об одном виде анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 36–38.
- [4] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 60–62.
- [5] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Предельное состояние трансляционно анизотропных стержней при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 132–139.

- [6] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. О кручении сектора толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 2 (56). С. 36–40.
- [7] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. Об определении компонент деформации в случае кручения изотропных стержней, находящихся под действием внешнего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 13–17.

B. G. Mironov¹, Yu. B. Mironov²

ON THE QUESTION OF TORSION OF THE RING SECTOR

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. This work examines the tension and deformed state of a sector of a ring made of ideal rigid plastic material under torsional deformation. In [1], elastic, purely plastic and elastic-plastic distribution of stresses during torsion rods, based on the half-reverse Saint-Venant method. In [2] considered basic equations and boundary conditions of the theory of torsion of ideally plastic rods, the stressed and deformed states of the rods are determined, discontinuous solutions were found. The torsion of various rods, sectors has been studied circular ring, variable cross-section rods from an ideal rigid plastic material. In [4] the general relations of the theory are defined torsion of rods with one type of anisotropy - translational anisotropy. In work [3], the dissipative function of the theory of translational ideal plastic anisotropy in torsion. [5] is devoted to the study limit state of translationally anisotropic rods during deformation torsion. In [7], the torsion of the isotropic sector of a thick-walled pipes. In work [6], provided that the rod is under the influence of an external pressure, the problem of determining the deformation components in the case of torsion is solved.

Keywords: torsion, isotropy, torsional deformation, components stress, plasticity condition, strain tensor, equilibrium equations, movement.

REFERENCES

- [1] Prager W., Hodge F. G. Theory of ideally plastic bodies. M.: IL, 1956. p. 398.
- [2] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. p. 232.
- [3] Ivlev D. D., Mironov B. G. On the dissipative function in the theory of translational ideal plastic anisotropy under torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2012. no. 1 (11). P. 60–62.
- [4] Mironov B. G., Tikhonov S. V. About one type of torsional anisotropy // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2012. no. 1 (11). P. 36–38.
- [5] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Limit state of translationally anisotropic rods under torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2014. no. 1 (19). P. 132–139.
- [6] Mironov B. G., Mironov Y. B. On determining the deformation components in the case of torsion of isotropic rods under the influence of external pressure // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2023. no. 1 (55). P. 13–17.
- [7] Mironov B. G., Mironov Y. B. About torsion of a thick-walled pipe sector // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2023. no. 2 (56). P. 36–40.

Mironov Boris Gurjevich , Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Mironov Yuri Borisovich , Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.

М. А. Барботько, О. Н. Любимова, А. А. Стрельцов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТЕКЛОВАНИЯ В КОНСТРУКТИВНОМ ЭЛЕМЕНТЕ СТЕКЛОМЕТАЛЛОКОМПОЗИТА

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. В работе рассматривается задача экспериментального определения термомеханических свойств композиционных материалов на основе стекло–металлических соединений. Проведено сравнение результатов экспериментальных исследований параметров стеклования для стеклянного сердечника, входящего в состав стекло–металлического соединения (стекло–металлокомпозит) и для материала, из которого выполнен данный сердечник. Особое внимание уделяется изменению линейного размера в интервале стеклования, в котором происходит резкое изменение термомеханических свойств стекла, и их влиянию на напряженно-деформируемое состояние в стекло–металлических соединениях.

Ключевые слова: температура стеклования, линейное температурное расширение, dilatометрические изменения.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.006

УДК: 531

Введение. Актуальность исследования обоснована расширяющимся применением стекло – металлических соединений и получением новых композиционных и

© Барботько М. А, Любимова О. Н, Стрельцов А. А., 2023

Барботько Максим Андреевич

e-mail: Gsm_1234@mail.ru, ассистент Департамента математики, Институт математики и компьютерных технологий, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Любимова Ольга Николаевна

e-mail: lyubimova.on@dvfu.ru, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Департамента мониторинга и освоения георесурсов, заведующий лаборатории механики геоматериалов Научно-исследовательского и образовательного центра геомеханики и геодинамики сильно сжатых горных пород и массивов, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Стрельцов Алексей Александрович

e-mail: streltcov1999@gmail.com, аспирант Департамента морской техники и транспорта, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Исследование выполнено при финансовой поддержке ДВФУ, номер проекта 22-07-01-007.

Поступила 10.12.2023

конструкционных материалов на их основе. Проектирование и разработка технологических основ получения подобных материалов, исследование свойств и их изменений при разных нагрузках связаны с фундаментальными проблемами физики и механики материалов в задачах о структурных изменениях в определенных температурных интервалах. Технологический процесс производства подобных материалов включает в себя температурную обработку, при которой стеклюющийся материал находится в виде высоковязкой жидкости, смачивает металлическую поверхность, создавая прочное адгезионное соединение. При этом критически важным являются требования хорошего смачивания и малых остаточных напряжений в стекле после отверждения, чтобы в процессе эксплуатации готового изделия, приложенная внешняя нагрузка не вызывала опасных концентраций напряжений, ведущих к преждевременному разрушению. Возникновение таких напряжений связано с разницей температурных коэффициентов линейного расширения и структурных изменений в стеклюющемся материале, как вследствие диффузионных процессов на границе контакта стекла и металла, так и в результате неравномерного изменения температуры по объему стеклюющегося слоя [1–4]. Кроме практических аспектов актуальности, фундаментальные теоретические проблемы стеклования связаны с отсутствием общих модельных представлений [5, 6]. Одновременно развиваются модельные подходы моделирующие стеклования как фазовые переходы второго рода [5] и модели на основе представления стеклования как кинетического процесса, например, релаксационные модели Тула-Нарайанасвами-Мазурина-Мойнихана [7], Бартенева-Ритланда [8], Волькенштейна-Птицына [5] и Немилова [9].

В релаксационной теории стеклования оценку времени релаксации часто проводят используя соотношения:

$$q\tau_g = \delta T_g, \quad (1)$$

$$q\tau_g = \frac{C_2}{C_1}, \quad (2)$$

здесь q — скорость изменения температуры, τ_g — время релаксации при T_g , C_2/C_1 — константа, связанная с константами в уравнение Вильямса-Ландела-Ферри позволяющие оценить в уравнении Вильямса-Ландела-Ферри (ВЛФ) относительное время релаксации (относительную вязкость) α_T

$$\ln \alpha_T = -C_1 \frac{T - T_g}{T - T_g + C_2}, \quad \alpha_T = \frac{\tau(T)}{\tau T_g} = \frac{\eta(T)}{\eta(T_g)} \quad (3)$$

Исследования линейного температурного расширения и его скорости изменения в интервале стеклования обычно включают определение отдельных параметров для уравнений (3) и (1) (2), а также зависимостей температуры и полосы стеклования для всего интервала стеклования, от скорости изменения температуры [10]. Подавляющее большинство экспериментальных исследований линейного расширения материалов проводятся для стандартной скорости изменения температуры ($q = 3\text{К} \cdot \text{мин}^{-1} = 0,05\text{К} \cdot \text{с}^{-1}$), вместе с тем реальные технологические процессы требуют изучения более широкого интервала изменения скорости и влияния зависимости скорости нагрева (охлаждения) от температуры.

Для термомеханических свойств стеклянной компоненты в стекло-металлическом соединении определяющим является температурный интервал стеклования (ΔT_g) в

котором изменяется структура и свойства стекла. Верхний предел интервала стеклования ограничен температурой текучести (T_f), а нижний — температурой стеклования (T_g). Температура стеклования и полоса стеклования ($\delta T_g = T_{12} - T_{13}$, T_{12} и T_{13} — температуры соответствующие вязкости $\eta(T) = 10^{12}$ и 10^{13} (Па · с)) в релаксационной теории являются наиболее удобными параметрами для анализа свойств стекол в интервале стеклования. Но актуальной остается проблема поиска корректных методов расчета (T_g) и (δT_g) для стеклующихся материалов [5, 9–13]. Экспериментально доказана зависимость структурных изменений и параметров стеклования от скорости охлаждения и нагрева образца (q , К/мин). [6, 8, 14–16].

Целью данной работы являлось экспериментальное исследование и моделирование термомеханических свойств стеклянной составляющей в стекло-металлическом соединении при нагреве с разными скоростями, для установления зависимости влияния сопряженного термдеформирования на параметры стеклования в стеклующемся слое. При теоретических расчетах термомеханического поведения стекло-металлических соединений с учетом неоднородной структуры, разной реологии и структурных изменений, выявлено, что в интервале стеклования структурные изменения стеклующегося слоя приводят к формированию растягивающих напряжений даже в геометрии подразумевающей при проектировании соединения только сжимающие напряжения, что по-видимому является одной из главных причин развития дефектов и понижения прочности соединения [2, 3].

Для установления закономерности поведения коэффициента линейного температурного расширения в стекло-металлических соединениях были проведены экспериментальные исследования линейного расширения стеклянной составляющей для цилиндрических элементов стеклометаллокомпозита в виде стержней состоящих из стеклянного сердечника и стальной оболочки. Первые исследования проводились с использованием трубчатой муфельной печи с измерителем перемещений расположенном вертикально. Ошибка при измерении температуры составляла $\pm 0,5$ ($^{\circ}\text{C}$), точность отсчета удлинения образца при расширении составляла $\pm 10^{-6}$ (м). В качестве исследуемых образцов, были изготовлены стеклометаллокомпозитные стержни длиной $50 \cdot 10^{-6}$ (м) со стеклянным сердечником из стекла С52–1 диаметром $8 \cdot 10^{-6}$ (м) и стальной оболочкой из стали Ст20 толщиной 1 мм, а также образцы из отожжённого стекла С52–1 диаметром и длиной $8 \cdot 10^{-6}$ (м) и $50 \cdot 10^{-6}$ (м), соответственно. Исследования проводились при разных скоростях нагрева 3 и 6 ($^{\circ}\text{C}/\text{мин}$). Несмотря на соответствие результатов измерения линейного расширения и параметров в интервале стеклования для стекла С52–1 с имеющимися экспериментальными данными [10, 17] экспериментальные исследования обладали рядом неблагоприятных факторов, среди которых: ограничение по изменению скорости нагрева, необходимость в использовании подставок для образцов, вертикальное расположение и как следствие давление со стороны кварцевого измерителя и временные ограничения связанные с временем ожидания стабилизации температуры в камере нагрева.

Анализ и обзор дилатометрических установок, выпускаемых как отечественными, так и зарубежными компаниями, показал, что они имеют продолжительное время ожидания между экспериментами, это связано с долгим охлаждением всех компонентов установки, и несовершенством систем регистрации микроперемещений, существенными являются также их стоимость и ограничение по приобретению зарубежных дилатометров. Таким образом, разработка простых и воспроизводимых дилатометров

для исследования композиционных и конструкционных материалов с широким диапазоном возможных значений коэффициентов линейного температурного расширения остается актуальной задачей, стоящей перед экспериментальной физикой и отечественным приборостроением [18].

1. Приборы, материалы и методика измерений. В лабораторных условиях спроектирована и изготовлена установка с горизонтальной загрузкой образцов и индукционным нагревом, выполняющая функцию dilatометра (далее коротко, Дт-ГИ, рис. 1) для которой достигнуты следующие показатели: чувствительность и достаточная точность измерителя удлинений, способность регистрировать относительные удлинения порядка 10^{-5} – 10^{-6} (м); отсутствие значительных напряжений в образце, в результате воздействия измерительного устройства и пластической деформации образца в области размягчения стекла; однородность температуры всех участков экспериментального образца; простотой метод сборки, способа эксплуатации аппаратуры и размещения экспериментального образца, возможность проведения до 5 экспериментов в день. С торцов экспериментального образца размещаются два кварцевых стержня: опорный и толкатель. Контроль температуры осуществляют две термодпары типа К (хромель-алюмель): подведенные к образцу в середине длины и к одному из торцов, допускается разница в температурах не выше $\pm 10^{-1}(\text{°C})$ ВВ качестве измерителя линейного перемещения используется цифровой микрометр и видеокамера для непрерывной записи показаний с микрометра (рис. 1 г).

Экспериментальные образцы имеют размеры: длину $50 \cdot 10^{-6}$ (м) и диаметр $10 \cdot 10^{-6}$ (м). Нагрев происходит при помощи индукционной печи. Принцип работы печи заключается в преобразовании энергии электромагнитного поля, поглощаемой электропроводным нагреваемым объектом, в тепловую энергию. В установке электромагнитное поле создает индуктор, который представляет собой многovitkovую цилиндрическую катушку. Температура нагреваемого объекта в индукционной печи может достигать $2000(\text{°C})$, для избежания перегрева индуктора, в конструкции печи имеется система жидкостного охлаждения. В качестве нагреваемого объекта выступает графитовый тигель, помещенный в центр индуктора, в котором энергия индуктированного переменного электрического поля необратимо переходит в тепловую. Для корректировки проводимых измерений определялись удлинения всех частей установки в рабочем диапазоне температур $20 \div 800(\text{°C})$. Подготовленные экспериментальные образцы двух типов (рис.2 а и б) устанавливались в камеру Дт-ГИ и нагревались до температуры, при которой наблюдался обратный ход датчика измерений. Для получения удлинения образца, из показаний, полученных в ходе экспериментального исследования, вычитались значения удлинений всех составных частей экспериментальной установки.

2. Обсуждение результатов. При определении параметров релаксации напряжений в соединениях стекла с другими материалами, ответственными параметрами являются характеристики изменения линейных размеров, поэтому была поставлена задача о разработке метода экспериментального определения следующих величин: T_g , δT_g , ΔT_g и T_f . При этом каждое значение определяется как результат пересечения линий линейной регрессии на соответствующих температурных интервалах (рис.2 в) $T_g = (a) \cup (b)$, $T_w = (b) \cap (c)$, $T_f = \max(d)$, $\delta T_g = T_g^+ - T_g^-$ и $\Delta T_g = T_w - T_g$. Определение

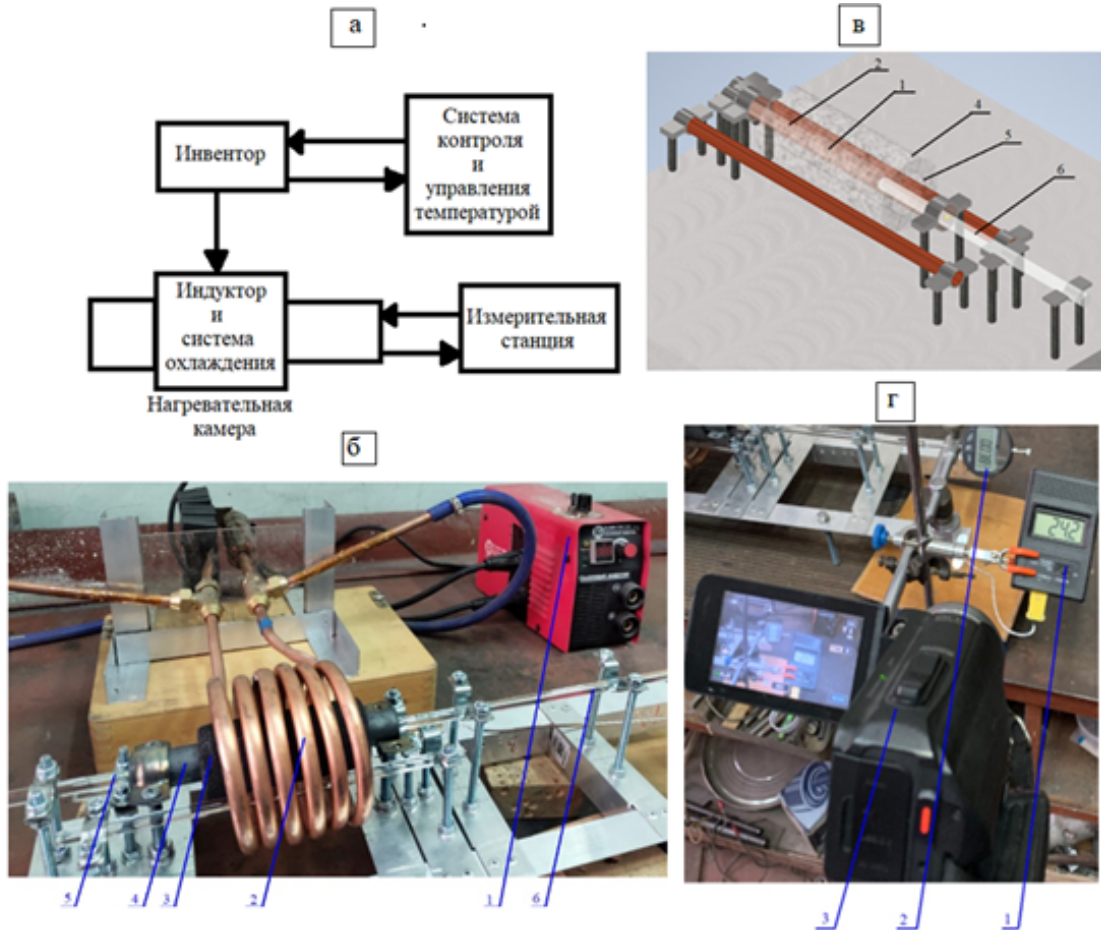


Рис. 1 . а) Общая блок-схема Дт-ГИ; б)нагревательная камера и инвентор: 1 – инвентор; 2 –индуктор; 3 – графитовый тигель; 4 – медная труба; 5 – опорный стержень; 6 – толкатель; в) 3D чертеж нагревательной камеры установки: 1 – образец; 2 – опорный стержень; 3 – толкатель; 4 –графитовый тигель; 5 – медная труба; 6 – поддерживающие медные трубки; 7 – крепления; 8 – опоры; г) измерительная станция: 1 – датчик термопар, 2 – цифровой микрометр, 3 – видеокамера

перечисленных параметров для стеклометаллокомпозита связано с исследованием характера изменения линейного расширения. По определенным экспериментально $\Delta l, T$ и q , определяются $\alpha, T_g, \delta T_g, \Delta T_g, T_f$ и α_T далее из соотношений последовательно могут быть получены τ_g из (1), C_1 и C_2 из (2) и относительное время или вязкость релаксации из (3). Найденные параметры позволят уточнить модельные представления о напряженно-деформированном состоянии в конструктивных элементах стеклометаллокомпозита и скорректировать параметры его отжига.

Для полученных выборок по каждой характеристике приводились значения математического ожидания, дисперсии и доверительных интервалов (табл.1). Температурный коэффициент линейного температурного расширения определялся с изменяющимся шагом по температуре: в интервале $25 \div 400(^{\circ}C) - \Delta T = 5(^{\circ}C)$;

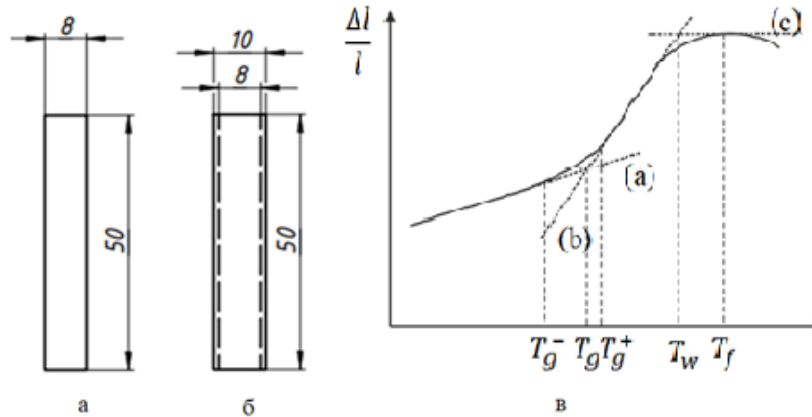


Рис.2. Типы экспериментальных образцов: а) стекло; б) стеклометаллокомпозит; в) схема определения контрольных параметров в интервале стеклования

$400 \div 650(^{\circ}C) - \Delta T = 1(^{\circ}C)$. Для каждой экспериментальной кривой линейного расширения определялись температурный коэффициент линейного расширения $\alpha, (^{\circ}C^{-1})$, интервал стеклования (ΔT_g), полоса стеклования (δT_g), температура стеклования T_g , температура текучести T_f и температура размягчения T_w (рис. 3 и 4). В общем было исследовано 81 экспериментальных образцов (без учета установочных экспериментов и отбраковки после анализа и выявления аномалий (выбросов) по данным), из них 38 образцов из стеклянных палочек С52–1, остальные стеклометаллокомпозитные стержни (СМК) со стеклянным сердечником из С52–1 и стальной оболочкой, со скоростями нагрева $q_1 = 10(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$, $q_2 = 15(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$.

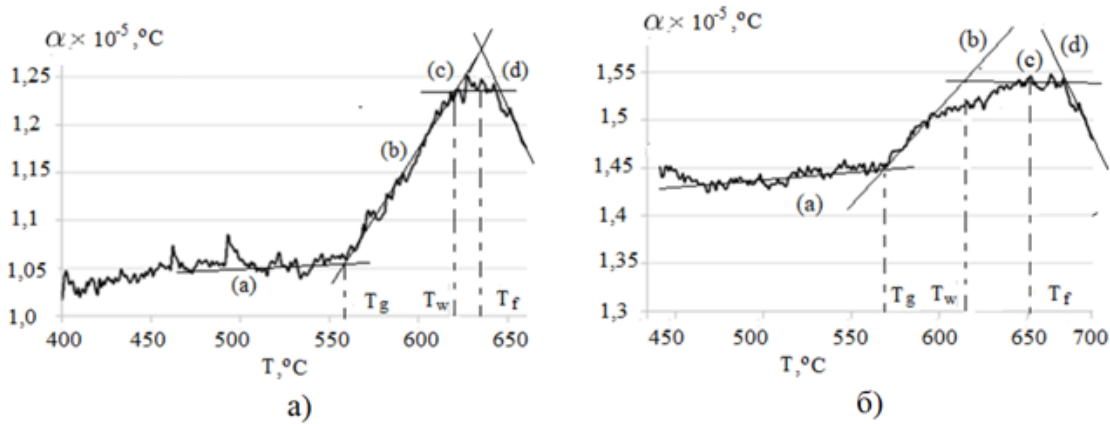


Рис. 3 Экспериментальные данные скорости изменения линейного температурного расширения и значения характерных температур при скорости нагрева $q_1 = 10(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$ для а) С52–1; б)СМК

Аналитическое уравнение (3) с экспериментальными параметрами (табл.1) принимает вид (4) и (5) для С52–1 при $q_1 = 10(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$, $q_2 = 15(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$ соответственно

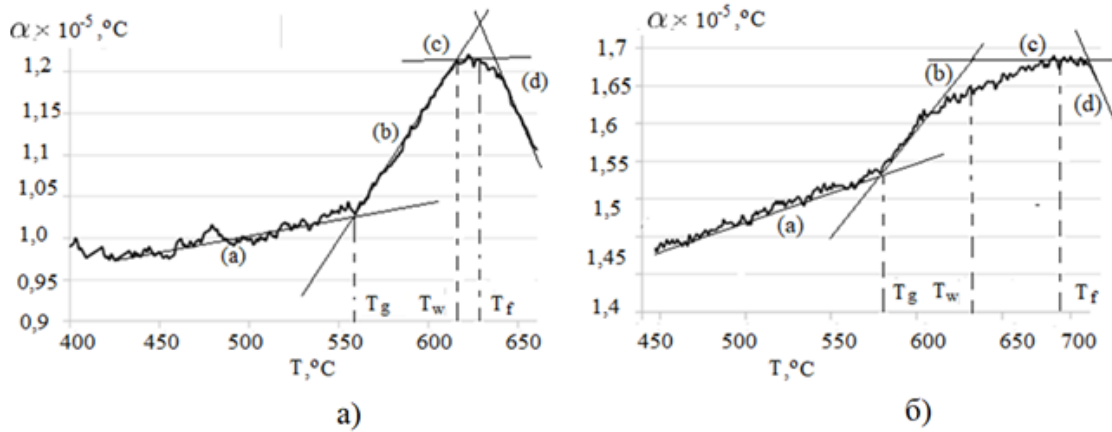


Рис. 4 Экспериментальные данные скорости изменения линейного температурного расширения и значения характерных температур при скорости нагрева $q_2 = 15(^\circ\text{C} \cdot \text{мин}^{-1})$ для а) С52-1; б)СМК

$q, (^\circ\text{C} \cdot \text{мин}^{-1})$	Тип	$T_g, (^\circ\text{C})$	$\delta T_g, (^\circ\text{C})$	$T_f, (^\circ\text{C})$	$\Delta T_g, (^\circ\text{C})$	$T_w, (^\circ\text{C})$	C_1	C_2
10	С52-1	556.8	11.09	627.2	70.4	617.6	17.5	194.4
10	СМК(С52-1)	571.4	18.71	653.3	81.9	617.1	12.21	228.4
15	С52-1	557.6	13.61	637.0	79.4	619.0	15.1	205.4
15	СМК(С52-1)	577.9	23.63	693.0	115.1	639.0	10.4	246.5

Таблица 1. Экспериментальные данные температурных параметров в интервале стеклования

и (6) и (7) для СМК при $q_1 = 10(^\circ\text{C} \cdot \text{мин}^{-1})$, $q_2 = 15(^\circ\text{C} \cdot \text{мин}^{-1})$.

$$\alpha_T = \exp\left(-\frac{15.09(T - 557.43)}{T - 352.05}\right) \quad (4)$$

$$\alpha_T = \exp\left(-\frac{17.53(T - 556.83)}{T - 362.41}\right) \quad (5)$$

$$\alpha_T = \exp\left(-\frac{12.21(T - 571.43)}{T - 362.41}\right) \quad (6)$$

$$\alpha_T = \exp\left(-\frac{10.43(T - 577.90)}{T - 331.43}\right) \quad (7)$$

Результаты моделирования технологических напряжений при охлаждении СМК в условиях идеального контакта в краевой задаче термомеханики с использованием экспериментальных данных (рис. 4 и табл. 1) и соотношений (4), (5), (6) и (7) получены методом начального-упругого приближения, алгоритм которого подробно изложен в работах [2, 3]. На графиках интенсивности напряжений (рис.5) заметно, что при использовании в расчетной модели экспериментально полученных параметров для стекла С52-1 в составе СМК, технологические напряжения выше, по сравнению с теоретическими параметрами.

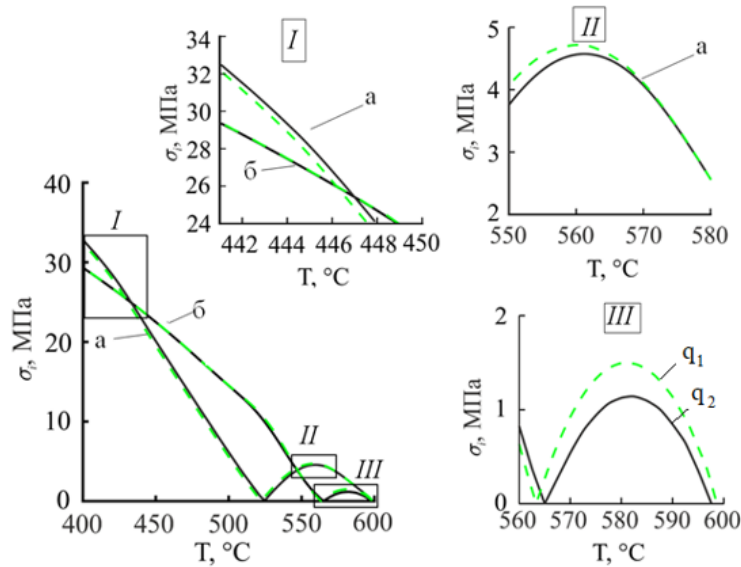


Рис. 5 Интенсивность напряжений в стеклующемся материале СМК при охлаждении и на разных температурных интервалах- I,II и III: а – для свойств стеклующегося материала на основе С52-1 определенные в ходе эксперимента и б – теоретические данные стекла С52-1 из работы [19] $q_1 = 10(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$, $q_2 = 15(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$

Заклучение Анализ поведения температурного коэффициента линейного расширения стекла 52-1 и стеклянного сердечника в составе СМК в интервале стеклования в Дт-ГИ при скоростях 10 и $15(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$, показал не только количественную разницу в температурном коэффициенте линейного расширения между ними, но и его более растянутый и пологий характер. Заметим, что стеклянные образцы перед измерением предварительно отжигались, а СМК образцы не подвергались температурной обработке, после изготовления, стекло в составе СМК находилось в предварительно напряженном состоянии. Основной причиной повышения коэффициента линейного температурного расширения стеклянного сердечника в составе СМК является соединение с металлической оболочкой. Определенные из соотношения (1) время релаксации τ_g при температуре стеклования составили: для С52-1 при $15(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$ — 0.74 (мин) и при $10(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$ — 1.36 (мин); для СМК при $15(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$ — 1.58 (мин) и при $10(^{\circ}C \cdot \text{мин}^{-1})$ — 1.87 (мин).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lyubimova O., Barbotko M. A., Streltsov A. Experimental investigations of varying the temperature parameters in the glass-transition range for glass-metal composites when heated // *Materials Physics and Mechanics*. 2023. no. 51(3).
- [2] Любимова О. Н., Барботко М. А. Метод расчета эволюции напряжений в стекломаталлокомпозите с учетом структурных и механических релаксационных процессов // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2019. № 12(2). С. 215–229.
- [3] Barbotko M. A., Lyubimova O., Ostanin M. Structural and mechanical relaxation on annealing in glass-metal layered composites // *Materials Physics and Mechanics*. 2023. no. 51(4).
- [4] Lyubimova O. N., Morkovin A. V., Barbotko M. Properties, Macro- and Microstructure of a Layered Structural Element Based on Inorganic Glass and a Steel // *Glass-and-Metal Composite Rod. Metallurgist* 66. 2023. P. 1140–1146.
- [5] Sanditov D., Ojovan M. Relaxation aspects of the liquid-glass transition // *Physics Uspekhi*. 2019. no. 62(2). P. 111–130.
- [6] Ojovan M., Louzguine-Luzgin D. Revealing structural changes at glass transition via radial distribution functions // *Phys. Chemistry*. 2020. no. 124. P. 3186–3194.
- [7] Мазурин О.В., Ю.К.Старцев, Ходяковская Р.Я. Релаксационная теория отжига стекла и расчет на ее основе режимов отжига: уч.пособие. Москва: МХТИ им Д.И. Менделеева, 1987. 83 с.
- [8] Бартенев Г.М. О зависимости между температурой стеклования силикатного стекла и скоростью охлаждения или нагревания // *Доклады АН СССР*. 1951. № 76(2). С. 227–230.
- [9] Немиллов С.В. Оптическое материаловедение: Термодинамические и релаксационные свойства стеклообразующих расплавов и стекол:уч. пособие. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2014. 120 с.
- [10] Сандитов Д.С., Дармаев М.В., Сандитов Б.Д. О релаксационной природе стеклования аморфных полимеров низкомолекулярных аморфных веществ // *Физика твердого тела*. 2015. № 57(6). С. 1629–1634.
- [11] Сандитов Д.С., Ожован М.И. Релаксационные аспекты перехода жидкость-стекло // *Успехи физических наук*. 2019. № 189(2). С. 113–133.
- [12] Schmelzer J. W. P. Kinetic criteria of glass formation and the pressure dependence of the glass transition temperature // *The Journal of Chemical Physics*. 2012. no. 136(7). P. 074512–1–074512–11.
- [13] Guiselin B., Scalliet C., Berthier L. Microscopic origin of excess wings in relaxation spectra of supercooled liquids // *Nature Physics*. 2022. no. 18. P. 468–472.
- [14] Nucleation and growth of the supercooled liquid phase control glass transition in bulk ultrastable glasses / A. Vila-Costa, J. Ràfols-Ribé, M. González-Silveira et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2020. no. 124.
- [15] Ultrastable glasses: new perspectives for an old problem / C. Rodriguez-Tinoco, M. Gonzalez-Silveira, M. Ramos et al. // *Riv. Nuovo Cim.* 2022.
- [16] Бартенев Г.М., Лукьянов И.А. Зависимость температуры стеклования аморфных веществ от скорости нагревания и связь температуры стеклования с энергией активации // *Журнал физической химии*. 1955. № 29(8). С. 1486–1498.
- [17] Мазурин О.В., Лебедева Р.Б., Старцев Ю.К. Метод расчета напряжений в спаях стекла со стеклом // *Физика и химия стекла*. 1980. № 6. С. 190–194.
- [18] Старцев В.О. Автоматизированный линейный дилатометр для исследования полимерных композиционных материалов: диссер. канд.ф.-м.н. Барнаул: Алтайский государственный университет НИИ Экологического мониторинга при АЛГТУ, 2009. 133 с.
- [19] Мазурин О. В., Тотеш А. С. Тепловое расширение стекла. Наука, 1969. 216 с.

M.A. Barbotko, O.N. Lyubimova, A.A. Streltsov

**EXPERIMENTAL MEASUREMENTS OF GLASS TRANSITION
TEMPERATURE PARAMETERS IN A STRUCTURAL ELEMENT OF A
GLASS-METAL COMPOSITE**

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

Abstract. The paper considers the problem of experimental determination of thermomechanical properties of composite materials based on glass-metal compounds. The features of glass deformation in the glass transition interval determine their stress-strain state in glass-metal compounds. The paper discusses the results of experimental studies of the glass transition parameters for the glass component in the glass-metal compound (in the form of a glass-metal composite rod) in comparison with the material from which the glass core is made. The effect of conjugate thermal deformation on technological and residual stresses in the glass-metal compound glass material is proved.

Keywords: glass transition temperature, linear thermal expansion, dilatometric measurements

REFERENCES

- [1] Lyubimova O., Barbotko M. A., Streltsov A. Experimental investigations of varying the temperature parameters in the glass-transition range for glass-metal composites when heated // *Materials Physics and Mechanics*. 2023. no. 51(3).
- [2] Lyubimova O., Barbotko M. A. A method for calculating the evolution of stresses in a glass metal composite taking into account structural and mechanical relaxation processes // *Computational continuum mechanics*. 2019. no. 12(2). P. 215–229. (in Russian).
- [3] Barbotko M. A., Lyubimova O., Ostanin M. Structural and mechanical relaxation on annealing in glass-metal layered composites // *Materials Physics and Mechanics*. 2023. no. 51(4).
- [4] Lyubimova O. N., Morkovin A. V., Barbotko M. Properties, Macro- and Microstructure of a Layered Structural Element Based on Inorganic Glass and a Steel // *Glass-and-Metal Composite Rod. Metallurgist* 66. 2023. P. 1140–1146.
- [5] Sanditov D., Ojovan M. Relaxation aspects of the liquid-glass transition // *Physics Uspekhi*. 2019. no. 62(2). P. 111–130.
- [6] Ojovan M., Louzguine-Luzgin D. Revealing structural changes at glass transition via radial distribution functions // *Phys. Chemistry*. 2020. no. 124. P. 3186–3194.
- [7] Mazurin O., Yu.K.Startsev, Khodakovskaya R. Relaxation theory of glass annealing and calculation of annealing modes based on it: textbook. Moscow: Moscow Art Institute named after D.I. Mendeleev, 1987. 83 p. (in Russian).

Barbotko Maxim Andreevich

e-mail: Gsm_1234@mail.ru, Assistant at the Department of Mathematics, Institute of Mathematics and Computer Technology, FEFU

Lyubimova Olga Nikolaevna

e-mail: lyubimova.on@dvfu.ru, PhD, Senior Researcher at the Department of Monitoring and Development of Georesources, Head of the Laboratory of Geomaterials Mechanics at the Research and Educational Center for Geomechanics and Geodynamics of Highly Compressed Rocks and Massifs of FEFU

Streltsov Alexey Alexandrovich

e-mail: streltsov1999@gmail.com, Postgraduate student of the Department of Marine Engineering and Transport of FEFU

- [8] Bartenev G. On the relationship between the glass transition temperature of silicate glass and the rate of cooling or heating // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1951. no. 76(2). P. 227–230. (in Russian).
- [9] Nemilov S. Optical Materials Science: Thermodynamic and relaxation properties of glass-forming melts and glasses: textbook. Saint-Petersburg: St. Petersburg State University ITMO, 2014. 120 p. (in Russian).
- [10] Sanditov D., Darmaev M., Sanditov B. On the relaxation nature of the glass transition of amorphous polymers of low molecular weight amorphous substances // Solid State Physics. 2015. no. 57(6). P. 1629–1634. (in Russian).
- [11] Sanditov D., Ojovan M. Relaxation aspects of the liquid-glass transition // Achievements of the physical sciences. 2019. no. 189(2). P. 113–133. (in Russian).
- [12] Schmelzer J. W. P. Kinetic criteria of glass formation and the pressure dependence of the glass transition temperature // The Journal of Chemical Physics. 2012. no. 136(7). P. 074512–1–074512–11.
- [13] Guiselin B., Scalliet C., Berthier L. Microscopic origin of excess wings in relaxation spectra of supercooled liquids // Nature Physics. 2022. no. 18. P. 468–472.
- [14] Nucleation and growth of the supercooled liquid phase control glass transition in bulk ultrastable glasses / A. Vila-Costa, J. Ràfols-Ribé, M. González-Silveira et al. // Phys. Rev. Lett. 2020. no. 124.
- [15] Ultrastable glasses: new perspectives for an old problem / C. Rodriguez-Tinoco, M. Gonzalez-Silveira, M. Ramos et al. // Riv. Nuovo Cim. 2022.
- [16] Bartenev G., Lukyanov I. Dependence of the glass transition temperature of amorphous substances on the heating rate and the relationship of the glass transition temperature with the activation energy // Journal of Physical Chemistry. 1955. no. 29(8). P. 1486–1498. (in Russian).
- [17] Mazurin O., Lebedeva R., Startsev Y. Method for calculating stresses in glass-to-glass junctions // Physics and chemistry of glass. 1980. no. 6. P. 190–194. (in Russian).
- [18] Startsev V. Automated linear dilatometer for the study of polymer composite materials: disser. Candidate of Philology-M.N. Barnaul: Altai State University Research Institute of Environmental Monitoring at ALTSTU, 2009. 133 p. (in Russian).
- [19] Mazurin O. V., Totesh A. S. Thermal expansion of glass. the science, 1969. 216 p. (in Russian).

В. Э. Богачева

ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА НА КРИТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ J-ИНТЕГРАЛА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассматривается упругое деформирование композита в состоянии плоской деформации. Пластина состоит из двух консолей, соединенных адгезионным слоем. Внешняя нагрузка обеспечивает нормальный разрыв слоя. Из общей вариационной постановки с учетом теории Миндлина–Рейсснера получена постановка в дифференциальном виде. Приведено аналитическое решение для диапазона толщин слоя, при которых характеристическое уравнение имеет комплексные корни. Исследуется влияние коэффициентов Пуассона консоли и слоя на распределение напряжений в адгезиве и значение J-интеграла.

Ключевые слова: адгезив, композит, слой взаимодействия, нормальный отрыв, упругое деформирование, J-интеграл.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.007

УДК: 539.375

Введение. Исследуя прочность адгезионных слоев, в качестве образца обычно используют двухконсольную балку, а трещиноподобный дефект в адгезиве моделируют слоем нулевой толщины. В работах [1–4] этот дефект представляют в виде разреза с характерной толщиной. При моделировании процесса зарождения трещины адгезионный слой можно заменить "слоем взаимодействия" [4], с механическими характеристиками адгезива и толщиной в виде линейного параметра δ_0 .

В качестве критерия разрушения можно использовать достижение J-интегралом [5] критического значения. Одним из способов его нахождения для тел конечных размеров является решение 2D-задачи методом конечных элементов (МКЭ). Также возможно получение аналитических решений с использованием в рассмотрении упрощения теорию пластин [6, 7].

© Богачева В. Э., 2023

Богачева Виктория Эдуардовна

e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, аспирант кафедры вычислительной механики и математики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено за счет гранта ректора для поддержки молодых ученых № ВММ/23/01/ГРР.

Поступила 20.11.2023

1. Постановка задачи. В данной статье исследуется нагружение нормальным отрывом композитной пластины длиной $\ell + a$ (рис. 1). Она состоит из двух консолей с одинаковыми толщинами h и механическими свойствами, сопряженных по длине ℓ адгезионным слоем 3 толщиной δ_0 . Правый торец слоистого композита жестко закреплен от перемещений, на левом торце на тела 1 и 2 действует антисимметричная распределенная нагрузка интенсивностью P . Пластина находится в состоянии плоской деформации. Считается, что между границами слоя 3 и консолями 1 и 2 жесткое сцепление, а по границам слоя равенство противоположность векторов напряжений.

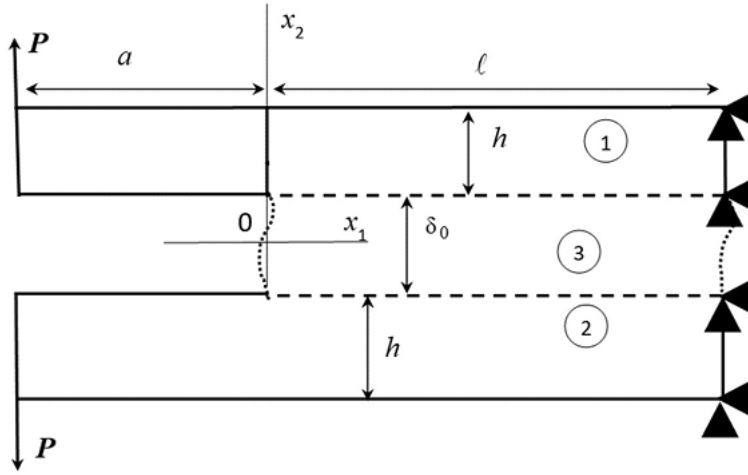


Рис. 1. Нагружение композита нормальным отрывом

Применим концепцию "слоя взаимодействия" [4] для описания взаимодействия адгезионного слоя с консолями. Для рассматриваемого образца поле перемещений границ адгезива имеет вид: $u_1^+ = u_1^-$, $u_2^+ = -u_2^-$, где u_n^+ , u_n^- — соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя, $n = 1, 2$ здесь и далее. Поэтому достаточно ограничиться исследованием консоли 1. Запишем ее уравнение равновесия в вариационной форме:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

где S_1 — площадь поперечного сечения тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры напряжений и деформаций; L_1 — граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — тензоры средних напряжений и деформаций адгезионного слоя с компонентами: $\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11} dx_2$,

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22} dx_2, \quad \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21} dx_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+}{\delta_0}, \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{21} = 0. \quad (2)$$

Вариационное уравнение для тела 1 (1) замкнем определяющими соотношениями в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_n}{1 + \nu_n} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_n}{1 - 2\nu_n} \varepsilon \delta_{ij} \right), \bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right), \quad (3)$$

где E_n , ν_n — модуль Юнга и коэффициент Пуассона n -го тела; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ — объемная деформация; δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Согласно теории Миндлина [6] поле перемещений в консоли определено следующим образом:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \quad (4)$$

А учтя теорию Миндлина – Рейсснера [7], получим следующее напряженное состояние в теле 1:

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{d\varphi}{dx_1} (x_2 - \delta_0/2) \right), \sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right), \quad (5)$$

где $L = k \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$; $k = \frac{5}{6}$; $D = \frac{E_1}{(1-\nu_1^2)}$.

Таким образом, от (1) приходим к двум системам дифференциальных уравнений для тела 1:

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0; \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0; x_1 \in [-a; 0), \\ \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0; \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; x_1 \in (0; \ell], \end{cases} \quad (6)$$

где $M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2$, $Q_{1n}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{1n} dx_2$ — обобщенный момент и обобщенные силы.

Из (2) и (3) получим напряженное состояние в слое взаимодействия:

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D_2 u_2^+, \bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad (7)$$

где $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$; $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$; $C_1 = \frac{2D_1}{\delta_0}$; $C_2 = \frac{\delta_0 D_2}{2}$.

Система (6) имеет граничные условия:

$$M_{11}|_{x_1=-a} = 0, Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, Q_{12}|_{x_1=-a} = Ph, \quad (8)$$

$$u_n^+|_{x_1=\ell} = 0, \varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad (9)$$

и условия сопряжения в точке $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} M_{11}|_{x_1=-0} &= M_{11}|_{x_1=+0}, Q_{11}|_{x_1=-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, \\ Q_{12}|_{x_1=-0} &= Q_{12}|_{x_1=+0}, u_n^+|_{x_1=-0} = u_n^+|_{x_1=+0}, \varphi|_{x_1=-0} = \varphi|_{x_1=+0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Можно ограничиться рассмотрением только участка $(0; \ell]$, перенеся граничные условия (8) в точку $x_1 = 0$:

$$M_{11}|_{x_1=+0} = Pha, (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0} = 0, Q_{12}|_{x_1=+0} = Ph. \quad (11)$$

В результате система (6) с учетом напряженного состояния (7), условий (8)–(10) становится замкнутой. Решение поставленной задачи определяют функции u_n^+ , φ .

2. Решение задачи. Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (6) на участке $(0; \ell]$ имеет вид:

$$\lambda^4 - (m_2 + m_1 m_3 + m_4) \lambda^2 + m_2 m_4 = 0, \quad (12)$$

где $m_1 = 1 + \frac{DhC_2}{2LS_2}$; $m_2 = \frac{1}{Lh} \left(C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2} \right)$; $m_3 = -\frac{3(\delta_0 D_2 Dh + 4LS_2)}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $m_4 = \frac{12LS_2}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $S_2 = Dh + 0.5\delta_0 D_1$.

Дискриминант уравнения (12) определяется следующим образом:

$$d^2 = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4. \quad (13)$$

На рис. 2 показана зависимость дискриминанта (13) от относительной толщины адгезионного слоя 3 для образца с механическими характеристиками консоли 1 : $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_1 = 0.3$. В качестве адгезива берется смола Araldite AV138 [8], у которой $E_3 = 4.9 \cdot 10^9$ Па, $\nu_3 = 0.35$. А геометрические характеристики композита следующие: $h = 0.0127$ м, $a = 0.55$ м, $\ell = 0.245$ м, $b = 0.025$ м, где b — толщина образца.

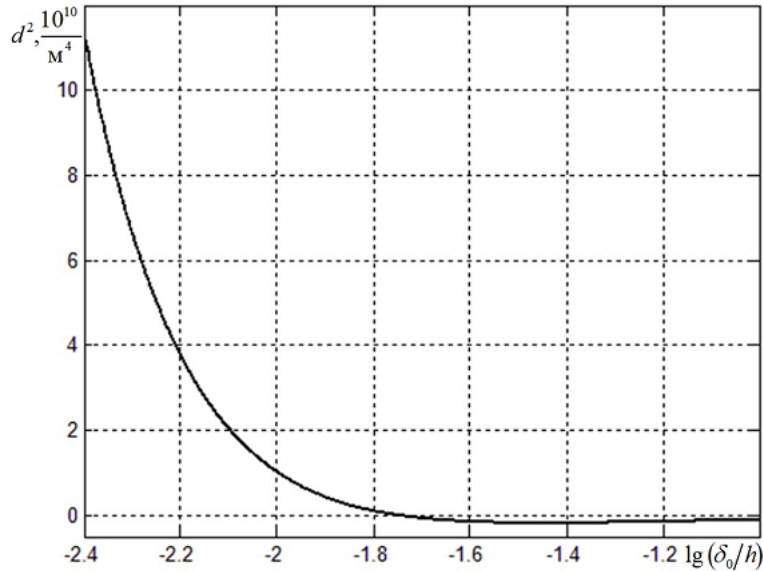


Рис. 2. Зависимость дискриминанта характеристического уравнения от относительной толщины адгезионного слоя

Из рис. 2 видно, что значения дискриминанта принимают как положительные, так и отрицательные значения. При положительных значениях (13), соответствующих действительным корням характеристического уравнения, решение получено в статье [9]. В данной работе рассматривается решение, подробное нахождение которого описано в статье [10], при отрицательных значениях дискриминанта, то есть при комплексных корнях (12).

Согласно работе [10], общее решение системы (6) на участке $(0; \ell]$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
u_1^+ &= \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ +R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ +R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
&+ \left[\frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2 (C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2)} + \frac{1}{S_2} \right] \tilde{C}_1 x_1 + \tilde{C}_6,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
u_2^+ &= \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) - \\ -R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \frac{C_2}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2} \tilde{C}_1,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
&+ \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{16}$$

где $R_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}$; $R_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}$; $\alpha = \frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4}{2}$; $\beta = \frac{\sqrt{-d^2}}{2}$; $R_3 = \frac{m_2 - R_1^2 + R_2^2}{m_1}$; $R_4 = \frac{2R_1 R_2}{m_1}$; $R_5 = \frac{Dh^2(R_1 R_3 + R_2 R_4) + \delta_0 D_2 R_1}{2S_2}$; $R_6 = \frac{Dh^2(R_2 R_3 - R_1 R_4) + \delta_0 D_2 R_2}{2S_2}$; $R_7 = \frac{R_1}{R_1^2 + R_2^2}$; $R_8 = \frac{R_2}{R_1^2 + R_2^2}$; $R_9 = R_5 R_7 + R_6 R_8$; $R_{10} = R_6 R_7 - R_5 R_8$.

Чтобы найти частное решение рассматриваемой задачи, необходимо удовлетворить граничным условиям (9), (11).

Построим распределение напряжений (7) адгезионного слоя (рис. 3) в рассмотренном ранее образце при $\delta_0 = 10^{-3}$ м. Возьмем значение внешней нагрузки $P_{cr} = 1.1$ кН, которое согласно проведенному в работе [8] эксперименту является нагрузкой разрушения адгезива. На рис. 3 графики 1 и 2 соответствуют образцу с коэффициентом Пуассона адгезива $\nu_3 = 0$, а графики 3 и 4 – с $\nu_3 = 0.35$. Графики 1, 3 определяют напряжение $\bar{\sigma}_{11}$, графики 2, 4 – $\bar{\sigma}_{22}$.

Из анализа напряженного состояния в адгезиве Araldite AV138 на рис. 3 видим, что коэффициент Пуассона адгезионного слоя значительно влияет на распределение напряжений адгезива.

Рассмотрим критическое значение J-интеграла (J_C -интеграла) на левом торце адгезионного слоя. В статье [11] J-интеграл определен в виде произведения толщины слоя и удельной свободной энергии. Для нормального разрыва слоя в критическом состоянии J_C -интеграл найдем в виде:

$$J_C = 0.5\delta_0 (\bar{\sigma}_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22}\bar{\varepsilon}_{22}), \tag{17}$$

где $\bar{\sigma}_{nn}$, $\bar{\varepsilon}_{nn}$ – средние напряжения и деформации слоя в критическом состоянии.

В таблице приведены результаты расчета J_C -интеграла (17) для критической нагрузки P_{cr} при $\nu_1 = 0.1; 0.2; 0.3$ и $\nu_3 = 0; 0.35$. Сравниваются значения, полученные с

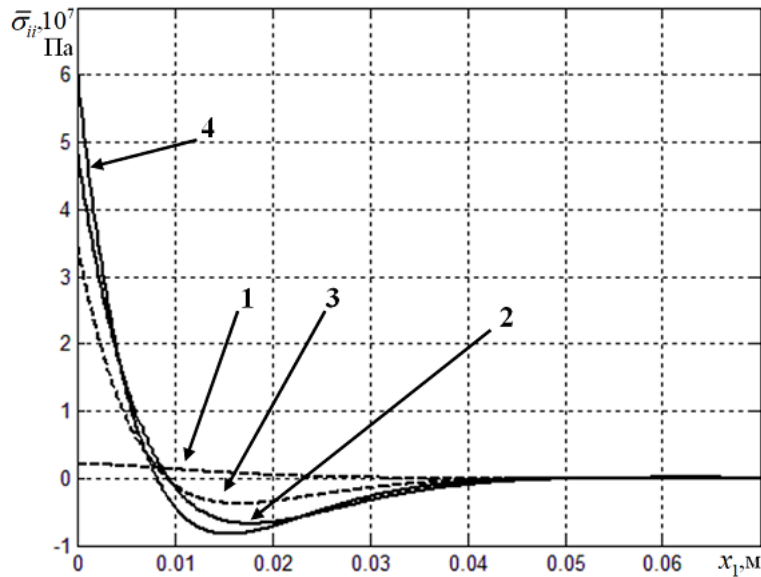


Рис. 3. Напряженное состояние в адгезионном слое

помощью аналитического решения (14)–(16) и МКЭ [11]. При построении численного решения используется треугольный шести узловой конечный элемент с длиной грани равной линейному параметру в зоне обрыва связей с адгезивом. В работе [8] для адгезива Araldite AV138 при $\nu_1 = 0.3$, $\nu_3 = 0.35$ получено экспериментальное значение J_C -интеграла, равное 200 Н/м.

ν_1	Аналитика	МКЭ
0.1	255 (246)	258 (250)
0.2	249 (240)	250 (243)
0.3	239 (230)	238 (231)

Таблица 1. Значения J_C -интеграла (Н/м) при $\nu_3 = 0(0.35)$

Из результатов расчета видно, что, относительная погрешность между методами менее 1.6 %. Установлено, что изменение коэффициента Пуассона консоли 1, влияет на J_C -интеграл, а коэффициент Пуассона слоя практически не оказывает влияние на его значение.

Заклучение. Рассмотрена модель упругого деформирования адгезионного слоя, диапазон относительных толщин которого соответствует отрицательным значениям дискриминанта характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений, соответствующих условиям равновесия. Результаты, полученные с помощью аналитического решения, близки к значениям рассчитанным МКЭ. Установлено, что коэффициент Пуассона слоя значительно влияет на распределение напряжений адгезива, но практически не изменяет величину J_C -интеграла. А коэффициент Пуассона тела оказывает влияние на J_C -интеграл.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 87–99.
- [2] Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубоководном горизонтальном пласте // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2015. № 2. С. 24–33.
- [3] Макклиток Ф. Пластические аспекты разрушения // Разрушение. Москва: Мир, 1975. Т. 3. С. 67–262.
- [4] Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 193–194. P. 447–454.
- [5] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. Москва: Наука, 1974. 640 с.
- [6] Mindlin R. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. P. 31–38.
- [7] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.
- [8] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103–111.
- [9] Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 3. С. 22–34.
- [10] Богачева В. Э. Исследование деформирования тонкого адгезионного слоя композита при воздействии нормальным отрывом // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. № 7. С. 38–45.
- [11] О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 1. Упругое деформирование / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 3. С. 116–124.

V.E. Bogacheva

INFLUENCE OF MECHANICAL CHARACTERISTICS OF A LAYERED COMPOSITE ON THE CRITICAL VALUE OF THE J-INTEGRAL

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The elastic deformation of a composite in a state of plane strain is considered. The plate consists of two consoles connected by an adhesive layer. External load ensures normal rupture of the layer. From the general variational formulation, taking into account the Mindlin–Reissner theory, a differential formulation was obtained. An analytical solution is given for the range of layer thicknesses for which the characteristic equation has complex roots. The influence of the Poisson’s ratios of the cantilever and layer on the stress distribution in the adhesive and the value of the J-integral is investigated.

Keywords: adhesive, composite, interaction layer, normal separation, elastic deformation, J-integral.

Bogacheva Viktoriya Eduardovna, Postgraduate, Department of Computational Mechanics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russia.

REFERENCES

- [1] Entov V. M., Salganik R. L. To the Prandtl model of brittle fracture // *Izv. AN SSSR. MTT.* 1968. no. 6. P. 87–99. (in Russian).
- [2] Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed // *Journal of Mining Science.* 2015. no. 2. P. 24–33. (in Russian).
- [3] Makhlintok F. Plastic aspects of destruction // *Razrushenie.* Moscow: Mir, 1975. Vol. 3. P. 67–262. (in Russian).
- [4] Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // *International Journal of Solids and Structures.* 2020. Vol. 193-194. P. 447–454.
- [5] Cherepanov G. *Mechanics of brittle fracture.* Moscow: Nauka, 1974. 640 p. (in Russian).
- [6] Mindlin R. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *ASME Journal of Applied Mechanics.* 1951. Vol. 18. P. 31–38.
- [7] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // *Quarterly of Applied Mathematics.* 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.
- [8] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // *Journal of Adhesion and Adhesives.* 2016. Vol. 67. P. 103–111.
- [9] Stress state and conditions for crack initiation in the adhesion layer of the composite / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // *PNRPU Mechanics Bulletin.* 2021. no. 3. P. 22–34. (in Russian).
- [10] Bogacheva V. E. Investigation of deformation of a thin adhesive layer of a composite under the influence of a normal separation // *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki.* 2023. no. 7. P. 38–45. (in Russian).
- [11] On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // *PNRPU Mechanics Bulletin.* 2022. no. 3. P. 116–124. (in Russian).

С. А. Скобельцын, М. В. Окороков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОСИ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА СО СФЕРИЧЕСКИМИ ЗАГЛУШКАМИ ПО РАССЕЙАНИЮ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассматривается задача идентификации направления оси конечного упругого цилиндра по рассеянному акустическому полю. Предполагается, что цилиндр имеет сферические заглушки, а его материал является однородной упругой средой. Цилиндр погружен в идеальную жидкость. При фиксированном положении центра цилиндра, ориентация его оси определяется по измерениям акустического давления при рассеянии цилиндром плоской гармонической звуковой волны. Идентификация угловых параметров направления оси выполняется на основе минимизации отклонения наблюдаемого давления от расчетного.

Ключевые слова: дифракция звука, конечный упругий цилиндр, ближнее акустическое поле, метод граничных элементов, теоретико-числовые сетки, обратная задача рассеяния.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.008

УДК: 539.3:534.26

1. Введение. Важной сферой использования решений задач о дифракции звука на различных объектах являются проблемы определения свойств среды и параметров объектов – обратные задачи акустики. Изучение акустического поля при рассеянии звуковой волны объектом позволяет идентифицировать: положение объекта; его размеры, форму, ориентацию; свойства материала объекта. Подобные проблемы решаются в сейсмологии, гидроакустике, ультразвуковой интроскопии.

Известен ряд работ, посвященных решению задачи о рассеянии звуковых волн упругими объектами простой формы: плоскими слоями, круговыми цилиндрами, шарами и др., например [1–7]. В работах Стентона [8–10] рассматривалось рассеяние звука

© Скобельцын С. А., Окороков М. В., 2023

Скобельцын Сергей Алексеевич

e-mail: skbl@ Rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Окороков Максим Витальевич

e-mail: maxik_okorokov@mail.ru, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено в рамках госзадания № 073-03-2022-117/7 по теме “Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике”.

Поступила 20.12.2023

деформируемыми конечными цилиндрами с круговым сечением. В решении используется представление рассеянного поля в виде интеграла Гельмгольца [11, 12]. При определении распределения акустических источников на поверхности препятствия решается интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

В данной работе предлагается решение задачи определения ориентации оси конечного упругого цилиндра со сферическими заглушками по рассеянному полю плоской звуковой волны. Решение проводится на основе интеграла Гельмгольца подобно [9, 13]. Особенностью предлагаемого решения является то, что вычисление интегралов при определении давления в рассеянном поле выполняется с использованием квадратур на основе теоретико-числовых сеток, что позволяет несколько сократить объем вычислений.

2. Постановка задачи. Пусть в неограниченную область Ω_0 , заполненную идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 , помещено упругое тело Ω , представляющее собой конечный цилиндр высотой $2h$ с круговым сечением радиуса a . Торцы цилиндра закрыты сферическими заглушками радиуса a . Материал цилиндра – однородная упругая среда с плотностью ρ и модулями упругости Ламе λ и μ . Из окружающей жидкости на шар падает плоская гармоническая звуковая волна с круговой частотой ω и потенциалом вектора смещения Ψ_p . Считается, что положение центра тела O фиксировано в пространстве и известно. Требуется по наблюдаемому рассеянному акустическому полю на некоторой апертуре в окрестности Ω определить ориентацию оси цилиндра L по отношению к направлению распространения падающей волны. Геометрия задачи представлена на рис. 1, а. На рис. 1, б показана схема введения систем координат.

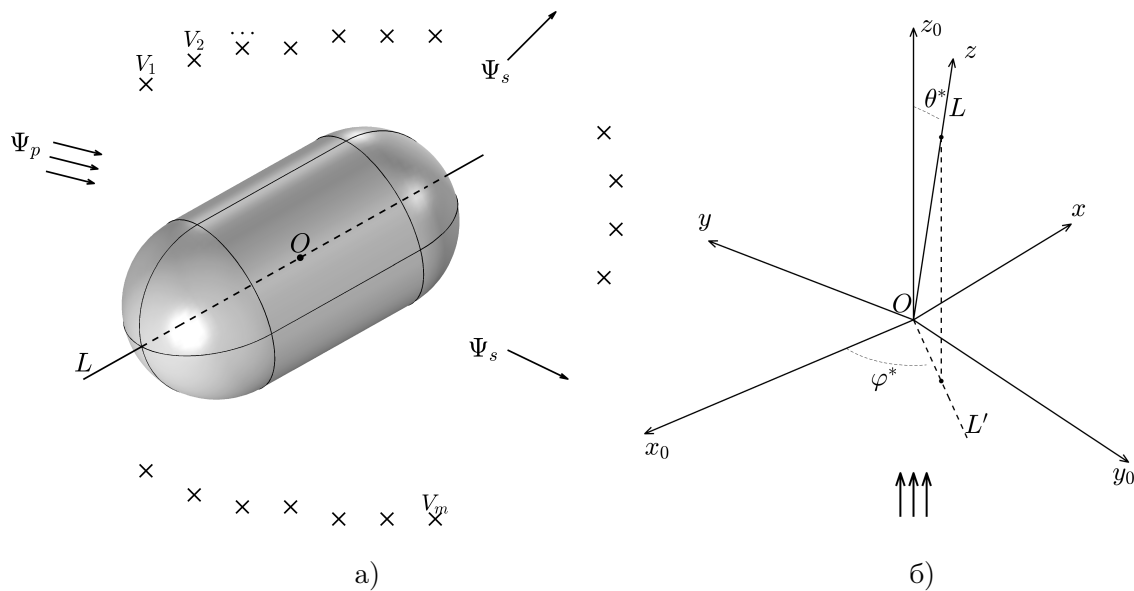


Рис. 1. а) – геометрия задачи ; б) – системы координат

Направление распространения и частоту падающей волны определяет волновой вектор \mathbf{k}_0 такой, что $|\mathbf{k}_0|=k_0=\omega/c_0$ – волновое число падающей волны. Тогда потенциал смещения в падающей волне может быть представлен в комплексной форме так

$$\Psi_p = \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (1)$$

где без ограничения общности амплитуда Ψ_p полагается равной 1; \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения; t – время; i – мнимая единица. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ у Ψ_p и всех параметров движения, зависящих от времени, будем опускать (колебания предполагаются гармоническими).

В результате отражения звука шаром образуется рассеянное акустическое поле. Будем характеризовать его потенциалом смещения в рассеянной волне. На рис. 1, а и в тексте ниже он обозначается Ψ_s .

Апертура наблюдения рассеянного акустического поля представляется множеством m точек измерения акустического давления $V = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$.

Предполагается, что величины:

$$\mathbf{k}_0, \quad \rho_0, \quad c_0, \quad a, \quad h, \quad \rho, \quad \lambda, \quad \mu, \quad m; \quad (2)$$

$$\text{положение точек } O \text{ и } V_k \quad (k = 1 \dots m) \quad (3)$$

известны. Также известно акустическое давление в точках наблюдения (измерения):

$$p_1^*, \quad p_2^*, \quad \dots, p_m^*. \quad (4)$$

Требуется по совокупности данных (2), (3), (4) определить ориентацию оси цилиндра L по отношению к направлению распространения падающей волны.

Для решения задачи введены две декартовых систем координат. Основная система координат (система отсчета) x_0, y_0, z_0 введена так, чтобы ее начало располагалось в фиксированном центре цилиндра – точке O , а ось Oz_0 направлена по направлению распространения падающей волны. Вторая система координат x, y, z – локальная для тела Ω – вводится так, что ее начало также находится в точке O , а ось Oz направлена по оси вращения цилиндра L . На рис. 1, б показано введение двух углов θ^* и φ^* , определяющих направление Oz (а, значит, и L) в системе отсчета. Угол θ^* – угол между осью Oz и осью Oz_0 . Угол φ^* – между проекцией оси Oz (или L) на плоскость $z_0 = 0$ и осью Ox_0 . Таким образом, углы θ^* и φ^* идентифицируют направление оси цилиндра. Они выступают в качестве неизвестных в исходной задаче.

Направление осей x, y не жестко фиксируется и может быть выбрано из соображений наибольшей простоты связи с системой отсчета. Например, будем считать, что система координат x, y, z получается из системы отсчета двумя поворотами: вначале – вокруг Oz_0 на угол φ^* , а затем – вокруг Oy на угол θ^* . Тогда связь локальной системы координат с глобальной может быть выражена соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta^* \cos \varphi^* x_0 + \cos \theta^* \sin \varphi^* y_0 - \sin \theta^* z_0; & y &= -\sin \varphi^* x_0 + \cos \varphi^* y_0; \\ z &= \sin \theta^* \cos \varphi^* x_0 + \sin \theta^* \sin \varphi^* y_0 + \cos \theta^* z_0. \end{aligned}$$

С использованием координат локальной системы координат поверхность Γ упругого тела Ω может быть представлена объединением трех поверхностей:

$\Gamma_1 = \{(x, y, z) : z < -h, x^2 + y^2 + (z + h)^2 = a^2\}$ – поверхность одной заглушки (при $z < -h$);

$\Gamma_2 = \{(x, y, z) : z > h, x^2 + y^2 + (z - h)^2 = a^2\}$ – поверхность второй заглушки (при $z > h$);

$\Gamma_3 = \{(x, y, z) : -h \leq z \leq h, x^2 + y^2 = a^2\}$ – цилиндрическая поверхность средней части Ω .

Для нахождения углов θ^* и φ^* , идентифицирующих действительное направление оси цилиндра, по аналогии с [14] построим задачу поиска минимума функции двух переменных $\delta(\theta, \varphi)$. Функция строится как квадрат нормы разности расчетных значений давления в точках $V: p_1, p_2, \dots, p_m$ при ориентации оси L , определяемой углами θ и φ , и измеренных значений давления (4) (при действительном направлении оси L , определяемом углами θ^* и φ^*)

$$\delta(\theta, \varphi) = \sum_{k=1}^m (p_k - p_k^*)^2. \quad (5)$$

Таким образом, задача поиска углов θ^* и φ^* может быть сформулирована так

$$(\theta', \varphi') = \arg \min_{(\theta, \varphi) \in D} \delta(\theta, \varphi). \quad (6)$$

где D – область допустимых значений (θ, φ) . Не делая дополнительных ограничений на ориентацию цилиндра, с учетом его симметрии следует положить

$$D = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Заметим, задача может иметь не единственное решение. Это может быть связано с объективными причинами: выбором состава искомым параметров; физическими эффектами при сочетании свойств падающей волны, геометрии и свойств материала препятствия; выбором множества V . Например, в рассматриваемом случае нельзя ожидать однозначного определения φ^* при $\theta^* = 0$ (правда, эту проблему можно преодолеть, используя несколько направлений распространения исходной волны). Однако, точное решение (θ^*, φ^*) должно быть среди множества решений (6). Кроме того, решение (θ', φ') может отличаться от (θ^*, φ^*) из-за ошибок измерений значений (4) и погрешностей используемых методов решения задач дифракции и минимизации.

3. Решение задачи. Для решения задачи (6) прежде всего надо вычислить значения $p_k(\mathbf{r} | \theta, \varphi)$. Величина $p_k(\mathbf{r} | \theta, \varphi)$ или, просто, $p(\mathbf{r})$ есть звуковое давление в точке \mathbf{r} в суммарном акустическом поле, сформировавшемся в результате рассеяния плоской звуковой волны (1) упругим препятствием Ω , ось вращения которого зафиксирована углами (θ, φ) . Согласно [15] давление определяется через потенциал смещения $\Psi = \Psi_p + \Psi_s$ так

$$p = \rho_0 \omega^2 \Psi.$$

В результате дифракции звука на упругом цилиндре формируется рассеянное акустическое поле, которое определяется потенциалом смещений Ψ_s . Потенциал Ψ_s должен удовлетворять уравнению Гельмгольца [15]

$$\mathbf{r} \in \Omega_0 : \quad \Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0, \quad (7)$$

где Δ – оператор Лапласа. Кроме того, потенциал смещений Ψ_s должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности

$$\Psi_s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik_0 \Psi_s \right) = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где $r = |\mathbf{r}|$.

Движение частиц упругого цилиндра Ω будем описывать общими уравнениями движения сплошной среды [16] при гармонических колебаниях

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \in \Omega : \quad & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_x, \\ & \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_y, \\ & \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_z, \end{aligned} \quad (9)$$

где σ_{jk} – физические компоненты тензора напряжений σ ; u_j – компоненты вектора смещений частиц упругой среды.

Связь компонентов тензора напряжений и компонентов вектора смещений выражается законом Гука $\sigma = \Lambda \cdot \varepsilon$, где Λ тензор модулей упругости, который содержит компоненты, являющиеся линейными комбинациями λ и μ , ε – тензор деформаций, компоненты которого выражаются через компоненты \mathbf{u} и их производные.

На внешней поверхности тела Γ должны выполняться граничные условия равенства нормальных смещений и напряжений и отсутствия касательных напряжений

$$\mathbf{r} \in \Gamma : \quad u_n = \frac{\partial \Psi}{\partial n}; \quad \sigma_{nn} = -p; \quad \sigma_{n\tau} = 0. \quad (10)$$

где u_n , σ_{nn} – нормальные компоненты векторов смещений и напряжений; $\sigma_{n\tau}$ – касательные компоненты вектора напряжений.

Таким образом, при нахождении $p(\mathbf{r})$ (решении задачи дифракции плоской звуковой волны упругим телом Ω) требуется найти решения уравнений (7) в Ω_0 и (9) в Ω . Решения должны удовлетворять граничным условиям (10) и условиям излучения на бесконечности (8).

Задача дифракции решалась с использованием граничных интегральных уравнений. Используется подход, который предложен в работе [13]. Особенностью этого подхода является то, что вычисление интегралов при определении давления в рассеянном поле в точках апертуры выполняется с использованием квадратур на основе теоретико-числовых сеток. Это позволяет несколько уменьшить объем вычислений.

Задача минимизации функции двух переменных (5) также решается численно – методом покоординатного спуска в сочетании со случайным выбором начальной точки [17].

4. Численные исследования. Для анализа предложенного решения был проведен ряд численных исследований для частных значений параметров падающей волны, геометрических параметров тела и материальных параметров сред.

Сначала были проведены численные эксперименты для анализа влияния параметров θ и φ на процесс рассеяния звука.

Здесь представлены расчеты для короткого цилиндра, у которого $h = a$. Плотность и модуль упругости материала цилиндра: $\rho = 2700$ кг/м³, $\lambda = 5.3 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 2.6 \cdot 10^{10}$ Па.

Для анализа распределения давления в рассеянном акустическом поле строились поверхности и диаграммы распределения абсолютной величины относительного давления $p'(\mathbf{R}) = |\Psi/\Psi_p|$ по сферической поверхности $\mathbf{R} : r = R$ вблизи препятствия. Для сравнения строились также диаграммы для сферического тела с радиусом a_0 таким, что объем сферы и объем исследуемого цилиндра совпадали (при $h = a$

$a_0 = (4/3)^{1/3}a$. Свойства материала сферы полагаются равными ρ , λ , μ . В расчетах R полагалось таким, что $R = 2a_0$, а $ka_0 = 5$.

На диаграммах б) ниже в качестве полярного угла, отсчитываемого от оси Oz_0 в плоскости $y_0 = 0$ в сторону оси Ox_0 используется параметр q ($0 \leq q < 2\pi$). При таких предположениях $p'(q)$ является сечением поверхности $p'(\mathbf{R})$ и представляет собой функцию в полярных координатах (p', q) .

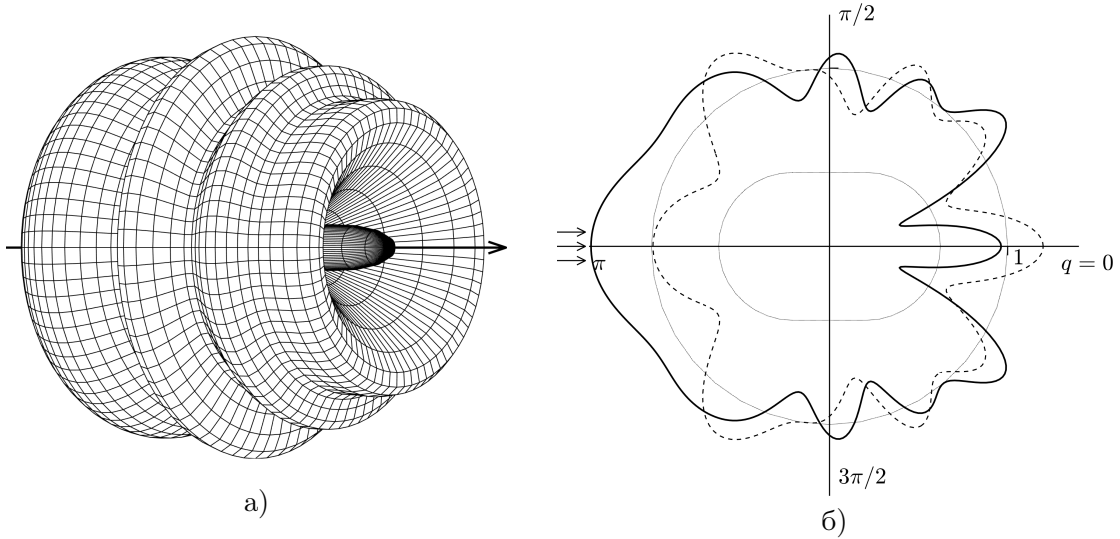


Рис. 2. а) – поверхность $p'(\mathbf{R})$; б) – диаграмма $p'(q)$ ($\theta^* = 0$)

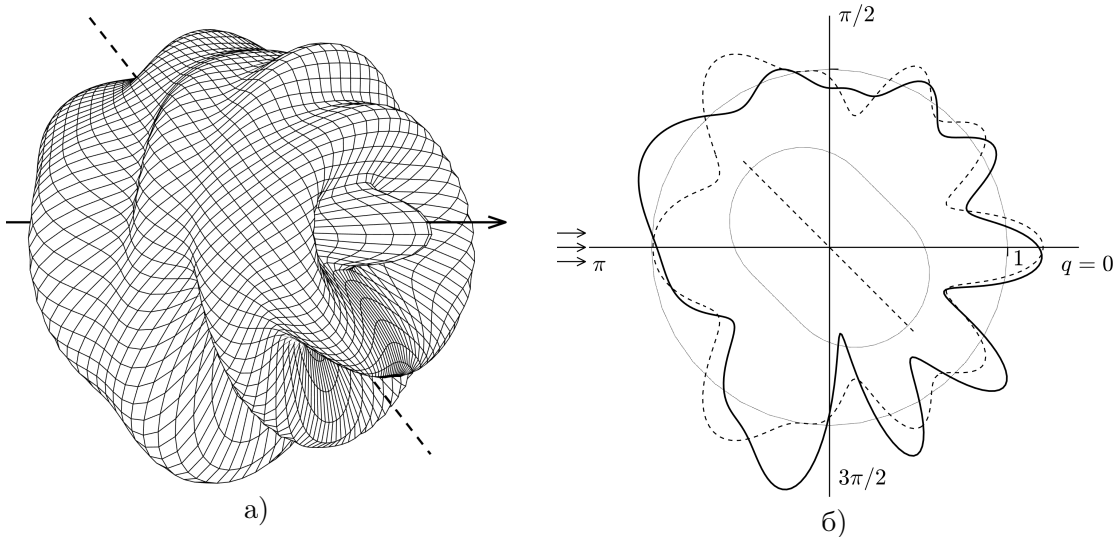


Рис. 3. а) – поверхность $p'(\mathbf{R})$; б) – диаграмма $p'(q)$ ($\theta^* = 45^\circ$)

На рис. 2–4 представлены поверхности $p'(\mathbf{R})$ (а) и зависимости $p'(q)$ (б) для трех значений θ^* (полагается $\varphi^* = 0$).

Стрелка на изображениях сеточных поверхностей $p'(\mathbf{R})$ показывает направление распространения падающей волны, а пунктирная прямая (как и на б)) – ориентацию оси цилиндра.

Для интерпретации геометрических соотношений между сечением препятствия и поверхностью \mathbf{R} на диаграммах а) пунктирной линией в едином масштабе изображены контур сечения цилиндра и окружность $p'(q) = 1$.

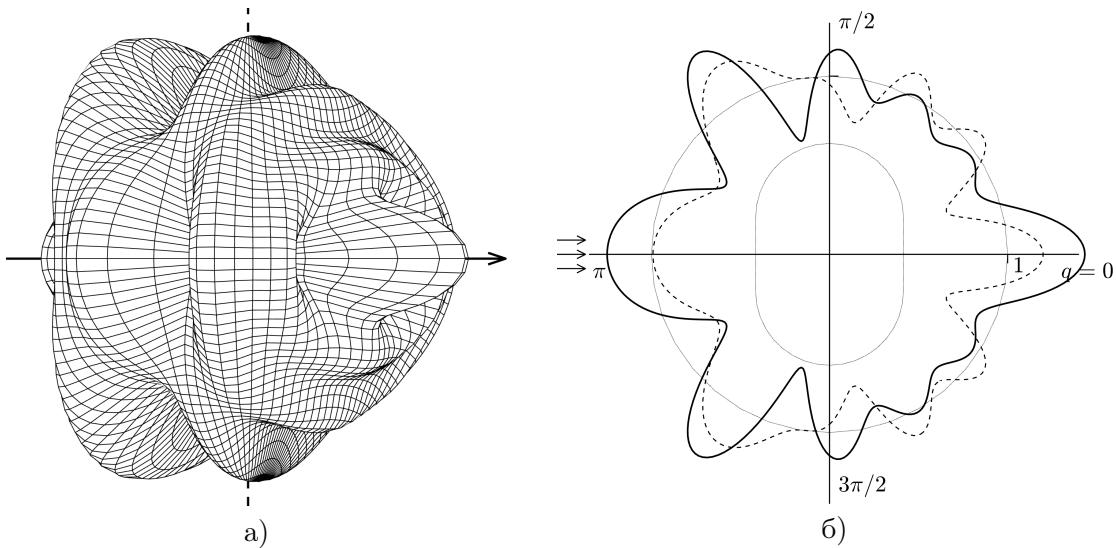


Рис. 4. а) – поверхность $p'(\mathbf{R})$; б) – диаграмма $p'(q)$ ($\theta^* = 90^\circ$)

Значение $p'(q) = 1$ представляет относительное давление в падающей волне, а расстояние от единичной окружности до линии сечения цилиндра характеризует относительное расстояние точки измерения давления от поверхности тела.

Штриховой линией как база для сравнения представлена диаграмма зависимости $p'(q)$ для сферического тела радиуса a_0 .

Поверхности и диаграммы на представленных рисунках показывают, что изменение параметра θ существенно влияет на форму распределения давления на поверхности наблюдения.

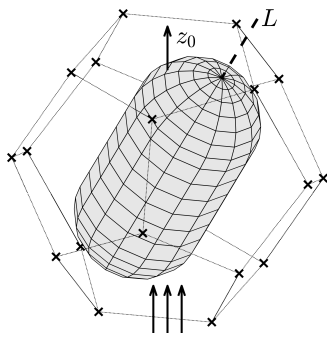


Рис. 5. Расположение точек апертуры V

На рис. 6, 7 представлены линии уровня нормированных значений δ' поверхностей функции $\delta(\theta, \varphi)$ для двух сочетаний (θ^*, φ^*) . В качестве множества V для расчетов $\delta(\theta, \varphi)$ использовалось 20 вершин додекаэдра (см. рис. 5), лежащих на поверхности \mathbf{R} . Минимальное значение $\delta' = 0$ достигается ровно в точках, соответствующих (θ^*, φ^*) .

Это происходит потому, что при моделировании для расчета наблюдаемых значений давления (4) используется тоже решение задачи дифракции (7–10), что и для расчетных значений при произвольных значениях (θ, φ) .

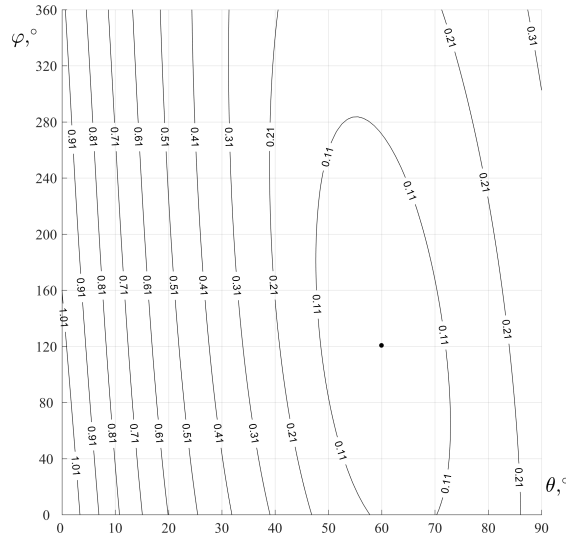
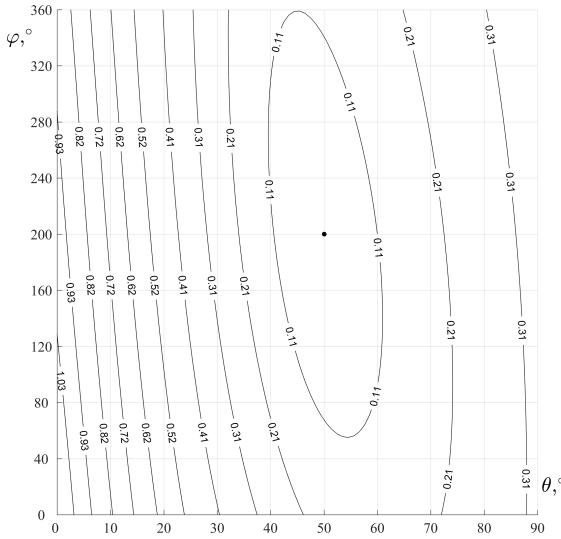


Рис. 6. Линии уровня δ' , $(\theta^*, \varphi^*) = (50^\circ, 200^\circ)$ Рис. 7. Линии уровня δ' , $(\theta^*, \varphi^*) = (60^\circ, 120^\circ)$

Для оценки устойчивости и точности алгоритма требуется имитационное моделирование наличия ошибок и «шума» как в наблюдаемых значениях (4), так и в расчетах давления в точках V .

5. Заключение. Полученное решение позволяет выполнять моделирование процедуры идентификация угловых параметров направления оси упругого цилиндра по рассеянию плоской звуковой волны.

Проведенные расчеты показывают, что предложенный алгоритм может быть использован для решения относительно несложных геометрических обратных задач акустики. Однако, для получения рекомендаций к практическому применению требуется его исследование в условиях наличия ошибок и «шума» в численном решении задачи дифракции и измеряемых значениях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. no. 23 (4). P. 405–418.
- [2] Лямшев Л. М. Отражение звука от тонких пластин и оболочек в жидкости. Москва: Изд-во АН СССР, 1955. 73 с.
- [3] Лямшев Л. М. Рассеяние звука упругими цилиндрами // Акуст. журн. 1959. № 5 (1). С. 58–63.
- [4] Fiorito R., Madigosky W., Überall H. Resonance theory of acoustic waves interacting with an elastic plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. no. 66 (6). P. 1857–1866.
- [5] Überall H. Sound scattering by solid cylinders and spheres // Traitement du Signal. 1985. no. 2 (5). P. 353–357.
- [6] Gaunard G. C. Sound scattering by resonantly excited, fluid-loaded, elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. no. 90 (5). P. 2536–2550.

- [7] Guild M. D., Alu A., Haberman M. R. Cancellation of acoustic scattering from an elastic sphere // J. Acoust. Soc. Amer. 2011. no. 129 (3). P. 1355–1365.
- [8] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. I. Fluid cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. no. 83 (1). P. 55–63.
- [9] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. II. Elastic cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. no. 83 (1). P. 64–67.
- [10] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. III. Deformed cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. no. 86 (2). P. 691–705.
- [11] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Мир: Москва, 1987. 311 с.
- [12] Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Судостроение: Ленинград, 1989. 304 с.
- [13] Применение теоретико-числовых сеток в задачах дифракции звука на упругих телах / Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников [и др.] // Чебышевский сборник. 2022. № 23 (5). С. 206–226.
- [14] Skobel'tsyn S. A., Peshkov N. Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // J. Physics: Conference Series. 2019. no. 1203. P. 1–10.
- [15] Скучик Е. Основы акустики, Т. 1. Мир: Москва, 1976. 520 с.
- [16] Новацкий В. Теория упругости. Мир: Москва, 1975. 872 с.
- [17] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Наука: Москва, 1988. 549 с.

S. A. Skobel'tsyn, M. V. Okorokov

DETERMINATION OF AXIS DIRECTION OF THE FINITE LENGTH CYLINDER WITH SPHERICAL CAPS BY SOUND WAVE SCATTERING

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The problem of identification the direction of the axis of a finite elastic cylinder by scattered acoustic field is considered. The cylinder is assumed to have spherical plugs. Cylinder material is a homogeneous elastic medium. Body is immersed in an ideal liquid. Location of the cylinders center is assumed to be known. The orientation of the cylinder axis is determined by measuring the acoustic pressure when a plane harmonic sound wave is scattered by the cylinder. Identification of the angular parameters of the axis direction is performed based on minimizing the deviation of the observed pressure from the calculated pressure.

Keywords: sound diffraction, finite elastic cylinder, near acoustic field, boundary element method, number theoretic grids, inverse scattering problem.

REFERENCES

- [1] Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. no. 23 (4). P. 405–418.
- [2] Lyamshev L. M. Reflection of sound from thin plates and shells in a liquid. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1955. 73 p. (in Russian).
- [3] Lyamshev L. M. Sound scattering by elastic cylinders // Acoustical Physics. 1959. no. 5 (1). P. 58–63. (in Russian).
- [4] Fiorito R., Madigosky W., Überall H. Resonance theory of acoustic waves interacting with an elastic plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. no. 66 (6). P. 1857–1866.

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Okorokov Maksim Vitalievich, Postgraduate Student, Tula State University, Tula, Russia.

-
- [5] Überall H. Sound scattering by solid cylinders and spheres // *Traitement du Signal*. 1985. no. 2 (5). P. 353–357.
- [6] Gaunaud G. C. Sound scattering by resonantly excited, fluid-loaded, elastic spherical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. no. 90 (5). P. 2536–2550.
- [7] Guild M. D., Alu A., Haberman M. R. Cancellation of acoustic scattering from an elastic sphere // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2011. no. 129 (3). P. 1355–1365.
- [8] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. I. Fluid cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. no. 83 (1). P. 55–63.
- [9] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. II. Elastic cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. no. 83 (1). P. 64–67.
- [10] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. III. Deformed cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1989. no. 86 (2). P. 691–705.
- [11] Kolton D., Kress R. *Methods of integral equations in scattering theory*. Mir: Moscow, 1987. 311 p. (in Russian).
- [12] Shenderov E. L. *Radiation and scattering of sound*. Sudostroenie: Leningrad, 1989. 304 p. (in Russian).
- [13] Application of number-theoretic grids in problems of sound diffraction by elastic bodies / N. N. Dobrovolskii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov et al. // *Chehyshevskii shoniik*. 2022. no. 23 (5). P. 206–226. (in Russian).
- [14] Skobelt'syn S. A., Peshkov N. Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // *J. Physics: Conference Series*. 2019. no. 1203. P. 1–10.
- [15] Skuchik E. *Acoustics basics*, V. 1. Mir: Moscow. 520 p. (in Russian).
- [16] Nowacki W. *Elasticity theory*. Mir: Moscow, 1975. 872 p. (in Russian).
- [17] Vasiliev F. P. *Numerical methods for solving extremal problems*. Nauka: Moscow, 1988. 549 p. (in Russian).

Н. А. Пеньков, О. А. Сидоркин, А. В. Бараненко, Д. В. Березин

К ВОПРОСУ ЗАРОЖДЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ В КОМПОЗИЦИОННЫХ ПОКРЫТИЯХ

Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье рассматривается вариант расчета износостойких покрытий. Определяются предельные значения величин упрочнения защитного износостойкого покрытия, которые осесимметричная деталь способна воспринять без последующего разрушения верхнего слоя осадка. Моделью деформирования рассматриваемого покрытия, обладающего большей твердостью в сравнении с материалом основной детали, служит контактная задача: взаимодействие бесконечно длинного цилиндра с полупространством. Определена глубина зарождения пластической области, позволяющая контролировать степень наклепа защитного покрытия детали, не допуская его переупрочнения.

Ключевые слова: теория упругости, теория пластичности, напряжения, деформации, износостойкие покрытия, осесимметричная задача, полярные координаты, полиномы Лежандра.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.009

УДК: 621.9.047

Введение. При восстановлении различных деталей, используемых в машиностроении, часто требуется определить предельное значение величины упрочнения их

© Пеньков Н. А., Сидоркин О. А., Бараненко А. В., Березин Д. В., 2023

Пеньков Никита Алексеевич

e-mail: mythnpnikit@mail.ru, доктор технических наук, доцент, доцент кафедры АТС, Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж, Россия.

Сидоркин Олег Анатольевич

e-mail: major282006@yandex.ru, кандидат технических наук, доцент, заместитель начальника кафедры защитных сооружений, Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж, Россия.

Бараненко Андрей Васильевич

e-mail: anreveter@mail.ru, соискатель, Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж, Россия.

Березин Дмитрий Викторович

e-mail: myth7np7nikit@gmail.com, соискатель, Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.12.2023

защитного покрытия, которое они способны воспринять без последующего разрушения верхнего слоя осадка. В большинстве случаев, для ответа на этот вопрос, удовлетворительным оказывается использование математических моделей теории упругости и теории пластичности рассматриваемых деталей [1–3].

Моделью деформирования композиционного покрытия, обладающего большей твердостью в сравнении с материалом основной детали, служит контактная задача, рассматривающая взаимодействие бесконечно длинного цилиндра с полупространством. Решение производится для случая, когда радиус кривизны инструмента значительно меньше радиуса кривизны восстанавливаемой детали.

1. Постановка задачи. Вводится цилиндрическая система координат r, θ, z с соответствующими компонентами перемещения u, v, w ($v = 0$). Компоненты касательных напряжений $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ равны нулю.

Деформации определяются из соотношений Коши:

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, e_\theta = \frac{u}{r}, e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (1)$$

Вместо определяющих соотношений оказывается удобным ввести функцию напряжений ϕ , для которой будет справедливо уравнение [2]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) * \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} \right) = 0, \quad (2)$$

где связь между введенными системами координат устанавливается следующими соотношениями:

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, \psi = \arccos \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (3)$$

Нетрудно показать, что решение (2) будет представимо через полиномы Лежандра в виде [3]:

$$\phi_{k1} = \frac{A_n}{2^n * n!} (r^2 + z^2)^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\partial^n [(-1)^n \sin^{2n}(\arccos \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}})]}{\partial (\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}})^n}, k \in Z. \quad (4)$$

и

$$\phi_{k2} = \frac{B_n}{2^n * n!} (r^2 + z^2)^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\partial^n [(-1)^n \sin^{2n}(\arccos \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}})]}{\partial (\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}})^n}, k \in Z \quad (5)$$

В случае равномерной нагрузки, распределенной по внутренней поверхности круга радиуса a (рисунок 1), определим перемещения в направлении действия нагрузки произвольной точки M , расположенной вне круга. Соответствующее перемещение точки M на поверхности детали будет:

$$w = \frac{(1 - \nu^2)q}{\pi E} \iint ds d\psi. \quad (6)$$

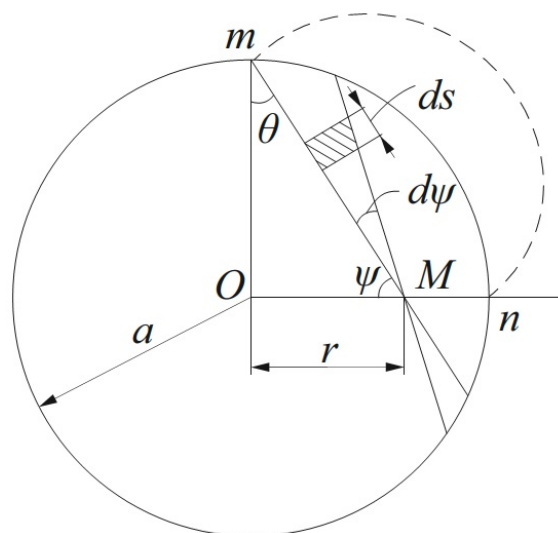


Рис. 1. Равномерная нагрузка, действующая на границу восстанавливаемой поверхности детали

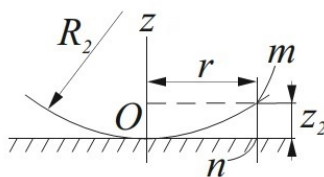


Рис. 2. Контакт цилиндра с полупространством

2. Результаты и вычисления. Рассматривая контакт цилиндрического тела – инструмента с поверхностью детали, положим радиус кривизны инструмента – R_2 . В случае, когда между соприкасающимися телами не действует давление, касание происходит по прямой.

Расстояние mp можно с достаточной точностью представить в виде (рисунок 2):

$$z_2 = \frac{r^2}{2R_2}. \tag{7}$$

где α – величина сближения точек m и p в результате деформирования.

Можно показать, что (6) выполняется, когда распределение давления по поверхности контакта определяется координатами радиуса цилиндрического инструмента – a , построенного на этой поверхности [4, 5]. При этом распределение давления по поверхности контакта происходит в полной аналогии с ситуацией, представленной на рисунке 1 пунктирной линией. В этом случае выражение (6) принимает вид:

$$\frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{q_0}{a} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) \right] d\psi = \alpha - \frac{r^2}{2R_2}. \quad (8)$$

где q_0 – давление в центре поверхности контакта. Для определения возникающих напряжений воспользуемся принципом суперпозиции. Напряжение σ_z , можно получить, используя решение о давлении сосредоточенной силы на полупространство, где полагаем вместо $P-Hdr * q$. Тогда напряжение σ_z , вызываемое равномерной нагрузкой, будет:

$$\sigma_z = -\frac{3Hz^3q}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + z^2)^5}}. \quad (9)$$

Аналогично для остальных компонент напряжений будем иметь:

$$\sigma_r = \int_{-a}^a \frac{Hq}{2\pi} \left((1 - 2\nu) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} \right) - \frac{3r^2 z}{\sqrt{(r^2 + z^2)^5}} \right) dr. \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = \int_{-a}^a \frac{Hq(1 - 2\nu)}{2\pi} \left(\frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{r^2} + \frac{z}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} \right) dr. \quad (11)$$

В качестве условия пластичности положим соотношение Треска – Сен-Венана. Определим границу зарождения пластической области на оси Oz . Нетрудно показать, что компоненты напряжений распределены следующим образом:

$$\sigma_z < \sigma_r < \sigma_\theta. \quad (12)$$

Условие пластичности в этом случае запишется в виде:

$$\frac{(1 - 2\nu)Hq_0}{\pi} \frac{a^2 + z\sqrt{a^2 + z^2} - z^2}{az\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{Hq_0a}{\pi} \frac{2a^2 + 3z^2}{z\sqrt{(a^2 + z^2)^3}} = k. \quad (13)$$

Полагая:

$$K_1 = \frac{ak\pi}{Hq_0}, \quad (14)$$

выражение (13) можно преобразовать к виду:

$$(1 - 2\nu - K_1)z\sqrt{(a^2 + z^2)^3} = (1 - 2\nu)z^4 - 3a^2z^2 - (3 - 2\nu)a^4, \quad (15)$$

Решая полученное алгебраическое уравнение относительно z , получим окончательно для глубины зарождения пластичности в обрабатываемом покрытии: $z = 0, 13\text{мм}$.

Заключение. Таким образом, полученные расчеты позволяют контролировать степень наклепа защитного покрытия детали, не допуская его переупрочнения. Авторами установлено, что граница зарождения пластической области расположена не на поверхности покрытия, а на определенной глубине. Это позволяет производить корректировку давления инструмента до получения необходимой степени упрочнения формируемых осадков.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Управление внутренними напряжениями в гальванических композитных покрытиях на основе железа / Н. А. Пеньков, С.Ю. Жачкин, О.А. Сидоркин [и др.] // Труды ГОСНИТИ. Москва: ГОСНИТИ, 2017. С. 183–188.
- [2] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1975. 576 с.
- [3] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. Москва: Наука, 1947. 690 с.
- [4] Устройство получения композитных гальванических покрытий на внутренних поверхностях / Н. А. Пеньков, С.Ю. Жачкин, Цысоренко П.В [и др.] // патент. Москва: пат. № 100520, 2010. С. 1–6.
- [5] Пеньков Н. А., Жачкин С.Ю., Трифонов Г.И. Моделирование процесса осаждения композитных покрытий на основе хрома // Виртуальное моделирование прототипирование и промышленный дизайн. Воронеж: ВГТУ, 2018. С. 59–63.

N. A. Penkov, O.A. Sidorkin, A.V. Baranenko, D.V. Berezin

ON THE QUESTION OF THE ORIGIN OF THE PLASTIC REGION IN COMPOSITE COATINGS

Zhukovsky–Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation

Abstract. The article discusses the option of calculating wear-resistant coatings. The limiting values of the hardening values of the protective wear-resistant coating are determined, which an axisymmetric part is able to withstand without subsequent destruction of the upper layer of sediment. The deformation model for the coating under consideration, which has greater hardness compared to the material of the main part, is the contact problem: the interaction of an infinitely long cylinder with a half-space. The depth of origin of the plastic region has been determined, which makes it possible to control the degree of hardening protective coating in the part, preventing its over-hardening.

Keywords: theory of elasticity, theory of plasticity, stress, deformation, wear-resistant coatings, axisymmetric problem, polar coordinates, Legendre polynomials.

REFERENCES

- [1] Control of internal stresses in iron-based electroplated composite coatings / N. A. Penkov, S. Zhachkin, O. Sidorkin et al. // Proceedings of GOSNITI. Moscow: GOSNITI, 2017. P. 183–188.
- [2] Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity. Moscow: Science, 1975. 576 p.
- [3] Fikhtengolts G. M. Course of differential and integral calculus. T.1. Moscow: Science, 1947. 690 p.
- [4] Device for producing composite galvanic coatings on internal surfaces / N. A. Penkov, S. Zhachkin, T. P.V. et al. // patent. Moscow: pat. No. 100520, 2010. P. 1–6.
- [5] Penkov N. A., Zhachkin S., Trifonov G. Modeling of the deposition process of chromium-based composite coatings // Virtual modeling prototyping and industrial design. Voronezh: VSTU, 2018. P. 59–63.

Penkov Nikita Aleseevich, Doctor of technical sciences, associate professor, associate professor, Zhukovsky – Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia.

Sidorkin Oleg Anatolievich, Candidate of technical sciences, associate professor, deputy head of the department, Zhukovsky – Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia.

Baranenko Andrey Vasilievich, Applicant, Zhukovsky – Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia.

Beresin Dmitriy Victorovich, Cadet, Zhukovsky – Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

МУЛЬТИВЕСОВАЯ ТЕРМОМЕХАНИКА ГЕМИТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена вопросам детерминирования алгебраических весов микро- и наномасштабных мультивесовых характеристик термомеханики гемитропных микрополярных тел. Обсуждаются фундаментальные понятия псевдоинвариантных элементов объема и площади нечетных целых весов в трехмерном пространстве. Развиваемая теория гемитропной микрополярной термоупругости формулируется в терминах контравариантного псевдовектора спинорных перемещений положительного нечетного веса при условии постулирования абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, массы и массовых плотностей: энтропии, внутренней энергии, свободной энергии Гельмгольца, контролируемого и неконтролируемого производства энтропии. Предложены мультивесовые псевдотензорные формулировки принципа виртуальных перемещений и приведенного уравнения баланса энергии. Получены и проанализированы мультивесовые формулировки псевдовекторных дифференциальных уравнений статики и динамики гемитропного термоупругого тела. Обсуждаются вопросы взаимовлияния алгебраических весов определяющих псевдоскаляров с целью учета их трансформации в результате преобразования трехмерного пространства, меняющего ориентацию координатного базиса на противоположную.

Ключевые слова: алгебраический вес, псевдотензор, наномасштаб, микромасштаб, теплопроводность, микрополярность, тензорный элемент объема, мультивесовая формулировка, псевдовектор потока тепла, зеркальное отражение, гемитропное тело

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010

УДК: 539.374

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2023

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”)

Поступила 20.09.2023

1. Введение и предварительные сведения. Все более широкое применение метаматериалов (биокомпозитов) [1–3], обладающих микро- и наноструктурными особенностями, в промышленном производстве, медицине, строительстве требует развития методов математического моделирования термомеханических процессов их формоизменения. Термомеханические модули таких материалов за счет их нечетных алгебраических весов проявляют чувствительность к изменениям ориентации трехмерного пространства. Поэтому при построении математических моделей, учитывающих указанные микроструктурные особенности материалов, следует использовать аппарат псевдотензорного исчисления [4–11] и методы микрополярной термомеханики [12–18].

Следует отметить, что построение математических моделей, учитывающих микро- и наноструктурные характеристические длины материалов, может быть проведено различными способами [19–24]. Фундаментальной определяющей характеристикой, связанной с характерным размером микроструктуры (гранулы, соты, диполи жидких кристаллов, полимерные молекулы, клеточные структуры и т.д.) и задающей микро- и наномасштаб в таких моделях, является характерная микродлина, обозначаемая L в работах [18, 21–24] или l в статьях Нейбера [19, 20]. Как было ранее показано [25, 26] определяющие постоянные l и L связаны прямой пропорциональной зависимостью с точностью до физически безразмерного множителя.

При построении моделей микрополярной термомеханики стандартная характерная длина микро- и наноструктурных состояний: для макромеханики имеет порядок $L \sim 1\text{м}$, для микромеханики — $L \sim 10^{-6}\text{м}$, а для наномеханики — $L \sim 10^{-9}\text{м}$. Важно отметить, что характерная длина микрополярной теории L является одним из важнейших масштабных определяющих микрополярных модулей, которому может быть естественным образом приписан нечетный алгебраический вес, т.е. ее можно трактовать как определяющий псевдоскаляр, реагирующий на изменение ориентации координатного базиса (с левой на правую, и, наоборот, с правой на левую).

Определяющие и дифференциальные уравнения в частных производных, составляющие модель гемитропной микрополярной термоупругости содержат слагаемые, отличающиеся степенями характерной длины. Например, в мультивесовые формулировки указанных уравнений входят слагаемые, имеющие порядок малости L^2 , L^1 и L^0 . Отмеченное обстоятельство следует учитывать при численных расчетах, т.к. в случае $L^2 \sim 10^{-18}$ м вклад, вносимый соответствующими слагаемыми в общую сумму, может оказаться меньше чем общая вычислительная погрешность. Указанная особенность, в принципе, позволяет применить к исследованию системы дифференциальных уравнений микрополярной термоупругости теорию сингулярных возмущений [27, 28].

Алгебраический вес характерной микродлины зависит от способа определения кинематических характеристик микрополярного тела, например, от алгебраического веса псевдовектора спинорных перемещений. Кинематику микрополярного тела можно задать с помощью одной из трех знаменитых теорем Шаля [29, 30]. Однако, как показывает литературный поиск, при формулировке основных положений линейной микрополярной теории упругости [12, 15, 16] по-существу используется только одна (вторая) теорема Шаля. Отметим, перспективы использования винтовой (третьей) теоремы Шаля–Моцци, в которой кинематика микрополярного тела представляется как скользящий поворот. Однако, как показывает литературный поиск, указанная

теорема совсем не используется при математическом моделировании микрополярного континуума. В классических работах [13–16] по микрополярной упругости и термоупругости обычно оперируют с двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротов), последнее из которых наиболее просто задается псевдовектором нечетного алгебраического веса. Возможны различные способы задания псевдовектора спинорных перемещений. В частности, представлению с помощью контравариантного псевдовектора $\phi_k^{[+1]}$ положительного веса $+1$ посвящены работы [21–24], а моделям микрополярных тел, в которых использовался ковариантный псевдовектор $\phi_k^{[-1]}$ отрицательного веса -1 , посвящены работы [31,32]). Указанные псевдовекторы легко преобразуются к абсолютным векторам спинорных перемещений ϕ^k (или ϕ_k) с помощью правила баланса алгебраических весов [32–35].

Система связанных определяющих и дифференциальных уравнений в частных производных микрополярной термоупругости может быть получена как следствие принципа виртуальных перемещений в сочетании с правилом множителей Лагранжа и приведенного уравнения баланса энергии. Интегральные формулировки указанного вариационного принципа существенным образом зависят от способа измерения элементарных объемов и площадей. Такой выбор существенным образом влияет на алгебраический вес приписываемый основным характеристикам микро-, нано- термомеханических состояний микрополярного континуума таким, как массовая плотность, тепловой поток, объемные плотности внутренней энергии, свободной энергии Гельмгольца и энтропии, а также — на веса связанных с ними определяющих псевдоскаляров. При этом, экстенсивные термодинамические параметры, проявляющие свойства количественной аддитивности, задаваемые в объеме, постулируются абсолютными скалярами. С другой стороны, приписывание того или иного веса псевдовектору спинорных перемещений, также приводит к изменению сопутствующих алгебраических весов, приписываемых определяющим псевдоскалярам.

Детерминирование алгебраических весов псевдоинвариантных элементов объема и площади, а также веса псевдовектора спинорных перемещений требует особой аккуратности, т.к. это приводит к тому, что определяющие постоянные оказываются псевдоскалярами, а характеристики микро- и нано- структурных термомеханических состояний проявляют псевдотензорные свойства. Исследованию вариантов использования псевдотензорного формализма при построении моделей теорий микрополярной термоупругости посвящены работы [36–41]. Так например, если при выводе основных уравнений теории микрополярной термоупругости использовать естественные элементы объема и площади,¹ как было показано ранее в работе [40] тепловой поток, тензор силовых напряжений, плотность массы и теплоемкость также оказываются псевдотензорными величинами положительного нечетного веса. С другой стороны, при выборе дублетного элемента объема и соответствующего элемента площади тензор силовых напряжений оказывается псевдотензором отрицательного веса -1 , тензор моментных

¹Отметим, что использование естественных элементов объема характерно для вариационных функционалов физических теорий поля [42, 43]. Несмотря на то, что тензорные элементы объема и площади, даже в N -мерном пространстве, наиболее просто задаются в терминах псевдотензоров [36–39], описание обычно проводится с использованием формализма косимметричных дифференциальных форм [27, 44–46], существенно искажающих очевидные свойства указанных объектов и их псевдотензорную

напряжений — псевдотензором отрицательного веса -2 , тепловой поток — псевдовектором алгебраического веса -1 , массовая плотность — псевдоскаляром алгебраического веса -1 , что было продемонстрировано в работе [41].

2. Элементарные тензорные объемы и площади в трехмерном пространстве. Настоящая статья существенным образом опирается на результаты, терминологию и понятия современной геометрии и тензорного анализа [6, 8, 47]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут. Введем в рассмотрение функцию w.g.t, действующую на псевдотензор и равную значению веса этого псевдотензора. Например, для псевдоскаляра $\overset{[g]}{a}$ алгебраического веса g получим

$$\text{w.g.t} \left(\overset{[g]}{a} \right) = g.$$

В трехмерном Евклидовом пространстве зададим ковариантный ортогональный базис векторами: $\underset{1}{\mathbf{z}}, \underset{2}{\mathbf{z}}, \underset{3}{\mathbf{z}}$. Смешанное произведение векторов базиса [47] позволяет определить фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e и две псевдоскалярные единицы согласно следующим соотношениям [32]:

$$e = \underset{1}{\mathbf{z}} \cdot (\underset{2}{\mathbf{z}} \times \underset{3}{\mathbf{z}}), \quad \overset{[+1]}{1} = e, \quad \overset{[-1]}{1} = e^{-1}, \quad (1)$$

тем самым, дискриминируя локальные базисные системы на право- и лево- ориентированные согласно условиям:

$$\begin{aligned} \overset{[+1]}{1} &> 0 \text{ для правоориентированных,} \\ \overset{[+1]}{1} &< 0 \text{ для левоориентированных.} \end{aligned}$$

Целые степени псевдоскалярных единиц обладают свойством ковариантного постоянства, т. е.

$$\nabla_k \overset{[\pm g]}{1} = \overset{[\pm g]}{0},$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js} .

Псевдотензор $\overset{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\overset{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} = \overset{[-g]}{1} \overset{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots}. \quad (2)$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [33–35]. Действительно, имеем

$$\text{w.g.t} \left(\overset{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} \right) = \text{w.g.t} \left(\overset{[-g]}{1} \overset{[g]}{T}_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} \right) = -g + g = 0.$$

Одним из фундаментальных геометрических объектов связанных с ориентацией пространства являются символы перестановок (альтернирующие символы) в трехмерном

пространстве определяющиеся согласно правилу

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } i, j, k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{для троек } i, j, k = 132, 213, 321; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Как известно, символы перестановок являются одновременно ковариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса -1 и контравариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса $+1$, т.е. на основании их определения справедливо следующее равенство

$$\epsilon_{lsk}^{[-1]} = \epsilon^{lsk}^{[+1]},$$

нарушающие принятые в псевдотензорной алгебре соглашения о балансе индексов и равенстве алгебраических весов равных друг другу псевдотензоров. Кроме того, что для символов перестановок требуются неконвенциональные правила жонглирования индексами:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}^{[-1]} &= \epsilon^{ljk}^{[-2]} g^{il} g^{js} g^{kr} \epsilon^{lrs}^{[+1]}, \\ \epsilon^{ijk}^{[+1]} &= \epsilon^{ljk}^{[+2]} g^{il} g^{js} g^{kr} \epsilon^{lrs}^{[-1]}. \end{aligned} \quad (3)$$

Опираясь на правило (3), определим спецсимволы [32]

$$\begin{aligned} \epsilon_{i.k}^{[-1].p.} &= g^{pj} \epsilon_{ijk}^{[-1]}, & \epsilon_{i.k}^{[+1].p.} &= g^{il} g^{kr} \epsilon^{lpr}^{[+1]}, \\ \epsilon_{i.k}^{[+1].p.} &= g_{pj} \epsilon^{ijk}^{[+1]}, & \epsilon_{i.k}^{[-1].p.} &= g^{il} g^{kr} \epsilon^{lpr}^{[-1]}. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно показать, что спецсимволы, определенные согласно (4), удовлетворяют соотношению, полученному в соответствии с правилом баланса алгебраических весов,

$$\epsilon_{i.k}^{[-1].p.} = \epsilon_{i.k}^{[-2][+1].p.}, \quad (5)$$

поскольку

$$\epsilon_{i.k}^{[-1].p.} = g^{pj} \epsilon_{ijk}^{[-1]} = \epsilon_{i.k}^{[-2]} \delta_s^p g^{il} g^{kr} \epsilon^{lrs}^{[+1]} = \epsilon_{i.k}^{[-2]} g^{il} g^{kr} \epsilon^{lpr}^{[+1]} = \epsilon_{i.k}^{[-2][+1].p.}.$$

Из соотношения (5) следуют также равенства

$$\epsilon_{i.k}^{[+1][-1].p.} = \epsilon_{i.k}^{[-1][+1].p.}, \quad \epsilon_{i.k}^{[+1][-1].p.} = \epsilon_{i.k}^{[-1][+1].p.}. \quad (6)$$

Равенства (6) позволяют ввести специальные e -тензоры

$$\begin{aligned} e_{i.k}^{.p.} &= \epsilon_{i.k}^{[+1][-1].p.} = \epsilon_{i.k}^{[-1][+1].p.}, \\ e_{i.k}^{i.k} &= \epsilon_{i.k}^{[+1][-1].p.} = \epsilon_{i.k}^{[-1][+1].p.}, \end{aligned} \quad (7)$$

являющиеся абсолютными тензорами и оказывающиеся весьма полезными при оперировании с уравнениями микрополярной теории упругости.

Символы перестановок позволяют ввести тензорные элементы объема наиболее простым и понятным способом, что соответствует подходу, предложенному Пуанкаре [48, 49], без привлечения теории внешних дифференциальных форм [27, 44–46]. Заметим, что литературный поиск показывает ограниченное количество работ, обсуждающих указанное обстоятельство. Тензорный элемент объема в трехмерном пространстве можно принять в форме

$$d\tau^{mns} = d\tau^{[-1]123} \epsilon^{[+1]mns}, \quad (8)$$

где $d\tau^{[-1]123}$ — естественный элемент объема,² представляющий собой псевдоскаляр веса -1 , который определяется следующим образом

$$d\tau^{[-1]123} = dx^1 dx^2 dx^3. \quad (9)$$

Опустив в формуле (8) индексы, т. е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (3), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{mns} = 1 d\tau^{[+2][-1]123} \epsilon^{[-1]mns} = d\tau^{[+1]123} \epsilon^{[-1]mns}, \quad (10)$$

где $d\tau^{[+1]123}$ — дублетный элемент объема [8], представляющий собой псевдоскаляр веса $+1$.

С помощью псевдоскаляров $d\tau^{[-1]123}$, $d\tau^{[+1]123}$ и псевдоскалярных единиц 1 можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = 1 d\tau^{[+1][-1]123} = 1 d\tau^{[-1][+1]123}.$$

В дальнейшем изложении примем упрощенные обозначения для псевдоинвариантных элементов объема

$$d\tau = d\tau^{[-1]123}, \quad d\tau = d\tau^{[+1]123}.$$

Рассмотрим двумерную поверхность, заданную естественной (Гауссовой) параметризацией u^1, u^2 . В этом случае контравариантный тензорный элемент площади поверхности принимает вид [36, 37]

$$d\tau^{ij} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_1} x^i \partial_{\alpha_2} x^j du^1 du^2 = 2 \partial_1 x^{[i} \partial_2 x^{j]} du^1 du^2. \quad (11)$$

Ковариантный тензорный элемент площади $d\tau_{ij}$ можно получить, опустив индексы у $d\tau^{ij}$ в (11).

Антисимметричным абсолютным тензорам $d\tau^{ij}$ и $d\tau_{ij}$ сопутствуют ковариантный и контравариантный псевдовекторы

$$dA_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} d\tau^{ij}, \quad dA^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} d\tau_{ij}, \quad (12)$$

²Еще раз заметим, важное значение естественных элементов объема при формулировке вариационных функционалов физических теорий поля [42, 43].

Абсолютные векторные элементы площади поверхности можно определить, домножив псевдовекторные элементы площади на соответствующую степень псевдоскалярной единицы

$$dA_k = \overset{[+1] [-1]}{1} dA_k, \quad dA^k = \overset{[-1] [+1]}{1} dA^k. \quad (13)$$

Псевдоскалярные элементы площади поверхности задаются следующими формулами

$$dA = (\text{sign } \overset{[-1]}{1}) \sqrt{g^{sk} \overset{[-1] [-1]}{dA_s} dA_k}, \quad dA = (\text{sign } \overset{[+1]}{1}) \sqrt{g_{sk} \overset{[+1] [+1]}{dA^s} dA^k}. \quad (14)$$

Оба элемента площади в (14) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. И тот, и другой элемент площади (14) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего.

Инвариантный элемент площади поверхности определяются согласно

$$dA = \sqrt{dA^k dA_k} \quad (15)$$

и является строго положительным абсолютным скаляром.

Используя введенные выше определения для элементов площади (14) и (15), можно показать, что

$$\left(\overset{[\pm 1]}{dA} \right)^2 = \frac{1}{2} \overset{[\pm 2]}{1} d\tau^{is} d\tau_{is}, \quad (dA)^2 = \frac{1}{2} d\tau^{is} d\tau_{is}.$$

Завершая настоящий раздел, рассмотрим возможное детерминирование алгебраического веса массы тела m . Масса элементарного объема тела не отрицательная величина, которую можно вычислять согласно

$$dm = \rho d\tau = \overset{[+1] [-1]}{\rho} d\tau = \overset{[-1] [+1]}{\rho} d\tau \geq 0. \quad (16)$$

где ρ — плотность массы.

Из соотношений (16) и условия неотрицательности массы следует очевидный вывод, что массе не может быть приписан какой бы то ни было алгебраический вес, что говорит о ее абсолютной инвариантности. Последнее утверждение является фундаментальным принципом нулевого веса массы.

Масса конечного тела является количественно-аддитивной величиной, рассчитываемой согласно формуле

$$m = \int dm = \int \rho d\tau = \int \overset{[+1] [-1]}{\rho} d\tau = \int \overset{[-1] [+1]}{\rho} d\tau. \quad (17)$$

Отметим, что при записи равенств (17) мы воспользовались правилом баланса алгебраических весов. Равенства (17) позволяют определить плотность массы как мультивесовой псевдоскаляр, соответствующий градации элементов объема $(\overset{[+1]}{d\tau}, \overset{[-1]}{d\tau}, d\tau)$, соотношением

$$\overset{[-1, 0, +1]}{\rho} = \rho. \quad (18)$$

Здесь и далее будем полагать

$$\square = \text{w.g.t}(\square(\rho)) = \begin{cases} -1, & \text{для } d\tau^{[+1]}; \\ 0, & \text{для } d\tau; \\ +1, & \text{для } d\tau^{[-1]}. \end{cases} \quad (19)$$

Соотношение (19) определяет мультивесовую характеристику, принимающую значения $(-1, 0, +1)$ в зависимости от используемого элемента объема. Аналогичное равенство можно задать для элементарных площадей:

$$\boxtimes = \text{w.g.t}(\boxtimes(d\tau)) = \begin{cases} +1, & \text{для } d\tau^{[+1]}; \\ 0, & \text{для } d\tau; \\ -1, & \text{для } d\tau^{[-1]}; \end{cases} \quad \boxtimes = \text{w.g.t}(\boxtimes(dA)) = \begin{cases} +1, & \text{для } dA^{[+1]}; \\ 0, & \text{для } dA; \\ -1, & \text{для } dA^{[-1]}. \end{cases} \quad (20)$$

Соотношения (19) и (20) позволяют заключить

$$\square = -\boxtimes.$$

3. Эйлерова кинематика микрополярного тела. Введем пространственные (Эйлеровы) координаты x^s ($s = 1, 2, 3$) и отсчетные (Лагранжевы) координаты X^α ($\alpha = 1, 2, 3$), тогда метрики g_{kl} и ${}^{\backslash}g_{\alpha\sigma}$ определяются, соответственно:

$$g_{sm} = \mathbf{z}_s \cdot \mathbf{z}_m, \quad {}^{\backslash}g_{\alpha\sigma} = {}^{\backslash}\mathbf{z}_\alpha \cdot {}^{\backslash}\mathbf{z}_\sigma,$$

где \mathbf{z}_s ($s = 1, 2, 3$) — векторы ковариантного пространственного базиса, ${}^{\backslash}\mathbf{z}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) — векторы ковариантного отсчетного базиса.

Помимо метрических тензоров, введем в рассмотрение двухточечные g -символы, определяемые скалярное произведение пространственных \mathbf{z} (или \mathbf{z}_s) и отсчетных ${}^{\backslash}\mathbf{z}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) (или ${}^{\backslash}\mathbf{z}^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$)) базисных векторов

$$g_s^\alpha = \mathbf{z}_s \cdot {}^{\backslash}\mathbf{z}^\alpha, \quad g_\alpha^s = {}^{\backslash}\mathbf{z}_\alpha \cdot \mathbf{z}_s.$$

С этого момента будем считать, что рассматриваемые системы координат связаны между собой с помощью преобразования деформации

$$X^\alpha \rightleftharpoons x^i$$

Прямое описание деформации континуума соответствует преобразованию

$$X^\alpha \rightarrow x^i$$

а обратное описание³ задается преобразованием

$$X^\alpha \leftarrow x^i$$

Равноправие способов описания деформации мы будем отражать с помощью обозначения

$$X^\alpha \rightleftharpoons x^i$$

³В современной механике континуума наряду с прямым описанием $X^\alpha \rightarrow x^i$, используется обратное описание $x^i \rightarrow X^\alpha$ (inversed motion description) [17]. Отметим, что обратное описание деформации было введено в механику Пиола (G. Piola).

Транспонированный градиент деформации (или тензор дисторсии) определяется частичным дифференцированием Эйлеровых координат по Лагранжевы:

$$x_\alpha^s = \partial_\alpha x^s, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial X^\alpha}.$$

Дисторсии x_α^s представляют собой двухточечный абсолютный тензор.

Примем полярное разложение дисторсии в виде [32]

$$x_\alpha^s = |x|_{\alpha\sigma} \lambda^{s\sigma},$$

где $|x|_{\alpha\sigma}$ — модуль дисторсии (одноточечный абсолютный симметричный положительно определенный тензор второго ранга), $\lambda^{s\sigma}$ — двухточечный тензор конечного поворота.

Тензор поворота представляет собой двухточечный тензор второго ранга, для которого справедливы следующие соотношения двухточечной ортогональности:

$$\lambda_{s\sigma} \lambda^{m\sigma} = \delta_s^m, \quad \lambda_{s\alpha} \lambda^{s\sigma} = \delta_\alpha^\sigma.$$

Одноточечный Эйлеров тензор поворота можно представить с помощью g -символов следующим образом:

$$\lambda^{sm} = g_\alpha^m \lambda^{s\alpha}. \quad (21)$$

Одноточечный Эйлеров тензор поворота (21) удовлетворяют обычным условиям ортогональности.

Одноточечный Эйлеров тензор поворота характеризуется пространственной осью вращения (направленной вдоль единичного вектора c_s , $c_s c^s = 1$) углом поворота ϕ и может быть представлен формулой Эйлера

$$\lambda^{kl} = \cos \phi g^{kl} + (1 - \cos \phi) c^k c^l - \sin \phi e^{klh} c_h, \quad (22)$$

Отметим, что в уравнении (22) первый и второй члены дают симметричную часть одноточечного Эйлера тензора поворота $\lambda^{(kl)}$, тогда как третий член является косимметричным

$$\lambda^{(kl)} = \cos \phi g^{kl} + (1 - \cos \phi) c^k c^l, \quad \lambda^{[kl]} = -\sin \phi e^{klh} c_h.$$

Угол поворота ϕ и единичный пространственный директор c_s (собственный вектор λ^{kl}) можно получить из следующих уравнений

$$2 \cos \phi = g_{kl} \lambda^{(kl)}, \quad c_h = -\frac{1}{\sin \phi} e_{hkl} \lambda^{[kl]}.$$

В микрополярных теориях механики сплошной среды гораздо удобнее оперировать модулированным вектором поворота

$$\phi_h = \sin \phi c_h. \quad (23)$$

Малый модулированный вектор поворота получается из (23), когда ϕ стремится к нулю:

$$\phi_h = \phi c_h.$$

Полные абсолютные векторы микроповорота в микрополярных теориях определяются через векторы модулированного поворота

$$\phi^h = -\frac{1}{2} e^{hkl} \lambda_{[kl]}, \quad \phi_h = -\frac{1}{2} e_{hkl} \lambda^{[kl]}. \quad (24)$$

Псевдовекторы полного микроповорота положительного $+1$ и отрицательного -1 весов определяются с помощью символов перестановок (ϵ^{hkl} и ϵ_{hkl} соответственно):

$$\begin{aligned} \phi^h &= -\frac{1}{2}\epsilon^{hkl}\lambda_{[kl]}, & \phi_h &= -\frac{1}{2}\epsilon_{hkl}\lambda^{[kl]}. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что в микрополярной термоупругости полный микроповорот может быть задан формулой (24) (либо как ковариантный абсолютный вектор ϕ_s , либо как контравариантный абсолютный вектор ϕ^s) или формулами (25) (как ковариантный псевдовектор ϕ_s веса -1 или контравариантный псевдовектор ϕ^s веса $+1$). Выбор того или иного определения для вектора (псевдовектора) микроповорота влияет на веса кинематических характеристик микро- и наноструктурных состояний термоупругих микрополярных тел. В дальнейшем изложении будем развивать теорию гемитропного микрополярного тела в терминах контравариантного псевдовектора ϕ^s веса $+1$.

Контравариантный псевдовектор вихря поля трансляционных перемещений ω^h положительного веса можно задать согласно:

$$\omega^h = \frac{1}{2}\epsilon^{[+1]h.l}\nabla_k u^l,$$

в то время как ковариантный псевдовектор вихря ω_h отрицательного веса следует определить равенством:

$$\omega_h = -\frac{1}{2}\epsilon^{[-1]_h.l}\nabla_k u^l.$$

Контравариантный и ковариантный псевдовекторы относительного микроповорота определяются следующими формулами:

$$\varphi^h = \phi^h - \omega^h, \quad \varphi_h = \phi_h - \omega_h.$$

В дальнейшем будем проводить рассуждения в рамках малого относительного псевдовектора микроповорота (т.е. φ_h далее считается малой величиной первого порядка малости), т.е. в терминах полного псевдовектора микроповорота ϕ_h .

Асимметричный тензор деформации можно определить через полный ковариантный псевдовектор микроповорота ϕ_s веса -1 согласно

$$\epsilon_i^j = \nabla_i u^j + \epsilon^{[+1].k} \phi_k, \quad (26)$$

или в терминах контравариантного псевдовектора микроповорота ϕ^s веса $+1$

$$\epsilon_i^j = \nabla_i u^j - \epsilon^{[-1].j} \phi^k. \quad (27)$$

Помимо асимметричного тензора деформации, необходим еще псевдотензор изгиба—кручения, являющийся градиентом псевдовектора полного микроповорота

$$\kappa_{i.s} = \nabla_i \phi^s. \quad (28)$$

Иногда при построении моделей микрополярных термоупругих тел удобно использовать симметричные части асимметричного тензора деформаций и псевдотензора изгиба–кручения

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k} u_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k), \quad \kappa_{(kl)}^{[+1]} = \nabla_{(k} \phi_{l)}^{[+1]} = \frac{1}{2}(\nabla_k \phi_l^{[+1]} + \nabla_l \phi_k^{[+1]}), \quad (29)$$

а также сопутствующие псевдовекторы:

$$\varphi^{[+1]}_i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\epsilon_{[kl]}, \quad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\kappa^{[+1]}_{[kl]}. \quad (30)$$

4. Силовые и моментные напряжения в микрополярном теле. Произвольная система сил (абсолютных векторов) действующих на произвольную элементарную двумерную площадку в деформированном состоянии с инвариантным элементом площади dA и единичным абсолютным вектором нормали n_k сводится к равнодействующей поверхностных сил dT^k (абсолютный вектор) и паре сил, характеризующейся вектором момента dM^k (см. рис. 1).

Рассмотрим вначале вектор равнодействующей, который может быть определен через абсолютный вектор поверхностных сил t^k , отнесенный к абсолютному инвариантному элементу площади dA :

$$t^k = \frac{dT^k}{dA}. \quad (31)$$

Следуя стандартной схеме, для ориентированной элементарной площадки определим асимметричный тензор силовых напряжений Коши t^{ik} следующим равенством

$$t^k = n_i t^{ik}. \quad (32)$$

Отсюда заключаем, что тензор силовых напряжений t^{ik} имеет нулевой вес и является абсолютным тензором.

Следуя процедуре подробной изложенной, например, в публикациях [4, 38, 39], определим абсолютный вектор равнодействующей действующей на псевдоинвариантные элементы площади $dA^{[-1]}$ (естественный элемент) или $dA^{[+1]}$ (дублетный элемент), соответственно:

$$dT^k = t^{[+1]}_k dA^{[-1]} = t^{[-1]}_k dA^{[+1]}. \quad (33)$$

Следовательно, определения псевдотензоров силовых напряжений для естественного и дублетного элементов площади принимают вид

$$t^{[+1]}_k = n_i t^{[+1]}_{ik}, \quad t^{[-1]}_k = n_i t^{[-1]}_{ik}. \quad (34)$$

Формулы (33) и (34) позволяют ввести мультивесовые их аналоги

$$t^{\square}_k = n_i t^{\square}_{ik}. \quad (35)$$

Момент dM_k пары сил P^k и Q^k ($P^k = -Q^k$), действующий на элементарную площадку dS (см. рис. 1), определяется как векторное произведение

$$dM = \mathbf{d} \times \mathbf{P} = -\mathbf{d} \times \mathbf{Q}, \quad (36)$$

Вектор момента пары сил dM перпендикулярен плоскости dA действия пары сил и направлен так, что вращение, указываемое парой сил P^k и Q^k , видится как совершаемое против часовой стрелки.

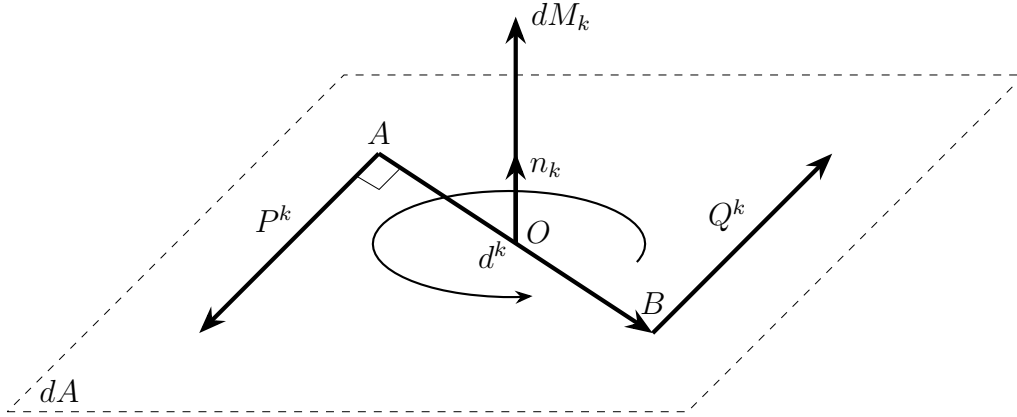


Рис. 1. Вектор моментов пары сил.

В координатной форме выражение (36) можно записать в виде

$${}^{[-1]}dM_i = \epsilon_{ijk} d^j P^k = -\epsilon_{ijk} d^j Q^k, \quad (37)$$

т.е.

$$\text{w.g.t}({}^{[-1]}dM_i) = \text{w.g.t}(\epsilon_{ijk} d^j P^k) = \text{w.g.t}(-\epsilon_{ijk} d^j Q^k) = -1, \quad (38)$$

Правило баланса весов (38) позволяет сделать вывод, что момент пары сил является псевдовектором нечетного алгебраического веса -1 . В дальнейшем для удобства припишем плечу пары сил $d = \sqrt{g_{ij} d^i d^j} > 0$ в соответствии с соотношением (37) псевдотензорный алгебраический вес положив

$${}^{[-1]}d = {}^{[-1]}1 d. \quad (39)$$

Преобразование (39) определяет плечо момента пары сил ${}^{[-1]}d$ как псевдоскаляр нечетного отрицательного веса, и, следовательно, наделяет его чувствительностью к изменению ориентации координатного базиса трехмерного пространства.

Модуль момента пары сил $dM = |d\mathbf{M}|$ при учете (37) и (39) можно вычислить следующим образом

$${}^{[-1]}dM = {}^{[-1]}d \sqrt{g_{ik} P^i P^k}, \quad (40)$$

Сравнивая формулы (37) и (40) получим выражение для расчета плеча пары сил

$${}^{[-1]}d = \frac{{}^{[-1]}dM}{\sqrt{g_{ik} P^i P^k}} = \frac{|\mathbf{d} \times \mathbf{P}|}{\sqrt{g_{ik} P^i P^k}} = (\text{sign } 1) \sqrt{\frac{g^{ik} \epsilon_{ijl} d^j P^l \epsilon_{ksh} d^s P^h}{g_{ik} P^i P^k}}. \quad (41)$$

Псевдовектор поверхностных моментов ${}^{[-1]}m_k$, отнесенный к элементу инвариантной площади dA определим согласно:

$${}^{[-1]}m_k = \frac{{}^{[-1]}dM_k}{dA}, \quad (42)$$

тогда псевдотензор моментных напряжений ${}^{[-1]}_{\mu}{}^{i \cdot k}$ можно задать следующим равенством

$${}^{[-1]}m_k = n_i {}^{[-1]}_{\mu}{}^{i \cdot k}. \quad (43)$$

Отсюда заключаем, что псевдотензор моментных напряжений ${}^{[-1]}_{\mu}{}^{i \cdot k}$ имеет отрицательный алгебраический вес.

Следуя процедуре, использованной для вектора поверхностных сил (33), определим псевдовектор момента пары сил, действующей на псевдоинвариантные элементы площади ${}^{[-1]}dA$ (естественный элемент) или ${}^{[+1]}dA$ (дублетный элемент), соответственно:

$${}^{[-1]}dM_k = m_k {}^{[-1]}dA = {}^{[-2]}m_k {}^{[+1]}dA. \quad (44)$$

Следовательно, для естественного ${}^{[-1]}dA$ и дублетного ${}^{[+1]}dA$ элементов площади получим для тензора и псевдотензора моментных напряжений равенства, соответственно:

$$m_k = n_i \mu^{i \cdot k}, \quad {}^{[-2]}m_k = n_i {}^{[-2]}_{\mu}{}^{i \cdot k}. \quad (45)$$

Используя соотношения (44) и (45) введем следующие мультивесовые соотношения

$$\boxminus m_k = n_i \boxminus \mu^{i \cdot k}. \quad (46)$$

где для алгебраического мультивеса введено обозначение

$$\boxminus = \text{w.g.t}(\boxminus m_k) = \text{w.g.t}(n_i \boxminus \mu^{i \cdot k}) = \square - 1 = \begin{cases} -2, & \text{для } {}^{[+1]}dA; \\ -1, & \text{для } dA; \\ 0, & \text{для } {}^{[-1]}dA. \end{cases} \quad (47)$$

Учитывая обозначения (19) и (47), вычислим алгебраические мультивеса ассоциированных (сопутствующих) псевдовекторов силовых и моментных напряжений в соответствии с правилом баланса весов согласно равенствам

$$\begin{aligned} \text{w.g.t}(\boxminus \tau_i) &= \text{w.g.t}(\epsilon_{ijk} \boxminus t^{[jkl]}) = \begin{cases} 0, & \text{для } {}^{[-1]}d\tau, {}^{[-1]}dA; \\ -2, & \text{для } {}^{[+1]}d\tau, {}^{[+1]}dA; \\ -1, & \text{для } d\tau, dA; \end{cases} \\ \text{w.g.t}(\boxminus \mu^i) &= \text{w.g.t}(\epsilon^{iks} \boxminus \mu_{[ks]}) = \begin{cases} +1, & \text{для } {}^{[-1]}d\tau, {}^{[-1]}dA; \\ -1, & \text{для } {}^{[+1]}d\tau, {}^{[+1]}dA; \\ 0, & \text{для } d\tau, dA; \end{cases} \end{aligned}$$

откуда немедленно можно получить мультивесовые соотношения в алгебраических весах

$$2\boxminus \tau_i = -\epsilon_{ijk} \boxminus t^{[jkl]}, \quad 2\boxminus \mu^i = \epsilon^{iks} \boxminus \mu_{[ks]}. \quad (48)$$

5. Принцип виртуальных перемещений в терминах псевдоинвариантных элементов объема и площади. В настоящем разделе статьи подробно рассмотрим принцип виртуальных перемещений в совокупности с правилом множителей Лагранжа с целью получить уравнения динамики гемитропного микрополярного тела. Геометрические вариации полей трансляционных и спинорных перемещений [42, 50, 51], не противоречащие наложенным связям, будем называть виртуальными трансляционными и спинорными перемещениями и обозначать соответственно через δu^k и $\delta \phi^{[+1]k}$.

Вариации трансляционных и спинорных перемещений при жестком движении должны удовлетворять следующим условиям:

$$\nabla_{(i} \delta u_{k)} = 0, \quad (49)$$

$$\delta \varphi^{[+1]k} = \delta \phi^{[+1]k} - \frac{1}{2} \epsilon^{kil} \nabla_k \delta u_l = 0, \quad (50)$$

$$\delta \kappa^{[+1].s}_{.i} = \nabla_i \delta \phi^{[+1].s} = 0. \quad (51)$$

Первое из них (49) выражает то известное обстоятельство, что жесткое движение не сопровождается деформацией (т.е. удлинениями и сдвигами), второе (50) — микроповорот не отличим от макроповорота, третье (51) — спинорные перемещения (микроповороты) при жестком движении тела не приводят к деформациям изгиба—кручения.

Силовыми факторами в микрополярных теориях выступают массовые силы f^k и массовые моменты $l_k^{[-1]}$ (их объемные аналоги обозначим соответственно через $X^k = \rho f^k$ и $Y_k = \rho l_k^{[-1]}$), а также поверхностные силы t^j и моменты $m_j^{[-1]}$. Алгебраические веса массовых, объемных и поверхностных моментов детерминированы в соответствии с разделом 4 настоящей статьи. Отметим, что алгебраический вес объемных сил и моментов зависит от способа измерения элементарной площади, т.е.

$$\begin{aligned} \text{w.g.t}(\overset{\square}{X}^k) = \text{w.g.t}(\overset{\square}{\rho} f^k) = \square &= \begin{cases} -1, & \text{для } dA^{[+1]}; \\ 0, & \text{для } dA; \\ +1, & \text{для } dA^{[-1]}; \end{cases} \\ \text{w.g.t}(\overset{\boxminus}{Y}_k) = \text{w.g.t}(\overset{\square}{\rho} l_k^{[-1]}) = \square - 1 = \boxminus &= \begin{cases} -2, & \text{для } dA^{[+1]}; \\ -1, & \text{для } dA; \\ 0, & \text{для } dA^{[-1]}. \end{cases} \end{aligned} \quad (52)$$

Соотношения (52) позволяют сформулировать следующие мультивесовые равенства

$$\overset{\square}{X}^k = \overset{\square}{\rho} f^k, \quad \overset{\boxminus}{Y}_k = \overset{\square}{\rho} l_k^{[-1]} \quad (53)$$

Виртуальная работа (абсолютная скалярная величина), совершаемая всеми перечисленными выше силовыми факторами на виртуальных трансляционных δu_k и спиральных $\delta \phi^{[+1]i}$ перемещениях, вычисляется в терминах инвариантных элементов объема и площади согласно следующей формуле:

$$\delta A = \int \left[X^j \delta u_j + Y_j \delta \phi^{[+1]j} \right] d\tau + \oint_{\partial} \left[t^j \delta u_j + m_j \delta \phi^{[+1]j} \right] dA. \quad (54)$$

Учитывая результаты предыдущих разделов статьи, сформулируем принцип виртуальных перемещений в терминах мультивесовых псевдотензоров. В итоге получим:

$$\delta A = \int \left[X^j \delta u_j + Y_j \delta \phi^{[+1]j} \right] \boxtimes d\tau + \oint_{\partial} \left[t^j \delta u_j + m_j \delta \phi^{[+1]j} \right] \boxtimes dA; \quad (55)$$

Согласно принципу виртуальных перемещений виртуальное “жесткое” перемещение и “жесткий” поворот из состояния равновесия всегда производятся без “затраты” работы, т.е. виртуальная работа обращается в нуль:

$$\delta A = 0, \quad (56)$$

при наложенных на виртуальные перемещения и повороты дифференциальных ограничениях (49)–(51).

Освободившись от связей (49)–(51) с помощью правила множителей Лагранжа [50, 51] мультивесовое вариационное уравнение (55) со свободными вариациями δu_k и $\delta \phi^i$ преобразуем к виду:

$$\int \left[X^j \delta u_j + Y_j \delta \phi^{[+1]j} - t^{(ik)} \nabla_{(i} \delta u_{k)} - 2\tau_i \left(\delta \phi^{[+1]i} - \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \nabla_k \delta u_l \right) - \mu_{i \cdot k} \nabla_i \delta \phi^{[+1]k} \right] \boxtimes d\tau + \oint_{\partial} \left[t^j \delta u_j + m_j \delta \phi^{[+1]j} \right] \boxtimes dA = 0. \quad (57)$$

Выделяя в этом уравнении дивергентные слагаемые, применяя затем формулу Гаусса и учитывая (48), приходим к следующему уравнению в вариациях (n_i — компоненты единичного вектора внешней нормали поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем):

$$\int \left[X^k + \nabla_i t^{ik} \right] \delta u_k \boxtimes d\tau + \int \left[Y_k - 2\tau_k + \nabla_i \mu_{i \cdot k} \right] \delta \phi^{[+1]k} \boxtimes d\tau + \oint_{\partial} \left[t^k - n_i t^{ik} \right] \delta u_k \boxtimes dA + \oint_{\partial} \left[m_k - n_i \mu_{i \cdot k} \right] \delta \phi^{[+1]k} \boxtimes dA = 0. \quad (58)$$

В силу произвольности вариаций δu_k и $\delta \phi^{[+1]k}$ из мультивесового вариационного принципа (58) получаются мультивесовые дифференциальные уравнения равновесия, общие для всех микрополярных теорий:

$$\begin{aligned} \nabla_i t^{ik} &= -X^k, \\ \nabla_i \mu_{i \cdot k} - 2\tau_k &= -Y_k. \end{aligned} \quad (59)$$

Кроме этого, из (58) следуют мультивесовые соотношений на поверхности тела:

$$\begin{aligned} n_i t^{ik} &= t^k; \\ n_i \mu^{i \cdot k} &= m_k; \end{aligned} \quad (60)$$

Уравнения равновесия (59) можно обобщить на динамический случай добавлением сил $-\rho \partial_{\cdot} u^k$ и моментов $-\rho \overset{[-2]}{\mathcal{J}} \overset{[+1]}{\partial_{\cdot}} \phi_k$ инерции ($\overset{[-2]}{\mathcal{J}}$ — момент микроинерции (spin torque constant)):

$$\begin{aligned} \nabla_i t^{ik} &= -\rho (f^k - \partial_{\cdot} u^k), \\ \nabla_i \mu^{i \cdot k} - 2\tau_k &= -\rho (l_k - \overset{[-2]}{\mathcal{J}} \overset{[+1]}{\partial_{\cdot}} \phi_k). \end{aligned} \quad (61)$$

где f^i — вектор массовых сил, l_i — псевдовектор массовых моментов.

Отдельно следует отметить определение веса коэффициента микроинерции $\overset{[-2]}{\mathcal{J}}$ по определению равного

$$\overset{[-2]}{\mathcal{J}} = \int \rho \overset{[-1]}{d} \overset{[-1]}{d} \overset{\boxtimes}{d\tau}. \quad (62)$$

Как нетрудно заметить из (62), алгебраический вес коэффициента микроинерции $\overset{[-2]}{\mathcal{J}}$ определяется алгебраическим весом расстояния $\overset{[-1]}{d}$ от точки тела до оси, рассчитываемого геометрическим способом, изложенным в разделе 3 настоящей статьи.

6. Детерминирование мультивесов термомеханических характеристик микрополярных тел. Как отмечалось ранее, выбор способа измерения элементарных объемов и площадей, т.е. процедура детерминирования алгебраического веса псевдоинвариантных элементов объема и площади, существенным образом влияет на алгебраический вес основных характеристик микро- и нано- структурных термомеханических состояний микрополярного тела, в особенности, проявляющих свойства термодинамической аддитивности. Основываясь на результатах предыдущих разделов настоящей статьи, следует отметить, что существует три основных варианта развития моделей микрополярной термоупругости, различающихся элементами объема $\overset{\boxtimes}{d\tau}$ и площади $\overset{\boxtimes}{dA}$. Их можно определить следующей диаграммой мультивесов элементарных объемов, элементарных площадей, и характеристик микро- и нано- структурных термомеханических состояний, реагирующих на эти веса:

$$\overset{\boxtimes}{d\tau} \quad \overset{\boxtimes}{dA} \quad \overset{\square}{h^k} \quad \overset{\square}{\lambda} \quad \overset{\square}{c} \quad \overset{\square}{G} \quad \overset{\square}{t^{ik}}$$

Представленная диаграмма построена с использованием правила баланса алгебраических весов и отражает возможную чувствительность определяющих псевдоскаляров (таких как, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, модуль сдвига), к преобразованиям, меняющим ориентацию координатного базиса. Последнее обстоятельство играет исключительно важную роль в микрополярных теориях термоупругости, развиваемых в терминах псевдоинвариантных элементов объема и площади.

Рассмотрим процесс теплопередачи в телах, микро-, наноструктурные характеристики термомеханических состояний которых реагируют на изменение ориентации

трехмерного пространства. Количество тепла Q , поступающее через фиксированную замкнутую поверхность ∂ в единицу времени является абсолютным скаляром и в терминах инвариантного элемента площади определяется интегральным соотношением

$$Q = \oint_{\partial} h^k n_k dA = \oint_{\partial} h^k dA_k, \quad (63)$$

где h^k — псевдовектор потока тепла, n_k — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂ .⁴

Баланс весов в (63) базируется на фундаментальном утверждении

$$\text{w.g.t}(Q) = 0,$$

означающем невозможность приписать какой-бы то ни было целый алгебраический вес количеству тепла Q . Отсюда немедленно следует, что

$$\text{w.g.t}\left(\int_{\partial} h^k dA_k\right) = 0.$$

Откуда видно, что в вектор потока тепла в условиях использования псевдовекторных элементов площади оказывается псевдовектором нечетного алгебраического веса.

С процессом теплопроводности связана важная термодинамическая переменная состояния — абсолютная термодинамическая температура. Рассмотрим возможность приписать ей целый алгебраический вес, т.е. рассматривать ее как псевдоинвариант⁵. В качестве термодинамического потенциала сначала выберем внутреннюю энергию u как функцию термодинамических переменных состояния:

$$u = \bar{u}(\epsilon_{i,j}^{[+1]}, \kappa_{i,j}^{[+1]}, s).$$

Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния.

Абсолютная термодинамическая температура θ в термомеханике сплошных сред определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциала состояния (внутренней энергии \bar{u}) по энтропии s согласно формуле:

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}(\epsilon_{i,j}^{[+1]}, \kappa_{i,j}^{[+1]}, s)}{\partial s}. \quad (64)$$

Для удобства введем в рассмотрение мультивесовые плотности в расчете на единицу элементарного объема $d\tau$:

$$\overset{\square}{S} = \overset{\square}{\rho} s, \quad \overset{\square}{U} = \overset{\square}{\rho} u. \quad (65)$$

В этом случае, производную в (64) можно преобразовать в соответствии с введенными выше обозначениями (65) к виду

$$\theta = \frac{\partial \overset{\square}{U}(\epsilon_{i,j}^{[+1]}, \kappa_{i,j}^{[+1]}, \overset{\square}{S})}{\partial \overset{\square}{S}}. \quad (66)$$

⁴Абсолютность вектора внешней нормали к поверхности, а также способы приписывания ему алгебраического веса в условиях когда поверхность задается псевдоскалярной функцией [38, 52].

⁵В классической термомеханике континуума абсолютная термодинамическая температура θ — всегда абсолютный инвариант, не зависящий ни от поворотов, ни от зеркальных отражений пространства.

Кроме того, следует принимать во внимание фундаментальное термодинамическое неравенство

$$\inf \theta > 0, \quad (67)$$

постулирующее как положительность абсолютной температуры⁶, так и невозможность достичь абсолютного нуля ни при каком допустимом термодинамическом процессе.

Из определения (64) и правила баланса весов нетрудно заметить, что независимо от выбора веса элементарного объема, веса плотности внутренней энергии и веса плотности энтропии следует⁷

$$\text{w.g.t}(\theta) = \text{w.g.t} \left(\begin{array}{c} \square \\ U \\ \square \\ S \end{array} \right) = \text{w.g.t} \left(\begin{array}{c} \square \\ 1U \\ \square \\ 1S \end{array} \right) = 0.$$

Последовательность равенств (6) немедленно приводит заинтересованного читателя к фундаментальному утверждению, что абсолютная температура является абсолютным инвариантом, сохраняющим неизменным свое значение при поворотах и отражениях пространства. Последнее обстоятельство подтверждает принципиальную нереализуемость приписывания какого-бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре. Последнее обстоятельство обусловлено различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).

В термомеханике широко используется еще один термодинамический потенциал — свободная энергия Гельмгольца. Минувя статистический смысл свободной энергии, приписывая ей отрицательный знак, введем с помощью преобразования Лежандра внутренней энергии

$$-\bar{\psi}(\epsilon_i^j, \kappa_i^j, \theta) = \theta s - \bar{u}(\epsilon_i^j, \kappa_i^j, s), \quad \theta = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s}. \quad (68)$$

Преобразование Лежандра и его основные свойства подробно изложены, например, в монографии [53, с. 155–157].

На основании инволютивности преобразования Лежандра, получим

$$\bar{u}(\epsilon_i^j, \kappa_i^j, s) = \theta s - (-\bar{\psi}(\epsilon_i^j, \kappa_i^j, \theta)), \quad s = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta}, \quad (69)$$

откуда следует

$$s = \bar{s}(\epsilon_i^j, \kappa_i^j, \theta), \quad \bar{s} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta}. \quad (70)$$

7. Уравнение теплопроводности и определяющие уравнения для гемитропных микрополярных тел Учитывая правило баланса весов, замену (65) и, дополнительно принимая следующие обозначения для контролируемого производства

⁶Положительность абсолютной температуры может быть доказана, исходя из канонического распределения Гиббса для ансамбля элементарных термодинамических систем. Отметим, что неравенство (67) запрещает любые изменения термодинамической температуры при зеркальных отражениях трехмерного пространства, что собственно следует из $\text{w.g.t}(\theta) = 0$, и, кроме всего прочего, говорит о невозможности приписать температуре как бы то ни было нечетный алгебраический вес.

⁷В данном контексте подразумевается, что плотности берутся в расчете на единицу объема.

энтропии и неконтролируемого производства энтропии, в единицу времени в расчете на единицу элементарного объема $d\tau$), соответственно:

$$\overset{\square}{\Sigma} = \overset{\square}{\rho\sigma}, \quad \overset{\square}{\Xi} = \overset{\square}{\rho\xi}, \quad (71)$$

мультивесовое псевдоскалярное уравнение баланса энтропии в рамках предлагаемой к рассмотрению схемы исследования принимает вид

$$\partial.S = -\nabla_j \overset{\square}{J}^j + \overset{\square}{\Sigma} + \overset{\square}{\Xi}, \quad (72)$$

где $\overset{\square}{J}^j$ — псевдовектор потока энтропии.

Принимая далее связь объемной и массовой плотностей свободной энергии Гельмгольца ψ в виде:

$$\overset{\square}{\Psi}(\epsilon_{(kl)}, \overset{[+1]}{\kappa}_{(kl)}, \overset{[+1]}{\varphi}_i, \kappa_i, s) = \overset{\square}{\rho}\psi(\epsilon_{(kl)}, \overset{[+1]}{\kappa}_{(kl)}, \overset{[+1]}{\varphi}_i, \kappa_i, s), \quad (73)$$

получим приведенное уравнение баланса энергии в обозначениях (65), (71) и (73):

$$\begin{aligned} -(\partial.\overset{\square}{\Psi} + S\partial.\theta) + \overset{\square}{t}^{(ij)}\partial.\epsilon_{(ij)} + \overset{\Xi}{\mu}^{(ik)}\partial.\overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)} \\ + \overset{\Xi}{\tau}_i\partial.\overset{[+1]}{\varphi}_i + \overset{\square}{\mu}^i\partial.\kappa_i - \theta^{-1}\overset{\square}{h}^i\nabla_i\theta = \overset{\square}{\Xi}\theta. \end{aligned} \quad (74)$$

Здесь $\partial.$ — производная по времени при фиксированных координатах x^k . В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \partial.a$. Отметим, что массовые плотности s , ψ , ξ и σ являются абсолютными скалярами, т.е. не меняются при любых преобразованиях пространства. В дальнейшем изложении будем полагать отсутствие лучистого тепла, т.е. $\sigma = 0$.

Следствием второго закона термодинамики для гемитропных микрополярных тел, термомеханические характеристики микро- и наноструктурных состояний которых чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства, являются определяющие псевдотензорные уравнения:

$$\begin{aligned} \overset{\square}{t}^{(ij)} &= \frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\epsilon_{(ij)}}, & \overset{\Xi}{\mu}^{(ik)} &= \frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)}}, \\ \overset{\Xi}{\tau}_i &= \frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\overset{[+1]}{\varphi}_i}, & \overset{\square}{\mu}^i &= \frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\kappa_i}, \\ \overset{\square}{S} &= -\frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\theta}, & \overset{\square}{J}^j &= \overset{\square}{J}^j(\nabla_k \ln \theta). \end{aligned} \quad (75)$$

В определяющих уравнениях (75) алгебраические веса, проставленные через запятую, соответствуют элементам объема: естественному $d\tau$, дублетному $d\tau$ и инвариантному $d\tau$.

Для неконтролируемого производства энтропии справедливо следующая цепочка равенств

$$\overset{\square}{\Xi} = -\theta^{-2}\overset{\square}{h}^j\nabla_j\theta = -\theta^{-1}\overset{\square}{J}^j\nabla_j\theta = -\overset{\square}{J}^j(\nabla_k \ln \theta)\nabla_j \ln \theta. \quad (76)$$

Нелинейное уравнение теплопроводности получим подстановкой определяющих уравнений (75) в уравнение баланса энтропии (72), учитывая

$$\theta \overset{\square}{J}^j = \overset{\square}{h}^j.$$

В силу абсолютной инвариантности температуры веса потока тепла и энтропии совпадают.

В итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \epsilon_{(ij)}} \partial \epsilon_{(ij)} + \frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)}} \partial \overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)} + \frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \overset{[+1]}{\varphi}_i} \partial \overset{[+1]}{\varphi}_i + \\ + \frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \kappa_i} \partial \kappa_i + \frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \theta} \partial \theta = -\theta^{-1} \nabla_j \overset{\square}{h}^j. \end{aligned} \quad (77)$$

Примем линеаризованную по функциональным аргументам свободную энергию Гельмгольца для анизотропного микрополярного термоупругого континуума в виде

$$\begin{aligned} \overset{\square}{\Psi} = \overset{\square}{E}_I^{(ik)(lm)} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)} + \overset{\boxplus}{E}_{II}^{(ik)(lm)[+1]} \overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)} \overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + \\ + \overset{\boxplus}{E}_{III}^{(ik)(lm)} \epsilon_{(ik)} \overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + \overset{\boxplus}{E}_{IV}^{(ik)\cdot} \epsilon_{(ik)} \overset{[+1]}{\varphi}_l + \overset{\boxplus}{E}_{V}^{(ik)\cdot[+1]} \overset{[+1]}{\varphi}_l + \\ + \overset{\square}{E}_{VI}^{(ik)l} \epsilon_{(ik)} \kappa_l + \overset{\boxplus}{E}_{VII}^{(ik)l[+1]} \overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)} \kappa_l + \overset{\boxplus}{E}_{VIII}^{(ik)l[+1]} \overset{[+1]}{\varphi}_i \overset{[+1]}{\varphi}_l + \overset{\square}{E}_{IX}^{(il)} \kappa_i \kappa_l + \\ + \overset{\boxplus}{E}_{X}^{i[+1]} \overset{[+1]}{\varphi}_i \kappa_l + \overset{\square}{E}_{XI}^{(ik)} \epsilon_{(ik)} \theta + \overset{\boxplus}{E}_{XII}^{(ik)[+1]} \overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)} \theta + \\ + \overset{\boxplus}{E}_{XIII}^{i[+1]} \overset{[+1]}{\varphi}_i \theta + \overset{\square}{E}_{XIV}^i \kappa_i \theta + \overset{\square}{E}_{XV} \theta^2, \end{aligned} \quad (78)$$

где $\overset{\square}{E}_I^{(ik)(lm)}$, $\overset{\boxplus}{E}_{II}^{(ik)(lm)}$, $\overset{\boxplus}{E}_{III}^{(ik)(lm)}$, $\overset{\boxplus}{E}_{IV}^{(ik)\cdot}$, $\overset{\boxplus}{E}_{V}^{(ik)\cdot}$, $\overset{\square}{E}_{VI}^{(ik)l}$, $\overset{\boxplus}{E}_{VII}^{(ik)l}$, $\overset{\boxplus}{E}_{VIII}^{(ik)l}$, $\overset{\square}{E}_{IX}^{(il)}$, $\overset{\boxplus}{E}_{X}^{i\cdot}$, $\overset{\square}{E}_{XI}^{(ik)}$, $\overset{\boxplus}{E}_{XII}^{(ik)}$, $\overset{\square}{E}_{XIII}^i$, $\overset{\square}{E}_{XIV}^i$, $\overset{\square}{E}_{XV}$ — определяющие мультивесовые псевдотензоры анизотропного микрополярного термоупругого континуума; $\boxplus = \boxminus - 1 = \square - 2$; $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$ — малый температурный инкремент (считается малой первого порядка); θ_0 — референциальная температура.

Мультивеса определяющих псевдотензоров анизотропного микрополярного термоупругого континуума нетрудно определить, используя правило баланса весов, из выражения для свободной энергии Гельмгольца. В самом деле:

$$\begin{aligned} \text{w.g.t}(\overset{\square}{E}_I^{(ik)(lm)}) = \square; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\boxplus}{E}_{II}^{(ik)(lm)}) = \boxplus; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\boxplus}{E}_{III}^{(ik)(lm)}) = \boxplus; \\ \text{w.g.t}(\overset{\boxplus}{E}_{IV}^{(ik)\cdot}) = \boxplus; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\boxplus}{E}_{V}^{(ik)\cdot}) = \boxplus; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\square}{E}_{VI}^{(ik)l}) = \square; \\ \text{w.g.t}(\overset{\boxplus}{E}_{VII}^{(ik)l}) = \boxplus; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\boxplus}{E}_{VIII}^{(ik)l}) = \boxplus; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\square}{E}_{IX}^{(il)}) = \square; \\ \text{w.g.t}(\overset{\boxplus}{E}_{X}^{i\cdot}) = \boxplus; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\square}{E}_{XI}^{(ik)}) = \square; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\boxplus}{E}_{XII}^{(ik)}) = \boxplus; \\ \text{w.g.t}(\overset{\boxplus}{E}_{XIII}^i) = \boxplus; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\square}{E}_{XIV}^i) = \square; & \quad \text{w.g.t}(\overset{\square}{E}_{XV}) = \square; \end{aligned} \quad (79)$$

Определяющие уравнения (75), соответствующие квадратичной форме свободной энергии Гельмгольца (78), принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \square t^{(ik)} = 2 \frac{\square}{\text{I}} E^{(ik)(lm)} \epsilon_{(lm)} + \frac{\square}{\text{III}} E^{(ik)(lm)[+1]} \kappa_{(lm)} + \\ \quad + \frac{\square}{\text{IV}} E^{(ik) \cdot [+1]_i} \varphi_l + \frac{\square}{\text{VI}} E^{(ik)l} \kappa_l + \frac{\square}{\text{XI}} E^{(ik)} \theta, \\ \square \mu^{(ik)} = 2 \frac{\square}{\text{II}} E^{(ik)(lm)[+1]} \kappa_{(lm)} + \frac{\square}{\text{III}} E^{(lm)(ik)} \epsilon_{(lm)} + \\ \quad + \frac{\square}{\text{V}} E^{(ik)l[+1]} \varphi_l + \frac{\square}{\text{VII}} E^{(ik)l} \kappa_l + \frac{\square}{\text{XII}} E^{(ik)} \theta, \\ \square \tau_i = 2 \frac{\square}{\text{VIII}} E^{(il)[+1]_l} \varphi_l + \frac{\square}{\text{X}} E^{ \cdot l} \kappa_l + \frac{\square}{\text{IV}} E^{(lm) \cdot} \epsilon_{(lm)} + \frac{\square}{\text{V}} E^{(lm) \cdot} \kappa_{(lm)} + \frac{\square}{\text{XIII}} E^{ \cdot i} \theta, \\ \square \mu^i = 2 \frac{\square}{\text{IX}} E^{(il)} \kappa_l + \frac{\square}{\text{X}} E^{ \cdot i [+1]_l} \varphi_l + \frac{\square}{\text{VI}} E^{(lm)i} \epsilon_{(lm)} + \frac{\square}{\text{VII}} E^{(lm)i[+1]} \kappa_{(lm)} + \frac{\square}{\text{XIII}} E^{ \cdot i} \theta, \\ \square S = - \frac{\square}{\text{XI}} E^{(ik)} \epsilon_{(ik)} - \frac{\square}{\text{XII}} E^{(ik)[+1]} \kappa_{(ik)} - \frac{\square}{\text{XIII}} E^{ \cdot i [+1]_i} \varphi - \frac{\square}{\text{XIV}} E^{ \cdot i} \kappa_i - \frac{\square}{\text{XV}} E \theta. \end{array} \right. \quad (80)$$

В качестве закона теплопроводности примем линейный закон Фурье

$$\square h^k = - \frac{\square}{\text{XVI}} E^{ki} \nabla_i \theta, \quad (81)$$

где $\frac{\square}{\text{XVI}} E^{ki}$ — псевдотензор коэффициентов теплопроводности. Отметим, что в (81) компоненты псевдотензора коэффициентов теплопроводности $\frac{\square}{\text{XVI}} E^{ki}$, вообще говоря, проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

После линеаризации уравнения теплопроводности (77) с учетом (80) и (81) окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\square}{\text{XI}} E^{(ij)} \partial \cdot \epsilon_{(ij)} + \frac{\square}{\text{XII}} E^{(ij)} \partial \cdot \kappa_{(ij)}^{[+1]} + \frac{\square}{\text{XIII}} E^{ \cdot i} \partial \cdot \varphi^{[+1]_i} + \\ + \frac{\square}{\text{XIV}} E^{ \cdot i} \partial \cdot \kappa_i + \theta_0^{-1} C \partial \cdot \theta = \theta_0^{-1} \frac{\square}{\text{XVI}} E^{js} \nabla_j \nabla_s \theta, \end{aligned}$$

где $\square C = \square \rho c$, c — теплоемкость в расчете на единицу массы (specific heat).

Для гемитропного микрополярного термоупругого тела определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого ранга примут вид [54]

$$\begin{aligned} \frac{\square}{\text{I}} E^{(ik)(lm)} &= \frac{\square}{\text{I}} A g^{ik} g^{lm} + \frac{\square}{\text{I}} C g^{il} g^{km}, \\ \frac{\square}{\text{II}} E^{(ik)(lm)} &= \frac{\square}{\text{II}} A g^{ik} g^{lm} + \frac{\square}{\text{II}} C g^{il} g^{km}, \\ \frac{\square}{\text{III}} E^{(ik)(lm)} &= \frac{\square}{\text{III}} A g^{ik} g^{lm} + \frac{\square}{\text{III}} C g^{il} g^{km}, \end{aligned} \quad (82)$$

определяющие тензоры и псевдотензоры третьего и первого ранга равны нулю:

$$\begin{matrix} \square \\ \text{IV} \end{matrix} E^{(ik)\cdot} = \begin{matrix} \boxplus \\ \text{V} \end{matrix} E^{(ik)\cdot} = \begin{matrix} \square \\ \text{VI} \end{matrix} E^{(ik)l} = \begin{matrix} \square \\ \text{VII} \end{matrix} E^{(ik)l} = \begin{matrix} \square \\ \text{XIII} \end{matrix} E^i = \begin{matrix} \square \\ \text{XIV} \end{matrix} E^i = 0, \quad (83)$$

определяющие тензоры и псевдотензоры второго ранга оказываются шаровыми:

$$\begin{matrix} \boxplus \\ \text{VIII} \end{matrix} E^{(il)} = \begin{matrix} \boxplus \\ \text{VIII} \end{matrix} B g_{il}, \quad \begin{matrix} \square \\ \text{IX} \end{matrix} E^{(il)} = \begin{matrix} \square \\ \text{IX} \end{matrix} B g^{il}, \quad \begin{matrix} \square \\ \text{X} \end{matrix} E^{i\cdot l} = \begin{matrix} \square \\ \text{X} \end{matrix} B g^{i\cdot l}, \quad (84)$$

$$\begin{matrix} \square \\ \text{XI} \end{matrix} E^{(ik)} = \begin{matrix} \square \\ \text{XI} \end{matrix} B g^{ik}, \quad \begin{matrix} \square \\ \text{XII} \end{matrix} E^{(ik)} = \begin{matrix} \square \\ \text{XII} \end{matrix} B g^{ik}.$$

Кроме того, для гемитропного тела шаровым оказывается псевдотензор коэффициентов теплопроводности:

$$\begin{matrix} \square \\ \text{XVI} \end{matrix} E^{js} = \lambda g^{js}.$$

Псевдоскаляры нечетного алгебраического веса в (82) и (84), как и коэффициент теплопроводности λ реагируют на преобразования трехмерного пространства, меняющие его ориентацию на противоположную. То же самое касается и теплоемкости C .

8. Псевдотензорные формулировки уравнений динамики микрополярной термоупругости Уравнения динамики микрополярного континуума, как было показано в разделе 5 настоящей статьи, можно получить из вариационного принципа виртуальных перемещений.

Определяющие уравнения гемитропной микрополярной среды записываются в принятых обозначениях можно принять в виде [18]:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \square \\ t \end{matrix}^{(is)} &= 2G \begin{matrix} \square \\ \nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm} \end{matrix} \epsilon_{(lm)} + \\ &\quad + G \begin{matrix} \square \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ c_4 g^{is} g_{lm} \kappa^{[+1](lm)} + c_5 \kappa^{[+1](is)} \end{matrix} - 2G \alpha \begin{matrix} \square \\ * \end{matrix} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \theta, \\ \begin{matrix} \square \\ \mu \end{matrix}^{(is)} &= 2G \begin{matrix} \square \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ (c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \kappa^{[+1](lm)} + \\ &\quad + G \begin{matrix} \square \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ (c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}) \end{matrix} - 2G \begin{matrix} \square \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ * \end{matrix} \begin{matrix} [+1] \\ \beta \theta \end{matrix}, \end{matrix} \quad (85) \\ \begin{matrix} \square \\ \tau \end{matrix}^i &= 2G \begin{matrix} \square \\ c_1 g_{is} \varphi^s + \frac{1}{2} G \begin{matrix} \square \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ c_6 \kappa_i \end{matrix}, \\ \begin{matrix} \square \\ \mu \end{matrix}^i &= 2G \begin{matrix} \square \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ c_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} G \begin{matrix} \square \\ L \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ c_6 \varphi^i \end{matrix}, \end{matrix}$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; α — ко-

эффициент линейного теплового расширения; β — коэффициент теплового изгиба-
кручения (см. [18, 21]).

Возвращаясь к записи в терминах асимметричных псевдотензоров силовых и моментных напряжений получим

$$\begin{aligned} \overset{\square}{t}_{is} &= \overset{\square}{G} \left[(1 + c_1) \nabla_i u_s + (1 - c_1) \nabla_s u_i + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1} g_{is} \nabla_k u^k - \right. \\ &\quad \left. - 2c_1 e_{isl} \overset{[+1]}{\phi}{}^l + L c_4 g_{is} \overset{[-1]}{\nabla}{}_l \overset{[+1]}{\phi}{}^l + L c_5 \overset{[-1]}{\nabla}{}_{(i} \overset{[+1]}{\phi}{}_{s)} - \frac{1}{2} \overset{[-1]}{L} c_6 \overset{[-1]}{\nabla}{}_{[i} \overset{[+1]}{\phi}{}_{s]} - 2\alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \theta \right], \\ \overset{\square}{\mu}_{is} &= \overset{\square}{G} \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \left[(1 + c_2) \overset{[+1]}{\nabla}{}_i \overset{[+1]}{\phi}{}_s + (1 - c_2) \overset{[+1]}{\nabla}{}_s \overset{[+1]}{\phi}{}_i + 2c_3 g_{is} \overset{[+1]}{\nabla}{}_l \overset{[+1]}{\phi}{}^l + \right. \\ &\quad \left. + \overset{[-1]}{L} \left(c_4 g_{is} \overset{[+1]}{\nabla}{}_l u^l + c_5 \overset{[+1]}{\nabla}{}_{(i} u_{s)} - \frac{1}{2} c_6 \overset{[+1]}{\nabla}{}_{[i} u_{s]} + \frac{1}{2} c_6 e_{isl} \overset{[+1]}{\phi}{}^l \right) - 2 \overset{[+1]}{\beta} \theta \right]. \end{aligned} \quad (86)$$

Подставив полученные определяющие уравнения (86) в уравнения динамики (61), дополнив их уравнением теплопроводности [40, 41] для гемитропного микрополярного тела получим замкнутую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \overset{\square}{G} \left[(1 + c_1) \overset{\square}{\nabla}{}^s \overset{\square}{\nabla}{}_s u^i + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \overset{\square}{\nabla}{}^i \overset{\square}{\nabla}{}_k u^k + 2 \overset{[-2]}{c_1} \epsilon^{ikl} \overset{[+1]}{\nabla}{}_k \overset{[+1]}{\phi}{}^l + \right. \\ \left. + \overset{[-1]}{L} c_4 \overset{[+1]}{\nabla}{}^i \overset{[+1]}{\nabla}{}_k \overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L} c_5 \overset{[+1]}{\nabla}{}^k \overset{[+1]}{\nabla}{}_k \overset{[+1]}{\phi}{}^i \right] - 2 \overset{\square}{G} \alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \overset{\square}{\nabla}{}_i \theta = -\rho (f^i - \partial..u^i), \\ \overset{\square}{G} \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \left[(1 + c_2) \overset{[+1]}{\nabla}{}^s \overset{[+1]}{\nabla}{}_s \overset{[+1]}{\phi}{}_i + (1 - c_2 + 2c_3) \overset{[+1]}{\nabla}{}_i \overset{[+1]}{\nabla}{}_k \overset{[+1]}{\phi}{}^k + \right. \\ \left. + \overset{[-1]}{L}^{-1} c_4 \overset{[+1]}{\nabla}{}_i \overset{[+1]}{\nabla}{}^k u_k + \overset{[-1]}{L}^{-1} c_5 \overset{[+1]}{\nabla}{}^k \overset{[+1]}{\nabla}{}_k u_i + \overset{[-1]}{L}^{-1} c_6 \epsilon_{isl} \overset{[+1]}{\nabla}{}^s \overset{[+1]}{\phi}{}^l \right] - \\ - 2 \overset{\square}{G} \overset{[-2]}{c_1} (2 \overset{[+1]}{\phi}{}_i - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \overset{[+1]}{\nabla}{}_s u^l) - 2 \overset{\square}{G} \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{\beta} \overset{[+1]}{\nabla}{}_i \theta = -\rho (l_i - \mathfrak{I} \partial.. \phi_i), \\ \overset{\square}{\lambda} \overset{\square}{\nabla}{}_s \overset{\square}{\nabla}{}^s \theta - c \rho \partial.. \theta - 2 \overset{\square}{G} \alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \theta_0 \overset{\square}{\nabla}{}_s \partial.. u^s - 2 \overset{\square}{G} \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{\beta} \theta_0 \overset{\square}{\nabla}{}_s \partial.. \phi^s = 0, \end{aligned} \quad (87)$$

где $\overset{\square}{\lambda}$ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость на единицу массы. В этом случае характерная микродлина L и модуль сдвига G являются псевдоскалярами нечетного алгебраического веса.

9. Детерминирование весов определяющих скаляров в гемитропном теле. Полученная в предыдущем разделе настоящей статьи система дифференциальных уравнений демонстрирует важное свойство термомеханических характеристик гемитропных микрополярных термоупругих тел — определяющие постоянные, имеющие физическую размерность, оказываются псевдоскалярами нечетного алгебраического веса, т.е. проявляют чувствительность к преобразованиям трехмерного пространства, меняющим его ориентацию на противоположную. К таким псевдоскалярам относятся: модуль сдвига $\overset{\square}{G}$, зависящий от алгебраического веса псевдоинвариантного элемента площади, и характерная микродлина $\overset{[-1]}{L}$, вес которой определяется весом псевдовектора спинорных перемещений, а также коэффициент теплопроводности $\overset{\square}{\lambda}$ и массовая плотность $\overset{\square}{\rho}$.

Следует отметить, что указанные выше псевдоскаляры ковариантно постоянны, т.е., например, для модуля сдвига $\overset{\square}{G}$ и характерной микродлины $\overset{[-1]}{L}$ будут выполнены следующие дифференциальные условия

$$\nabla_k \overset{\square}{G} = 0, \quad \nabla_k \overset{[-1]}{L} = 0, \quad (88)$$

или

$$\begin{aligned} \partial_k \overset{\square}{G} - \overset{\square}{G} \overset{[-1]}{1} \partial_k \overset{[-1]}{1} &= 0, \\ \partial_k \overset{[-1]}{L} + \overset{[-1]}{1} \overset{[-1]}{L} \partial_k \overset{[-1]}{1} &= 0, \end{aligned} \quad (89)$$

а также

$$\begin{cases} \partial_k (\ln |\overset{\square}{G}| - \overset{\square}{1} \ln |\overset{[-1]}{1}|) = 0, \\ \partial_k (\ln |\overset{[-1]}{L}| - \ln |\overset{[-1]}{1}|) = 0. \end{cases} \quad (90)$$

Интегрируя полученные уравнения (90), заключаем, что

$$\overset{\square}{G} = e^{\overset{\square}{G}} \overset{\square}{1} G, \quad \overset{[-1]}{L} = e^{-1} \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{1} L, \quad (91)$$

где G и L — абсолютные инварианты, более того, абсолютные скалярные величины.

10. Заключение и выводы. В работе получены мультивесовые формулировки уравнений теории гемитропной микрополярной термоупругости.

- (1) Получена мультивесовая формулировка уравнений динамики и уравнения теплопроводности для гемитропного микрополярного термоупругого тела основанные на абсолютной инвариантности: трансляционных перемещений, массы, силы, механической работы, количества тепла. Развитие теории проводилось в терминах контравариантного псевдовектора спинорных перемещений положительного нечетного веса.
- (2) Рассмотрены мультивесовые варианты тензорных элементов площади и объема. Исследовано влияние мультивесов тензорных элементов площади и объема на веса объемных плотностей: внутренней энергии, энтропии, массовой плотности, теплового потока, контролируемого и неконтролируемого производства энтропии, а также — на веса связанных с ними определяющих псевдоскаляров.
- (3) Выведен фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, обусловленный правилом частного для алгебраических весов плотности внутренней энергии и плотности энтропии.
- (4) Вычислены веса коэффициента микроэнергии и момента пары сил.
- (5) Получены условия детерминирования алгебраических мультивесов определяющих псевдотензоров и псевдоскаляров с целью исследования их изменчивости при зеркальных преобразованиях трехмерного пространства.

Таблица 1. Фундаментальные псевдотензоры, ассоциированные с алгеброй и геометрией трехмерного пространства.

терминологическое обозначение	символьное обозначение	вес (weight)
-------------------------------	------------------------	--------------

пространственный ковариантный базисный вектор (spatial covariant base vector)	$\mathbf{i}_s (s = 1, 2, 3)$	0
отсчетный ковариантный базисный вектор (referential covariant base vector)	$\mathbf{i}'_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$	0
пространственные (Эйлеровы) координаты (spatial (Eulerian) coordinates)	$x^s (s = 1, 2, 3)$	0
отсчетные (Лагранжевы) координаты (referential (Lagrangian) coordinates)	$X^\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$	0
фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр	e	+1
псевдоскалярная единица положительного веса	${}^{[+1]}_1 = e$	+1
псевдоскалярная единица отрицательного веса	${}^{[-1]}_1 = e^{-1}$	-1
контравариантные символы перестановок	ϵ^{ijk}	+1
ковариантные символы перестановок	ϵ_{ijk}	-1
специальные символы перестановок положительного веса	${}^{[+1]}_{i \cdot k} \epsilon_{i \cdot k}$	+1
специальные символы перестановок отрицательного веса	${}^{[-1]}_{i \cdot k} \epsilon_{i \cdot k}$	-1
специальные символы перестановок положительного веса	${}^{[+1]}_{i \cdot k} \epsilon_{i \cdot k} \cdot p$	+1
специальные символы перестановок отрицательного веса	${}^{[-1]}_{i \cdot k} \epsilon_{i \cdot k} \cdot p$	-1
набла Гамильтона	∇_i	0
отсчетный метрический тензор	$\mathbf{g}'_{\alpha\sigma}$	0
метрический тензор	g_{ij}	0
фундаментальный тензор	g^{ij}	0
двухточечные g -символы (two-point g -symbols)	$g_s^{\cdot\alpha} = \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{i}'^\alpha, g_\alpha^{\cdot s} = \mathbf{i}'_\alpha \cdot \mathbf{i}^s$	0
детерминант метрического тензора	g	+2
тензорный элемент объема (tensor volume element)	$d\tau^{mns}$	0
естественный элемент объема (natural volume element)	${}^{[-1]}_{d\tau}{}^{123} = {}^{[-1]}_{d\tau}$	-1
дублетный элемент объема (dublet volume element)	${}^{[+1]}_{d\tau}{}_{123} = {}^{[+1]}_{d\tau}$	+1

инвариантный элемент объема (invariant volume element)	$d\tau$	0
тензорный элемент площади поверхности (tensor element of area)	$d\tau^{ij}$	0
псевдовекторный элемент площади поверхности (pseudovector element of area)	$^{[-1]}dA_k$	-1
псевдовекторный элемент площади поверхности (pseudovector element of area)	$^{[+1]}dA^k$	+1
векторный элемент площади поверхности (vector element of area)	dA_k	0
инвариантный элемент площади поверхности (invariant element of area)	dS	0
естественный элемент площади поверхности (natural element of area)	$^{[-1]}dA_k$	+1
дублетный элемент площади поверхности (natural element of area)	$^{[+1]}dA_k$	+1

Таблица 2. Основные псевдотензоры микрополярной термомеханики.

терминологическое обозначение	символьное обозначение	вес		
		$^{[-1]}d\tau$	$^{[+1]}d\tau$	$d\tau$
вектор перемещений	u^k	0	0	0
тензор дисторсии	x_α^s	0	0	0
модуль дисторсии	$ x _{\alpha\sigma}$	0	0	0
двухточечный тензор конечного поворота	$\lambda^{s\sigma}$	0	0	0
одноточечный Эйлеров тензор поворота	λ^{sm}	0	0	0
угол поворота	ϕ	0	0	0
псевдовектор спинорных перемещений	ϕ^i	+1	+1	+1
псевдовектор вихря поля трансляционных перемещений	ω^h	+1	+1	+1
псевдовекторы относительного микроповорота	φ^i	+1	+1	+1
тензор деформации изгиба–кручения	κ_i^s	+1	+1	+1
сопутствующий вектор деформации изгиба–кручения	κ_i	0	0	0
асимметричный тензор деформаций	ϵ_{ij}	0	0	0
тензор малых деформаций	$\epsilon_{(ij)}$	0	0	0
масса	m	0	0	0
плотность	ρ	+1	-1	0
термодинамическая температура	θ	0	0	0
количество тепла	Q	0	0	0
работа	A	0	0	0
псевдовектор потока энтропии	J^j	+1	-1	0
псевдовектор потока тепла	h^j	+1	-1	0
массовая плотность внутренней энергии	u	0	0	0
массовая плотность свободной энергии Гельмгольца	ψ	0	0	0
массовая плотность энтропии	s	0	0	0
массовая плотность контролируемого производства энтропии	σ	0	0	0
массовая плотность неконтролируемого производства энтропии	ξ	0	0	0

объемная плотность внутренней энергии	U	+1	-1	0
объемная плотность свободной энергии Гельмгольца	Ψ	+1	-1	0
объемная плотность энтропии	S	+1	-1	0
объемная плотность контролируемого производства энтропии	Σ	+1	-1	0
объемная плотность неконтролируемого производства энтропии	Ξ	+1	-1	0
поверхностные силы	t^k	+1	-1	0
тензор силовых напряжений	t^{tk}	+1	-1	0
объемные силы	X^k	+1	-1	0
массовые силы	f^k	0	0	0
плечо пары сил	d	-1	-1	-1
поверхностные моменты	m_k	0	-2	-1
тензор моментных напряжений	μ^i_k	0	-2	-1
ассоциированный вектор моментных напряжений	μ^i	+1	-1	0
ассоциированный вектор силовых напряжений	τ_k	0	-2	-1
объемные моменты	Y_k	0	-2	-1
массовые моменты	l_k	-1	-1	-1
коэффициент микроинерции	\mathfrak{S}	-2	-2	-2

Таблица 3. Определяющие псевдотензоры и псевдоскаляры гemitропной микрополярной термоупругости.

терминологическое обозначение	символьное обозначение	вес		
		$^{[-1]}$ $d\tau$	$d\tau$	$^{[+1]}$ $d\tau$
определяющий тензор I (first constitutive tensor)	$E_I^{(ik)(lm)}$	+1	0	-1
определяющий тензор II (first constitutive tensor)	$E_{II}^{(ik)(lm)}$	-1	-2	-3
определяющий тензор III (first constitutive tensor)	$E_{III}^{(ik)(lm)}$	0	-1	-2
определяющий тензор IV (first constitutive tensor)	$E_{IV}^{(ik)\cdot}$ $\cdot l$	0	-1	-2
определяющий тензор V (first constitutive tensor)	$E_V^{(ik)\cdot}$ $\cdot l$	-1	-2	-3
определяющий тензор VI (first constitutive tensor)	$E_{VI}^{(ik)l}$	+1	0	-1
определяющий тензор VII (first constitutive tensor)	$E_{VII}^{(ik)l}$	0	-1	-2
определяющий тензор VIII (first constitutive tensor)	$E_{VIII}^{(il)}$	-1	-2	-3
определяющий тензор IX (first constitutive tensor)	$E_{IX}^{(il)}$	+1	0	-1
определяющий тензор X (first constitutive tensor)	$E_X^{\cdot l}$ $\cdot i$	0	-1	-2
определяющий тензор XI (first constitutive tensor)	$E_{XI}^{(ik)}$	+1	0	-1
определяющий тензор XII (first constitutive tensor)	$E_{XII}^{(ik)}$	0	-1	-2
определяющий тензор XIII (first constitutive tensor)	$E_{XIII}^{\cdot i}$	0	-1	-2
определяющий тензор XIV (first constitutive tensor)	$E_{XIV}^{\cdot i}$	+1	0	-1
определяющий тензор XV (first constitutive tensor)	E_{XV}	+1	0	-1
модуль сдвига	G	+1	0	-1
коэффициент Пуассона	ν	0	0	0
характерная микродлина	L	-1	-1	-1
определяющий скаляр i	c_1	0	0	0
определяющий скаляр ii	c_2	0	0	0
определяющий скаляр iii	c_3	0	0	0
определяющий скаляр iv	c_4	0	0	0
определяющий скаляр v	c_5	0	0	0
определяющий скаляр vi	c_6	0	0	0

коэффициент линейного теплового расширения	α *	0	0	0
коэффициент теплового изгиба–кручения	$^{[+1]}$ β *	+1	+1	+1
коэффициент теплопроводности	λ	+1	0	-1
теплоемкость на единицу массы	c	0	0	0
теплоемкость на единицу объема	C	+1	0	-1

ЛИТЕРАТУРА

- [1] DeValk T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338.
- [2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697.
- [3] Lakes R. *Composites and metamaterials*. Singapore: World Scientific, 2020.
- [4] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [5] Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [6] Synge J. L., Schild A. *Tensor calculus*. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [7] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [8] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [9] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Trans. Am. Math. Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [10] Veblen O. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [11] Das A. J. *Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007.
- [12] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
- [13] Nowacki W. *Theory of micropolar elasticity*. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
- [14] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [15] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [16] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [17] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Springer, 2017. 102 p.
- [18] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [19] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69.
- [20] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer*. 1966. P. 153–158.

- [21] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
- [22] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [23] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24.
- [24] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Т. 58, № 3. С. 802–813.
- [25] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). с. 110–121.
- [26] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [27] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
- [28] Nayfeh A. H. Perturbation methods. John Wiley & Sons, 2008. 417 p.
- [29] Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.
- [30] Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
- [31] Murashkin E. V., Radaev Y. N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449.
- [32] Radaev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527.
- [33] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения однотоочечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). с. 17–26.
- [34] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–115.
- [35] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.
- [36] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.
- [37] Murashkin E., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 205–213.
- [38] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Тензор силовых напряжений Схоутена и аффинорные плотности положительного веса // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84, № 4. С. 545–558.
- [39] Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Schouten Force Stresses in Continuum Mechanics Formulations // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 1. P. 153–160.
- [40] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Т. 58, № 9. С. ???–???
- [41] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three–Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. Т. 165, № 4. С. ???–???
- [42] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
- [43] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.

- [44] Фиников Сергей Павлович. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М.: ОГИЗ, 1948. 432 с.
- [45] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
- [46] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 88 с.
- [47] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.
- [48] Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles // Acta math. 1887. Vol. 6. P. 321–380.
- [49] Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytech. Vol. 1. P. 1–123.
- [50] Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.
- [51] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
- [52] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3D материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). с. 114–121.
- [53] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.
- [54] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

MULTIWEIGHTS THERMOMECHANICS OF HEMITROPIC MICROPOLAR SOLIDS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The article is devoted to the problems of determining the algebraic weights of micro- and nanoscale multi-weight characteristics of the hemitropic micropolar thermomechanics. The fundamental concepts of pseudoinvariant volume and area elements of odd integer weights in three-dimensional space are discussed. The developing theory of hemitropic micropolar thermoelasticity is formulated in terms of a contravariant pseudovector of spinor displacements of a positive odd weight with the fundamental principle of the absolute invariance of absolute thermodynamic temperature, mass and mass densities of: entropy, internal energy, Helmholtz free energy, controlled and uncontrolled entropy production. Multi-weight pseudotensor formulations of wireless transmission principles and a reduced energy balance equation are proposed. Multiweights formulas for pseudovector differential equations of statics and dynamics of a hemitropic thermoelastic body are obtained and analyzed. The problem of mutual influence of algebraic weights of constitutive pseudoscalars are discussed in order to take into account their transformations as a result of the transformation of three-dimensional space, changing the orientation of the coordinate basis to the opposite.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, heat conduction, micropolarity, tensor volume element, multiweight formulation, heat flux pseudovector, mirror reflection, hemitropic solid

REFERENCES

- [1] DeValk T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.
- [2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.
- [3] Lakes R. *Composites and metamaterials*. Singapore: World Scientific, 2020.
- [4] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [5] Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [6] Synge J. L., Schild A. *Tensor calculus*. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [7] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie* / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858. doi: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [8] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [9] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [10] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [11] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. doi: 10.1007/978-0-387-69469-6.
- [12] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
- [13] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
- [14] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [15] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [16] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [17] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Springer, 2017. 102 p. doi:10.1007/978-981-10-2434-4.
- [18] Radayev Yu. N. The rule of multipliers in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2018. T. 22. C. 504–517. doi:10.14498/vsgtu1635. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [19] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. doi:10.1007/BF01176729.
- [20] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. doi:10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [21] Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412. doi:10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [22] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. doi: 10.14498/vsgtu1792.
- [23] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. no. 4. P. 16–24. doi:10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [24] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. T. 58, № 3. C. 802–813. doi:10.3103/s0025654423700127.
- [25] Murashkin E. V. On the relations between micropolar defining parameters of thermodynamic state potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 1(55). p. 110–121. doi:10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [26] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. doi:10.14498/vsgtu1799.
- [27] Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics. Moscow: Nauka, 1979. 431 p.
- [28] Nayfeh A. H. Perturbation methods. John Wiley & Sons, 2008. 417 p.
- [29] Pars L. A. Analytical dynamics. Moscow: Nauka, 1971. 636 p.
- [30] Markeev A. P. Theoretical mechanics. Moscow: Nauka, 1990. 416 c.
- [31] Murashkin E. V., Radayev Y. N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. doi: 10.1134/S1995080223060392.
- [32] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. doi: 10.3103/S0025654423700206.

- [33] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 1(51). p. 17–26. doi:10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
- [34] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). p. 106–115. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [35] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). P. 118–127. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [36] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the coordination of the orientations of tensor area elements in a micropolar continuum immersed in an external flat space // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2021. Vol. 25, no. 4. P. 776–786. doi:10.3103/s0025654422700029.
- [37] Murashkin E., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 205–213. doi: 10.3103/s0025654422020108.
- [38] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Schouten force stress tensor and positive weight affinor densities // *Problems of strength and plasticity*. 2022. Vol. 84, no. 4. P. 545–558. doi:10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558.
- [39] Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Schouten Force Stresses in Continuum Mechanics Formulations // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 1. P. 153–160. doi: 10.3103/s0025654422700029.
- [40] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Transfer in Anisotropic Micropolar Solids // *Mechanics of Solids*. 2023. T. 58, № 9. C. ???–??? doi:10.3103/S0025654423700255.
- [41] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2023. T. 165, № 4. C. 389–403. DOI:10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
- [42] Kovalev V. A., Radaev Y. N. *Elements of field theory: variational symmetries and geometric invariants*. Moscow: Fizmatlit, 2009. 156 p.
- [43] Kovalev V. A., Radaev Y. N. *Wave problems of field theory and thermomechanics*. Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 2010. 328 p.
- [44] Finikov S. P. *Cartan’s method of external forms in differential geometry*. JL., Moscow: OGIz, 1948. 432 p.
- [45] Cartan H. *Differential calculus. Differential forms*. Moscow: Mir, 1971. 392 p.
- [46] Efimov N. V. *Introduction to the Theory of External Forms*. Moscow: Nauka, 1977. 88 p.
- [47] Rozenfeld B. A. *Multidimensional spaces*. Moscow: Nauka, 1966. 648 p.
- [48] Poincaré H. *Sur les résidus des intégrales doubles* // *Acta math*. 1887. Vol. 6. P. 321–380.
- [49] Poincaré H. *Analysis situs* // *J. Ecole Polytech*. Vol. 1. P. 1–123.
- [50] Gunter N. M. *Course in calculus of variations*. Moscow: Gostekhteorizdat, 1941. 308 c.
- [51] Gelfand I. M., Fomin S. V. *Calculus of variations*. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 228 c.
- [52] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the formulation of boundary conditions in problems of synthesis of woven 3D materials // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2021. no. 1(47). p. 114–121. doi:10.37972/chgpu.2021.1.47.010.
- [53] Radayev Y. N. *Spatial problem of the mathematical theory of plasticity*. Samara: Samarskiy universitet, 2006. 340 p.
- [54] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.

The present study was financially supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00262 “Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media”).

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2e с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Щеглова Ю. Д.</i> Метод возмущений при определении поля перемещений трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некрутового поперечного сечения при упруго-пластическом кручении	5
<i>Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю., Руклин И. Г.</i> Исследование напряжений в прямоугольной мембране, закрепленной по всей длине одной стороны и в углах противоположной стороны	14
<i>Гончарук В. К., Зайко Н. Ю., Ратников А. А., Шелковников К. К.</i> Экспериментальные исследования адгезионного взаимодействия в зоне контакта стекла и алюминия в стеклометаллокомпозитном элементе	26
<i>Лаврентьева М. А., Левина Л. В., Пеньков В. Б.</i> Эффективный подход для анализа термоэластостатических состояний 3D-объектов	36
<i>Мионов Б. Г., Мионов Ю. Б.</i> К вопросу о кручении сектора кольца	47
<i>Барботько М. А., Любимова О. Н., Стрельцов А. А.</i> Экспериментальные измерения температурных параметров стеклования в конструктивном элементе стеклометаллокомпозита	52
<i>Богачева В. Э.</i> Влияние механических характеристик слоистого композита на критическое значение j -интеграла	63
<i>Скобельцын С. А., Окороков М. В.</i> Определение направления оси конечного цилиндра со сферическими заглушками по рассеянию звуковой волны	71
<i>Пеньков Н. А., Сидоркин О. А., Бараненко А. В., Березин Д. В.</i> К вопросу зарождения пластической области в композиционных покрытиях	81
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел	86
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	121
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	124
СОДЕРЖАНИЕ	126

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2023. № 4 (58)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 27.12.2023. Выход в свет 29.12.2023.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 13,9.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 224

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38