

ОТ РЕДАКЦИИ

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки России от 19 февраля 2010 года журнал «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева» включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Коллектив ЧГПУ им. И. Я. Яковлева с чувством глубокого удовлетворения воспринял решение ВАК РФ, которое, несомненно, будет способствовать росту авторитета журнала, качеству его публикаций, созданию благоприятных условий для творческого роста докторантов, аспирантов, сотрудников нашего вуза, других научных и образовательных учреждений России.

Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева будет издаваться по следующим сериям: «Гуманитарные и педагогические науки», «Естественные и технические науки», «Механика предельного состояния». Редакционная коллегия и международный совет Вестника включают ведущих ученых педагогического университета, России, стран ближнего и дальнего зарубежья.

Выражаем признательность всем участникам издания, авторам и сотрудникам, обеспечившим признание его высокого научного уровня, и выражаем уверенность в дальнейшем плодотворном сотрудничестве.

Главный редактор

Григорьев Г. Н.

С. И. Сенашов, А. Н. Яхно, Л. В. Яхно

ДЕФОРМАЦИЯ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика Решетнева

Университет Гвадалахары

Аннотация. Рассматривается гиперболическая система уравнений плоской идеальной пластичности с условием текучести Сен-Венана - Мизеса. Характеристики этой системы деформируются под действием точечных преобразований, допускаемых группой, что позволяет построить новые аналитические решения. Обсуждается механический смысл полученных характеристических полей. Описывается общий алгоритм преобразования решений гиперболической системы двух квазилинейных однородных уравнений от двух независимых переменных.

Ключевые слова: граничная задача для гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка, групповой анализ, пластичность, точные решения дифференциальных уравнений.

УДК: 539.375

1. Введение

В настоящее время групповой анализ систем дифференциальных уравнений является важным методом отыскания аналитических решений нелинейных задач. Если система дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) инвариантна относительно группы Ли точечных преобразований G , то иногда можно построить некоторые точные решения этой системы, которые инвариантны относительно подгрупп группы G .

Под действием допускаемой группы решение системы ДУЧП отображается в семейство решений, если оно не является инвариантным решением группы, т.е. если поверхность решений не является инвариантной поверхностью группы. Для некоторых дифференциальных уравнений удобно вначале построить все инвариантные решения и затем попытаться преобразовать их, применяя остальные симметрии из G . Иногда это единственный путь для получения явных формул. Эта процедура называется *размножением, деформацией* или *генерацией* решений (см. [2], [4], [6], [11]).

Поступила 02.03.2009

Работа выполнена в рамках «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг. (№1121)»

Работа выполнена в рамках АВЦП «Развитие потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/3023)

Для нелинейной системы ДУЧП, которая может быть линеаризована посредством некоторого преобразования T , существует много результатов по размножению решений. Природа преобразования T может быть различной: обратимое и необратимое, локальное и нелокальное преобразование и т. п. Схема размножения решений с использованием принципа суперпозиции в общем случае может быть представлена так:

1. Пусть U^1 – решение нелинейной и $\chi^1 = T(U^1)$ – решение соответствующей линеаризованной системы уравнений.

2. Линейная система всегда допускает бесконечномерную группу симметрий G_∞ , так как всегда можно добавить к данному решению любое другое частное решение. Действуя соответствующим точечным преобразованием на χ^1 , мы получим другое решение χ^2 линейной системы.

3. Обратным преобразованием T^{-1} переводим решение χ^2 в новое решение U^2 для нелинейной системы: $U^2 = T^{-1}(\chi^2)$.

Безусловно, возникает много вопросов по виду χ^1 , T , T^{-1} и об областях, где эти преобразования невырождены, но прежде всего появляется вопрос о физическом смысле получаемого решения U^2 .

В свою очередь, классический групповой анализ, будучи полуобратным методом решения ДУЧП, не предоставляет прямого алгоритма отыскания решений краевых задач. Есть некоторые результаты об инвариантности (частичной инвариантности) граничных условий относительно допускаемых симметрий [6].

Если нелинейная система ДУЧП является гиперболической, то она обладает двумя семействами характеристик, вид которых зависит от вида решения. В настоящей работе предложено действовать групповым преобразованием на характеристики системы вместо действия на ее решения, что позволяет получить новые решения системы двумерных уравнений идеальной пластичности среды Сен-Венана – Мизеса, а также определить соответствующие граничные условия.

Работа состоит из пяти частей. Первая часть – это введение. Во второй части приводятся некоторые понятия о системе квазилинейных ДУЧП и вводится понятие деформированных характеристик. В третьей части описывается система плоской пластичности, ее симметрии и некоторые известные решения. В четвертой части строятся новые решения и устанавливаются соответствующие граничные условия. Принцип суперпозиции обсуждается в пятой части работы.

2. Гиперболическая квазилинейная система

Система квазилинейных однородных уравнений в частных производных первого порядка двух независимых переменных x , y и двух функций u_1 , u_2 имеет вид [8]:

$$\begin{aligned} a_{11}(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{11}(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{12}(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0, \\ a_{21}(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22}(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{21}(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{22}(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

или в матричной форме

$$A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$, $U = (u_1, u_2)^T$.

Если матрица A невырожденная, то система (2) может быть записана в нормальной форме

$$\frac{\partial U}{\partial x} + M \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где $M = \|m_{ij}(u_1, u_2)\|$.

Пусть система (3) является гиперболической. Тогда матрица M имеет два различных собственных значения λ_1 и λ_2 , получаемых как корни уравнения:

$$\det(M - \lambda E) = 0: \quad \lambda_{1,2} = \frac{m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}}}{2}.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные векторы $l_1 = (l_1^1, l_1^2)$ и $l_2 = (l_2^1, l_2^2)$. Рассмотрим дифференциальные формы

$$\omega_k = l_k^1(u_1, u_2)du_1 + l_k^2(u_1, u_2)du_2 = 0, \quad k = 1, 2,$$

которые могут быть в принципе проинтегрированы, т. к. в этом случае всегда существует интегрирующий множитель. Принимая соответствующие два интеграла $\Phi_k(u_1, u_2) = \text{const}$ за инварианты Римана $r_k = \Phi_k(u_1, u_2)$, система (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \lambda_1(u_1, u_2) \frac{\partial r_1}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} + \lambda_2(u_1, u_2) \frac{\partial r_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (3) имеет два семейства действительных характеристик, заданные уравнениями

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(u_1, u_2), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(u_1, u_2), \quad (5)$$

которые определены, если известно некоторое решение системы (3). Из уравнения (4) видно, что инварианты Римана постоянны для любого решения системы (3) вдоль соответствующего семейства характеристик.

Пусть известны два решения системы (3): $u_1 = u_1^0(x, y)$, $u_2 = u_2^0(x, y)$, тогда есть два способа построения характеристических полей. Первый заключается в решении уравнений (5)

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(u_1^0(x, y), u_2^0(x, y)), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(u_1^0(x, y), u_2^0(x, y)).$$

Второй состоит в фиксировании постоянных для инвариантов Римана:

$$r_1(u_1, u_2) = C_1, \quad r_2(u_1, u_2) = C_2 \quad (6)$$

в выражении из (6) функции u_1 или u_2 в явном виде, например, u_1 :

$$u_1 = h_1(u_2, C_1), \quad u_1 = h_2(u_2, C_2), \quad (7)$$

и в получении уравнений для семейств характеристик, подставляя (7) в данное решение:

$$h_k(u_2^0(x, y), C_k) = u_1^0(x, y), \quad k = 1, 2.$$

Если базис алгебры Ли точечных симметрий, допускаемых системой (3), состоит из инфинитезимальных операторов X_i ($i = 1, \dots, r$):

$$X_i = \xi_i^1(x, y, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_i^2(x, y, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial y} + \eta_i^1(x, y, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial u_1} + \eta_i^2(x, y, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial u_2},$$

то преобразования S соответствующей группы Ли G_r

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, u_1, u_2, a_i), & y' &= f_2(x, y, u_1, u_2, a_i), \\ u_1' &= g_1(x, y, u_1, u_2, a_i), & u_2' &= g_2(x, y, u_1, u_2, a_i), \\ f_1|_{a_i=0} &= x, & f_2|_{a_i=0} &= y, & g_1|_{a_i=0} &= u_1, & g_2|_{a_i=0} &= u_2 \end{aligned} \quad (8)$$

переводят систему (3) в себя. Это значит, что если $U = (u_1, u_2)$ – решение системы (3), тогда функция U' , получаемая применением преобразования $S : U \rightarrow U' = (u_1', u_2')$, является другим решением для (3), всякий раз когда U' определено [7]. Здесь $a_i \in P$ – некоторый групповой параметр.

Любому решению $U = (u_1, u_2)$ системы (3) можно сопоставить его орбиту U_G [6], определяемую как множество всех решений, получаемых из U применением всех преобразований (8) допускаемой группы G_r . Решение $U = (u_1, u_2)$ называется H -инвариантным, если $u_1' = u_1$, $u_2' = u_2$ для некоторой подгруппы H из G_r , т.е. когда орбита U_H совпадает с самим решением U .

Более формально, если имеется симметрия $S \notin H$ и начальное H -инвариантное решение $U^0 = (u_1^0(x, y), u_2^0(x, y))$, то, действуя (8) на U^0 , мы получим неявную формулу для функций u_1 и u_2

$$\begin{aligned} g_1(x, y, u_1, u_2, a_i) &= u_1^0(f_1(x, y, u_1, u_2, a_i), f_2(x, y, u_1, u_2, a_i)), \\ g_2(x, y, u_1, u_2, a_i) &= u_2^0(f_1(x, y, u_1, u_2, a_i), f_2(x, y, u_1, u_2, a_i)). \end{aligned} \quad (9)$$

Формула (9) задает семейство решений, зависящее от группового параметра a_i . Будем называть это семейство S -решением, как полученное из начального решения U^0 посредством симметрии S . Если параметр a_i равен нулю, то S -решение совпадает с начальным. Изменение группового параметра как параметра семейства S -решений должно быть достаточно малым для получения физически осмысленных решений.

Как отмечается в [2], при размножении регулярного решения даже при малых значениях a_i можно получить многозначные решения или решения с особенностями. Такие обобщенные S -решения широко используются в анализе распространения разрывов, ударных волн и т.п. Физический смысл этих решений определяется из постановки задачи.

Из (9), учитывая (7), можно получить семейство *деформированных* характеристик или S -характеристики, задаваемые следующими соотношениями ($k = 1, 2$)

$$\begin{aligned} g_1(x, y, h_k, u_2, a_i) &= u_1^0(f_1(x, y, h_k, u_2, a_i), f_2(x, y, h_k, u_2, a_i)), \\ g_2(x, y, h_k, u_2, a_i) &= u_2^0(f_1(x, y, h_k, u_2, a_i), f_2(x, y, h_k, u_2, a_i)). \end{aligned}$$

Характеристики системы (3) являются плоскими кривыми, в то время как ее решения представляют собой пространственные поверхности. Поэтому анализировать действие симметрий на характеристики проще, чем анализировать размноженные решения. Удобно наблюдать, изменяя значение группового параметра, за эволюцией характеристических кривых под действием симметрий, определяя таким образом как подходящие граничные условия, так и механический смысл соответствующего S -решения.

3. Плоская пластичность

Рассмотрим классическую систему плоской идеальной пластичности [3], состоящую из двух уравнений равновесия и условия пластичности Сен-Венана – Мизеса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты тензора напряжений, k – постоянная пластичности. Система (10) описывает напряженное состояние пластически деформируемого материала.

Заменой, предложенной М. Леви

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta, \end{aligned}$$

система (10) сводится к квазилинейной системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) = 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

в которой σ – гидростатическое давление, $\theta + \pi/4$ – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью ox .

Система (11) является гиперболической. Соотношения (5) задают характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = tg\theta, \quad \frac{dy}{dx} = -ctg\theta,$$

которые в математической теории пластичности известны как линии скольжения. Соответствующие инварианты Римана равны

$$r_1 \equiv \alpha = \frac{\sigma}{2k} - \theta, \quad r_2 \equiv \beta = \frac{\sigma}{2k} + \theta. \quad (12)$$

Система (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + tg \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} - ctg \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Применяя преобразования годографа $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$ к системе (13), можно получить соответствующую линеаризованную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + ctg\theta \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} - tg\theta \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Переходя в (14) к новым зависимым переменным u, v , предложенным С.Г. Михлиным

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta - v \sin \theta, \\ y &= u \sin \theta + v \cos \theta, \end{aligned} \quad (15)$$

приводим систему (14) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{2} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{2} = 0. \quad (16)$$

Известно [4, 9], что система (11) допускает бесконечномерную алгебру высших симметрий. Алгебра Ли L допускаемых точечных преобразований образована следующими операторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ X_4 &= \xi_1(x, y, \sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x, y, \sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial y} - 4k\theta \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_5 &= \xi(\sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(\sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\xi_1 = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta + y \frac{\sigma}{k}, \quad \xi_2 = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta - x \frac{\sigma}{k},$$

и $(x = \xi, y = \eta)$ – произвольное решение линейной системы

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \theta} - 2k \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \sin 2\theta \right) = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} - 2k \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \sin 2\theta - \frac{\partial y}{\partial \sigma} \cos 2\theta \right) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

получаемой из (11) применением преобразований годографа $x = x(\sigma, \theta)$, $y = y(\sigma, \theta)$.

Группы точечных преобразований, соответствующие операторам (17), переводят систему (11) в себя. Эти группы следующие (a_i – достаточно малые групповые параметры, $i = 1, 2, \dots, 5$):

1. X_1 соответствует группе растяжений в плоскости xy : $x' = e^{a_1}x$, $y' = e^{a_1}y$;
2. X_2 порождает группу вращений:

$$x' = x \cos a_2 + y \sin a_2, \quad y' = -x \sin a_2 + y \cos a_2, \quad \theta' = \theta + a_2;$$

3. X_3 образует группу переноса относительно функции σ : $\sigma' = \sigma + a_3$;
4. X_5 соответствует группе обобщенных переносов в плоскости xy :

$$x' = x + a_5 \xi(\sigma, \theta), \quad y' = y + a_5 \eta(\sigma, \theta) \quad (19)$$

и образует бесконечномерный идеал алгебры L .

5. Однопараметрическая группа преобразований, задаваемая оператором X_4 , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= ue^{a_4} \cos \theta' - ve^{-a_4} \sin \theta', \\ y' &= ue^{a_4} \sin \theta' + ve^{-a_4} \cos \theta', \\ \sigma' &= 2k \left(\frac{\sigma}{2k} ch 2a_4 - \theta sh 2a_4 \right), \\ \theta' &= - \left(\frac{\sigma}{2k} sh 2a_4 - \theta ch 2a_4 \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где u и v – это функции из (15)

$$\begin{aligned} u &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ v &= -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned}$$

Можно показать, что преобразования (20) действуют на переменные линейной системы (16) как растяжения

$$\begin{aligned} u' &= e^{a_4}u, \quad v' = e^{-a_4}v, \\ \alpha' &= e^{2a_4}\alpha, \quad \beta' = e^{-2a_4}\beta, \end{aligned}$$

поэтому преобразования (20) можно назвать *квазирастяжением*.

4. Размножение решений

Система идеальной плоской пластичности (11) исследуется на протяжении многих лет. Упомянем некоторые из ее точных решений: а) решение Прандтля и его обобщения; б) решение для кругового отверстия, нагруженного только равномерно распределенным нормальным давлением; в) решение Надаи для пластического региона вокруг кругового отверстия нагруженного постоянным касательным напряжением; г) решение для сходящегося канала с прямыми границами и е) спирально-симметричное решение для каналов с границами в виде логарифмических спиралей [1]. Для некоторых краевых задач этой системы были построены аналитические решения с использованием законов сохранения в [4, 10]. Опишем процесс деформирования решений системы (11).

1. Решение Л. Прандтля, как указано в [3], явилось в свое время основой теоретического анализа прикладных задач обработки металлов давлением. Оно может быть интерпретировано как решение, описывающее напряжения в прямоугольном слое жестко-пластического материала, сжимаемого шероховатыми плитами. Слой предполагается тонким, т. е. его длина гораздо больше толщины. В терминах функций σ , θ для системы (11) это решение имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma &= -p_1 - k\frac{x}{h} + k\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}, \\ y &= h \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (21)$$

где $2h = \text{const}$ – толщина слоя, прямые линии $y = \pm h$ являются границами плит, $p_1 = \text{const}$ – значение гидростатического давления при $x = 0$. Граничные условия имеют вид

$$\theta|_{y=h} = \pi n, \quad n \in Z, \quad \sigma|_{y=h} = -p_1 - k\frac{x}{h}.$$

Характеристиками решения Прандтля являются циклоиды, параметрическое уравнение которых следующее:

$$\begin{aligned}x &= h(\mp 2\theta - \sin 2\theta) - h\left(2C_i + \frac{p_1}{k}\right), \\ y &= h \cos 2\theta, \quad i = 1, 2, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

здесь инварианты Римана (12) постоянны: $\alpha = \text{const} = C_1$, $\beta = \text{const} = C_2$. Каждое семейство циклоид имеет огибающую $y = \pm h$ (рис. 1).

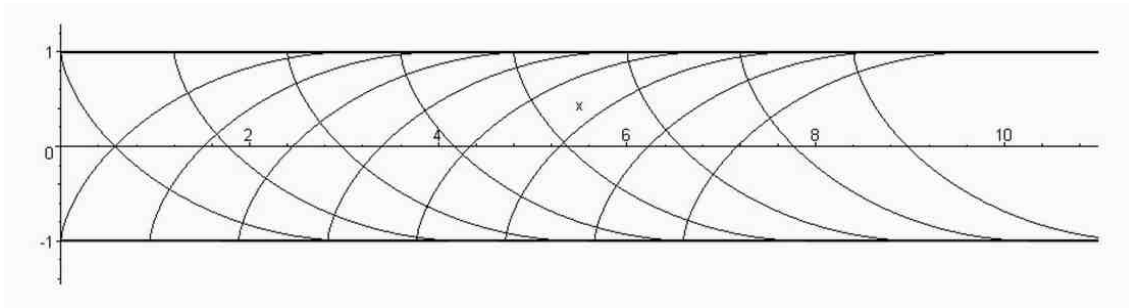


Рис. 1. Начальные характеристики (циклоиды) решения Прандтля

Решение (21) является инвариантным относительно подалгебры $X_3 + \gamma X_5$, где оператор X_5 имеет коэффициенты $\xi = 1, \eta = 0$. Действительно, действуя соответствующей группой преобразований на (21), получим только другое значение константы p_1 . Растяжения, соответствующие оператору X_1 , только изменяют постоянную h . Применение вращения X_2 не дает ничего нового с механической точки зрения, получаются повернутые параллельные плиты, сжимаемые в направлении друг друга.

Решение Прандтля получило многочисленные дополнения и обобщения различными авторами (см. [3]). Обобщим его, используя действие квазирастяжений (20). В терминах преобразованных переменных x', y', σ', θ' решение Прандтля имеет тот же вид (так как симметрия квазирастяжения допускается исходной системой)

$$\begin{aligned}\sigma' &= -p_1 - k\frac{x'}{h} + k\sqrt{1 - \frac{y'^2}{h^2}}, \\ y' &= h \cos 2\theta'.\end{aligned}\quad (22)$$

Чтобы получить S -решение в виде (9), необходимо заменить x', y', σ', θ' соответствующими соотношениями из (20).

Подставляя x', y' , выраженные из (22), в значения для u' и v'

$$\begin{aligned}e^{a_4}u &= u' = x' \cos \theta' + y' \sin \theta', \\ e^{-a_4}v &= v' = -x' \sin \theta' + y' \cos \theta'\end{aligned}$$

и учитывая (15), получим

$$\begin{aligned}e^{a_4}(x \cos \theta + y \sin \theta) &= -h \sin \theta' - \frac{h}{k}(\sigma' + p_1) \cos \theta', \\ e^{-a_4}(-x \sin \theta + y \cos \theta) &= h \cos \theta' + \frac{h}{k}(\sigma' + p_1) \sin \theta'.\end{aligned}\quad (23)$$

Выражая явно x, y из (23), имеем S -решение в виде:

$$\begin{aligned}x &= -h(e^{a_4} \sin \theta \cos \theta' + e^{-a_4} \cos \theta \sin \theta') - \frac{h}{k}(\sigma' + p_1)(e^{a_4} \sin \theta \sin \theta' + e^{-a_4} \cos \theta \cos \theta'), \\ y &= h(e^{a_4} \cos \theta \cos \theta' - e^{-a_4} \sin \theta \sin \theta') + \frac{h}{k}(\sigma' + p_1)(e^{a_4} \cos \theta \sin \theta' - e^{-a_4} \sin \theta \cos \theta'),\end{aligned}\quad (24)$$

где $\theta = \frac{\sigma'}{2k}sh2a_4 + \theta'ch2a_4$.

Для получения деформированных характеристик необходимо положить в (24)

$$\sigma' = 2k(K_1 + \theta'), \quad \theta = K_1sh2a_4 + \theta'e^{2a_4}\quad (25)$$

для первого семейства и

$$\sigma' = 2k(K_2 - \theta'), \quad \theta = K_2sh2a_4 + \theta'e^{-2a_4}\quad (26)$$

для второго семейства линий скольжения. Здесь K_1 и K_2 - некоторые константы. Таким образом получим параметрические уравнения линий скольжения, в которых параметром является величина θ' .

Окончательно S -характеристика первого семейства имеет вид

$$\begin{aligned}x &= -\frac{h}{k}[2k(K_1 + \theta') + p_1][cha_4 \cos(\theta - \theta') - sha_4 \cos(\theta + \theta')] - \\ &\quad - h[sha_4 \sin(\theta - \theta') + cha_4 \sin(\theta + \theta')], \\ y &= -\frac{h}{k}[2k(K_1 + \theta') + p_1][cha_4 \sin(\theta - \theta') - sha_4 \sin(\theta + \theta')] - \\ &\quad - h[-sha_4 \cos(\theta - \theta') - cha_4 \cos(\theta + \theta')], \\ &\quad \theta = K_1sh2a_4 + \theta'e^{2a_4}.\end{aligned}\quad (27)$$

S -характеристика второго семейства выражается аналогично

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{h}{k} [2k(K_2 - \theta') + p_1] [cha_4 \cos(\theta - \theta') - sha_4 \cos(\theta + \theta')] - \\
&\quad - h [sha_4 \sin(\theta - \theta') + cha_4 \sin(\theta + \theta')], \\
y &= -\frac{h}{k} [2k(K_2 - \theta') + p_1] [cha_4 \sin(\theta - \theta') - sha_4 \sin(\theta + \theta')] - \\
&\quad - h [-sha_4 \cos(\theta - \theta') - cha_4 \cos(\theta + \theta')], \\
\theta &= K_2 sh2a_4 + \theta' e^{-2a_4}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Построим огибающие семейства (27). Для этого необходимо исключить параметр K_1 , имея в виду, что для этого семейства $\frac{\partial y}{\partial K_1} = \frac{\partial x}{\partial K_1} tg\theta$. Это легко сделать, дифференцируя второе уравнение в (23) и учитывая (25).

После соответствующих вычислений получим, что уравнения (27) задают огибающую первого семейства при

$$K_1 = -\theta' - \frac{p_1}{2k} + \left(\frac{e^{2a_4}}{sh2a_4} - \frac{1}{2} \right) tg\theta', \quad a_4 \neq 0.$$

Аналогично, учитывая, что для второго семейства характеристик $\frac{\partial y}{\partial K_2} = -\frac{\partial x}{\partial K_2} ctg\theta$, и дифференцируя первое уравнение в (23) со значениями (26), получим, что уравнения (28) задают огибающую второго семейства линий скольжений при

$$K_2 = \theta' - \frac{p_1}{2k} - \left(\frac{e^{-2a_4}}{sh2a_4} + \frac{1}{2} \right) ctg\theta', \quad a_4 \neq 0.$$

Таким образом, поле характеристик (27), (28) можно интерпретировать как описывающее пластическое состояние слоя, сжимаемого плитами, имеющими форму, указанную на рис. 2, для фиксированных значений параметра a_4 .

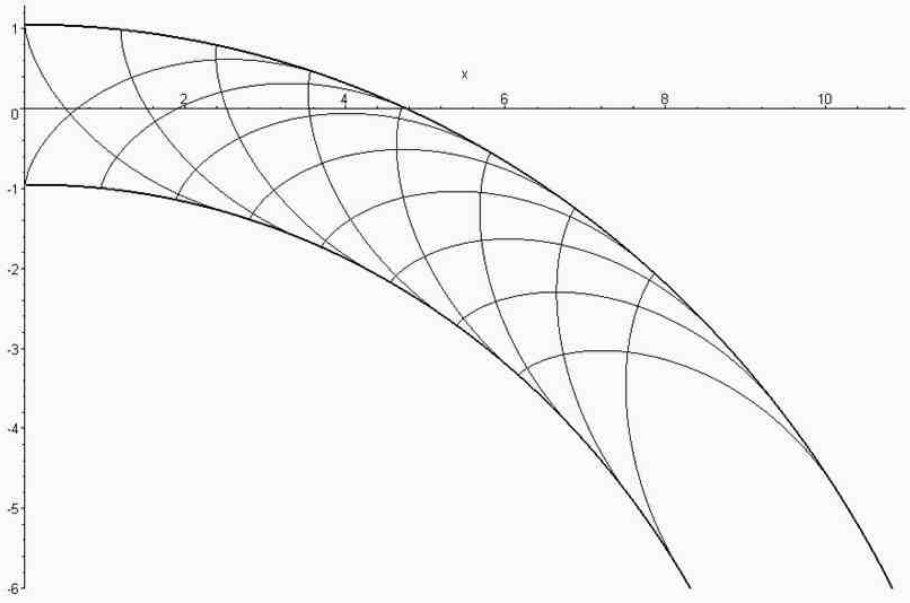


Рис. 2. Деформированные характеристики решения Прандтля

2. Рассмотрим хорошо известное решение [5], имеющее вид

$$\begin{aligned}\theta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{\pi}{4} = \phi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma &= -p_2 + k + k \ln \frac{x^2 + y^2}{R^2} = -p_2 + k + k \ln \frac{r^2}{R^2},\end{aligned}\quad (29)$$

где r, ϕ – полярные координаты. Это решение описывает пластическое состояние среды вокруг кругового отверстия радиуса R , нагруженного равномерно распределенным нормальным давлением p_2 и нулевым касательным напряжением, удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}\theta|_{r=R} &= \phi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma|_{r=R} &= -p_2 + k.\end{aligned}\quad (30)$$

Линиями скольжения являются логарифмические спирали вида

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{4}, \quad r = R \exp \left(\pm \theta + \frac{p_2 - k}{2k} + C_i \right), \quad (31)$$

где $C_1 = \alpha, C_2 = \beta$.

Решение (29) инвариантно относительно подалгебры $X_1 + \gamma X_3$. Действительно, действуя соответствующей группой преобразований на (29), получим только другие значения постоянных p_2 и R . Применение вращения X_2 не приводит к значимому изменению с механической точки зрения, получаем повернутое круговое отверстие.

Рассмотрим действие квазирастяжений (20). В переменных x', y', σ', θ' решение для отверстия имеет тот же самый вид

$$\begin{aligned}\theta' &= \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'} + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma' &= -p_2 + k + k \ln \frac{x'^2 + y'^2}{R^2}.\end{aligned}\quad (32)$$

Легко заметить, что

$$\frac{y'}{x'} = \frac{ue^{a_4} \sin \theta' + ve^{-a_4} \cos \theta'}{ue^{a_4} \cos \theta' - ve^{-a_4} \sin \theta'} = \frac{tg \theta' + \frac{v}{u} e^{-2a_4}}{1 - tg \theta' \frac{v}{u} e^{-2a_4}} = \operatorname{tg}(\theta' + \delta),$$

где $\tan \delta = \frac{v}{u} e^{-2a_4}$. Тогда из первого уравнения (32) получим $\delta = -\pi/4$, поэтому

$$v = -ue^{2a_4}. \quad (33)$$

Кроме того, используя соотношения (15), будем иметь

$$\frac{v}{u} = \frac{-x \sin \theta + y \cos \theta}{x \cos \theta + y \sin \theta} = \frac{\frac{y}{x} - tg \theta}{1 + \frac{y}{x} tg \theta} = \operatorname{tg}(\phi - \theta) = -e^{2a_4}$$

и для функции θ получаем явную формулу

$$\theta = \phi + \operatorname{arctg} e^{2a_4}, \quad (34)$$

где ϕ – полярный угол.

Преобразованный полярный радиус r принимает вид

$$r^2 = x'^2 + y'^2 = u^2 e^{2a_4} + v^2 e^{-2a_4}.$$

Из (20), переходя к полярным координатам и учитывая (33) с (34), имеем

$$\sigma \operatorname{ch} 2a_4 = -p_2 + k + k \ln \frac{2r^2 e^{2a_4} \cos^2(\operatorname{arctg} e^{2a_4})}{R^2} + 2k\theta \operatorname{sh} 2a_4,$$

что после упрощений приводит к явной формуле для функции σ :

$$\sigma = \frac{-p_2 + k}{\operatorname{ch} 2a_4} + 2k\theta \operatorname{sh} 2a_4 (\phi + \operatorname{arctg} e^{2a_4}) + \frac{k}{\operatorname{ch} 2a_4} \ln \frac{r^2}{R^2 \operatorname{ch} 2a_4}. \quad (35)$$

Окончательно S -решение имеет вид (34), (35). Отметим, что при $a_4 = 0$ S -решение совпадает с исходным решением (29).

Дадим механическую интерпретацию S -решению (34), (35). Для преобразованных переменных граничные условия аналогичны условиям (30)

$$\begin{aligned} \theta'|_{r'=R} &= \phi' + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma'|_{r'=R} &= -p_2 + k. \end{aligned}$$

Кривая $r' = R$ принимает вид

$$r'^2 = r^2 (\cos^2(\phi - \theta) e^{2a_4} + \sin^2(\phi - \theta) e^{-2a_4}) = R^2,$$

но так как вдоль нее $\phi - \theta = \operatorname{arctg} e^{2a_4}$, получаем, что граничная кривая для S -решения – это окружность $r^2 = R^2 \operatorname{ch} 2a_4$.

Окончательно S -решение (34), (35) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \theta|_{r=R\sqrt{\operatorname{ch} 2a_4}} &= \phi + \operatorname{arctg} e^{2a_4}, \\ \sigma|_{r=R\sqrt{\operatorname{ch} 2a_4}} &= \frac{-p_2 + k}{\operatorname{ch} 2a_4} + 2k\theta \operatorname{sh} 2a_4 (\phi + \operatorname{arctg} e^{2a_4}), \end{aligned}$$

и гидростатическое давление σ теперь зависит от полярного угла ϕ .

5. Принцип суперпозиции решений

Известно, что система (1) может быть линеаризована преобразованием годографа $T : x = x(u_1, u_2)$, $y = y(u_1, u_2)$ в области, где соответствующий Якобиан $\Delta = \partial(u_1, u_2)/\partial(x, y)$ отличен от нуля. При этом (1) принимает линейный вид

$$\begin{aligned} b_{12} \frac{\partial x}{\partial u_1} - b_{11} \frac{\partial x}{\partial u_2} - a_{12} \frac{\partial y}{\partial u_1} + a_{11} \frac{\partial y}{\partial u_2} &= 0, \\ b_{22} \frac{\partial x}{\partial u_1} - b_{21} \frac{\partial x}{\partial u_2} - a_{22} \frac{\partial y}{\partial u_1} + a_{21} \frac{\partial y}{\partial u_2} &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Назовем любое решение системы (1) $U = (u_1(x, y), u_2(x, y))$ неособым решением, если его преобразование в решение $\chi = T(U) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2))$ для линеаризованной системы (36) невырожденное.

Линейная система (36) всегда допускает бесконечномерную группу точечных симметрий ввиду принципа суперпозиции решений линейной системы. Соответствующий инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X = \xi(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (37)$$

где $(x = \xi, y = \eta)$ – произвольное решение системы (36), а группа имеет вид

$$x' = x + a\xi, \quad y' = y + a\eta, \quad (38)$$

где $a \in -P$ – групповой параметр.

Пусть $\chi_1 = (x_1(u_1, u_2), y_1(u_1, u_2))$ и $\chi_2 = (x_2(u_1, u_2), y_2(u_1, u_2))$ – два решения линейной системы (36), определяющие неявно два решения U^1 и U^2 квазилинейной системы (1) соответственно.

Возьмем в качестве коэффициентов оператора (37) разницу двух решений χ_1 и χ_2 :

$$\xi = x_1 - x_2, \quad \eta = y_1 - y_2,$$

тогда в силу (38) имеем

$$\begin{aligned} x &= x'(u_1, u_2) = x_2 + a\xi = ax_1(u_1, u_2) + (1-a)x_2(u_1, u_2), \\ y &= y'(u_1, u_2) = y_2 + a\eta = ay_1(u_1, u_2) + (1-a)y_2(u_1, u_2), \end{aligned} \quad (39)$$

что является решением системы (36) как линейная комбинация двух решений. Но формулы (39) неявно задают S -решение $(u_1(x, y, a), u_2(x, y, a))$, которое при $a = 1$ совпадает с U^1 , а при $a = 0$ – с U^2 . Это позволяет связать любые два решения U^1, U^2 квазилинейной системы (1), которые могут быть представлены в виде χ_1, χ_2 .

Построим новое аналитическое решение для системы пластичности (11), используя группу (19) оператора X_5 . Для этого выразим решения (21) и (29) как решения для линеаризованной системы (18). Первое из них примет вид:

$$\begin{aligned} x_1(\sigma, \theta) &= -\sigma \frac{h}{k} - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta, \\ y_1(\sigma, \theta) &= h \cos 2\theta, \end{aligned}$$

а второе запишется так

$$\begin{aligned} x_2(\sigma, \theta) &= Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{\frac{\sigma}{2k}}, \\ y_2(\sigma, \theta) &= Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{\frac{\sigma}{2k}}. \end{aligned}$$

Используя соотношения (39) при $a = a_5$, получим S -решение

$$\begin{aligned} x &= a\left(-\sigma \frac{h}{k} - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta\right) + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{\frac{\sigma}{2k}}, \\ y &= ah \cos 2\theta + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{\frac{\sigma}{2k}}. \end{aligned} \quad (40)$$

По аналогии с граничными условиями (30) ищем граничную кривую для S -решения (40), полагая

$$\sigma = -p_1 + k, \quad \theta = \phi + \pi/4 \quad (41)$$

и переходя в полярные координаты. Тогда из второго соотношения (40) имеем

$$r = -2ah \cos \phi + (1-a)Re^{\frac{p_2-p_1}{2k}}, \quad (42)$$

в то время как первое соотношение выполняется тождественно. Таким образом, S -решение (40) удовлетворяет граничным условиям (41) вдоль граничной кривой (42), которая является улиткой Паскаля. Подобный результат был получен в [11].

При переходе к Римановым инвариантам α и β (12) решение (40) определит параметрические уравнения деформированных характеристик. Так, если взять $\sigma = 2k(\alpha + \theta)$, то уравнения первого семейства примут вид:

$$\begin{aligned} x &= -ah\left(2(\alpha + \theta) + \frac{p_1}{k} + \sin 2\theta\right) + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{\alpha+\theta}, \\ y &= ah \cos 2\theta + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{\alpha+\theta}. \end{aligned} \quad (43)$$

На рис. 3 изображены два семейства характеристик (31), соответствующие решению (29) при $p_2 = k$, для кругового отверстия радиуса $R = 2$. Деформированные линии скольжения (43) и граничная линия в форме улитки Паскаля представлены на рис. 4 ($h = 1, p_1 = p_2$).

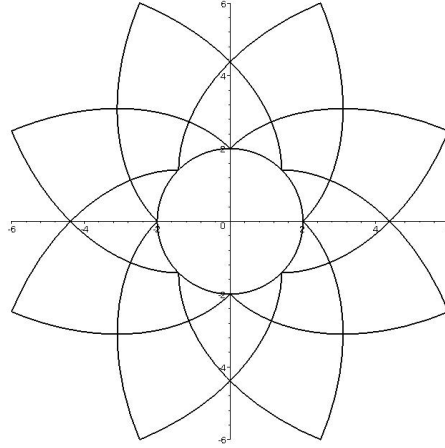


Рис. 3. Линии скольжения (логарифмические спирали) для кругового отверстия

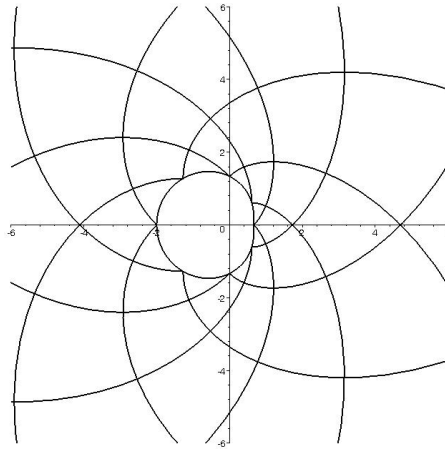


Рис. 4. Деформированные линии скольжения для улитки Паскаля

6. Заключение

В работе рассмотрены некоторые приложения групповых методов к решению системы плоской идеальной пластичности. Основной результат заключается в использовании действия допускаемых точечных преобразований не только на известные решения, но и на семейства характеристик. Эта точка зрения позволяет эффективно подбирать подходящие граничные условия для размноженных решений.

Использование бесконечномерного идеала алгебры Ли допускаемых симметрий позволило сформулировать принцип суперпозиции решений для квазилинейной системы пластичности и построить новые аналитические решения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Аннин, Б. Д.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. - Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1985. - 143 с.
- [2] *Бочаров, А. В.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А. В. Бочаров и др. ; под ред. А. М. Виноградова, И. С. Красильщика. - М. : Факториал, 1997. - 464 с.
- [3] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. - М. : Физматлит, 2003. - 704 с.
- [4] *Киряков, П. П.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. - Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. - 190 с.
- [5] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. - М. : ИЛ, 1954. - 647 с.
- [6] *Овсянников, Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. - М. : Наука, 1978. - 400 с.
- [7] *Олвер, П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. - М. : Мир, 1989. - 639 с.
- [8] *Рождественский, Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. - М. : Наука, 1978.
- [9] *Senashov, S. I.* Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity / S. I. Senashov, A. M. Vinogradov // Proc. Edinburgh Math. Soc. - 1988. - Vol. (2.2) 31. - P. 415-439.
- [10] *Senashov, S. I.* 2-dimensional plasticity: boundary problems and conservation laws, reproduction of solutions / S. I. Senashov, A. Yakhno // Symmetry in nonlinear mathematical physics. - Kiev, 2004. - Pt. 1, 2, 3. - P. 231-237.
- [11] *Senashov, S. I.* Reproduction of solutions of bidimensional ideal plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // Internat. J. Non-Linear Mech. - 2007. - Vol. 42. - P. 500-503.

S. I. Senashov, A. N. Yakhno, L. V. Yakhno

DEFORMATION OF CHARACTERISTICS OF PLANE IDEAL PLASTICITY

Siberian State Aerospace University

University of Guadalajara

Abstract. The hyperbolic system of plane ideal plasticity equations under the Saint-Venant - Mises' yield criterion is considered. Characteristics on this system are deformed under the action of point transformations committed by the group that allows to construct new analytic solutions. The mechanical sense of obtained characteristic fields is discussed. The general algorithm of solution transformation of two quasilinear homogeneous equations hyperbolic system of two independent variables is proposed.

Keywords: boundary problem for hyperbolic systems of the equations in private derivative; the group analysis; plasticity; exact solutions of differential equations.

Сенашов Сергей Иванович

доктор физико-математических наук, профессор Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика Решетнева, г. Красноярск

e-mail: sen@sibsau.ru

Яхно Лилия Владимировна

кандидат физико-математических наук, математический факультет, Университет Гвадалахары, г. Гвадалахара, Мексика

e-mail: iakhno@kgtei.ru

Яхно Александр Николаевич

кандидат физико-математических наук, математический факультет, Университет Гвадалахары, г. Гвадалахара, Мексика

e-mail: alexander.yakhno@ucei.udg.mx

Senashov Sergey Ivanovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Financial-Economic Department, M. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

Yakhno Liliya Vladimirovna

Ph.D., Mathematics Department, Guadalajara University, Guadalajara, Mexico

Yakhno Alexander Nikolaevich

Ph.D., Mathematics Department, Guadalajara University, Guadalajara, Mexico

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ В ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. На примерах стержневой системы и общей плоской задачи теории идеальной пластичности обсуждаются вопросы теории предельного состояния. Гиперболический тип уравнений, присущий, в основном, статически определимым уравнениям теории предельного состояния, связывается с достижением «предельной точки», характеризуемой «исчезновением» зоны статической неопределимости. Уравнения теории предельного состояния, относящиеся к эллиптическому типу, соответствуют недостижению «предельной точки», которая уходит в бесконечность.

Ключевые слова: усилия, напряжения, предел разрушения, предельная точка, статическая определимость, предельное состояние.

УДК: 539.375

1. При растяжении деформируемый образец до разрушения «проживает жизнь» в зависимости от свойства материала: упругую, хрупкую, упругопластическую, упруговязкопластическую и т. д. Приращением «времени» для образца является приращение нагрузки. При достижении предельной нагрузки образец разрушается.

Обозначим через σ растягивающее напряжение, через k – предельное напряжение, предел разрушения. Очевидно, величина k может зависеть от различных параметров, сопровождающих «жизнь» образца, рассмотрим простейшую модель, которая может быть положена в основу дальнейших построений, положим $k = const$. Другими словами, «все предопределено», какой бы «образ жизни» образец не вел при $\sigma < k$: упругий, хрупкий и т. д., это не имеет никакого значения для наступления разрушения при $\sigma = k$.

Итак, k – предел разрушения, независимая константа, характеризующая предельное состояние растягиваемого образца.

2. Рассмотрим три стержня общей поперечной площади S , растягиваемые силой P (рис. 1).

Предположим, что стержни находятся под действием чистого растяжения и расположены так, что любыми механическими эффектами, типа изгибающих моментов и пр., можно пренебречь.

Усилия в стержнях обозначим p_1, p_2, p_3 , поперечное сечение стержней соответственно – s_1, s_2, s_3 .

Имеет место

$$P = p_1 + p_2 + p_3, S = s_1 + s_2 + s_3. \quad (1)$$

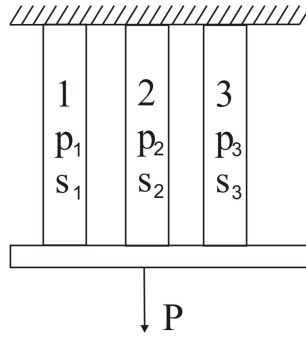


Рис. 1.

Введем напряжения

$$\sigma = \frac{P}{S}, \quad \sigma_1 = \frac{p_1}{s_1}, \quad \sigma_2 = \frac{p_2}{s_2}, \quad \sigma_3 = \frac{p_3}{s_3}. \quad (2)$$

Из (1), (2) получим

$$\sigma = \sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 + \sigma_3 l_3, \quad l_i = \frac{s_i}{S}, \quad l_1 + l_2 + l_3 = 1. \quad (3)$$

Предположим, что мы располагаем механизмом распределения силы P на стержни, другими словами, можно в процессе нагружения произвольно перераспределять нагрузки между стержнями, при этом, естественно, условие (3) должно быть выполнено. Предположим, что предел разрушения один для всех трех стержней:

$$\sigma_i \leq k. \quad (4)$$

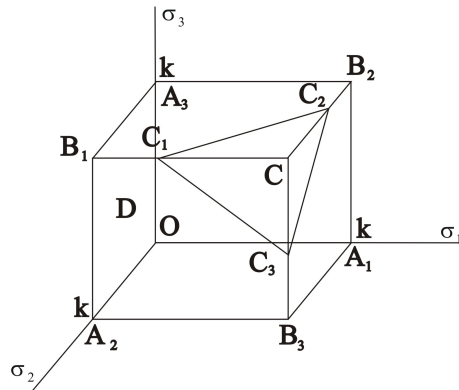


Рис. 2.

Рассмотрим ортогональную систему координат σ_i (рис. 2), отложим по осям величину k и проведем плоскости, ортогональные к осям координат σ_i , проходящие через концы отрезков длиной k . В результате получим куб, изображенный на рис. 2, внутреннее пространство которого обозначим через D . Соотношение (3) интерпретируется плоскостью в системе координат

σ_i , движущейся параллельно самой себе по мере роста величины σ . На рис. 2 показана часть этой плоскости $C_1 C_2 C_3$.

Любая точка на части плоскости $C_1 C_2 C_3$ (рис. 2) соответствует статически неопределимому состоянию системы стержней (рис. 1).

Любому процессу изменения напряженного состояния стержней (рис. 1) соответствует траектория в пространстве $D : \sigma_1(\sigma), \sigma_2(\sigma), \sigma_3(\sigma)$.

По мере увеличения нагрузки площадь $C_1 C_2 C_3$ стягивается к предельной точке C .

Предельное статически определимое состояние будет достигнуто при исчезновении зоны статически неопределимого состояния C_1, C_2, C_3 в точке C (рис. 2).

В результате нагружения достигается предельное состояние

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = k, \quad (5)$$

соответствующее точке C (рис. 2).

Итак, все траектории, все «жизненные пути» заканчиваются «одновременно» в предельной точке C . Сам «жизненный путь», траектория нагружения зависит от характера нагружения стержней (рис. 1). Например, один из стержней при соответствующем распределении нагрузки может выйти на предельное значение, например, $\sigma_1 = k$ при $\sigma_2, \sigma_3 < k$. Далее, второй стержень – на предельное значение $\sigma_2 = k$ при $\sigma_3 < k$, дальнейшее движение будет продолжаться по ребру B_3C и т. д.

3. Предельное состояние может быть достигнуто лишь при переходе статически неопределимого состояния в статически определимое. При статически неопределимом состоянии напряженное и деформированное состояния связаны между собой, и изменение (увеличение) нагрузки ведет к изменению деформированного состояния.

4. Предположим, что предел разрушения имеет вид

$$K = k + \mu\sigma, \quad k, \mu - const; \quad k, \mu > 0. \quad (6)$$

Согласно (6), предел разрушения зависит от величины σ и с ростом σ плоскости, ограничивающие пространство D (рис. 2), смещаются параллельно себе, предельная точка C^* смещается по отношению к точке C (рис. 3). Плоскость $C_1^* C_2^* C_3^*$ достигнет предельной точки C^* в случае

$$\sigma = K = k + \mu\sigma, \quad (7)$$

откуда

$$\sigma_{\text{пред}} = \frac{k}{1 - \mu}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что предельное состояние может быть достигнуто при $\mu < 1$. При $\mu \geq 0$ предельное состояние не достигается, точка C^* (рис. 3) при возрастании величины σ уходит в бесконечность.

5. Рассмотрим уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат x, y .

Присоединим к соотношениям (9) условие предельного состояния

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = F(\sigma_1, \sigma_2) = 0, \quad (10)$$

где σ_1, σ_2 – главные напряжения.

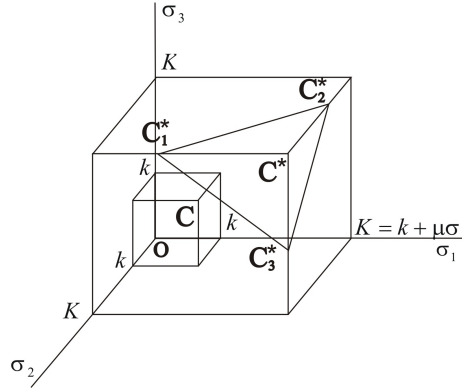


Рис. 3.

Компоненты напряжения связаны с главными напряжениями соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta = p + \tau \cos 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta = p - \tau \cos 2\theta, \\ \tau_{xy} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta = \tau \sin 2\theta,\end{aligned}\quad (11)$$

где θ – угол между первым главным напряжением и осью x ,

$$\begin{aligned}p &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \\ \sigma_1 &= p + \tau, \quad \sigma_2 = p - \tau.\end{aligned}\quad (12)$$

Из (10), (12) следует

$$\tau = \tau(p). \quad (13)$$

Из (9), (11), (13) получим систему уравнений

$$\begin{aligned}(1 + \tau' \cos 2\theta) \frac{\partial p}{\partial x} + \tau' \sin 2\theta \frac{\partial p}{\partial y} - 2\tau \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\tau \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \tau' \sin 2\theta \frac{\partial p}{\partial x} + (1 - \tau' \cos 2\theta) \frac{\partial p}{\partial y} + 2\tau \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\tau \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \tau' &= \frac{d\tau}{dp}.\end{aligned}\quad (14)$$

Уравнения характеристик системы уравнений (14) имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = tg\varphi = \frac{\sin 2\theta \pm \sqrt{1 - \tau'^2}}{\cos 2\theta + \tau'}, \quad (15)$$

где φ – угол наклона характеристики к оси x .

Согласно (15), система уравнений (14) является

$$\begin{aligned}\text{гиперболической при } |\tau'| < 1, \\ \text{параболической при } |\tau'| = 1, \\ \text{эллиптической при } |\tau'| > 1.\end{aligned}\quad (16)$$

Положим

$$\tau = k + \mu p, \quad k, \mu - const; \quad k, \mu > 0. \quad (17)$$

Согласно (16), (17), система уравнений (14) будет

$$\begin{aligned} &\text{гиперболической при } \mu < 1, \\ &\text{параболической при } \mu = 1, \\ &\text{эллиптической при } \mu > 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим (17) при $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = 0$, будем иметь

$$\sigma_1 = 2k + \mu\sigma_1, \tag{19}$$

откуда аналогично (7),(8) определяется предельное значение

$$\sigma_{1 \text{ пред}} = \frac{2k}{1 - \mu}. \tag{20}$$

При $\mu < 1$ предельное значение достигается, при $\mu \geq 1$ предельное состояние не достигается.

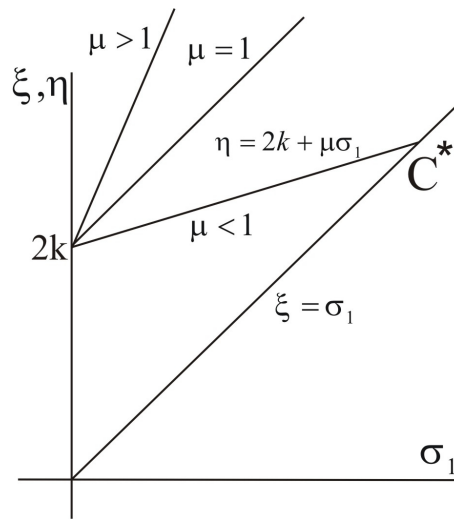


Рис. 4.

Обозначим в формуле (19) слева $\sigma_1 = \xi$, справа $-2k + \mu\sigma_1 = \eta$.

Наложим системы координат $\xi - \sigma_1$, $\eta - \sigma_1$ (рис. 4).

С ростом величины σ_1 пересечение прямых $\xi = \sigma_1$, $\eta = 2k + \mu\sigma_1$ возможно в предельной точке C^* в случае $\mu < 1$, при $\mu \geq 1$ предельная точка C^* «уходит» в бесконечность.

При достижении предельной точки C^* уравнения принадлежат к гиперболическому типу.

Возникает вопрос, как интерпретировать статически определенное состояние, соответствующее эллиптическому типу уравнений предельного состояния.

Характер деформирования для несжимаемого тела, свойства которого не зависят от величины p , носит сдвиговой характер. В подобных случаях уравнения предельного состояния принадлежат к гиперболическому типу, характеристики ортогональны между собой и совпадают с линиями действия максимальных касательных усилий, являются линиями скольжения. По мере возрастания среднего давления p (12) доля влияния объемных напряжений и деформаций возрастает, доля сдвиговых деформаций уменьшается, угол между характеристиками меняется и при $\tau'(p) > 0$ (15) деформирование происходит преимущественно за счет объемных деформаций. Эллиптический тип уравнений можно связать с этим обстоятельством, но вопрос о недостижении в этом случае напряженным состоянием «предельной точки» нуждается в исследовании.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

D. D. Ivlev

ABOUT A QUESTION IN LIMITING STATE THEORY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Questions of limiting state theory are discussed on the examples of rod system and general flat problem of ideal plasticity theory. Hyperbolic type of equations mainly inherent in statically determinate equations of limiting state theory is connected with reaching of accumulation point characterized by disappearance of static indefinability zone. Limiting state theory equations concerning elliptical type correspond to accumulation point failure goes leaves to infinity.

Keywords: efforts, tensions, destruction limit, accumulation point, static definability, limiting state.

Ивлев Дюис Данилович

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

e-mail: ivlev21@mail.ru

Ivlev Dyuis Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛЫХ ТРЕЩИН С ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ

Азербайджанская сельскохозяйственная академия

Аннотация. Рассматривается задача механики контактного разрушения для дорожного покрытия, имеющего в сечении трещины. Считается, что концевые зоны трещин на некоторых участках входят в контакт. Определение контактных напряжений сводится к решению сингулярного интегрального уравнения.

Ключевые слова: напряжения, деформации, упругость, трещины, дорожное покрытие.

УДК: 539.375

Рассматривается задача механики разрушения для твердого дорожного покрытия, имеющего в сечении трещины. Причиной происхождения таких дефектов чаще всего бывает нарушение режима термообработки при изготовлении (нанесении) асфальтобетона или механические повреждения поверхности катания дороги в условиях эксплуатации.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия в процессе работы. Будем считать, что в сечении имеется N прямолинейных внутренних трещин длиной $2\ell_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Будем рассматривать практически важный случай, когда трещины имеют малую длину. В этом случае напряженно-деформированное состояние в окрестности трещин можно с достаточной для практики точностью найти с помощью решения соответствующей задачи для плоскости ($h \rightarrow \infty$, где h – высота покрытия) с трещинами, на берегах которых действует усилия, определяемые в процессе решения задачи.

Расчетная схема для дорожного покрытия принята в следующем виде:

- 1) покрытие является неразрезной балкой бесконечной длины неизменного поперечного сечения, лежащей на сплошном упругом основании;
- 2) вертикальные силы приложены в плоскости симметрии покрытия, а боковые и продольные силы не влияют на величину изгибающего момента;
- 3) существует линейная зависимость между величиной, равномерно распределенной по длине покрытия нагрузки, и вызванной ею осадкой y .
- 4) форма упругой линии изгиба дорожного покрытия от произвольной динамической нагрузки с учетом неровностей, колебаний поддрессорных масс и т.п. в любой момент времени соответствует форме, возникающей от действия постоянной нагрузки, взятой в тот же момент времени.

Согласно этой расчетной схеме распределение изгибающего момента M по длине бездефектного дорожного покрытия будет [4]

$$M = P_k \frac{f(\beta x)}{4\beta}, \quad f(\beta x) = e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x). \quad (1)$$

Здесь $\beta = \sqrt{\frac{\lambda}{4EI}}$ – коэффициент относительной жесткости дорожного основания; λ – коэффициент постели основания; E – модуль продольной упругости материала; I – момент инерции поперечного сечения покрытия относительно горизонтальной оси; x – расстояние от расчетного сечения до точки приложения силы давления колеса.

Вблизи точки взаимодействия колеса с дорожным покрытием будут неправильности в распределении напряжений по сравнению с распределением нормальных напряжений по элементарной теории изгиба балок. Поэтому к напряжениям, порождаемым изгибающим моментом (1), нужно еще добавить [4] местные напряжения

$$\sigma_r = -\frac{2P_k \cos \theta}{\pi} \frac{1}{br}, \quad (2)$$

где r – радиальное расстояние от точки приложения силы давления колеса; b – толщина покрытия.

Материал дорожного покрытия моделируем упругой средой с механическими характеристиками G , μ . В центрах трещин разместим начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$, оси x_k которых совпадают с линиями трещин и образуют углы α_k с осью x .

Принято, что берега трещин свободны от внешних нагрузок. Под действием внешней нагрузки в зоне сжимающих напряжений возможно закрытие берегов трещин, т. е. берега трещин на некоторых участках могут войти в контакт, что приведет к появлению контактных напряжений на данных участках берегов трещин. Итак, будем полагать наличие зон, в которых берега трещин взаимодействуют (вошли в контакт).

Принимаем, что эти области примыкают к вершине трещины, а их размеры, заранее неизвестные, могут быть сравнимы с размерами трещин.

1. Случай одной трещины

Выделим части трещины длиной d_1 и d_2 (концевые области), примыкающие к ее вершинам, в которой берега трещины взаимодействуют, т. е. вошли в контакт. Это взаимодействие препятствует раскрытию трещины. Будем считать, что взаимное проскальзывание берегов отсутствует, т. е. предельное равновесие не достигнуто.

В концевых областях, где берега трещины вошли в контакт, будут возникать нормальные $q_{y_1}(x_1)$ и касательные $\tau_{x_1 y_1}(x_1)$ напряжения. Величины этих контактных напряжений заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Краевые условия на берегах трещины будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} = 0, \tau_{x_1 y_1} = 0 & \text{ – на свободных берегах трещины,} \\ \sigma_{y_1} = q_{y_1}(x_1), \tau_{x_1 y_1} = q_{x_1 y_1}(x_1) & \text{ – на контактирующих берегах трещины.} \end{aligned} \quad (3)$$

Решения задачи ищем в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^0 + \sigma_{xy}^1, \quad (4)$$

где напряжения $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_{xy}^0$ есть распределение напряжений для бездефектной балки (покрытия).

Тогда граничное условие (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1}^{(1)} = -\sigma_{y_1}^{(0)}, \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = -\tau_{x_1 y_1}^{(0)} & \text{ – на свободных берегах трещины,} \\ \sigma_{y_1}^{(1)} = q_{y_1}(x_1) - \sigma_{y_1}^{(0)}, \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = q_{x_1 y_1}(x_1) - \tau_{x_1 y_1}^{(0)} & \text{ – на контактирующих берегах трещины.} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь компоненты напряжений $\sigma_{y_1}^{(0)}, \tau_{x_1 y_1}^{(0)}$ по известным формулам теории упругости определяются через $\sigma_y^{(0)}, \sigma_x^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}$.

Компоненты напряжений $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \sigma_{xy}^1$ должны удовлетворять уравнениям плоской задачи теории упругости.

Следовательно, их можно выразить через две комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ по формулам Колосова-Мусхелишвили [2]. Используя формулы Колосова-Мусхелишвили, запишем

краевые условия в виде граничной задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = \begin{cases} f_1 & \text{на свободных берегах трещин,} \\ q_{y_1} - iq_{x_1 y_1} + f_1 & \text{на контактирующих} \\ & \text{берегах трещин.} \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $f_1 = -(\sigma_{y_1}^0 - i\tau_{x_1 y_1}^0)$; t – аффикс точек берегов трещины.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, дающие решение граничной задачи (6), ищем в следующем виде [3]:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t)}{t-z_1} dt; \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{g_1(t)}{t-z_1} - \frac{T_1 e^{i\alpha_1}}{(t-z_1)^2} g_1(t) \right] dt; \\ T_1 &= t e^{i\alpha} + z_1^0; \quad z_1 = e^{-i\alpha_1} (z - z_1^0). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $g_1(t)$ – искомая функция, характеризующая скачок перемещений при переходе через линию трещины.

Удовлетворяя комплексными потенциалами (7) краевому условию (6) на берегах трещины, получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g_1(x_1)$.

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[R(t, x_1) g_1(t) + S(t, x_1) \overline{g_1(t)} \right] dt = \pi f_0(x_1), \quad |x_1| \leq \ell_1. \quad (8)$$

Здесь

$$f_0(x_1) = \begin{cases} f_1(x_1) & \text{на свободных берегах трещин,} \\ q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1) + f_1(x_1) & \text{на контактирующих} \\ & \text{берегах трещин.} \end{cases} \quad (9)$$

К комплексному сингулярному интегральному уравнению для внутренней трещины следует добавить дополнительное равенство, обеспечивающее однозначность смещений при обходе трещины

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1(t) dt = 0. \quad (10)$$

Применяя процедуру алгебраизации [1, 3] интегрального уравнения (8) при условии (10), сведем его к конечной системе M комплексных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1^0(t_m) = v^{(0)}(t_m) - iu^{(0)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ell_1 \left[g_1^0(t_m) R(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) + \overline{g_1^0(t_m)} S(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) \right] &= \pi f_0(x_r), \\ \sum_{m=1}^M g_1(t_m) &= 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} t_m &= \cos \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M), \\ x_r &= \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1). \end{aligned}$$

Если в (11) перейти к комплексно-сопряженным значениям, то получим еще M алгебраических уравнений. В правые части (11) входят неизвестные значения контактных напряжений $q_{y_1}(x_1)$ и $q_{x_1 y_1}(x_1)$ в узловых точках, принадлежащих конечным областям.

Условием, определяющим неизвестные контактные напряжения, возникающие на берегах трещины в конечных зонах, является отсутствие раскрытия трещины в этих областях. В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее записать для производной перемещений берегов трещины.

$$g(x_1) = \frac{2G}{i(1+\chi)} \frac{\partial}{\partial x_1} [u^+(x_1; 0) - u^-(x_1; 0) + i(v^+(x_1; 0) - v^-(x_1; 0))] = 0, \quad (12)$$

где x_1 – аффикс концевых областей трещины.

Требую выполнения условия (12) в узловых точках, содержащихся в концевых областях $(-\ell_1, -d_1)$ и (d_2, ℓ_1) , получаем недостающие уравнения для определения приближенных значений контактных напряжений $q_{y_1}(t_{m_1})$ и $q_{x_1 y_1}(t_{m_1})$ в узловых точках

$$g^{(0)}(t_{m_1}) = 0 \quad (m_1 = 1, 2, \dots, M_1; M_2, \dots, M), \quad (13)$$

где принято, что M_1 – число узловых точек отрезка $(-\ell_1, -d_1)$, а $(M - M_2)$ – число узловых точек, принадлежащих концевой области (d_2, ℓ_1) .

Для замкнутости системы (11) и (13) не хватает двух уравнений, определяющих размеры концевых областей. Условиями, служащими для определения размеров концевых зон, являются условия конечности напряжений в окрестности вершин трещин.

Записывая условия конечности напряжений, получаем еще два недостающих уравнения в следующем виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (-1)^m g^{(0)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi &= 0; \\ \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g^{(0)}(t_m) \cdot \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Алгебраические системы (11), (13) и (14) связаны между собой и должны решаться совместно. Решение систем (11), (13) и (14) позволяет определить значения искомой функции $g^{(0)}(t_m)$ в узловых точках, значения $q_{y_1} - iq_{x_1 y_1}$ – в тех узловых точках, которые содержатся в концевых областях, а также размеры концевых зон.

Полученная система из-за неизвестных размеров d_1 и d_2 концевой области оказалась нелинейной.

Нелинейную алгебраическую систему целесообразно решать методом последовательных приближений [4].

2. Случай произвольного числа трещин

Будем полагать наличие концевых областей, в которых берега трещин взаимодействуют (вошли в контакт). Считаем, что эти берега примыкают к вершинам соответствующих трещин, а их размеры заранее неизвестны. В концевых зонах, где берега трещин вошли в контакт, будут возникать нормальные $q_{y_k}(x_k)$ и касательные $q_{x_k y_k}(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) напряжения. Величины контактных напряжений $q_{y_k}(x_k)$ и $q_{x_k y_k}(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Граничные условия на берегах трещин будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{y_k} - i\tau_{x_k y_k} &= 0 \quad \text{– на свободных берегах трещины,} \\ \sigma_{y_k} - i\tau_{x_k y_k} &= q_{y_k} - iq_{x_k y_k} \quad \text{– на контактирующих берегах трещины.} \end{aligned} \quad (15)$$

Решение задачи ищем в виде (4). Используя (4), краевые условия (15) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_k}^1 &= -\sigma_{y_k}^0; \quad \tau_{x_k y_k}^1 = -\tau_{x_k y_k}^0 \quad \text{– на свободных берегах трещины,} \\ \sigma_{y_k}^1 &= q_{y_k}^- \sigma_{y_k}^0; \quad \tau_{x_k y_k}^1 = q_{x_k y_k}^- \tau_{x_k y_k}^0 \quad \text{– на контактирующих берегах трещины.} \end{aligned} \quad (16)$$

Краевые условия можно записать в виде граничной задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

$$\Phi(t_k) + \overline{\Phi(t_k)} + t_k \overline{\Phi'(t_k)} + \overline{\Psi(t_k)} = \begin{cases} f_k & \text{на свободных берегах трещин,} \\ q_{y_k} - iq_{x_k y_k} + f_k & \text{на } L'_k, \end{cases} \quad (17)$$

где $f_k = -(\sigma_{y_k}^0 - i\tau_{x_k y_k}^0)$; t_k – аффикс берегов k -той трещины ($k = 1, 2, \dots, N$); L'_k – совокупность концевых зон, в которых берега трещин вошли в контакт.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, дающие решение краевой задачи (17), ищем [3] в виде

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \frac{g_k(t)dt}{t-z_k}; \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{-2i\alpha_k} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[\frac{g_k(t)}{t-z_k} - \frac{T_k e^{i\alpha_k}}{(t-z_k)^2} g_k(t) \right] dt,\end{aligned}\quad (18)$$

где $T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0$; $z_k = e^{-i\alpha_{1k}}(z - z_k^0)$.

Дальнейший ход решения аналогичен случаю одной трещины. Поэтому приведем основные алгебраические системы, дающие решения поставленной задачи

$$\begin{aligned}\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \ell_k \left[g_k^0(t_m) R_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_r) + \overline{g_k^0(t_m)} S_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_r) \right] &= f_n^0(x_r), \\ \sum_{m=1}^M g_n^0(t_m) &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N; r = 1, 2, \dots, M-1).\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь

$$f_n^0 = \begin{cases} -(\sigma_{y_n}^0 - i\tau_{x_n y_n}^0) \\ -(\sigma_{y_n}^0 - i\tau_{x_n y_n}^0) + q_{y_n} - iq_{x_n y_n} \end{cases} \quad (20)$$

где M_{1k} – число узловых точек, принадлежащих конечным зонам k -той трещины.

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^M (-1)^m g_n^0(t_m) c t g^{\frac{2m-1}{4M}} \pi &= 0; \\ \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_n^0(t_m) \cdot t g^{\frac{2m-1}{4M}} \pi &= 0.\end{aligned}\quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (21)$$

Совокупность $2 \times N$ уравнений (21) позволяет найти размеры конечных зон. Из-за неизвестных размеров конечных областей объединенная система (19), (20), (21) оказалась нелинейной.

Отделяя в системах (19), (20), (21) действительные и мнимые части, удвоим число уравнений, т. е. получим две действительные объединенные системы, каждая из которых будет содержать $(N \times M + N \times M_{1n} + 2N)$ уравнений для определения $v_n^0(t_m)$, $q_{y_k}(t_{m_{1n}})$ и $u_n^0(t_m)$, $q_{x_k y_k}(t_{m_{1n}})$ соответственно, а также размеров конечных зон.

Для решения нелинейных алгебраических систем использовали метод последовательных приближений. После определения искомых функций $v_n^0(t_m)$ и $u_n^0(t_m)$ становятся известными комплексные потенциалы, с помощью которых по формулам Колосова–Мусхелишвили [2] находятся напряжения, вызванные наличием трещин.

Ниже в таблице приводятся значения параметров d_1/h и d_2/h в зависимости от длины трещины ℓ/h для асфальтобетонного покрытия для одиночной трещины.

ℓ/h	0,025	0,05	0,10	0,15	0,20
d_1/h	0,009	0,028	0,036	0,042	0,053
d_2/h	0,013	0,020	0,031	0,045	0,062

Построенная расчетная модель позволяет варьированием параметра α_k исследовать различные случаи расположения малых трещин в сечении дорожного покрытия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. - М. : Наука, 1987.
- [2] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. - М. : Наука, 1966.
- [3] *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. - Киев : Наукова думка, 1976.
- [4] *Тимошенко, С. П.* Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. - М. : Наука, 1965.

S. G. Gasanov

MODELLING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE ROADWAY
COVERING AT PRESENCE OF SMALL CRACKS WITH INTERACTING
CRACK FACES

Azerbaijan State Agricultural Academy

Abstract. The problem of contact destruction mechanics for the roadway covering with cracks in section is considered. It is considered that the extreme zones of cracks at some points come into contact. The definition of contact tension adds up to the singular integral equation solution.

Keywords: roadway covering, tension, deformation, elasticity, cracks

Гасанов Шахин Гумбат оглы

кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики Азербайджанской сельскохозяйственной академии, г. Баку

e-mail: irakon63@hotmail.com

Hasanov Shahin Humbat oqlu

Ph.D., Assoc. Professor, Azerbaijan State Agricultural Academy, Baku

Д. В. Гоцев, А. Н. Стасюк

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК В ПОРИСТЫХ МАССИВАХ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ СЖАТОГО СКЕЛЕТА

Военный авиационный инженерный университет

Воронежский государственный университет

Аннотация. Построена математическая модель докритического напряженно-деформированного состояния горного массива вблизи цилиндрической выработки с учетом пористой структуры материала и упруго-вязко-пластических свойств сжатого скелета. В рамках точных трехмерных уравнений устойчивости исследована устойчивость основного состояния массива горных пород со сжатыми порами вблизи круговых цилиндрических выработок. Дана оценка влияния на величину критического давления параметров горного массива.

Ключевые слова: пористые материалы со сложной реологией сжатого скелета, цилиндрические горные выработки, напряженно-деформированное состояние, точные трехмерные линейризованные уравнения устойчивости, устойчивость основного состояния.

УДК: 539.374

Известно [1], что решение задач горной механики, относящихся к процессу проведения подземных выработок, сводится к постановке и решению задач [2-5] локальной неустойчивости массива возле выработок при неупругих деформациях [6, 7]. Решение такого класса задач состоит из двух этапов. На первом этапе определяется основное напряженно-деформированное состояние массива горных пород вблизи выработки. На втором – решается задача об устойчивости основного состояния в рамках динамического подхода, который в свою очередь сводится к определению величины критического давления, равномерно распределенного по контуру выработки.

Большинство грунтов имеет пористую структуру [8], поэтому при решении задач устойчивости горных пород наряду со сложной реологией необходимо также учитывать пористые свойства материалов. В отличие от [2-5] в настоящей работе на основе точных трехмерных уравнений [9] исследуется локальная неустойчивость пород приствольной зоны цилиндрической выработки с учетом пористой структуры материала горного массива.

Рассмотрим пористое упрочняющееся упруго-вязко-пластическое тело, механическая модель которого показана на рис. 1.

Модель состоит из двух последовательно соединенных составных частей: пластической – « p » и упругой – « e ». Пластическая часть состоит из пластического элемента (предел текучести k), последовательно соединенного с параллельной связкой вязкого элемента (коэффициент вязкости η) и упругого элемента (коэффициент упрочнения c). Упругая часть состоит

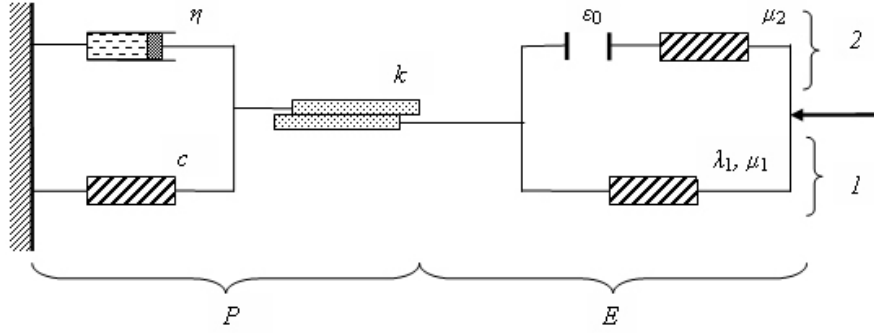


Рис. 1.

из упругого сжимаемого элемента 1 (коэффициенты Лямэ λ_1, μ_1) и параллельно подсоединенной к нему последовательной связки 2 жесткого контакта (начальный раствор пор ε_0) и упругого несжимаемого элемента (коэффициент упругости μ_2).

Определяющее соотношение жесткого контакта согласно [10] имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{ij} (\tilde{\varepsilon}_{nn} - \varepsilon_0) = 0, \quad (1)$$

где $\tilde{\sigma}_{ij}$ – компоненты тензора напряжений, $\tilde{\varepsilon}_{nn}$ – объемная деформация, причем $\tilde{\sigma}_{ij} = 0$ – до схлопывания пор и $\tilde{\varepsilon}_{nn} = \varepsilon_0$ – после.

При конструировании связи напряжение-деформация в упруго-вязко-пластическом теле следуем работам [5, 7].

Для последовательного соединения «р – е» справедливы соотношения

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^p = \sigma_{ij}^e, (s_{ij} = s_{ij}^p = s_{ij}^e), \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e, \quad (2)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{nn}\delta_{ij}$ – компоненты девиатора тензора напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций.

Для параллельной связки «1 – 2» справедливы соотношения

$$\varepsilon_{ij}^e = (\varepsilon_{ij}^e)_1 = (\varepsilon_{ij}^e)_2, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = (\sigma_{ij}^e)_1 + (\sigma_{ij}^e)_2, \quad s_{ij} = s_{ij}^e = (s_{ij}^e)_1 + (s_{ij}^e)_2, \quad (3)$$

где напряжения, соответствующие элементу «1», удовлетворяют закону Гука

$$(\sigma_{ij}^e)_1 = \lambda_1 \varepsilon_{nn}^e \delta_{ij} + 2\mu_1 \varepsilon_{ij}^e, \quad (4)$$

а элементу «2» – соотношению

$$(\sigma_{ij}^e)_2 = \begin{cases} 0, & -\varepsilon_{nn}^e < \varepsilon_0, \\ 2\mu_2 \left((\varepsilon_{ij}^e)_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{ij}^e \end{pmatrix}_2 \right) + \frac{1}{3} (\sigma_{nn}^e)_2 \delta_{ij}, & -\varepsilon_{nn}^e \geq \varepsilon_0, \end{cases} \quad (5)$$

где $\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{ij}^e \end{pmatrix}_2$ – деформации элемента «2» до момента схлопывания пор, причем $\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{nn}^e \end{pmatrix}_2 = \varepsilon_0$ – после схлопывания пор.

В теле остаются несхлопнутые поры, пока

$$\varepsilon_{nn}^e < \varepsilon_0. \quad (6)$$

Тело остается упругим, пока

$$s_{ij} s_{ij} < k^2. \quad (7)$$

В этом случае полные напряжения и деформации в теле определяются по формулам (3).

Если $s_{ij}s_{ij} \geq k^2$, то полная деформация удовлетворяет соотношению (2), где $\varepsilon_{ij}^e = (\varepsilon_{ij}^e)_1 = (\varepsilon_{ij}^e)_2$.

Пластическая составляющая объемной деформации удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{nn}^p = 0. \quad (8)$$

Скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$, если

$$(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p)(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p) < k^2. \quad (9)$$

Тензор скоростей пластических деформаций связан с тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \psi (s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta\dot{\varepsilon}_{ij}^p), \quad (10)$$

если выполняется условие пластического течения [5]

$$(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta\dot{\varepsilon}_{ij}^p)(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta\dot{\varepsilon}_{ij}^p) = k^2. \quad (11)$$

Напряжения, одинаковые для «e» и «p», в части «p» складываются из суммы $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij}^e)_1 + (\sigma_{ij}^e)_2$. Тело остается упругим при наличии несхлопнутых пор, пока

$$\left(\sigma_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}(3\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_0 \right) \left(\sigma_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}(3\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_0 \right) < k^2. \quad (12)$$

Рассмотрим горный массив с цилиндрической круговой выработкой радиуса R_0 , реологические свойства которого определяются согласно описанной выше модели. К внутреннему контуру выработки приложена равномерно распределенная нагрузка q_0 , а на бесконечности напряжения в массиве стремятся к величине gh (g – средний объемный вес вышележащих пород, h – глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим.

Процесс деформирования пористого материала горного массива вблизи выработки можно разделить на два взаимосвязанных этапа. Первый – упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй – неупругое деформирование сжатого скелета с упруго-вязко-пластическими свойствами.

Напряженно-деформированное состояние горного массива на первом этапе, то есть, когда выполняется условие (12), в осесимметричном случае определяется соотношениями

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \varepsilon_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_r = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 + 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad (14)$$

где u – радиальная составляющая вектора перемещений.

Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из следующих граничных условий

$$\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -q_\infty, \quad \sigma_r|_{r=R_0} = -q_0 \quad (15)$$

и имеют вид

$$C_1 = \frac{-q_\infty}{2(\lambda_1 + \mu_1)}, \quad C_2 = \frac{q_0 - q_\infty}{2\mu_1} R_0^2. \quad (16)$$

Объемная деформация с учетом (13) и (16) определяется в форме

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 2C_1. \quad (17)$$

Из (17) следует, что объемная деформация не зависит от радиуса, то есть она одинакова во всем теле и поэтому схлопывание пор произойдет одновременно во всей среде при достижении объемной деформацией значения, равного начальному удельному объему пор – ε_0 .

Следовательно, полное схлопывание пор при упругом деформировании массива происходит под действием нагрузки, определяемой равенством

$$q_\infty = (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0. \quad (18)$$

При этом поля перемещений, деформаций и напряжений находятся по формулам

$$u = -\frac{\varepsilon_0}{2}r - \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{2\mu_1 r}, \quad \varepsilon_r = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{2\mu_1 r^2}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{2\mu_1 r^2},$$

$$\sigma_r = -(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 + (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 \frac{R_0^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 \frac{R_0^2}{r^2}. \quad (19)$$

Таким образом, если $gh < (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$, то полного схлопывания пор в горном массиве не происходит и материал ведет себя как сжимаемая упругая среда с параметрами $\lambda_1, \mu_1, \varepsilon_0$. При этом напряженно-деформированное состояние определяется соотношениями (13), (14), (16).

Если $gh = (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$, произойдет схлопывание пор (сжатый скелет) и при дальнейшем сжатии возникнет и будет расти около отверстия зона пластического течения, препятствовать развитию которой будут вязкость (η) и упрочнение (c) материала, то есть сжатый скелет будет деформироваться как несжимаемая упруго-вязко-пластическая среда с параметрами $\mu = \mu_1 + \mu_2, k, c, \eta$.

В этом случае сплошная среда разделяется на две зоны – упругую и пластическую, в каждой из которых значения перемещений, деформаций и напряжений в точках среды раскладываются на компоненты:

а) пористого сжатия, определяемыми соотношением (19);

б) упруго-пластического сжатия (которые для деформаций в пластической зоне в свою очередь складываются из упругих и пластических компонент), определяемыми из решения упруго-пластической задачи с вычетом из внешней нагрузки той ее части, которая идет на полное схлопывание пор, т. е. величины $(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$. Поэтому граничные условия для этих компонент запишутся в виде

$$\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -(gh - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0), \quad \sigma_r|_{r=R_0} = -q_0. \quad (20)$$

Напряженно-деформированное состояние сжатого скелета определяется в виде:

- в упругой области ($\gamma < r < \infty$)

$$u = \frac{D}{r} - \frac{\varepsilon_0}{2}r, \quad \varepsilon_r = -\frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2},$$

$$\sigma_r = -2(\mu_1 + \mu_2) \frac{D}{r^2} - \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1 r^2} - gh, \quad \sigma_\theta = 2(\mu_1 + \mu_2) \frac{D}{r^2} + \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1 r^2} - gh; \quad (21)$$

- в пластической области ($R_0 < r < \gamma$)

$$\varepsilon_r^p = \frac{\chi}{c + 2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma^2}{r^2} - 1 \right) \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right),$$

$$\sigma_r = -q_0 + 4\mu \cdot \int_{R_0}^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho + \left(2\mu D + \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1} \right) \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\sigma_\theta = -q_0 + 4\mu \left(\varepsilon_r^p + \int_{R_0}^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho \right) + \left(2\mu D + \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1} \right) \left(\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (22)$$

где

$$D(t) = -\frac{(\lambda_1 + \mu_1)\mu_2\varepsilon_0}{2\mu\mu_1} R_0^2 + \frac{\eta\chi}{2\mu(c+2\mu)} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left(2\gamma\dot{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta}\gamma^2 \right),$$

$$\chi = \text{sign}(q_0 - gh).$$

Условия совместности напряжений на границе γ раздела зон упругого и пластического деформирования имеют вид

$$[\sigma_r]|_{r=\gamma} = 0. \quad (23)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений выражений, соответствующих упругой и пластической области на границе γ .

Радиус раздела зон упругого и пластического деформирования с учетом (21)–(23) определим в виде

$$gh - q_0 - \frac{4\mu\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma^2}{R_0^2} \right) + \ln \frac{\gamma}{R_0} \right) + \frac{\eta\chi}{R_0^2(c+2\mu)} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left(2\gamma\dot{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) = 0. \quad (24)$$

Для определения основного напряженно-деформированного состояния этой задачи использовались уравнения равновесия, условие пластичности (11), соотношения ассоциированного закона пластического течения (10), соотношения, связывающие полные упругие и пластические деформации (2), связь между напряжениями и деформациями в виде (2), (4), (5), граничные условия (15), (20), а также условия сопряжения решений в упругой и пластической областях (23).

Исследование устойчивости основного состояния (21), (22) горного массива со сжатым скелетом вблизи круговой цилиндрической выработки при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения [9] сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [5].

Уравнения равновесия для областей пластического V^p и упругого V^e деформирования массива со сжатым скелетом имеют вид

$$\nabla_i \left(\sigma_j^i + \sigma_\alpha^i \nabla^\alpha u_j \right) - \rho s^2 u_j = 0, \quad s = i\omega. \quad (25)$$

Здесь и далее ∇ – символ ковариантного дифференцирования, кружок сверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния, определенного соотношениями (21)–(22).

Граничные условия на внутренней поверхности выработки и условия затухания возмущений на внешней поверхности S_∞^e массива запишем в виде

$$N_i \left(\sigma_j^i + \sigma_\alpha^i \nabla^\alpha u_j \right) = 0, \quad u_j|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (26)$$

Условия непрерывности на упругопластической границе γ имеют вид

$$\left[N_i \left(\sigma_j^i + \sigma_\alpha^i \nabla^\alpha u_j \right) \right] = 0, \quad [u_j] = 0. \quad (27)$$

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений для сжатого скелета, обладающего упруго-вязко-пластическими свойствами и свойством дальнейшей несжимаемости в пластической и упругой областях, представима в форме

$$\sigma_j^\beta = p\delta_j^\beta + 2\mu\varepsilon_j^\beta - abf_j^\beta, \quad (28)$$

где $a = \frac{4\mu^2}{k^2(2\mu+c+\eta s)}$, $f_j^\beta = s_j^\beta - c\varepsilon_j^\beta$, $b = f_l^k \varepsilon_l^k$

В упругой области надо положить $a = 0$.

Условие несжимаемости для материала горного массива со сжатым скелетом представимо в форме

$$\nabla^\alpha u_\alpha = 0. \quad (29)$$

Уравнения (25)–(28) с учетом условия несжимаемости (29) в областях V^p и V^e массива представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости основного состояния вертикальной цилиндрической выработки, когда имеется граница областей упругого и пластического поведения материала при нагружении в массиве горных пород со сжатыми порами. Система уравнений (25), (28), (29) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитудных значений векторов перемещений u, v, w и гидростатического давления p для пластической и упругой зон массива. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений перемещения и гидростатические давления в каждой из зон упругого и пластического деформирования горного массива аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned} u &= \sum_n \sum_m A_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz), & v &= \sum_n \sum_m B_{nm}(r) \sin(m\theta) \cos(nz), \\ w &= \sum_n \sum_m C_{nm}(r) \cos(m\theta) \sin(nz), & p &= \sum_n \sum_m D_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz), \end{aligned} \quad (30)$$

где n, m – параметры волнообразования.

Подставляя u, v, w, p в линейризованные уравнения устойчивости (25) и учитывая (28), после ряда преобразований получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $A(r), B(r), C(r), D(r)$

$$\begin{aligned} &A \left(a_{2,r} + \frac{1}{r} \left(r^2 \rho \omega^2 - \overset{0}{\sigma}_\theta - a_4 \right) - \left(a_5 + \frac{1}{r} \overset{0}{\sigma}_\theta \right) m^2 - \left(\mu r + r \overset{0}{\sigma}_z \right) n^2 \right) + \\ &+ A' \left(a_1 + a_2 - a_3 + r a_{1,r} + r \overset{0}{\sigma}_{r,r} + \overset{0}{\sigma}_r \right) + A'' \left(r a_1 + r \overset{0}{\sigma}_r \right) + \\ &+ B \left(-\frac{1}{r} a_4 - a_5 + a_{2,r} - \frac{2}{r} \overset{0}{\sigma}_\theta \right) m + B' (a_2 + r a_5) m + C' r \mu n + D' r = 0, \\ &- A \left(\frac{1}{r} a_4 + 2a_5 + r a_{5,r} + \frac{2}{r} \overset{0}{\sigma}_\theta \right) m - A' (a_3 + r a_5) m - \\ &- B \left(2a_5 + r a_{5,r} - \frac{1}{r} \left(r^2 \rho \omega^2 - \overset{0}{\sigma}_\theta \right) + \frac{1}{r} \left(a_4 + \overset{0}{\sigma}_\theta \right) m^2 + r \left(\mu + \overset{0}{\sigma}_z \right) n^2 \right) + \\ &+ B' \left(2r a_5 + r^2 a_{5,r} + r \overset{0}{\sigma}_{r,r} + \overset{0}{\sigma}_r \right) + B'' \left(r^2 a_5 + r \overset{0}{\sigma}_r \right) + C \mu m n + m D = 0, \\ &- A \mu n - A' r \mu n - B \mu n m + C \left(r \rho \omega^2 - \frac{1}{r} \left(\mu + \overset{0}{\sigma}_\theta \right) m^2 - r \left(2\mu + \overset{0}{\sigma}_z \right) n^2 \right) + \\ &+ C' \left(\mu + r \overset{0}{\sigma}_{r,r} + \overset{0}{\sigma}_r \right) + C'' r \left(\mu + \overset{0}{\sigma}_r \right) - D r n = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где a_i ($i=1,2,\dots,5$) согласно (28) и (21), (22) определяются соотношениями

$$a_1 = -a f_r^2 + 2\mu, \quad a_2 = -a f_r f_\theta, \quad a_3 = -a f_r f_\theta, \quad a_4 = -(a f_\theta^2 - 2\mu), \quad a_5 = \frac{\mu}{r}.$$

В горном массиве в пластической области V^p докритическое состояние определяется по формулам (22), а в упругой области V^e – по формулам (21). Для упрощения записи здесь в (30) и далее индексы n, m у величин A, B, C, D опущены. Отметим, что если устойчивость основного состояния исследовать по предельной [5] системе уравнений, то в соотношениях (21), (22), определяющих докритическое состояние, следует $t \rightarrow \infty$.

Граничные условия (26) на внутренней поверхности выработки при $r = R_0$ с учетом (28) и (30) принимают вид

$$\begin{aligned} &A^p a_2 + A'^p R_0 \left(a_1^p + \overset{0}{\sigma}_r^p \right) + B^p m a_2^p + D^p R_0 = 0, \\ &A^p m + B^p - B'^p \left(R_0 + \frac{\overset{0}{\sigma}_r^p}{a_9^p} \right) = 0, \quad A^p n \mu - C'^p (\mu + \overset{0}{\sigma}_r^p) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Условие несжимаемости (29) при учете (28), (30) запишется в форме

$$A + A'r + Bm + Cnr = 0. \quad (33)$$

Аналогичным образом могут быть выписаны в терминах функций $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ и условия непрерывности (27) на поверхности, разделяющей зоны упругого и пластического деформирования.

Из условия локальности возмущений $u_j \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ ($j=1, 2, 3$) с учетом (30) получим

$$(A')^e = 0, \quad (B')^e = 0, \quad (C')^e = 0. \quad (34)$$

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (31)–(34) с учетом (27) не представляется возможным. Будем искать приближенное решение методом конечных разностей. В результате получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров A_{nm} , B_{nm} , C_{nm} , D_{nm} . Следовательно, определение величины критической нагрузки q_0 , соответствующей локальной потере устойчивости массива горных пород со схлопнутыми порами около круговой цилиндрической выработки, сводится к разрешимости матричного уравнения. При вычислении определителя наряду с нахождением основного напряженно-деформированного состояния для каждой области V^p , V^e массива (22), (21) необходимо учитывать уравнение (23), определяющее положение упругопластической границы γ в горном массиве. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру m и образующей n , параметрам материала и конструкции λ_j . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины q_0 в зависимости от m , n при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы: $\det(q_0, m, n, \lambda_j) = 0$.

На рис. 2 и 3 представлена зависимость критического давления на контуре выработки от величины гидростатического давления gh . При этом $R_0 = 0.4$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.6$, $c = 0.3$, $\lambda_1 = 0.1$, $\eta = 0.01$, им соответствуют значения параметров волнообразования $n = m = 2$. На рис. 2 кривые 1, 2, 3 соответствуют $\varepsilon_0 \cdot 10^{-3} = 0.2, 0.5, 0.7$. При этом $\lambda_1 = 0.1$. На рис. 3 кривые 1, 2, 3 соответствуют $\lambda_1 = 0.1, 0.2, 0.3$. При этом $\varepsilon_0 \cdot 10^{-3} = 0.1$.

Анализ численного эксперимента показал, что при увеличении глубины заложения выработки величина критического давления на контуре выработки увеличивается (рис. 2 и 3); с ростом коэффициента Ламе λ_1 область устойчивости увеличивается (рис. 3). Критическая нагрузка на контуре выработки при увеличении величины начального удельного объема пор уменьшается (рис. 2).

Если в соотношениях (21), (22) положить $\varepsilon_0 = 0$, то придем к результатам работы [5] для случая круговой цилиндрической выработки.

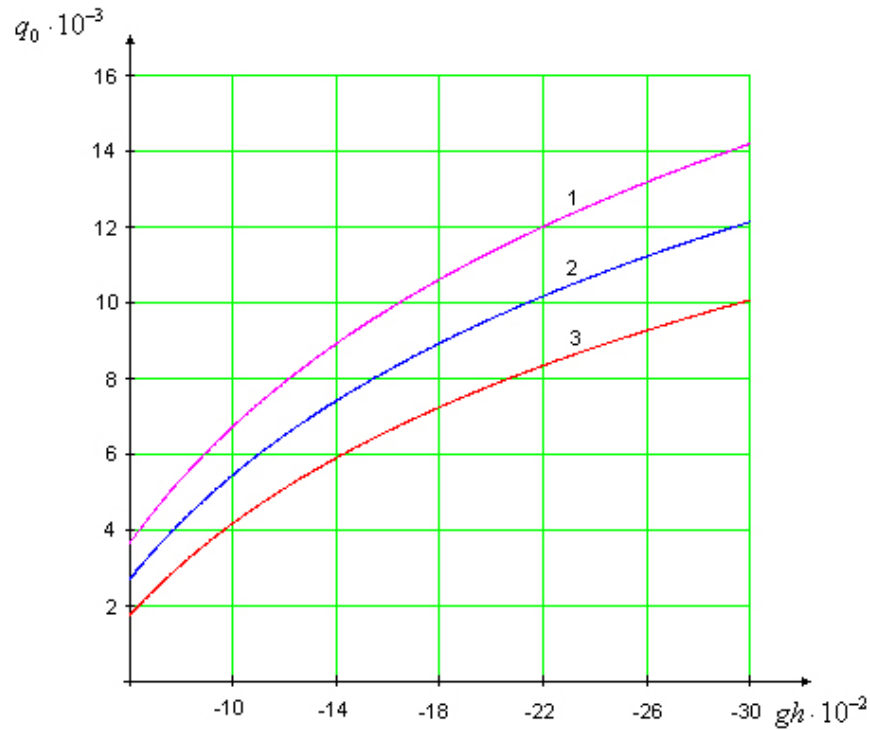


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ершов, Л. В.* О проявлении горного давления в горизонтальных выработках / Л. В. Ершов // Доклады АН СССР. - 1962. - Т. 145, № 2. - С. 298-300.
- [2] *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок с многослойной крепью в упруго-пластических массивах / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин // Известия РАН. МТТ. - 2004. - № 1. - С. 158-166.
- [3] *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // ПМТФ. - 2005. - Т. 46, № 2. - С. 141-150.
- [4] *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок эллиптической формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Известия РАН. МТТ. - 2007. - № 2. - С. 183-192.
- [5] *Спорыхин, А. Н.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 232 с.
- [6] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. - Владивосток : Дальнаука, 1998. - 528 с.
- [7] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. - М. : Физматлит, 2001. - 701 с.
- [8] *Цытович, Н. А.* Механика грунтов / Н. А. Цытович. - М. : Высшая школа, 1983. - 320 с.

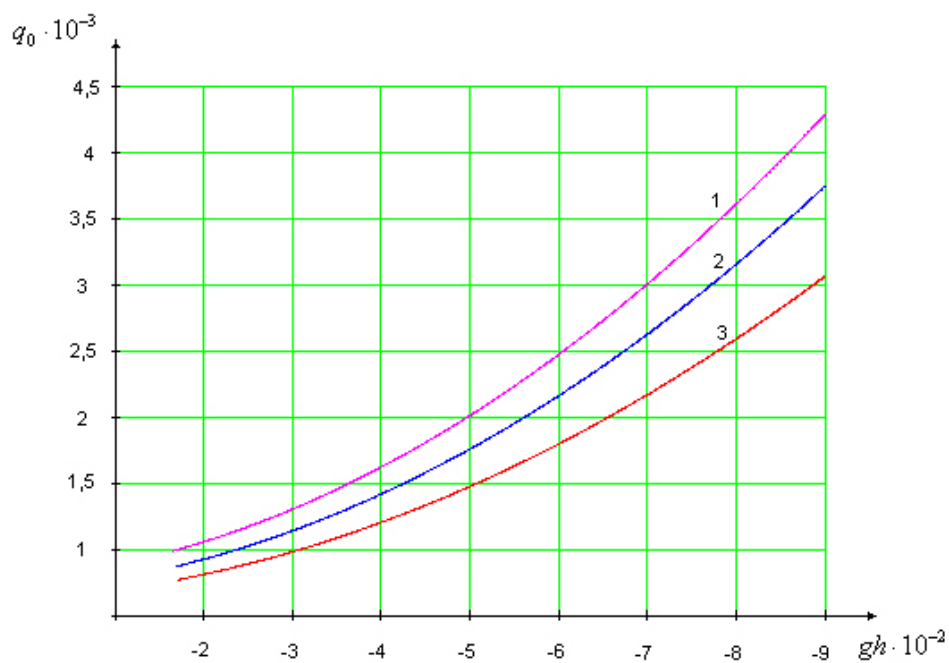


Рис. 3.

[9] *Гузь, А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь. - Киев : Наук. думка, 1977. - 204 с.

[10] *Садовская, О. В.* Модели реологически сложных сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / О. В. Садовская, В. М. Садовский // Математические модели и методы механики сплошных сред : сб. науч. тр. : к 60-летию А. А. Буренина. - Владивосток : ИАПУ ДВО РАН. - 2007. - С. 224-238.

D. V. Gotsev, A. N. Stasjuk

**THE STEADINESS OF CYLINDRICAL MINES IN POROUS MASSIFS WITH
COMPLEX RHEOLOGY OF COMPRESSED STRUCTURE**

Military Aviation Engineering University

Voronezh State University

Abstract. The mathematical model of undercritical stressedly-deformed condition of massif near cylindrical mine with taking into consideration porous material structure and viscoelastic characteristics of compressed structure is built. The steadiness of massif ground state with compressed pores near round cylindrical mines is researched within the framework of exact three-dimensional equations of steadiness. The estimation of influence of massif parameters on the amount of critical pressure is given in the work.

Keywords: porous materials with complex rheology of compressed structure, cylindrical mines, stressedly-deformed condition, exact three-dimensional linearized equations of steadiness, ground state steadiness.

Гоцев Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Военного авиационного инженерного университета, г. Воронеж

e-mail: rbgotsev@mail.ru

Стасюк Александр Николаевич

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж

e-mail: anstasyuk@gmail.com

Gotsev Dmitry Viktorovich

Ph.D., Assoc. Professor, Department of Mathematics, Military Aviation Engineering University, Voronezh

Stasjuk Alexander Nikolaevich

Postgraduate student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Д. В. Зубчанинов, Н. Л. Охлопков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ ПЛОСКИМ
ТРАЕКТОРИЯМ МНОГОЗВЕННЫМИ ЛОМАНЫМИ

Тверской государственный технический университет

Аннотация. Рассмотрено математическое моделирование процессов пластического деформирования по плоским криволинейным траекториям и их аппроксимация многозвенными ломаными. Использована новая математическая модель теории процессов, представленная в [1].

Ключевые слова: пластичность, моделирование, процесс, траектория.

УДК: 539.3

1. Математическая модель теории процессов.

В [1] на основе нелокальной формы теории процессов

$$d\bar{\sigma} = N_1 d\bar{\Theta} + ds(N_\sigma^* \bar{\sigma} + N_\Theta^* \bar{\Theta}) \quad (1)$$

предложена простая модель процессов пластического деформирования для траекторий средней кривизны и малого кручения. В (1) $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Theta}$ – векторы напряжений и деформаций

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5) \quad (2)$$

в линейном пятимерном координатном евклидовом пространстве E_5 с ортонормированным базисом $\{\hat{i}_k\}$ А. А. Ильюшина

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{11} - \sigma_0), & S_2 = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sqrt{2}}, & S_3 = \sqrt{2}\sigma_{12}, & S_4 = \sqrt{2}\sigma_{23}, & S_5 = \sqrt{2}\sigma_{13}, \\ \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), & \Theta_2 = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{\sqrt{2}}, & \Theta_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}, & \Theta_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, & \Theta_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{13} \end{cases} \quad (3)$$

– компоненты векторов напряжений и деформаций; σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций,

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (4)$$

– средние значения напряжений и деформаций, s – длина дуги траектории деформирования.

Предполагается, что траектория деформирования является траекторией средней кривизны и малого кручения. Также считается, что диаграмма прослеживания процесса деформирования Одквиста-Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s) \quad (5)$$

мало отличается от диаграммы простого нагружения Роша и Эйхингера

$$\sigma = \Phi(\Theta). \quad (6)$$

В качестве аппроксимации диаграмм (5), (6) используются выражения

$$\sigma = \Phi(s) = C(s) + 2G_*\Delta s + \sigma_*(1 - e^{-\beta\Delta s}), \quad (7)$$

$$\sigma = \Phi(\Theta) = \sigma^T + 2G_*\Delta\Theta + \sigma_*(1 - e^{-\beta\Delta s}), \quad (8)$$

где $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$, σ_T — предел текучести при простом нагружении, параметры G_* , σ_* , β подлежат экспериментальному определению,

$$\Delta s = s - s^T, \quad \Delta\Theta = \Theta - \Theta^T, \quad (9)$$

где s^T и Θ^T соответствуют пределу текучести σ^T , $C(s)$ - функция «изотропного» упрочнения либо разупрочнения материала.

Функции процесса N_1 , N_σ^* , N_Θ^* в (1) определяются из условия реализации простого нагружения [1]

$$N_1 = 2G_* + \beta\sigma_*, \quad N_\sigma^* = -\beta\left(1 - \frac{\sigma^T}{\sigma}\right), \quad N_\Theta^* = 2G_*\beta\left(1 - \frac{s^T}{s}\right). \quad (10)$$

Для кусочно-аналитических траекторий параметры σ^T , G_* , σ_* , β изменяются. В качестве σ^T принимается значение вторичного предела текучести σ_M^T после окончания частичной упругой разгрузки материала.

Определяющее соотношение (1) в скалярной форме имеет вид

$$dS_k = N_1 d\Theta_k + ds(N_\sigma^* S_k + N_\Theta^* \Theta_k) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (11)$$

или

$$\frac{dS_k}{dt} = N_1 \frac{d\Theta_k}{dt} + \dot{s}(N_\sigma^* S_k + N_\Theta^* \Theta_k), \quad (12)$$

где t — обобщенное время, т. е. некоторый монотонно изменяющийся в процессе деформирования параметр.

Задача определения S_k при начальных условиях

$$\Theta_k = \Theta_k^*, \quad S_k = S_k^* \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad (13)$$

сводится к задаче Коши. Система уравнений (12) при начальных условиях (13) может быть решена одним из численных методов, например методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности.

2. Математическое моделирование процессов по плоским траекториям постоянной кривизны.

На рис. 1 представлена программа дифференцирования, по которой проводилось экспериментальное исследование процесса на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. Испытывались трубчатые образцы из стали 45, для которой $\sigma^T = 269$ МПа, $E = 2,05 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$. Образец закручивался до значений $\Theta_3 = 0,0123$, $S_3 = 385$ МПа за пределом упругости. После излома траектории деформирования на 90° осуществлялось деформирование по окружности радиуса $R = \Theta = 0,0125$. Было реализовано 4 витка окружности, после чего деформирование происходило по прямой линии, параллельной оси Θ_1 .

При теоретическом расчете согласно описанной выше математической модели [1] окружность аппроксимировалась вписанным в нее многогранником. На рис. 1 изображен вписанный

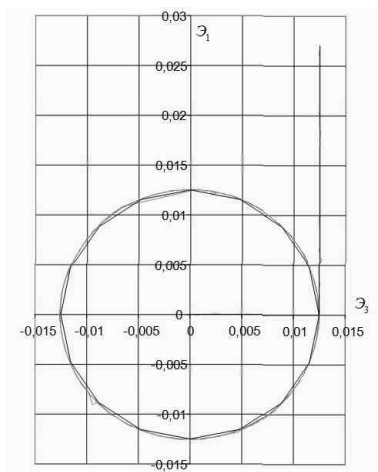


Рис. 1.

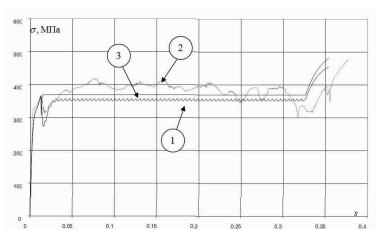


Рис. 2.

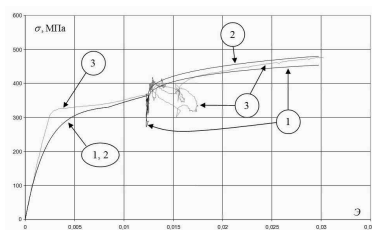


Рис. 3.

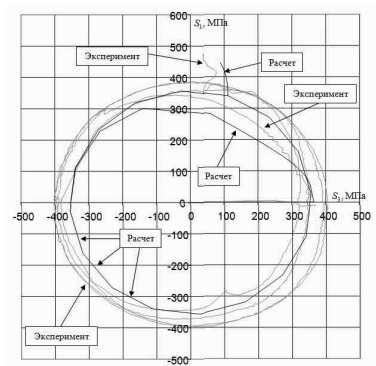


Рис. 4.

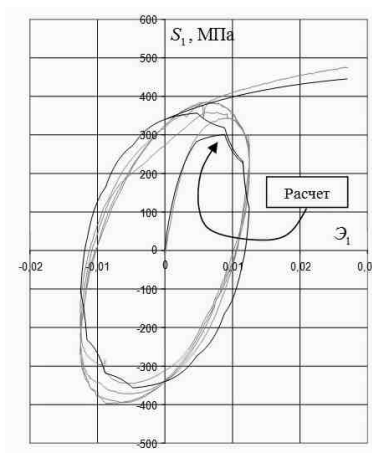


Рис. 5.

в нее шестнадцатигранник. На рис. 2 и 3 представлены скалярные свойства материала в данном опыте. Кривая 1 соответствует расчету, 2 — эксперименту, 3 — аппроксимации универсальной диаграммы прослеживания процесса. На рис. 4 представлен отклик в пространстве

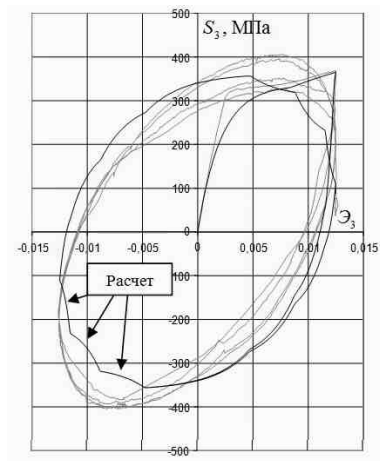


Рис. 6.

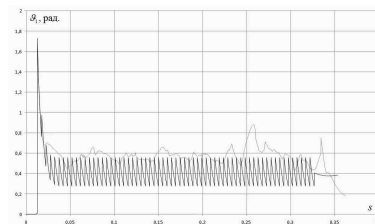


Рис. 7.

напряжений на реализованные экспериментальную и теоретическую программы. На рис. 5 и 6 изображены локальные диаграммы деформирования растяжения и кручения. На рис. 7 представлены векторные свойства материала, отражающие зависимость угла сближения ϑ_1 от длины дуги s .

При расчете материал считался циклически стабильным. В целом расчет и эксперимент дали близкие друг к другу результаты для достаточно сложной траектории деформирования, которые показывают, что построенная в [1] модель пластического деформирования материала в рамках теории процессов вполне приемлема для инженерных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. - Тверь : ТГТУ, 2002. - 300 с.

D. V. Zubchaninov, N. L. Okhlopkov

**MODELLING OF PLASTIC DEFORMATION PROCESSES ALONG
CURVILINEAR FLAT TRAJECTORIES WITH MULTIJOINT LINE STRINGS**

Tver State Technical University

Abstract. Mathematical modelling of plastic deformation processes along flat curvilinear trajectories and their approximation with multijoint line strings is considered. New mathematical model of process theory is used which is presented in [1].

Keywords: Plasticity, modelling, process, trajectory.

Зубчанинов Дмитрий Владимирович

аспирант кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Охлопков Николай Леонидович

доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, Тверь

e-mail: kafsm@yandex.ru

Zubchaninov Dmitriy Vladimirovich

Postgraduate student, Department of Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University, Tver

Okhlopkov Nikolay Leonidovich

Dr. Eng. Sci., Professor, Department of Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University, Tver

С. В. Иванова

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО СЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯГИВАЮЩИХ УСИЛИЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается напряженное упругопластическое состояние толстой плиты с эллиптическим отверстием из анизотропного сжимаемого материала при двусном растяжении на бесконечности в случае плоской деформации. Решение задачи выполнено методом малого параметра [2], в первом приближении определены компоненты напряжения и перемещения в упругой и пластической областях, определена граница пластической зоны.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, анизотропия, растяжение, плита, отверстие.

УДК: 539.374

Рассмотрим анизотропную идеальнопластическую плиту, ослабленную эллиптическим отверстием с полуосями $a(1-c)$, $a(1+c)$. В плоскости xy плита растягивается на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями p_1 и p_2 .

Положим

$$c = \delta d_1, \frac{p_1 - p_2}{2k} = \delta d_2, k, p_1, p_2 - const, \quad (1)$$

где k – предел текучести при сдвиге, δ , d_1 , d_2 – безразмерные постоянные, принимающие значение в пределах: $0 \leq \delta \leq 1$, $0 \leq d_i \leq 1$.

Очевидно, что при $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ имеет место двусное растяжение плиты с круговым отверстием, при $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ имеет место плита с эллиптическим отверстием, равномерно растягиваемая на бесконечности. В нулевом приближении (при $\delta = 0$) имеет место осесимметричное состояние плоскости с круговым отверстием.

Уравнение контура эллиптического отверстия запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2(1+c)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-c)^2} = 1, \quad (2)$$

при $c = 0$ согласно (2) имеет место круговое отверстие радиуса a .

В дальнейшем отнесем все величины, имеющие размерность длины к величине r_s^0 - радиусу упругопластической зоны в исходном нулевом приближении.

В дальнейшем перейдем к полярной системе координат ρ, θ

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}. \quad (3)$$

Согласно (3), уравнение (2) запишем в виде

Поступила 10.02.2010

$$\rho = \frac{\alpha(1 - \delta^2 d_1^2)}{\sqrt{1 - 2\delta d_1 \cos 2\theta + \delta^2 d_1^2}} = \alpha \left[-1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 d_1^2 (1 - \cos 4\theta) + \right. \\ \left. + \frac{5}{8} \delta^3 d_1^3 (\cos 2\theta + \cos 6\theta) \right] + \dots, \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{a}{r_0^0}$, $\rho = \frac{r}{r_0^0}$.

Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс « p » наверху, а упругой – индекс « e » наверху.

Условие пластичности примем в виде

$$A(\sigma_x^{(p)} - \sigma_y^{(p)})^2 + 4B\tau_{xy}^{(p)2} = (2k + \mu\sigma)^2, \sigma = 1/2(\sigma_x + \sigma_y), A, B, \mu - const, \quad (5)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат, μ – коэффициент сжимаемости.

В дальнейшем отнесем компоненты напряжения σ_{ij} к величине предела текучести на сдвиг k , при этом для безразмерных величин сохраним обозначения.

Условие пластичности (5) определяет свойства анизотропного идеальнопластического материала. Коэффициенты A, B характеризуют анизотропию материала. При $A = B = C = 1$, согласно (5), имеет место изотропный материал.

Согласно (5), анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат x, y .

Связь между напряжениями в декартовой систем координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет вид

$$\sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \quad (6) \\ \tau_{xy} = -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta.$$

Из (5), (6) получим условие пластичности в полярных координатах

$$(\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)})^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + 4\tau_{\rho\theta}^{(p)2} \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \\ + (\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}) \tau_{\rho\theta}^{(p)} [A-B] \sin 4\theta = (2 + \mu\sigma)^2, \quad (7)$$

где $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta)$.

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2\sigma_{ij}^{(0)} + \dots,$$

$$A = 1 + a\delta, B = 1 + b\delta, \mu = \bar{\mu}\delta; a, b, \bar{\mu} - const, \quad (8)$$

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2}, p_1, p_2 - const,$$

где индекс «0» наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при $\delta = 0$. В дальнейшем черту над μ опустим.

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметрическое состояние

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Из (7), (8) следует

$$\begin{aligned}
& \left((\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}) + \delta (\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p}) \right)^2 \left(1 + \delta \frac{a+b}{2} + \delta \frac{a-b}{2} \cos 4\theta \right) + \\
& + \left((\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}) + \delta (\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p}) \right) (\tau_{\rho\theta}^{(0)p} + \delta \tau_{\rho\theta}^{(I)p}) (2\delta (a-b) \sin 4\theta) + \\
& + 4 (\tau_{\rho\theta}^{(0)} + \delta \tau_{\rho\theta}^{(I)})^2 \left(1 + \delta \frac{a+b}{2} + \delta \frac{a-b}{2} \cos 4\theta \right) = (2 + \mu\delta\sigma)^2.
\end{aligned} \tag{10}$$

В исходном нулевом приближении согласно (9), (10) имеет место

$$\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = \pm 2. \tag{11}$$

Согласно [2] в нулевом приближении с граничным условием $\sigma_\rho^{(0)p} = 0$ при $\rho = \alpha$ получим

$$\sigma_\rho^{(0)p} = 2 \ln(\rho/\alpha), \sigma_\theta^{(0)p} = 2(1 + \ln \rho/\alpha), \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \tag{12}$$

Из (10) в первом приближении имеет место

$$\begin{aligned}
2(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p})(\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p}) + (\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p})^2 \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4\theta \right) = \\
= 2\mu(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}).
\end{aligned} \tag{13}$$

Уравнение равновесия в полярной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\rho^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)}}{\rho} = 0, \\
\frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\rho} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Уравнениям равновесия удовлетворим, полагая

$$\begin{cases} \sigma_\rho^{(I)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta^{(I)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta} \right). \end{cases} \tag{15}$$

Для определения первого приближения согласно (12), (13) имеет место уравнение

$$(\sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)}) = \mu(2 \ln \rho + 1) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4\theta \right). \tag{16}$$

Из (15), (16) найдем уравнение для определения функции напряжения $\Phi^{(I)p}$:

$$\rho^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi^{(I)p}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi^{(I)p}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi^{(I)p}}{\partial \theta^2} = \rho^2 \cdot \left[\mu(2 \ln \rho + 1) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4\theta \right) \right]. \tag{17}$$

Функцию напряжения представим в виде $\Phi^{(I)p} = \Phi_{\text{однор}}^{(I)p} + \Phi_{\text{неоднор}}^{(I)p}$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{однор}}^{(I)p} = C_{00} + C_{01}\rho^2 + \left(C_{21}\rho \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}\rho \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta + \\
+ \left(C_{41}\rho \cos(\sqrt{15} \ln \rho) + C_{42}\rho \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \cos 4\theta,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\Phi_{\text{неоднор}}^{(I)p} = \frac{1}{2}\mu\rho^2 (\ln^2 \rho - \ln \rho + 1/2) + \frac{\mu}{2\rho} \ln \rho - \frac{a+b}{4} \ln \rho - \frac{a-b}{32} \rho^2 \cos 4\theta.$$

Общее решение в первом приближении согласно [2], (18) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)P} &= C_{00} + \frac{1}{\rho} \left((\sqrt{3}C_{22} - 3C_{21}) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - (3C_{22} + \sqrt{3}C_{21}) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta + \\
&+ \frac{1}{\rho} \left((\sqrt{15}C_{42} - 15C_{41}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - (15C_{42} + \sqrt{15}C_{41}) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) - \frac{a-b}{16} \right) \cos 4\theta + \\
&\quad + \mu \left(\ln^2 \frac{\rho}{\alpha} + \ln \frac{\rho}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\mu}{2\rho} (\ln \rho + 1) - \frac{(a+b)}{4\rho^2}, \\
\sigma_{\theta}^{(I)P} &= \sigma_{\rho}^{(I)P} - \mu(2 \ln \rho + 1) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4\theta \right), \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)P} &= \frac{2\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \sin 2\theta + \\
&+ \frac{4\sqrt{15}}{\rho} \left(C_{42} \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - C_{41} \sin(\sqrt{15} \ln \rho) + \frac{(a-b)}{8} \right) \sin 4\theta.
\end{aligned} \tag{19}$$

Коэффициенты $C_{00}, C_{21}, C_{22}, C_{41}, C_{42}$ определим из (19) и граничных условий при $\rho = \alpha$. В первом приближении граничные условия при $\rho = \alpha$ согласно [2] имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)P} &= -d_1 \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)P} &= -2d_1 \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{20}$$

Из (19) и (20) получим

$$\begin{aligned}
C_{00} &= \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} (\ln \alpha + 1) \right) + \frac{a+b}{4\alpha^2}, \\
C_{21} &= d_1 \alpha \frac{\sin(\sqrt{3} \ln \alpha)}{\sqrt{3}}, \\
C_{22} &= -d_1 \alpha \frac{\cos \sqrt{3} \ln \alpha}{\sqrt{3}}, \\
C_{41} &= -\frac{a-b}{120} \left(\frac{1}{2} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) + 15 \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right), \\
C_{42} &= -\frac{a-b}{120} \left(15 \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right).
\end{aligned} \tag{21}$$

Согласно (19), (21) компоненты напряженного состояния в пластической области вблизи эллиптического отверстия в первом приближении имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)P} &= \mu \left(\ln^2 \frac{\rho}{\alpha} + \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \frac{\mu}{2} \frac{(\alpha \ln \rho - \rho \ln \alpha) + (\alpha - \rho)}{\alpha \rho} + \frac{(a+b)(\rho^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 \rho^2} + \\
&\quad + \frac{d_1 \alpha}{\sqrt{3} \rho} \left((\sqrt{3} \cos \sqrt{3} \ln \rho - 3 \sin \sqrt{3} \ln \rho) \cos \sqrt{3} \ln \alpha - \right. \\
&\quad \left. - (3 \cos \sqrt{3} \ln \rho + \sqrt{3} \sin \sqrt{3} \ln \rho) \sin \sqrt{3} \ln \alpha \right) \cos 2\theta + \\
&\quad - \frac{a-b}{120\rho} \left((\sqrt{15} \cos \sqrt{15} \ln \rho - 15 \sin \sqrt{15} \ln \rho) \left(15 \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \Big) - \left(15 \cos \sqrt{15} \ln \rho + \sqrt{15} \sin \sqrt{15} \ln \rho \right) \left(\frac{1}{2} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) + \right. \\ \left. 15 \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) + 15(a-b) \Big) \cos 4\theta,$$

$$\sigma_{\theta}^{(I)p} = \mu \left(\ln^2 \frac{\rho}{\alpha} + \ln \frac{\rho}{\alpha} - 2 \ln \rho - 1 \right) + \frac{\mu (\alpha \ln \rho - \rho \ln \alpha) + (\alpha - \rho)}{2 \alpha \rho} + \frac{(a+b) (2 (\rho^2 - \alpha^2) + \alpha^2 \rho^2)}{2 \alpha^2 \rho^2} + \\ + \frac{d_1 \alpha}{\sqrt{3} \rho} \left((\sqrt{3} \cos \sqrt{3} \ln \rho - 3 \sin \sqrt{3} \ln \rho) \cos \sqrt{3} \ln \alpha - \right. \\ \left. - (3 \cos \sqrt{3} \ln \rho + \sqrt{3} \sin \sqrt{3} \ln \rho) \sin \sqrt{3} \ln \alpha \right) \cos 2\theta + \quad (22)$$

$$- \frac{a-b}{120 \rho} \left((\sqrt{15} \cos \sqrt{15} \ln \rho - 15 \sin \sqrt{15} \ln \rho) \left(15 \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) - \left(15 \cos \sqrt{15} \ln \rho + \sqrt{15} \sin \sqrt{15} \ln \rho \right) \left(\frac{1}{2} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + 15 \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) - 45(a-b) \right) \cos 4\theta,$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -\frac{2d_1 \alpha}{\rho} \left(\cos \sqrt{3} \ln \alpha \cos \sqrt{3} \ln \rho + \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \sin 2\theta + \\ - \frac{\sqrt{15} (a-b)}{\rho} \frac{1}{30} \left(\cos(\sqrt{15} \ln \rho) \left(15 \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) + 15 \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) + 15(a-b) \right) \sin 4\theta.$$

Уравнения упругопластической границы представим в виде

$$\rho_s = 1 + \delta \rho_s^{(I)} + \delta^2 \rho_s^{(II)} + \dots \quad (23)$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_{\rho}^p \Big|_{\rho_s} = \sigma_{\rho}^e \Big|_{\rho_s}; \quad \sigma_{\theta}^p \Big|_{\rho_s} = \sigma_{\theta}^e \Big|_{\rho_s}; \quad \tau_{\rho\theta}^p \Big|_{\rho_s} = \tau_{\rho\theta}^e \Big|_{\rho_s}. \quad (24)$$

Граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде

$$\sigma_{\rho}^e \Big|_{\rho=\infty} = q - \delta \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta}^e \Big|_{\rho=\infty} = q + \delta \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^e \Big|_{\rho=\infty} = \delta \sin 2\theta, \quad (25)$$

где

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2k}, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2k}.$$

В упругой зоне ($1 < \rho < \infty$) распределение напряжений определяется согласно [1]. Удовлетворяя граничному условию $\sigma_{\rho} = q$ при $\rho = \infty$ и условию сопряжения (24), из формул распределения напряжений и (10) получим

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = q - \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = q + \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (26)$$

Условия сопряжения для нулевых компонентов согласно (24) имеют вид

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=1} ; \sigma_{\theta}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=1} . \quad (27)$$

Из (12), (26), (27) следует

$$\begin{aligned} 2 \ln \frac{1}{\alpha} &= q - 1, \\ 2 \left(1 + \ln \frac{1}{\alpha} \right) &= q + 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Из двух соотношений (28) с учетом $\alpha = \frac{a}{r_s^0}$ получим

$$r_s^{(0)} = a \exp \frac{1}{2} \left(\frac{q}{k} - 1 \right). \quad (29)$$

В первом приближении условия сопряжения (24) согласно (23) примут вид

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(I)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{\theta}^{(I)p} + \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)p}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(I)e} + \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)e}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta}^{(I)e}. \quad (30)$$

Компоненты напряжения на границе пластической зоны $\rho = \alpha$ в первом приближении согласно (19)–(22) представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= A_0 + A_2 \cos 2\theta + A_4 \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= A_0^* + A_2^* \cos 2\theta + A_4^* \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= B_2 \sin 2\theta + B_4 \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \mu \left(\ln^2 \frac{1}{\alpha} + \ln \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{\mu (\alpha - 1) - \ln a}{2} + \frac{(a+b)(1-\alpha^2)}{\alpha^2}, \\ A_2 &= \frac{d_1 \alpha}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} \cos \sqrt{3} \ln \alpha - 3 \sin \sqrt{3} \ln \alpha \right), \\ A_4 &= -\frac{a-b}{120} \left(\sqrt{15} \left(15 \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) - \right. \\ &\quad \left. - 15 \left(\frac{1}{2} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) + 15 \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) + 15(a-b) \right), \\ A_0^* &= \mu \left(\ln^2 \frac{1}{\alpha} + \ln \frac{1}{\alpha} - 1 \right) + \frac{\mu (\alpha - 1) - \ln \alpha}{2} + \frac{(a+b)(2(1-\alpha^2) + \alpha^2)}{2\alpha^2}, \\ A_2^* &= \frac{d_1 \alpha}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} \cos \sqrt{3} \ln \alpha - 3 \sin \sqrt{3} \ln \alpha \right), \\ A_4^* &= -\frac{a-b}{120} \left(\sqrt{15} \left(15 \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) - \right. \\ &\quad \left. - 15 \left(\frac{1}{2} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) + 15 \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) - 45(a-b) \right), \\ B_2 &= -\frac{2d_1 \alpha}{\rho} \left(\cos \sqrt{3} \ln \alpha \right), \\ B_4 &= -\frac{\sqrt{15}(a-b)}{30} \left(\left(15 \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) \right) + 15(a-b) \right). \end{aligned}$$

Из (25), (30), (31) согласно [1] получим

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(I)e} &= -\frac{A_0}{\rho^2} + \left[\left(-1 + \frac{4}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) + \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) A_2 \right] \cos 2\theta + \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) A_4 \cos 4\theta, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= -\frac{A_0 + 4}{\rho^2} + \left[\left(-1 - \frac{3}{\rho^4} \right) + \frac{A_2}{\rho^4} \right] \cos 2\theta + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) A_4^* \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(-1 - \frac{3}{\rho^2} + \frac{5}{\rho^4} \right) B_2 \sin 2\theta + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^4} \right) B_4 \sin 4\theta.\end{aligned}\quad (32)$$

Для определения радиуса упругопластической области в первом приближении получим

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho}}, \rho = 1. \quad (33)$$

Из (12), (26) будем иметь

$$\left. \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 2, \quad \left. \frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -2, \quad (34)$$

откуда согласно (31) – (34) найдем

$$\rho_s^{(I)} = \frac{1}{4} \left(\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e} \right) = \frac{1}{4} \left[-A_0^* + A_0 + 4 + (A_2^* - 4A_2) \cos 2\theta + (A_4 - A_4^*) \cos 4\theta \right].$$

Определим перемещение в пластической и упругой областях. Характер изменения деформированного состояния в некоторой точке P в процессе нагружения в рассматриваемом случае представляется следующим образом: сначала возрастают упругие деформации; затем, когда граница упругопластического состояния материала достигает точки P , процесс изменения упругих деформаций прекращается, так как изменение напряжений в пластической зоне в рассматриваемом случае не происходит. При дальнейшем возрастании нагрузок возникают пластические деформации.

В исходном нулевом приближении в упругих и пластических областях имеет место условие несжимаемости

$$e_\rho^{(0)} + e_\theta^{(0)} = 0. \quad (35)$$

Согласно (35) перемещения и деформации в упругой и пластической областях примут вид

$$u^{(0)} = \frac{1}{2G\rho}, v^{(0)} = 0, e_\rho^{(0)} = -\frac{2}{G\rho}, e_\theta^{(0)} = \frac{2}{G\rho^2}, e_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (36)$$

В упругой области согласно [1] и (31), получим

$$\begin{aligned}u^{(I)e} &= -\frac{1+\mu}{\rho E} \left[\mu \left(\ln^2 \frac{1}{\alpha} + \ln \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{\mu(\alpha-1) - \ln a}{2\alpha} + \frac{(a+b)(1-\alpha^2)}{\alpha^2} \right] - \\ &- \frac{1}{E} \left[\frac{(1+\mu)}{3\rho^3} (A_2 - 2B_2) - \frac{2}{\rho} (A_2 - B_2) + (1+\mu) \left(\rho - \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{4}{\rho^3} \right] \cos 2\theta + \\ &+ \frac{1}{E} \left[\frac{(1+\mu)}{5\rho^5} (2A_4 - 3B_4) - \frac{3+\mu}{3\rho^3} (A_4 - B_4) \right] \cos 4\theta, \quad (37)\end{aligned}$$

$$v^{(I)e} = \frac{1}{E} \left[\frac{(1+\mu)}{3\rho^3} (A_2 - 2B_2) - \frac{\mu-1}{\rho} (A_2 - B_2) - (1+\mu) \left(\rho + \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{2-\mu}{\rho} \right] \sin 2\theta +$$

$$+ \left(\frac{1}{5\rho^5} (1 + \mu) (2A_4 - 3B_4) - \frac{2\mu}{3\rho^3} (A_4 - B_4) \right) \sin 4\theta \Big].$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$u_\rho^p|_{\rho=1} = u_\rho^e|_{\rho=1}; \quad v_{\rho\theta}^p|_{\rho=1} = v_{\rho\theta}^e|_{\rho=1}. \quad (38)$$

В пластической зоне согласно (7) и ассоциированному закону течения имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} e_\rho = e_\rho^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\rho} = \lambda \left[2 \left(\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)} \right) \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \right. \\ &\quad \left. + \tau_{\rho\theta} (A-B) \sin 4\theta - \mu (2 + \mu\sigma) \right], \\ e_\theta = e_\theta^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta} = \lambda \left[-2 \left(\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)} \right) \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] - \right. \\ &\quad \left. - \tau_{\rho\theta} (A-B) \sin 4\theta - \mu (2 + \mu\sigma) \right], \\ e_{\rho\theta} = e_{\rho\theta}^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{\rho\theta}} = 4\tau_{\rho\theta}^{(p)} \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \\ &\quad + \left(\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)} \right) \left[\frac{A-B}{2} \sin 4\theta \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (39) следует

$$\frac{e_\rho^p}{\partial f / d\sigma_\rho} = \frac{e_\theta^p}{\partial f / d\sigma_\theta} = \frac{e_{\rho\theta}^p}{\partial f / d\tau_{\rho\theta}}. \quad (40)$$

В соотношениях (40) присутствуют компоненты пластической деформации, так как только они испытывают приращения в пластической зоне при возрастании нагрузки, причем при $t = 0$ имеют место равенства $e_\rho^p = e_\theta^p = e_{\rho\theta}^p = 0$. Момент времени $t = 0$ для каждой точки А отсчитывается от момента прохождения через нее упругопластической границы.

Полные деформации при $t = 0$, т. е. в момент возникновения пластических деформаций, отличны от нуля и совпадают с упругими деформациями, накопленными элементом тела к моменту достижения им предела текучести. Перепишем соотношения (40) в виде

$$\frac{e_\rho - e_\rho^e}{\partial f / d\sigma_\rho} = \frac{e_\theta - e_\theta^e}{\partial f / d\sigma_\theta} = \frac{2(e_{\rho\theta} - e_{\rho\theta}^e)}{\partial f / d\tau_{\rho\theta}}. \quad (41)$$

С учетом (40) соотношения (41) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &\frac{e_\rho - e_\rho^e}{2 \left(\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)} \right) \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \tau_{\rho\theta} (A-B) \sin 4\theta - \mu (2 + \mu\sigma)} = \\ &= \frac{e_\theta - e_\theta^e}{-2 \left(\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)} \right) \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \tau_{\rho\theta} (A-B) \sin 4\theta - \mu (2 + \mu\sigma)} = \\ &= \frac{2(e_{\rho\theta} - e_{\rho\theta}^e)}{4\tau_{\rho\theta}^{(p)} \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \left(\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)} \right) \left[\frac{A-B}{2} \sin 4\theta \right]} = \lambda. \end{aligned} \quad (42)$$

Упругие деформации при $\mu = \frac{1}{2}$ примут вид

$$\begin{aligned} e_\rho^e &= \frac{1}{4G} (\sigma_\rho - \sigma_\theta), e_\theta^e = \frac{1}{4G} (\sigma_\theta - \sigma_\rho), e_{\rho\theta}^e = \frac{\tau_{\rho\theta}}{2G}, \\ e_\rho^e + e_\theta^e &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Из (39) следует

$$e_\rho^{(I)} + e_\theta^{(I)} = -4\lambda^0 \mu, \quad (44)$$

где $\lambda^{(0)} = -\frac{1}{8G} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)$.

Из (44) получим

$$e_\rho^{(I)} + e_\theta^{(I)} = e_\rho^{(I)e} + e_\theta^{(I)e} + e_\rho^{(I)p} + e_\theta^{(I)p} = \frac{\mu}{2G} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right). \quad (45)$$

Согласно [2] запишем соотношения для деформаций

$$e_\rho = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \rho}, e_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(n)}}{\rho}, e_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(n)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \theta} \right]. \quad (46)$$

Из соотношения (42) найдем

$$e_{\rho\theta}^{(I)} = \frac{\tau_{\rho\theta}^{(I)p}}{2G} \left(2 - \frac{1}{\rho^2}\right). \quad (47)$$

Согласно (45)–(47), с учетом $e_\rho^{(I)e} + e_\theta^{(I)e} = 0$ дифференциальные уравнения для определения перемещения в пластической области в первом приближении примут вид

$$\frac{\partial u^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(I)}}{\rho} = -\frac{\mu}{2G} \left(\frac{1}{\rho} - 1\right), \quad (48)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\tau_{\rho\theta}^{(I)p}}{2G} \left(\frac{1}{\rho^2} - 2\right). \quad (49)$$

Из уравнений (48), (49) получим

$$\begin{aligned} u^{(I)p} &= \frac{C_{00}^*}{\rho} + \frac{\mu}{2G\rho} (\rho^2 - 2 \ln \rho) - 2 \left(C_{21}^* \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^* \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta + \\ &\quad - 4 \left(C_{41}^* \cos(\sqrt{15} \ln \rho) + C_{42}^* \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \cos 4\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(I)p} &= \frac{3\tau_{\rho\theta}^{(I)p}}{4G\rho} + \left((\sqrt{3}C_{22}^* + C_{21}^*) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + (C_{22}^* - \sqrt{3}C_{21}^*) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \sin 2\theta + \\ &\quad + \left((\sqrt{15}C_{42}^* + C_{41}^*) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) + (C_{42}^* + \sqrt{15}C_{41}^*) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \sin 4\theta. \end{aligned}$$

Из (32) и условий сопряжения (26) найдем коэффициенты $C_{00}^*, C_{21}^*, C_{22}^*, C_{41}^*, C_{42}^*$.

$$C_{00}^* = -\frac{\mu}{2G} - \frac{1+\mu}{E} \left[\mu \left(\ln^2 1/\alpha + \ln 1/\alpha + \frac{\alpha-1}{4} \right) - \frac{(a+b)(1-\alpha)}{\alpha^2} \right],$$

$$C_{21}^* = \frac{\sqrt{3}M \cos(\ln \sqrt{3}\rho) + (M + 2M') \sin(\ln \sqrt{3}\rho)}{2\sqrt{3}},$$

$$C_{22}^* = \frac{\sqrt{3}M \sin(\ln \sqrt{3}\rho) - (M + 2M') \cos(\ln \sqrt{3}\rho)}{2\sqrt{3}},$$

$$C_{41}^* = \frac{\sqrt{15}N \cos(\ln \sqrt{15}\rho) + (N + 4N') \sin(\ln \sqrt{3}\rho)}{-4\sqrt{15}},$$

$$C_{42}^* = \frac{\sqrt{15}N \sin(\ln \sqrt{15}\rho) - (N + 4N') \cos(\ln \sqrt{3}\rho)}{-4\sqrt{15}},$$

где

$$M = -\frac{1}{E} \left[\frac{(1+\mu)}{3} (A_2 - 2B_2) - 2(A_2 - B_2) + 4 \right],$$

$$M' = \frac{1}{E} \left(\frac{1+\mu}{5} (2A_4 - 3B_4) - \frac{3+\mu}{3} (A_4 - B_4) \right),$$

$$N = \frac{1}{E} \left[\frac{(1+\mu)}{3} (A_2 - 2B_2) - (\mu - 1) (A_2 - B_2) - 3\mu \right],$$

$$N' = \left(\frac{1}{5} (1+\mu) (2A_4 - 3B_4) - \frac{2\mu}{3} (A_4 - B_4) \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бицено, К. Б.* Техническая академия / К. Б. Бицено, Р. Л. Граммель. - Л. : Гостехиздат, 1950. - 900 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. - М. : Наука, 1978. - 208 с.
- [3] *Леднев, А. П.* Об анизотропном идеальнопластическом состоянии толстой плиты, ослабленной эллиптическим отверстием / А. П. Леднев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 1 (48). - С. 81-85.
- [4] *Леднев, А. П.* Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из анизотропного идеальнопластического материала / А. П. Леднев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 2(49). - С. 16-21.
- [5] *Леднев, А. П.* Упругопластическое состояние анизотропной пластической трубы под действием внутреннего давления / А. П. Леднев // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чуваш. гос. пед. ун-та. - 2006. - №1 (7). - Т. 1. - С. 20-27.

S. V. Ivanova

**ELASTOPLASTIC CONDITION OF A THICK SLAB FROM ANISOTROPIC
MATERIAL BEING COMPRESSED WEAKENED BY AN APERTURE UNDER
THE STRETCHING STRESS**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Stressed elastoplastic state of a thick slab from anisotropic material being compressed with an elliptic aperture in biaxial tension at infinity is considered in the work. The solution of this task is made with the help of perturbation theory [2], the tension and shift components in elastic and plastic stability are found at first approximation, the limit of plastic area is determined.

Keywords: tension, deformation, elasticity, plasticity, anisotropy, an aperture.

Иванова Светлана Владимировна

аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета, г. Чебоксары

e-mail: svivanko@ya.ru

Ivanova Svetlana Vladimirovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ СЛОИСТЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматриваются слоистые круговые цилиндры, находящиеся под действием внутреннего давления. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами прямоугольной анизотропии. Определен алгоритм определения напряженного состояния для произвольного числа слоев.

Ключевые слова: напряжения, усилия, предел текучести, анизотропия, слой.

УДК: 539.374

1. Рассматривается слоистый круговой цилиндр, находящийся под действием внутреннего давления p (рис. 1).

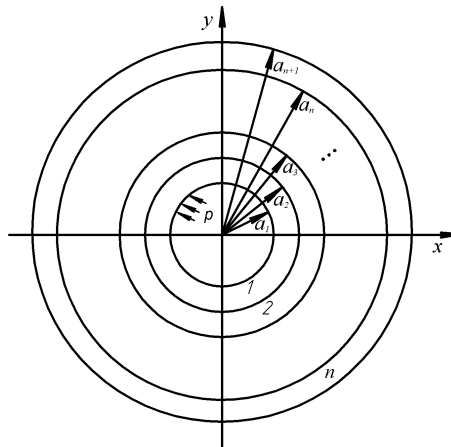


Рис. 1.

Обозначим через a_1, a_2 – внутренний и внешний радиусы 1-го цилиндра, через a_2, a_3 – внутренний и внешний радиусы 2-го цилиндра, через a_n, a_{n+1} – внутренний и внешний радиусы n -го цилиндра.

Условие предельного состояния для n -го слоя примем в виде

$$A_n (\sigma_{xn} - \sigma_{yn})^2 + 4B_n \tau_{xyn}^2 = 4k_n^2, \quad k_n, A_n, B_n - const, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \tau_{xyn}$ – компоненты напряжения в n -ом слое в декартовой системе координат x, y , A_n, B_n – константы анизотропии.

К выражениям компонентов напряжения в полярной системе координат r, θ перейдем по формулам [1]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta - \tau_{r\theta} \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (2)$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ – компоненты напряжения в полярной системе координат r, θ .

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам: все компоненты напряжения отнесем к величине предела текучести k и обозначим

$$\frac{k_n}{k} = \chi_n, \quad \frac{p}{k} = q, \quad (3)$$

все величины, имеющие размерность длины, отнесем к некоторой характерной величине r_0 и обозначим

$$\frac{a_n}{r_0} = \alpha_n, \quad \frac{r}{r_0} = \rho. \quad (4)$$

Согласно (2–4) запишем соотношения (1) в виде

$$A_n [(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \cos 2\theta - 2\tau_{\rho\theta n} \sin 2\theta]^2 + B_n [(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \sin 2\theta + 2\tau_{\rho\theta n}]^2 = 4\chi_n^2 \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned}(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n})^2 [A_n \cos^2 2\theta + B_n \sin^2 2\theta] + 4\tau_{\rho\theta}^2 [A_n \sin^2 2\theta + B_n \cos^2 2\theta] - \\ - 2(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \tau_{\rho\theta n} (A_n - B_n) \sin 4\theta = 4\chi_n^2.\end{aligned}\quad (6)$$

Решение будем искать в виде разложений по степеням некоторого малого безразмерного параметра δ

$$\sigma_{ijn} = \sigma_{ijn}^0 + \delta \sigma'_{ijn}, \quad A_n = 1 + \delta a_n, \quad B_n = 1 + \delta b_n. \quad (7)$$

Положим, что нулевое, исходное напряженное состояние является осесимметричным

$$\tau_{\rho\theta n}^0 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

В нулевом исходном состоянии согласно (6), (8) имеет место

$$\sigma_{\rho n}^0 - \sigma_{\theta n}^0 = \pm 2\chi_n. \quad (9)$$

При действии внутреннего давления $\sigma_{\theta n} > \sigma_{\rho n}$, поэтому в (9) имеет место нижний знак, соотношение (9) перепишем в виде

$$\sigma_{\theta n}^0 = \sigma_{\rho n}^0 + 2\chi_n. \quad (10)$$

Из уравнений равновесия

$$\frac{d\sigma_{\rho n}^0}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho n}^0 - \sigma_{\theta n}^0}{\rho} = 0 \quad (11)$$

и условия (10), получим

$$\sigma_{\rho n}^0 = 2\chi_n \ln \rho + C_n. \quad (12)$$

Из граничного условия

$$\sigma_{\rho 1}^0 = -q \text{ при } \rho = \alpha_1, \quad (13)$$

а также из (9),(10), (12) найдем

$$\sigma_{\rho 1}^0 = -q + 2\chi_1 \ln \frac{\rho}{\alpha_1}, \sigma_{\theta 1}^0 = -q + 2\chi_1 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right), \tau_{\rho\theta 1}^0 = 0. \quad (14)$$

Условие сопряжения решения имеет вид

$$\sigma_{\rho 1}^0 = \sigma_{\rho 2}^0 \text{ при } \rho = \alpha_2. \quad (15)$$

Из (12),(14),(15) получим

$$\sigma_{\rho 2}^0 = -q + 2\chi_2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} + 2\chi_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta 2}^0 = -q + 2\chi_2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + 2\chi_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Аналогично (16) будем иметь

$$\sigma_{\rho n}^0 = -q + 2\chi_n \ln \frac{\rho}{\alpha_n} + 2\chi_{n-1} \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \dots + 2\chi_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta n}^0 = 2\chi_n + \sigma_{\rho n}^0, \tau_{\rho\theta n}^0 = 0.$$

Если $\sigma_{\rho n}^{(0)} = 0$ при $\rho = \alpha_{n+1}$, из (17) получим предельное значение внутреннего давления

$$\sigma_{\rho n \text{ пред}}^0 = 2\chi_n \ln \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} + 2\chi_{n-1} \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \dots + 2\chi_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (18)$$

Линеаризируя соотношения (6), учитывая (7), (8), (10), получим

$$\sigma'_{\theta n} - \sigma'_{\rho n} = \chi_n \left[\frac{a_n + b_n}{2} + \frac{a_n - b_n}{2} \cos 4\theta \right]. \quad (19)$$

Уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma'_{\rho n}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho\theta n}}{\partial \theta} + \frac{\sigma'_{\rho n} - \sigma'_{\theta n}}{\rho} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tau'_{\rho\theta n}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{\theta n}}{\partial \theta} + \frac{2\tau'_{\rho\theta n}}{\rho} = 0,$$

удовлетворим, полагая

$$\sigma'_{\rho n} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \theta^2},$$

$$\sigma'_{\theta n} = \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \rho^2}, \quad (21)$$

$$\tau'_{\rho\theta n} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \theta} \right).$$

Из (19), (21) найдем

$$\frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \theta^2} = G_n + H_n \cos 4\theta, \quad (22)$$

где

$$G_n = \chi_n \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right), \quad H_n = \chi_n \left(\frac{a_n - b_n}{2} \right). \quad (23)$$

Решение уравнения (22) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\Phi'_n = \Phi'_{n \text{ одн}} + \Phi'_{n \text{ частн}}. \quad (24)$$

Однородное уравнение (22) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \theta^2} = 0. \quad (25)$$

Полагая

$$\Phi'_{n \text{ одн}} = R_n \cos m\theta, \quad (26)$$

следуя [2], получим

$$R_n = C_{00}^{(n)} + C_{01}^{(n)} \quad \text{при } m = 0, \quad (27)$$

$$R_n = \rho \left(C_{11}^{(n)} + C_{12}^{(n)} \ln \rho \right) \quad \text{при } m = 1, \quad (28)$$

$$R_n = \rho \left[C_{m1}^{(n)} \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) + C_{m2}^{(n)} \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] \quad \text{при } m \geq 2. \quad (29)$$

Частное решение неоднородного уравнения (21) имеет вид

$$\Phi'_{n \text{ частн}} = \frac{G_n}{2} (\rho^2 \ln \rho - \rho) + \frac{H_n}{16} \rho^2 \cos 4\theta. \quad (30)$$

Из (21), (24), (26), (27), (29), (30) найдем для

$$\sigma'_{\rho n} = C_{00}^{(n)} + \frac{1}{\rho} \left\{ \left[-3C_{41}^{(n)} + \sqrt{3}C_{42}^{(n)} \right] \cos \omega + \left[-\sqrt{3}C_{41}^{(n)} - 3C_{42}^{(n)} \right] \sin \omega \right\} \cos 4\theta + G_n \ln \rho - \frac{7}{8} H_n \cos 4\theta, \quad (31)$$

$$\sigma'_{\theta n} = \sigma'_{\rho \text{ одн}} + G_n (1 + \ln \rho) + \frac{1}{8} H_n \cos 4\theta, \quad (32)$$

$$\tau'_{\rho \theta n} = \frac{4\sqrt{3}}{\rho} [-C_{41} \sin \omega + C_{42} \cos \omega] \sin 4\theta + \frac{H_n}{4} \sin 4\theta, \quad (33)$$

где $\omega = \sqrt{3} \ln \rho$.

Граничные условия на внутреннем контуре трубы имеют вид

$$\sigma'_{\rho 1} = 0, \quad \tau'_{\rho \theta 1} = 0 \quad \text{при } \rho = \alpha_1. \quad (34)$$

Из (31), (33), (34) получим

$$C_{00}^{(1)} + \frac{1}{\alpha_1} \left\{ C_{41}^{(1)} [-3 \cos \omega_1 - \sqrt{3} \sin \omega_1] + C_{42}^{(1)} [\sqrt{3} \cos \omega_1 - 3 \sin \omega_1] \right\} \cos 4\theta = -G_1 \ln \alpha_1 + \frac{7}{8} H_1 \cos 4\theta, \quad (35)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\alpha_1} [-C_{41}^{(1)} \sin \omega_1 + C_{42}^{(1)} \cos \omega_1] = -\frac{1}{4} H_1, \quad (36)$$

где $\omega_1 = \sqrt{3} \ln \alpha_1$, в дальнейшем $\omega_n = \sqrt{3} \ln \alpha_n$.

Из (23), (35) следует

$$C_{00}^{(1)} = -G_1 \ln \alpha_1 = -\chi_1 \frac{a_1 + b_1}{2} \ln \alpha_1. \quad (37)$$

Для определения постоянных $C_{41}^{(1)}$, $C_{42}^{(1)}$ имеет место система уравнений

$$\begin{aligned} C_{41}^{(1)} \cdot M(\alpha_1) + C_{42}^{(1)} \cdot N(\alpha_1) &= \frac{7\alpha_1}{8} H_1, \\ C_{41}^{(1)} (-\sin \omega_1) + C_{42}^{(1)} \cos \omega_1 &= \frac{-\sqrt{3}\alpha_1}{48} H_1, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} M(\alpha_n) &= -3 \cos \omega_n - \sqrt{3} \sin \omega_n, \\ N(\alpha_n) &= \sqrt{3} \cos \omega_n - 3 \sin \omega_n, n = 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Согласно (37) имеет место

$$C_{41}^{(1)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1}, \quad C_{42}^{(1)} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_1}, \quad (40)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 \cos \omega_1 - \sqrt{3} \sin \omega_1 & \sqrt{3} \cos \omega_1 - 3 \sin \omega_1 \\ -\sin \omega_1 & \cos \omega_1 \end{vmatrix} = -3, \quad (41)$$

$$\Delta_{11} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 (13 \cos \omega_1 + \sqrt{3} \sin \omega_1), \quad \Delta_{21} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 (13 \sin \omega_1 - \sqrt{3} \cos \omega_1). \quad (42)$$

Отметим, что аналогично (41) имеет место $\Delta_n = -3$.

Согласно (31), (32), (33), (39), (40), (41), (42) компоненты напряженного состояния σ'_{ij1} в первом слое определены, компоненты напряженного состояния $\sigma_{ijn}^{(0)}$ определены согласно (17), суммарное напряженное состояние определяется согласно (7).

2. Перейдем к определению напряженного состояния во втором и последующих слоях.

Из условий сопряжения

$$\sigma'_{\rho 2} = \sigma'_{\rho 1}, \quad \tau'_{\rho \theta 2} = \tau'_{\rho \theta 1} \text{ при } \rho = \alpha_2, \quad (43)$$

из (31), (33) найдем

$$\begin{aligned} C_{00}^{(2)} + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ C_{41}^{(2)} [-3 \cos \omega_2 - \sqrt{3} \sin \omega_2] + C_{42}^{(2)} [\sqrt{3} \cos \omega_2 - 3 \sin \omega_2] \right\} \cos 4\theta = \\ = \sigma'_{\rho 1}(\alpha_2) - G_2 \ln \alpha_2 + \frac{7}{8} H_2 \cos 4\theta - \\ - \frac{4\sqrt{3}}{\alpha_2} [-C_{41}^{(2)} \sin \omega_2 + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2] = \tau'_{\rho \theta}(\alpha_2) - \frac{1}{4} H_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Из (31), (44) получим

$$C_{00}^{(2)} = -G_2 \ln \alpha_2 - G_1 \ln \alpha_1. \quad (45)$$

Из (44), (31-42) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_2} [C_{41}^{(2)} M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)} N(\alpha_2)] &= \Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8} (H_2 + H_1), \\ \frac{4\sqrt{3}}{\alpha_2} [-C_{41}^{(2)} \sin \omega_2 + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2] &= \Sigma_{\rho \theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4} (H_2 + H_1), \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\Sigma_{\rho 1}(\rho) = \frac{1}{\rho} \left(C_{41}^{(1)} [-3 \cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega] + C_{42}^{(1)} [\sqrt{3} \cos \omega - 3 \sin \omega] \right), \quad (47)$$

$$\Sigma_{\rho\theta 1}(\rho) = \frac{4\sqrt{3}}{\rho} \left[-C_{41}^{(1)} \sin \omega + C_{42}^{(1)} \cos \omega \right], \omega = \sqrt{3} \ln \rho.$$

Перепишем систему уравнений (46) в виде

$$C_{41}^{(2)} M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)} N(\alpha_2) = P_2, \quad (48)$$

$$C_{41}^{(2)} (-\sin \omega_2) + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2 = Q_2,$$

где

$$P_2 = \alpha_2 \left[\Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8} (H_2 + H_1) \right], \quad (49)$$

$$Q_2 = \frac{\alpha_2 \sqrt{3}}{12} \left[\Sigma_{\rho\theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4} (H_2 + H_1) \right].$$

Из (40), (49) следует

$$\begin{aligned} C_{41}^{(2)} &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta_2} = -\frac{1}{3} (P_2 \cos \chi_2 - Q_2 \cdot N(\alpha_2)), \\ C_{41}^{(2)} &= \frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = -\frac{1}{3} (P_2 \sin \chi_2 + Q_2 \cdot M(\alpha_2)), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 = -3.$$

Согласно (23), (30)-(32), (45)-(49) компоненты напряженного состояния σ'_{ij2} определены.

Аналогично методом математической индукции определяются компоненты напряжений σ'_{ijn} при условии, что компоненты σ'_{ijn-1} определены.

Аналогично (45) получим

$$C_{00}^{(n)} = -G_n \ln \alpha_n - G_n \ln \alpha_n - G_n \ln \alpha_n - \dots - G_1 \ln \alpha_1. \quad (51)$$

Из условий сопряжения решений

$$\sigma_{\rho n}^{(I)} = \sigma_{\rho n-1}^{(I)}, \tau_{\rho n}^{(I)} = \tau_{\rho n-1}^{(I)} \text{ при } \rho = \alpha_n, \quad (52)$$

из (31), (33), аналогичной (50), будем иметь

$$C_{41}^{(n)} M(\alpha_n) + C_{42}^{(n)} N(\alpha_n) = P_{n-1}, \quad (53)$$

$$C_{41}^{(n)} (-\sin \omega_n) + C_{42}^{(n)} \cos \omega_n = Q_{n-1},$$

где

$$P_n = \alpha_n \left[\Sigma_{\rho n}(\alpha_n) (\alpha_n) + \frac{7}{8} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right], \quad (54)$$

$$Q_n = \frac{\alpha_n \sqrt{3}}{12} \left[\Sigma_{\rho\theta n}(\alpha_n) (\alpha_n) - \frac{1}{4} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right],$$

$$\Sigma_{\rho n}(\rho) = \frac{1}{\rho} \left(C_{41}^{(n)} \left[-3 \cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega \right] + C_{42}^{(n)} \left[\sqrt{3} \cos \omega - 3 \sin \omega \right] \right), \quad (55)$$

$$\Sigma_{\rho\theta n}(\rho) (\rho) = \frac{4\sqrt{3}}{\rho} \left[-C_{41}^{(n)} \sin \omega + C_{42}^{(n)} \cos \omega \right].$$

Аналогично (43) получим

$$\begin{aligned}
C_{41}^{(n)} &= \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{3} (P_n \cos \omega - Q_n N(\alpha_n)), \\
C_{42}^{(n)} &= \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{3} (P_n \sin \omega - Q_n M(\alpha_n)), \\
\Delta_1 &= \Delta_2 = \dots = \Delta_n = -3,
\end{aligned}
\tag{56}$$

где P_n , Q_n , (31) определены при известных значениях σ'_{ijn-1} .

Компоненты напряжений σ'_{ijn} определяются согласно (31–56).

Из (31–56) следует, что свойства анизотропии последовательно оказывают влияние на напряженное состояние последующих слоев: напряженное состояние в n -ом слое будет зависеть от свойств анизотропии всех предыдущих $n-1$ слоев.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зубчанинов, В. Г.* Сопrotивление материалов / В. Г. Зубчанинов. - Тверь : ТГТУ, 2005. - Кн. 2. - 352 с.

[2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. - М. : Наука, 1978. - 208 с.

D. A. Ivlev

ABOUT THE LIMIT CONDITION OF LAYERED CIRCULAR CYLINDERS FROM ANISOTROPIC MATERIAL UNDER THE IMPACT OF INNER PRESSURE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Layered circle cylinders being under the impact of inner pressure are considered. It is supposed that each layer has its rectangular anisotropy characteristics. The algorithm of tension detection for free number of layers is defined.

Keywords: tensions, efforts, yield strength, anisotropy, layer

Ивлев Дмитрий Александрович

аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: DAIvlev@mail.ru

Dmitriy Aleksandrovich Ivlev

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

ОБ АНИЗОТРОПИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Обсуждаются свойства условий пластичности для анизотропных тел в случае плоской деформации.

Ключевые слова: напряжения, пластичность, анизотропия, предел текучести.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим замену переменных [1]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma + k \cos 2\varphi, & \sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \\ \sigma_y &= \sigma - k \cos 2\varphi, & \operatorname{tg} 2\varphi &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\varphi,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжений в декартовой системе координат xy , σ – среднее давление, φ – угол наклона первого главного напряжения к оси x .

Величина максимального касательного напряжения τ_{\max} определяется из соотношения [2]

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.\tag{2}$$

Из (1), (2) следует

$$\tau_{\max} = k.\tag{3}$$

Согласно (1), (3) величина k является максимальным значением касательного напряжения.

Условие пластичности максимального касательного напряжения Треска – Сен-Венана для изотропного тела согласно (2), (3) имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad k - \text{const},\tag{4}$$

где k – предел текучести на сдвиг.

Следуя [3], запишем условие пластичности для анизотропного тела

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4B\tau_{xy}^2 = 4k_0^2, \quad k_0, A, B - \text{const},\tag{5}$$

где A, B – константы анизотропии.

Из (1), (5) получим

Поступила 10.03.2010

$$k(\varphi) = \frac{k_0}{\sqrt{A \cos^2 2\varphi + B \sin^2 2\varphi}}. \quad (6)$$

Условие пластичности (5), согласно (1-3) можно записать в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2(\varphi), \quad (7)$$

где $k(\varphi)$ определено соотношением (6).

Величина $k(\varphi)$ является переменным пределом текучести на сдвиг в зависимости от угла φ . Величина $2k(\varphi)$ является переменным пределом текучести на растяжение вдоль направления, образующего угол φ с осью x .

Соотношение (6) запишем в виде

$$k(\varphi) = \frac{k_0}{\sqrt{\frac{A+B}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{A-B}{A+B}\right) \cos 4\varphi}}}. \quad (8)$$

На рис. 1 показан характер изменения зависимости $k = k(\varphi)$ согласно (8).

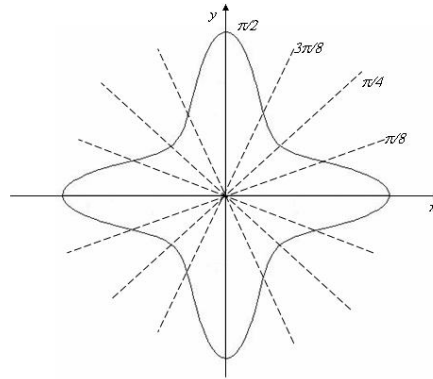


Рис. 1.

2. Рассмотрим условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 + 2(\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy} = 4k_0^2, \quad k_0 - const. \quad (9)$$

Из (1), (8) найдем

$$k^2 + k^2 \cos 2\varphi \cdot \sin 2\varphi = k_0^2. \quad (10)$$

Из (10) найдем

$$k(\varphi) = \frac{k_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin 4\varphi}}. \quad (11)$$

Условие пластичности (10) согласно (1-3) можно записать в виде (7), где $k(\varphi)$ определяется согласно (11). На рис. 2 показан характер изменения зависимости $k = k(\varphi)$ согласно (11). В обоих случаях (рис. 1, 2) имеет место четырехлепестковый характер анизотропии, угол между осями симметрии на рисунках 1, 2, соответствующий соотношениям (8), (11), составляет $\frac{\pi}{8}$.

3. Рассмотрим условие пластичности

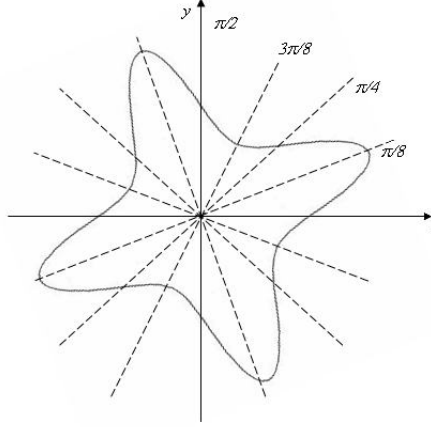


Рис. 2.

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4B\tau_{xy}^2 + 2C(\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy} = 4k_0^2, \quad k_0, A, B, C - \text{const.} \quad (12)$$

Из (1), (12) найдем

$$k(\varphi) = \frac{k_0}{\sqrt{\frac{A+B}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{A-B}{A+B}\right) \cos 4\varphi + \left(\frac{C}{A+B}\right) \sin 4\varphi}}. \quad (13)$$

Выражение (13) можно записать в виде

$$k(\varphi) = \frac{k_0}{\sqrt{\frac{A+B}{2}} \sqrt{1 + M \cdot \cos 4(\varphi - \varphi_0)}}, \quad (14)$$

где $\text{tg} 4\varphi_0 = \frac{C}{A-B}$, $M = \sqrt{\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2 + \left(\frac{C}{A+B}\right)^2}$.

Согласно (14) четырехлепестковый характер анизотропии сохраняется, оси симметрии повернуты на угол φ_0 по отношению к оси x .

4. Рассмотрим условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 6k_0^2, \quad k_0 - \text{const.} \quad (15)$$

В случае плоского напряженного состояния имеет место

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (16)$$

Из (15), (16) получим

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2 = 6k_0^2. \quad (17)$$

Используя представления

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \quad (18)$$

запишем выражение (17) в виде

$$3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma^2 + 12\tau_{xy}^2 = 12k_0^2. \quad (19)$$

Из (1), (19) будем иметь

$$k = \sqrt{k_0^2 - \frac{\sigma^2}{3}}. \quad (20)$$

Условие пластичности (19) согласно (1), (20) может быть переписано в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2(\sigma), \quad (21)$$

где $k(\sigma)$ определяется согласно (20).

Рассмотрим условие пластичности для анизотропного материала

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4B\tau_{xy}^2 = 4k^2(\sigma), \quad A, B - const, \quad (22)$$

величина $k(\sigma)$ определяется из (20).

Из (1), (22) аналогично (8) получим

$$k(\sigma, \varphi) = \frac{k(\sigma)}{\sqrt{\frac{A+B}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{A-B}{A+B}\right) \cos 4\varphi}}. \quad (23)$$

Условие пластичности (23) согласно (1), (23) может быть переписано в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2(\sigma, \varphi),$$

где $k(\sigma, \varphi)$ определяется согласно (23).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. - М. : Гостехтеоретиздат, 1956.
- [2] Зубчанинов, В. Г. Сопротивление материалов / В. Г. Зубчанинов. - Тверь : ТГТУ, 2005. - Кн. 2. - 352 с.
- [3] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. - М. : Гостехиздат, 1956.

D. A. Ivlev

ABOUT PLASTIC OBJECTS ANISOTROPY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Plasticity conditions characteristics for anisotropic objects at flat deformation are considered.

Keywords: tension, plasticity, anisotropy, yield

Ивлев Дмитрий Александрович

аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: DAIvlev@mail.ru

Dmitriy Aleksandrovich Ivlev

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ОТВЕРСТИЕМ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В настоящей работе исследуется задача о предельном состоянии цилиндрических и призматических стержней с отверстием при кручении. Предполагается, что стержень находится под давлением, линейно меняющимся вдоль образующей. Определено напряженное состояние стержня, построено поле характеристик в случае, когда внутренний контур поперечного сечения образует произвольный угол θ .

Ключевые слова: кручение, напряжение, пластичность, упругость, стержень, характеристики, отверстие.

УДК: 539.374

1. Рассмотрим призматический стержень, ориентированный в декартовой системе координат xuz , причем образующие стержня направлены параллельно оси z . Предположим, что стержень закручивается вокруг оси z .

Пусть напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6. \quad (1)$$

К соотношению (1) присоединим три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Система соотношений (1), (2) является статически неопределимой. Предположим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + c, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \quad (3)$$

где $\lambda = const$, $c = const$.

Согласно (3) из (1) и (2) получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda, \quad \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 = 1. \quad (4)$$

Второму уравнению (4) удовлетворим, полагая

$$\tau_{xz} = \cos \varphi, \quad \tau_{yz} = \sin \varphi. \quad (5)$$

Подставляя выражения (5) в первое уравнение (4), имеем

$$-\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lambda. \quad (6)$$

Система уравнений для определения характеристик (6) имеет вид

$$-\frac{dx}{\sin \varphi} = \frac{dy}{\cos \varphi} = \frac{d\varphi}{\lambda}. \quad (7)$$

Из системы (7) следует

$$\lambda x = \cos \varphi + c_1, \quad \lambda y = \sin \varphi + c_2. \quad (8)$$

Исключая из (8) φ , получим уравнения характеристик соотношения (6)

$$\left(x - \frac{c_1}{\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{c_2}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (9)$$

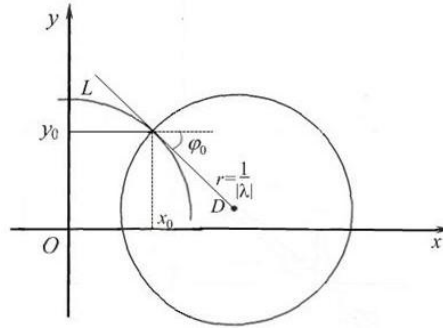


Рис. 1.

Обозначим через L внутренний контур поперечного сечения стержня в плоскости xy ($z = \text{const}$).

Пусть $(x_0, y_0) \in L$ и $\varphi(x_0, y_0) = \varphi_0$. Тогда из (8) следует

$$\lambda x_0 = \cos \varphi_0 + c_1, \quad \lambda y_0 = \sin \varphi_0 + c_2. \quad (10)$$

С учетом (10) из (9) получим

$$\left(x - \left(x_0 - \frac{\cos \varphi_0}{\lambda}\right)\right)^2 + \left(y - \left(y_0 - \frac{\sin \varphi_0}{\lambda}\right)\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (11)$$

Пусть $\tau = \tau_{xz}i + \tau_{yz}j$ – вектор касательного напряжения, где i, j – единичные векторы вдоль осей x и y . Согласно (5)

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (12)$$

то есть φ – угол наклона касательного напряжения τ к оси x . Из (7) следует, что вдоль характеристик (11)

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (13)$$

Следовательно, вектор касательного напряжения τ всегда направлен ортогонально к характеристике.

Предположим, что внутренняя боковая поверхность стержня свободна от касательных усилий. Следовательно, вектор касательного напряжения τ во всех точках контура L направлен

по касательной к ней. Отсюда следует, что характеристики есть окружности, нормальные к контуру.

Таким образом, характеристики уравнения (6) в плоскости xy есть окружности радиуса $\frac{1}{|\lambda|}$, причем центры этих окружностей расположены на касательных к контуру L и расстоянии $\frac{1}{|\lambda|}$ от точки касания.

Согласно (8) и (10) из (7) имеем

$$\tau_{xz} = \cos \varphi_0 + \lambda(x - x_0), \quad \tau_{yz} = \sin \varphi_0 + \lambda(y - y_0), \quad (14)$$

где φ_0 – угол, образованный касательной к внутреннему контуру L в точке (x_0, y_0) и осью x .

2. Рассмотрим кручение цилиндрического стержня с круговым отверстием. Контур поперечного сечения L отверстия стержня есть окружность произвольного радиуса R , центр которой совпадает с центром внешнего контура поперечного сечения стержня. Расположение характеристик и огибающей характеристик приведено на рис. 2.

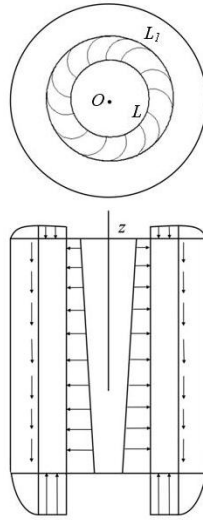


Рис. 2.

Напряженное состояние определяется только в кольце, ограниченном окружностями L и L_1 , где L_1 – огибающая характеристик. Характеристики уравнения (6) ортогональны к контуру L и касаются огибающей L_1 . Вектор касательного напряжения τ во всех точках L_1 направлен к ней ортогонально вдоль образующей стержня. Решение задачи не может быть продолжено за круг, ограниченный огибающей L_1 .

Рассмотрим случай, когда контур поперечного сечения L отверстия стержня образует произвольный угол θ , одна из сторон которого совпадает с положительной полуосью OX , с вершиной в начале координат.

В вершине угла θ имеет место семейство характеристик, уравнение которого имеет вид:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \end{cases} \quad (15)$$

Уравнение огибающей данного семейства характеристик имеет вид:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2. \quad (16)$$

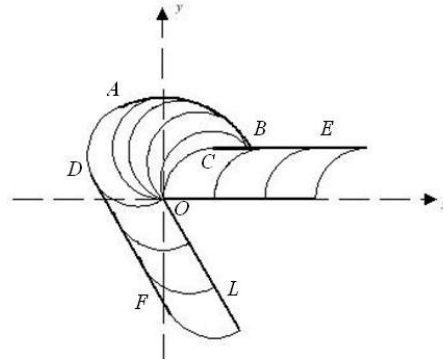


Рис. 3.

На рис. 3 построено поле характеристик для рассматриваемого угла θ .

На отрезке BC касательное напряжение не сопрягается. Следовательно, вдоль отрезка BC необходимо предположить наличие щели. Вектор касательного напряжения τ направлен ортогонально к левому берегу щели по образующей стержня. Аналогично нормальная составляющая вектора касательного напряжения τ к правому берегу щели направлена по образующей стержня вглубь щели. Решение не может быть продолжено за огибающие характеристик $EBADF$, вдоль этих линий действуют касательные напряжения, направленные вдоль оси z , уравновешивающие перепад давления σ_z .

На рисунках 4 и 5 построено поле характеристик, в случае когда внутреннее отверстие контура есть правильный треугольник и квадрат.

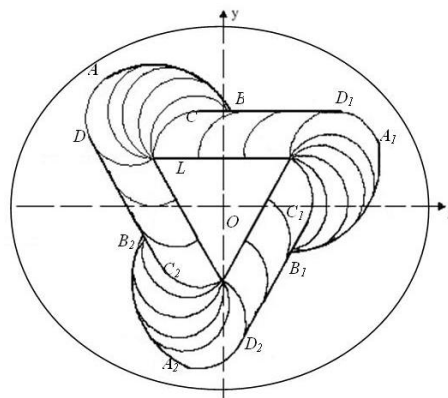


Рис. 4.

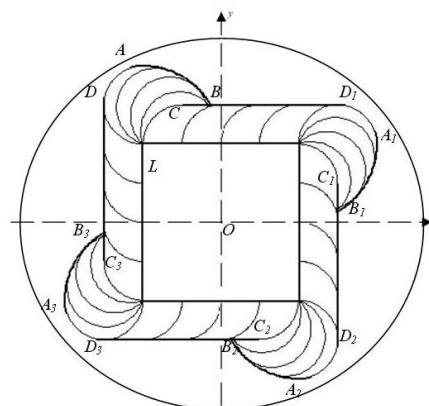


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. - М. : Наука, 1966. - 232 с.
- [2] *Качанов, Л. М.* Основа теории пластичности / Л. М. Качанов. - М. : Наука, 1969. - 420 с.
- [3] *Козлова, Л. С.* Предельное состояние призматических стержней при кручении / Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чуваш. гос. пед. ун-т. - 2009. - № 2 (14). - С. 8-17.
- [4] *Козлова, Л. С.* Предельное состояние призматических стержней, находящихся под давлением / Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. - 2009. - № 3-4 (63). - С. 6-14.
- [5] *Миронов, Б. Г.* О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 1 (48). - С. 98-101.

L. S. Kozlova

**LIMITING CONDITION OF CYLINDRICAL AND PRISMATIC RODS WITH
APERTURE AT TORSION**

I.Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The problem of limiting condition of cylindrical and prismatic rods with aperture at torsion is investigated in the given work. It is supposed that the rod is under the linearly varying along the forming pressure. The rod tension is found, the field of characteristics in the case when the internal contour of a cross section forms an angle θ is constructed.

Keywords: torsion, pressure, plasticity, elasticity, rod, characteristics, an aperture.

Козлова Людмила Святославовна

аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: l_s_kozlova@mail.ru

Kozlova Ljudmila Svjatoslavovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I.Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары

Аннотация. Рассматривается поле скорости перемещений в задаче о предельном состоянии идеальнопластического анизотропного слоя, сжатого жесткими шероховатыми плитами. Из вариационного уравнения определяются уравнения для определения скоростей перемещений. Даны выражения компонент скоростей перемещений, соответствующие напряженному состоянию.

Ключевые слова: напряжения, усилия, деформации, скорости перемещения, пластичность, предельное состояние, слой, жесткие плиты.

УДК: 537.374

1. В работе [2] даны статически определимые соотношения для анизотропного материала, не сводящиеся к условиям полного предельного состояния

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \nu + 2An_1^2, \quad \tau_{xy} = 2Fn_1n_2, \\ \sigma_y &= \nu + 2Bn_2^2, \quad \tau_{yz} = 2Gn_2n_3, \\ \sigma_z &= \nu + 2Cn_3^2, \quad \tau_{xz} = 2Hn_1n_3.\end{aligned}\quad (1)$$

$$\nu = \sigma - \frac{2}{3}(An_1^2 + Bn_2^2 + Cn_3^2), \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (2)$$

$$A, B, C, F, G, H - const,$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – компоненты напряжения.

На основе соотношений (1–3) в [2] рассмотрена задача о сжатии пространственного слоя жесткими шероховатыми плитами при условиях изменения касательных напряжений по толщине слоя

$$\tau_{xz} = az + c_1, \quad \tau_{yz} = bz + c_2, \quad a, b, c_1, c_2 - const. \quad (3)$$

Дополним полученное решение для напряжений [2] построением поля скоростей перемещений.

Аналогично [1] рассмотрим функционал

$$D = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - (\varepsilon_x An_1^2 + \varepsilon_y Bn_2^2 + \varepsilon_z Cn_3^2 + 2\varepsilon_{xy}Fn_1n_2 + 2\varepsilon_{yz}Gn_2n_3 + 2\varepsilon_{xz}Hn_1n_3) - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2), \quad (4)$$

где λ, ν – неопределенные множители Лагранжа.

Из условий экстремума функционала

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0, \quad (5)$$

из (4), (5) получим выражения (1).

Из условий экстремума функционала

$$\frac{\partial D}{\partial n_i} = 0, \quad (6)$$

из (4), (6) найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x A n_1 + \varepsilon_{xy} F n_2 + \varepsilon_{xz} H n_3 &= \lambda n_1, \\ \varepsilon_{xy} F n_1 + \varepsilon_y B n_2 + \varepsilon_{yz} G n_3 &= \lambda n_2, \\ \varepsilon_{xz} H n_1 + \varepsilon_{yz} G n_2 + \varepsilon_z C n_3 &= \lambda n_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Имеет место условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (8)$$

Условия (7), (8) являются искомыми соотношениями ассоциированного закона течения, соответствующими условиям предельного состояния (1).

Формулы Коши имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial n}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где u, v, w – компоненты скорости перемещения.

Следуя [3] положим

$$\begin{aligned} u &= m_1 x + p_1 y + \varphi_1(z), \\ v &= m_2 x + p_2 y + \varphi_2(z), \\ w &= m_3 x + p_3 y + q(z), \end{aligned} \quad (10)$$

где m_i, p_i, q – const.

Согласно (8), (9), (10) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= m_1, \varepsilon_y = p_2, \varepsilon_z = q, m_1 + p_2 + q = 0, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(m_2 + p_1), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_2}{dz} + p_3 \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dz} + m_3 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (7), (11) найдем

$$\begin{aligned} m_1 A n_1 + \frac{1}{2}(m_2 + p_1) F n_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dz} + m_3 \right) H n_3 &= \lambda n_1, \\ \frac{1}{2}(m_2 + p_1) F n_1 + p_2 B n_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_2}{dz} + p_3 \right) G n_3 &= \lambda n_2, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dz} + m_3 \right) H n_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_2}{dz} + p_3 \right) G n_2 + q C n_3 &= \lambda n_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Исключая величину λ , запишем уравнения (12) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dz} H(n_3^2 - n_1^2) - \frac{d\varphi_2}{dz} G n_1 n_2 &= T_1, \\ \frac{d\varphi_1}{dz} H n_1 n_2 - \frac{d\varphi_2}{dz} G(n_3^2 - n_2^2) &= T_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= 2(Cq - m_1 A) n_1 n_3 - (m_2 + p_1) F n_2 n_3 + m_3 H(n_3^2 - n_1^2) + p_3 G n_1 n_2, \\ T_2 &= 2(Bp_2 - Cq) n_2 n_3 + (m_2 + p_1) F n_1 n_3 + p_3 G(n_3^2 - n_2^2) - m_3 H n_1 n_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13) найдем

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{d\varphi_2}{dz} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (15)$$

где

$$\Delta = HGn_3^3(2n_3^2 - 1), \quad \Delta_1 = G [T_2n_1n_2 - T_1(n_3^2 - n_2^2)], \quad \Delta_2 = H [T_1n_1n_2 - T_2(n_3^2 - n_1^2)]. \quad (16)$$

Из (1) следует

$$n_1^2 = \frac{G}{2FH} \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}}, \quad n_2^2 = \frac{H}{2FG} \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \quad n_3^2 = \frac{F}{2GH} \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}. \quad (17)$$

Из (3), (17) получим

$$\tau_{xy}^2 (G^2\tau_{xz}^2 + H^2\tau_{yz}^2) - 2\tau_{xy} (FGH\tau_{xz}\tau_{yz}) + F^2(\tau_{xz}\tau_{yz})^2 = 0. \quad (18)$$

Из (18) найдем

$$\tau_{xy} = \frac{F\tau_{xz}\tau_{yz} \left[GH \pm \sqrt{G^2H^2 - (G^2\tau_{xz}^2 + H^2\tau_{yz}^2)} \right]}{G^2\tau_{xz}^2 + H^2\tau_{yz}^2}. \quad (19)$$

Используя соотношения (3), (17), (19), получим выражение величин n_1 , n_2 , n_3 как функций переменной z . Интегрируя выражения (15), получим значения функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, тем самым компоненты скорости перемещения и деформации (9), (10), (11) полностью определены.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях ассоциированного закона течения сжимаемых идеально-пластических сред. Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. - Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2005. - 357 с.
- [2] *Максимова, Л. А.* О сжатии плиты из идеально-пластического анизотропного материала / Л. А. Максимова // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. - М. : Физматлит, 2003. - С. 520-523.
- [3] *Максимова, Л. А.* О статически неопределимом состоянии идеальнопластического слоя, сжатого жесткими шероховатыми поверхностями / Л. А. Максимова // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. - М. : Физматлит, 2003. - С. 524-530.

L. A. Maksimova

**TO THE DETERMINATION OF DISPLACEMENT VELOCITY FIELD IN THE
PROBLEM OF LIMITING STATE OF ANISOTROPIC LAYER**

The Branch of Saint-Petersburg State Engineering and Economical University

Abstract. Displacement velocity field is considered in the problem of limiting state of ideal plastic anisotropic layer compressed by rigid rough slabs. The equations for determination of displacement velocity are defined from the variational equation. The expressions of displacement velocity components are given which correspond to tension.

Keywords: tensions, efforts, deformations, displacement velocities, plasticity, limiting state, layer, rigid slabs.

Максимова Людмила Анатольевна

доктор физико-математических наук, филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары

e-mail: maximova_ng@mail.ru

Maksimova Ludmila Anatolievna

Dr. Sci. Phys. & Math., Branch of Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Cheboksary

М. В. Мир-Салим-заде

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, УСИЛЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ СТРИНГЕРОВ

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

Аннотация. Проведено математическое описание модели зарождения трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной поперечными стрингерами. Действие стрингеров моделируется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами в точках соединения ребер со средой. Считается, что по мере увеличения интенсивности внешней нагрузки в среде происходит зарождение трещин. Задача о равновесии изотропной перфорированной среды с зародышевыми трещинами сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши. Из решения этого уравнения находится усилие в полосе зарождения трещины. Условие появления трещины формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала.

Ключевые слова: зона предразрушения, силы сцепления материала, связи между берегами, появление трещины, перфорированная усиленная пластина, стрингеры.

УДК: 539.375

Проведено математическое описание модели зарождения трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной поперечными стрингерами. Действие стрингеров моделируется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами в точках соединения ребер со средой. Считается, что по мере увеличения интенсивности внешней нагрузки в среде происходит зарождение трещин. Задача о равновесии изотропной перфорированной среды с зародышевыми трещинами сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши. Из решения этого уравнения находится усилие в полосе зарождения трещины. Условие появления трещины формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала.

Для обеспечения достаточной прочности листовых конструкций их обычно изготавливают из тонких пластин, усиленных приклепанными ребрами жесткости. Используемые в инженерных конструкциях пластины имеют технологические отверстия. Отверстия являются концентраторами напряжений, что зачастую порождает зарождение трещин. Чтобы сдерживать развитие трещин, пластины армируют стрингерами.

1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечная изотропная упругая пластина, ослабленная периодической системой круговых отверстий с радиусом λ . Контуры круговых отверстий свободны от внешних усилий. К пластине приклепаны поперечные ребра жесткости в точках $z = \pm(2m + 1)L \pm iny_0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$) из другого упругого материала с площадью поперечного сечения A_S (рис. 1). На бесконечности усиленная пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингера напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Относительно стрингера принимается гипотеза об одномерном континууме, заключающаяся в том, что при

деформации толщина стрингера считается неизменяемой, а напряженное состояние одноосным. Стрингеры изгибу не сопротивляются и работают лишь на растяжение.

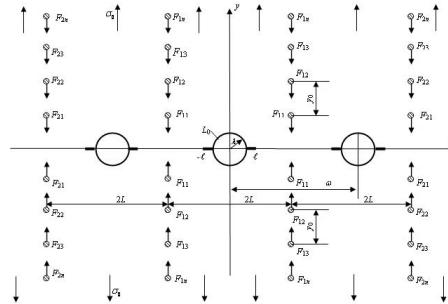


Рис. 1.

Принимаются следующие допущения:

- а) в тонкостенном листовом элементе конструкции (пластине) реализуется плоское напряженное состояние;
- б) подкрепляющая система стрингеров ферменного типа, ослабление их за счет постановки точек крепления не учитывается;
- в) листовый элемент и подкрепляющие элементы взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления;
- г) все точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами;
- д) действие точки крепления моделируем: в стрингере – действием в сплошном ребре сосредоточенной силы, приложенной в точке, соответствующей центру точки крепления, в пластине – действием сосредоточенной силы.

Считается, что точки крепления стрингеров расположены в дискретных точках с постоянным шагом по всей длине стрингера, симметрично относительно поверхности пластины. Действие приклепанных стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в местах расположения точек крепления. По мере повышения интенсивности внешнего нагружения в усиленной среде вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых носит периодический характер. Зоны повышенных напряжений будут способствовать возникновению поверхностных трещин. Задача о зарождении трещин представляет большой интерес для механики разрушения. Ее постановка существенно расширяет первоначальную концепцию Гриффитса, предполагавшего, что в материале всегда имеется множество мельчайших трещин. По мере повышения интенсивности нагружения подкрепленной пластины с круговыми отверстиями силовой нагрузкой в пластине будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала (рис. 1). Принято, что полоса предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в подкрепленной пластине. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между берегами полосы предразрушения связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеры области предразрушения зависят от вида материала. Считается, что закон деформирования связей задан. В общем случае он представляет собой нелинейный закон деформирования [11-13].

В исследуемом случае возникновение дефекта типа трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен

в процессе решения задачи. Так как указанные зоны (прослойки материала) малы по сравнению с остальной частью подкрепленной пластины, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала.

Для математического описания зарождения трещин в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров, в процессе нагружения приходим к плоской задаче теории упругости для перфорированной среды, когда в среде имеются полосы предразрушения.

Пусть имеется усиленная среда с периодической системой круговых отверстий, имеющих радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках

$$P_m = m\omega (m = \pm 1, \pm 2, \dots), \omega = 2.$$

Из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные полосы предразрушения (рис. 1). Берега полосы предразрушения взаимодействуют таким образом, что это взаимодействие (связи между берегами) сдерживает зарождение трещины. В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой средой, напряжения являются периодическими функциями с основным периодом ω . При действии внешних нагрузок на пластину в связях, соединяющих берега полосы предразрушения, будут возникать нормальные усилия $q(x)$. Следовательно, к берегам полосы предразрушения будут приложены нормальные напряжения, численно равные $q(x)$. Величина этих напряжений и размер ℓ зоны предразрушения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи механики разрушения.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0 \text{ на контурах отверстий,} \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = q(x) \text{ - на берегах полос предразрушения.}$$

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие берегов полосы предразрушения и усилия в связях. Это уравнение, без потери общности, можно представить в виде [2]

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = C(x, q) q(x), \quad (2)$$

где $(v^+ - v^-)$ – раскрытие берегов полосы предразрушения, x – аффикс точек берегов полосы предразрушения; функцию $C(x, q)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей.

Для определения значений предельной величины интенсивности внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий предельного раскрытия берегов полосы предразрушения

$$v^+ - v^- = \delta_c, \quad (3)$$

где δ_c – характеристика сопротивления материала усиленной пластины трещинообразованию.

Это дополнительное условие позволяет определить параметры изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров, при которых происходит появление трещины.

На основании формул Колосова–Мухелишвили [7] и граничных условий на контурах круговых отверстий L_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и берегах полос предразрушения задача сводится к отысканию двух аналитических в области D функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\tau\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = 0, \quad (4)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = q(x), \quad (5)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); t – аффикс точек берегов полос предразрушения.

2. Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (4), (5) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (6)$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

Здесь потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ определяют поле напряжений и деформаций в сплошной усиленной пластине без полос предразрушения под действием сосредоточенных сил F_{mn} и σ_0 и определяются следующими формулами

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right], \\ \Psi_0(z) &= \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\kappa_0}{2\pi h(1+\kappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left[\frac{Lm - iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где h – толщина пластины; $\kappa_0 = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν – коэффициент Пуассона материала пластины, штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс $m = n = 0$.

Функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, соответствующие неизвестным нормальным смещениям вдоль полос предразрушения, ищем в явной форме

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt, \\ \Psi_1(z) &= -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt, \quad L_1 = [-\ell, -\lambda] + [\lambda, \ell]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь искомая функция $g(t)$ описывает раскрытие производных смещений на берегах полос предразрушения

$$\frac{1 + \kappa_0}{2\mu} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)], \quad (9)$$

где μ – модуль сдвига усиленной пластины.

Для нахождения комплексных потенциалов $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ представим граничное условие (4) в виде

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = -\Phi_*(\tau) - \overline{\Phi_*(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (10)$$

где $\Phi_*(\tau) = \Phi_0(\tau) + \Phi_1(\tau)$; $\Psi_*(\tau) = \Psi_0(\tau) + \Psi_1(\tau)$.

Функции $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ ищем в виде [6]

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \\ \Psi_2(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из условий симметрии относительно координатных осей находим, что $Im\alpha_{2k+2} = 0$; $Im\beta_{2k+2} = 0$ $k = 0, 1, 2, \dots$

Соотношения (6), (7), (8), (11) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений. Из условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D , следует

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2 \lambda^2.$$

Неизвестные коэффициенты α_{2k} , β_{2k} должны быть определены из краевого условия (10). Обозначим правую часть условия (10) через $f_1(\theta) + if_2(\theta)$. Относительно функции $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ будем считать, что она разлагается на контуре $|\tau| = \lambda$ в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Im} A_{2k} = 0, \quad (12)$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(\theta) + if_2(\theta)) e^{-2ik\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив сюда правую часть соотношения (10), после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, найдем

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{2} \sigma_0 + \frac{1}{\pi h (1 + \kappa_0)} \sum_{m,n}' F_{mn} \left(\frac{2ny_0}{\rho_1^2} \right) - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_0(t) dt, \\ A_2 &= \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{1}{\pi h (1 + \kappa_0)} \sum_{m,n}' F_{mn} \left[\frac{\lambda^2 \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} + \frac{\kappa_0 \sin \varphi_1}{\rho_1} - \frac{\sin 3\varphi_1}{\rho_1} \right] - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_2(t) dt, \\ A_{2k} &= \frac{1}{\pi h (1 + \kappa_0)} \left\{ \sum_{m,n}' F_{mn} \left[\frac{\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(-2)(-3)\dots(-2k)\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{(2k-1)! \rho_1^{2k+1}} - \frac{\kappa_0 \lambda^{2k-2} \sin(2k-1)\varphi_1}{\rho_1^{2k-1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(-2)(-3)\dots(1-2k)\lambda^{2k-2} \sin(2k+1)\varphi_1}{(2k-2)! \rho_1^{2k-1}} \right] \right\} - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt \quad (k = 2, 3, \dots), \\ A_{-2k} &= \frac{1}{\pi h (1 + \kappa_0)} \sum_{m,n}' F_{mn} \frac{\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}} - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_{-2k}(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

где $\rho_1^2 = (mL)^2 + (ny_0)^2$, $\varphi_1 = \text{arctg} \frac{ny_0}{mL}$,

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 2\gamma(t), \quad f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t), \quad \gamma(t) = \text{ctg} \frac{\pi}{\omega} t, \\ f_{2k}(t) &= -\frac{\lambda^{2k} (2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k = 2, 3, \dots), \\ f_{-2k}(t) &= -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Неизвестная функция $g(x)$ и коэффициенты α_{2k} , β_{2k} должны быть определены из краевых условий (5) и (10). Так как выполняются условия периодичности, то система граничных условий (10) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре L_0 ($\tau = \lambda e^{i\theta}$), а система краевых условий (5) – в граничное условие на линии L_1 .

Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k} и β_{2k} функций $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки $z = 0$. Подставив в левую часть граничного условия (10) на контуре $z = \lambda \exp(i\theta)$ вместо $\Phi_2(z)$, $\overline{\Phi_2(z)}$, $\Phi_2'(z)$ и $\Psi_2(z)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности $z = 0$, а в правую часть (10) вместо функции $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ – ряд Фурье (12) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k+2} , β_{2k+2} . После некоторых преобразований приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k+2}

$$\begin{aligned} \alpha_{2j+2} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ b_0 &= A_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \cdot \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A_{-2k-2}, \\ b_j &= A_{2j+2} - \frac{(2j+1) A_0 g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{K_1 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3) g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2}, \\ a_{j,k} &= (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2}, \quad K_1 = 1 - \frac{\pi^2}{12} \lambda^2, \quad g_j = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}, \\ \gamma_{0,0} &= \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}}, \\ \gamma_{j,k} &= -\frac{(2j+2k+2)! g_{k+j+1}}{(2j+1)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)! 2^{2j+2k+4}} + \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)! g_{j+i+1} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)! 2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k}, \\ b_{0,k} &= 0, \quad b_{j,0} = 0, \quad b_{j,k} = \frac{g_{j+1} g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left(1 + \frac{2K_2 \lambda^2}{K_1} \right) \quad j = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots \quad K_2 = \frac{\pi^2}{24}. \end{aligned} \tag{13}$$

Постоянные β_{2k+2} определяются из следующих соотношений

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{K_1} \left[-A_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right], \\ \beta_{2j+4} &= (2j+3) \alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - A_{-2j-2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Потребуем, чтобы функции (6) удовлетворяли краевому условию (5). Тогда после некоторых преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) = q(x), \tag{15}$$

где

$$H(x) = \Phi_S(x) + \overline{\Phi_S(x)} + x \Phi_S'(x) + \Psi_S(x),$$

$$\Phi_S(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x),$$

$$\Psi_S(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x).$$

Сингулярное интегральное уравнение (15), а также системы (13), (14) содержат неизвестные величины сосредоточенных сил F_{mn} ($m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$). Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы F_{mn} , действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, равна

$$F_{mn} = \frac{E_S A_S}{2y_0 n} \Delta v_{m,n}, \quad (m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots),$$

где E_S – модуль Юнга материала стрингера; A_S – площадь поперечного сечения стрингера; $2y_0 n$ – расстояние между точками крепления; $\Delta v_{m,n}$ – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим радиус точек крепления (площадки сцепления) через a_0 . Примем естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек $z = mL + i(ny_0 - a_0)$ и $z = mL - i(ny_0 - a_0)$ в рассматриваемой задаче теории упругости равно взаимному смещению точек крепления $\Delta v_{m,n}$. Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет эффективно отыскать решение поставленной задачи.

С помощью комплексных потенциалов (6)–(8), (11) и формулы Колосова–Мусхелишвили [7] после выполнения элементарных, хотя и несколько громоздких выкладок, взаимное смещение $\Delta v_{m,n}$ найдем в виде

$$\begin{aligned} \Delta v_{p,r} &= \Delta v_{p,r}^{(0)} + \Delta v_{p,r}^{(1)} + \Delta v_{p,r}^{(2)}, \\ \Delta v_{p,r}^{(0)} &= \frac{1}{2\pi(1+\kappa_0)\mu h} \sum_{m,n}' F_{mn} \left\{ \kappa_0 \ln \frac{(p-m)^2 L^2 + a_0^2}{(p-m)^2 L^2 + c^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(r-n)y_0 c \langle 2p(p-m)L^2 + a_0^c \rangle}{\left[(p-m)^2 L^2 + c^2 \right] \left[(p-m)^2 L^2 + a_0^2 \right]} \right\} + \frac{\sigma_0}{4\mu} (1+\kappa_0)(ry_0 - a_0), \\ \Delta v_{p,r}^{(1)} &= \frac{1+\kappa_0}{\mu} \left\{ \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \left\langle \arctg \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-pL) \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} c \right] - \arctg \left[\operatorname{tg} \frac{\pi pL}{\omega} \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} c \right] \right\rangle dt \right\} - \\ &\quad - \frac{c}{\mu} \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \left[\frac{\sin^2 \alpha_1 (\operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_1)}{\sin^2 \alpha_1 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} \right] dt, \\ \Delta v_{p,r}^{(2)} &= \frac{1}{\mu} \left\{ (\kappa_0 - 1)(ry_0 - a_0)a_0 + (1+\kappa_0) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} + \right. \\ &\quad + (\kappa_0 - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha + \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+2)}{2j+1} r_{j,k} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha, \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

где $c = (r-n)y_0 - a_0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{\omega} (t-pL)$, $\alpha = \arctg \frac{ry_0 - a_0}{pL}$

$$\rho_2^2 = (pL)^2 + (ry_0 - a_0)^2, \quad r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2_{2j+2k+2}}, \quad r_{0,0} = 0.$$

Искомая величина силы F_{mn} определяется с помощью формул (16) из бесконечной системы

$$(p = 1, 2, \dots; r = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Из-за периодичности задачи она вырождается в одну бесконечную алгебраическую систему.

Сингулярное интегральное уравнение (15) совместно с системами (13), (14), (17) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функцию $g(x)$, коэффициенты α_{2k} , β_{2k} и значения сил F_{pr} ($p = 1, 2, \dots; r = 1, 2, \dots$). Зная искомые функции $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$, $g(x)$ и величины F_{pr} можно определить напряженно-деформированное состояние среды, усиленной регулярной системой стрингеров, при наличии полос предразрушения.

3. Методика численного решения и анализ.

Используя разложение

$$\frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z = \frac{1}{z} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{z^{2j+1}}{\omega^{2j+2}},$$

уравнение (15) приведем к обычной форме

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) K(t-x) dt = q(x), \quad (18)$$

$$K(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}.$$

Преобразуем интегральное уравнение (18) к виду более удобному для нахождения его приближенного решения. Учитывая $g(x) = -g(-x)$, уравнение (18) принимает вид

$$\frac{2}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 \frac{\xi p(\xi) d\xi}{\xi^2 - \xi_0^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 K_0(\xi, \xi_0) p(\xi) d\xi + H(\xi_0) = q(\xi_0),$$

$$K_0(\xi, \xi_0) = K(\xi - \xi_0) + K(\xi + \xi_0), \quad p(\xi) = g(t), \quad \xi = \frac{t}{\ell}, \quad \xi_0 = \quad (19)$$

$$\lambda_1 = \lambda/\ell; \quad \lambda_1 \leq \xi_0 \leq 1,$$

$$H(\xi_0) = \Phi_S(\xi_0 \ell) + \overline{\Phi_S(\xi_0 \ell)} + \xi_0 \ell \Phi'_S(\xi_0 \ell) + \Psi_S(\xi_0 \ell).$$

Сделаем замену переменных

$$\xi^2 = u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2, \quad \xi_0^2 = u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2.$$

При этом отрезок интегрирования $[\lambda_1, 1]$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, а преобразованное уравнение (19) принимает стандартную форму

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau + H_*(\eta) = q(\eta),$$

$$p(\tau) = p(\xi), \quad H_*(\eta) = H(\xi_0), \quad B(\eta, \tau) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{2j+2} \cdot u_0^j A_j,$$

$$A_j = (2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0}\right) + \dots + \quad (20)$$

$$+ \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)\dots[(2j+1)-(2j+1-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2j+1)} \cdot \left(\frac{u}{u_0}\right)^j.$$

Для алгебраизации сингулярного интегрального уравнения воспользуемся методом прямого решения сингулярных интегральных уравнений [4; 6; 9]. Интегральное уравнение (20), кроме особенности в ядре Коши, имеет также неподвижную особенность в точке выхода полосы предразрушения на поверхность кругового отверстия. Функция $g(x)$ имеет в точках $x = \pm\lambda$ особенность, отличающуюся от корневой. Характер этой особенности может быть установлен из анализа сингулярного интегрального уравнения (20) [8]. В рассматриваемом случае интеграл $\int_{\lambda}^{\ell} g(t)dt = C \neq 0$ равен постоянной, отличной от нуля, которая выражается через раскрытие полосы предразрушения на поверхности кругового отверстия и должна быть определена после решения сингулярного интегрального уравнения.

В рассматриваемом случае нужно было бы использовать метод решения интегрального уравнения, построенного на базе квадратурной формулы Гаусса–Якоби. В виду громоздкости выражений для функций $B(\eta, \tau)$ и $H_*(\eta)$ установление истинной особенности функции $p(\eta)$ на конце затруднительно. Следует отметить, что некоторый выигрыш в сходимости по уточненному методу обесценивается из-за громоздкости формул для коэффициентов матрицы системы. Используем другой способ численного решения интегральных уравнений типа (20), эффективность которого проверена на многочисленных конкретных задачах [5; 9; 10]. Так как напряжения в изотропной среде, усиленной системой стрингеров, ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения (20) следует искать в классе всюду ограниченных функций.

Представим решение в виде

$$p(\eta) = p_0(\eta) \sqrt{1 - \eta^2},$$

где $p_0(\eta)$ – новая неизвестная ограниченная функция на $[-1, 1]$.

Использование квадратурных формул позволяет интегральное уравнение (20) свести к системе $M + 1$ алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{p_0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left[\frac{1}{\tau_m - \eta_r} + B(\tau_m, \eta_r) \right] = \pi [q(\eta_r) - H_*(\eta_r)] \quad (21)$$

$$(r = 1, 2, \dots, M + 1),$$

$$\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1} (m = 1, 2, \dots, M), \eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)} \pi (r = 1, 2, \dots, M + 1).$$

Полученная алгебраическая система (21) из $M + 1$ уравнений, служащая для определения неизвестных $p_0(\tau_1), p_0(\tau_2) \dots, p_0(\tau_M)$ и ℓ/λ , обеспечивает удовлетворение дополнительного условия, при котором существует решение в классе всюду ограниченных функций [7]. В правую часть алгебраической системы (21) входят неизвестные значения напряжений $q(\eta_r)$ в узловых точках, принадлежащих полосе предразрушения. Для определения неизвестного напряжения в связях, возникающего на берегах полосы предразрушения, используем соотношение (2). Используя полученное решение, соотношение (2) можно записать в виде

$$g(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa_0} \frac{d}{dx} [C(x, q) q(x)]. \quad (22)$$

Это уравнение служит для определения усилий $q(x)$ в связях. Для построения недостающих алгебраических уравнений потребуем выполнения условий (22) в узловых точках τ_m

($m = 1, 2, \dots, M$), принадлежащих полосе предразрушения. При этом используется метод конечных разностей. В результате получим алгебраическую систему из M уравнений для определения приближенных значений $q(\eta_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) в узловых точках полосы предразрушения. При этом учитывалось граничное условие $q(1) = 0$, соответствующее условию $v^+(\ell, 0) - v^-(\ell, 0) = 0$.

Из-за неизвестного размера полосы предразрушения объединенная алгебраическая система, состоящая из разрешающей системы уравнений задачи (13), (14), (17), (21) и конечно-разностного аналога уравнения (22), является нелинейной даже при линейно-упругих связях. Чтобы избежать решения нелинейной системы уравнений при линейно-упругих связях, используем обратный способ, а именно, считаем заданным размер полосы предразрушения и в процессе решения определяем параметр нагружения σ_0 . При таком способе решения объединения алгебраическая система при линейных связях оказывается линейной. Для численных расчетов полагалось $M = 30$, что отвечает разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов соответственно. Расчеты были выполнены методом Гаусса с выбором главного элемента.

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в связях использовался также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [3]. Принимается, что закон деформирования межчастичных связей (сил сцепления) является линейным при $(v^+ - v^-) \leq v_*$. Первый шаг итерационного процесса вычислений заключается в решении систем уравнений для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только в случаях, когда на части зоны предразрушения имеет место соотношение $(v^+ - v^-) > v_*$. Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с эффективной податливостью, переменной вдоль берегов полосы предразрушения и зависящей от усилий в связях полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [1]. Принято, что процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия вдоль полосы предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, будут мало отличаться друг от друга.

Нелинейная часть кривой деформирования связей представлялась в форме билинейной зависимости [2], восходящий участок которой соответствует упругому деформированию связей ($0 < (v^+ - v^-) \leq v_*$) с их максимальным натяжением. При $(v^+ - v^-) > v_*$ закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками (v_*, σ_*) и (δ_c, σ_c) .

Для определения предельно-равновесного состояния полосы предразрушения, при котором происходит появление трещины, используем условие (3).

Таким образом, условием, определяющим предельную интенсивность внешней растягивающей нагрузки, при которой происходит появление трещины в точке $x = \pm\lambda$, будет

$$C(\lambda, q(\lambda))q(\lambda) = \delta_c. \quad (23)$$

Совместное решение объединенной алгебраической системы (13), (14), (17), (21), конечно-разностного аналога уравнения (22) и (23) позволяет (при заданных характеристиках трещиностойкости материала) определить критическую величину внешней растягивающей нагрузки, размер полосы предразрушения и усилия в связях для состояния предельного равновесия, при которых происходит образование трещин в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров.

Расчеты проводились в зависимости от геометрических параметров задачи при $v = 0, 3$, $\varepsilon_1 = a_0/L = 0, 01$, $\varepsilon = y_0/L = 0, 15; 0, 25; 0, 5$, $E = 7, 1 \cdot 10^4$ МПа (сплав В95), $E_S = 11, 5 \cdot 10^4$ МПа (композит Al -сталь), $A_S/y_0h = 1$. Число стрингеров и точек крепления принималось конечным: 6, 10, 14. $v_* = 10^{-6}$ м, $\sigma_* = 130$ МПа, $\sigma_c/\sigma_* = 2$, $\delta_c = 2 \cdot 10^{-6}$ м; Эффективная податливость связей $C = 2 \cdot 10^{-7}$ м/МПа.

На рис. 2 представлены графики зависимости относительной длины полосы предразрушения $d = (\ell - \lambda)/L$ от безразмерной величины внешней нагрузки σ_0/q_{\max} для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0, 2 \div 0, 5$ (кривые 1–4) при $\varepsilon = 0, 25$.

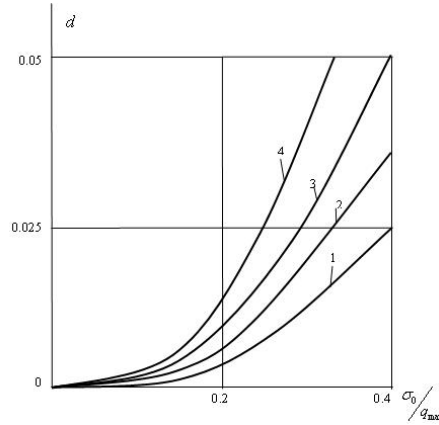


Рис. 2.

На рис. 3 приведены графики распределения усилий в связях полосы предразрушения q/σ_0 вдоль полосы предразрушения для радиуса отверстия $\lambda = 0, 5$ при $\varepsilon = 0, 15$. Здесь кривая 1 соответствует линейной связи, 2 – билинейной зависимости деформирования связей.

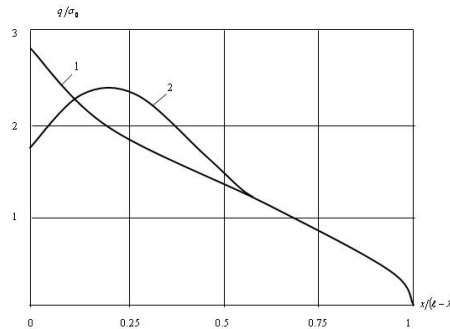


Рис. 3.

На рис. 4 приведен график зависимости критической внешней нагрузки σ_0^*/σ_S от относительного раскрытия $\delta_*/(\ell - \lambda)$ в точке $x = \lambda$ для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0, 2 \div 0, 5$ (кривые 1–4) при $\varepsilon = 0, 15$. Здесь $\delta_* = \frac{\pi \delta_c \mu}{(1 + \kappa_0) \sigma_S}$, σ_S – предел текучести материала на растяжение.

Анализ предельно-равновесного состояния перфорированной изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров, при котором происходит появление трещины, сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы (9), (13), (14) (17), (21), конечно-разностного аналога уравнения (22) и критерия зарождения трещины (23) при различных законах деформирования связей, упругих постоянных материалов и геометрических параметров усиленной среды.

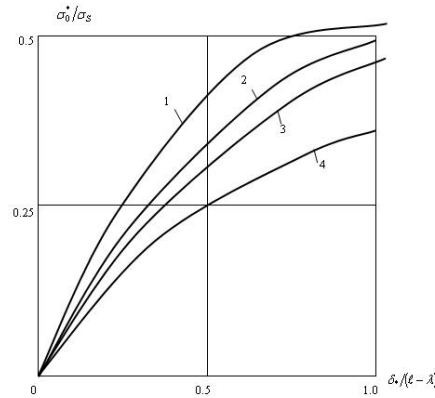


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Биргер, И. А.* Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. - М. : Наука, 1975. - С. 51-73.

[2] *Гольдштейн, Р. В.* Рост трещин по границе соединения материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Проблемы механики : сб. статей : к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. - М. : Физматлит, 2003. - С. 221-238.

[3] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. - М. ; Л. : ГИТТЛ, 1948. - 376 с.

[4] *Каландия, А. И.* Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. - М. : Наука, 1973. - 304 с.

[4] *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. - Баку : Элм, 1984. - 124 с.

[5] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. - М. : Наука, 1987. - 256 с.

[6] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. - М. : Наука, 1966. - 707 с.

[7] *Мухелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. - М. : Наука, 1968. - 512 с.

[8] *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. - Киев : Наук. думка, 1976. - 443 с.

[9] *Саврук, М. П.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. - Киев : Наук. думка, 1989. - 248 с.

[10] *Budiansky, B.* Fiber-matrix de bonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites / B. Budiansky, A. G. Evans, J. W. Hutchinson // Int. J. Solid Structures. - 1995. - Vol. 32. - № 3-4. - P. 315-328.

[11] *Goldstein, R. V.* Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints / R. V. Goldstein, V. F. Bakirov, M. N. Perlmutter // Proc. Inst. Phys. Technol. Russian Ac. of Sci. - 1997. - Vol. 13 : Modeling and Simulation of Submicron Technology and Devices. - P. 115-125.

[12] *Ji, H.* Adhesion via Connector Molecules : the Many-stitch Problem / H. Ji, P. O. de Gennes // Macromolecules. - 1993. - Vol. 26. - P. 520-525.

M. V. Mir-Salim-zada

**CRACK FORMATION IN A PERFORATED ISOTROPIC MEDIUM
INTENSIFIED BY A REGULAR SYSTEM OF STRINGERS**

Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences

Abstract. The mathematical description of crack formation model in a perforated isotropic medium intensified by cross-section stringers is carried out. The stringers action is simulated by the unknown equivalent concentrated forces in points of their edge junction with the medium. It is considered, that crack formation occurs in the process of increase of external load intensity in the medium. The task about equilibrium at the isotropic perforated medium with arisen cracks comes to the solution of non-linear singular integral equation with kernel of Cauchy type. We find stress in the crack formation zone by solving the equation. The crack formation condition is formulated with taking into account the limit stretching of material relations criterion.

Keywords: pre-fracture zone, adhesive forces of a material, bonds between crack faces, crack formation, perforated strengthened slab, stringers.

Мир-Салим-заде Минавар Вагиф кызы

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, г. Баку

e-mail: iracon63@hotmail.com

M. V. Mir-Salim-zada

Ph. D., Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

ПРЕДЕЛЬНОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С КРУГЛЫМ СВОБОДНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича

Аннотация. На основе модели идеального жесткопластического материала предложена методика расчета предельных нагрузок и остаточных прогибов прямоугольных пластин с круглым свободным отверстием при воздействии равномерно распределенной динамической нагрузки взрывного типа. Стороны пластины шарнирно оперты или защемлены. Рассмотрены возможные схемы предельного деформирования пластин. Приведены численные примеры. Решения могут быть использованы при различных инженерных расчетах.

Ключевые слова: идеальная жесткопластическая пластина, прямоугольная пластина, круглое отверстие, взрывная нагрузка, остаточный прогиб.

УДК: 539.4+539.37

Разнообразные по форме пластины являются составными элементами многих ответственных конструкций, и расчет их поведения при воздействии динамических нагрузок имеет большое значение при их проектировании и прогнозировании чрезвычайных ситуаций. В работе в рамках модели идеального жесткопластического тела рассмотрен динамический изгиб прямоугольных пластин со свободным круглым отверстием. Имеющиеся в литературе решения для пластических полигональных пластин со свободным отверстием касаются только динамики правильных полигональных пластин [1] и предельного анализа для квадратных пластин [2, 3].

1. Рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами $2a$ и $2\gamma a$ ($\gamma \geq 1$), имеющую в центре свободное круглое отверстие радиуса μa , где $0 \leq \mu < 1$ (рис. 1). Противоположные стороны пластины шарнирно оперты или защемлены. Нормальный изгибающий момент на опорных сторонах равен $-(1 - \eta_i)M_0$ ($i = 1, 2$), где $i = 1$ относится к меньшей стороне, а $i = 2$ – к большей; $\eta_i = 0$ при защемлении и $\eta_i = 1$ при шарнирном опирании соответствующей стороны; M_0 – предельный момент. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности динамическая нагрузка взрывного типа высокой интенсивности $P(t)$, которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени $t = 0$ с последующим быстрым ее уменьшением.

В динамике рассматриваемой пластины из идеального жесткопластического материала возможны несколько схем деформирования. При нагрузках, не превышающих предельные

Поступила 05.09.2009

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 15).

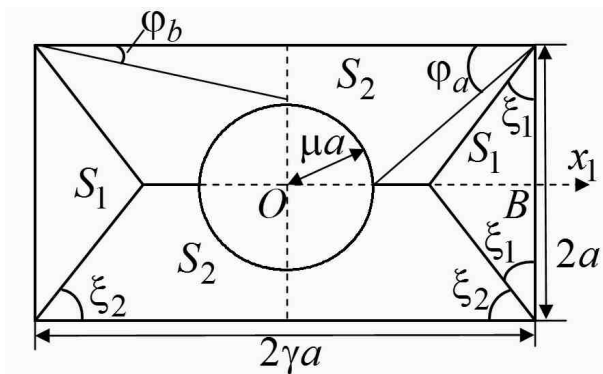


Рис. 1.

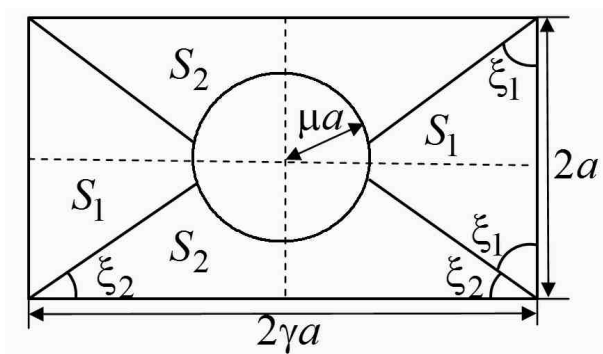


Рис. 2.

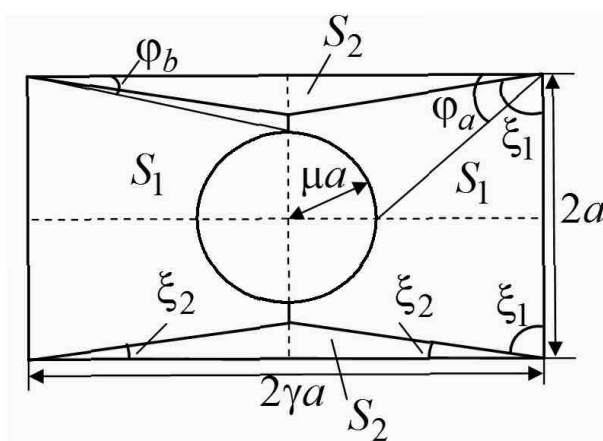


Рис. 3.

нагрузки («низких» нагрузках, $P_{\max} < P_0$), пластина остается в покое. При нагрузках, несущественно превышающих предельные («средних» нагрузках, $P_0 < P_{\max} < P_1$), схему деформирования пластины можно представить в виде совокупности областей S_i ($i = 1, 2$), которые

жестко вращаются вокруг опорных сторон с угловой скоростью $\dot{\alpha}_i$ (рис. 1–3). Области S_i разделены кусочно-линейными пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным M_0 . В зависимости от соотношения значений $\gamma, \mu, \eta_1, \eta_2$ при этом возможны три варианта деформирования пластины, изображенные на рис. 1 (схема А, $\xi_2 \geq \phi_a$), рис. 2 (схема Б, $\phi_b \leq \xi_2 \leq \phi_a$) и рис. 3 (схема В, $\xi_2 \leq \phi_b$), где $\phi_a = \arctg [1/(\gamma - \mu)]$, $\phi_b = \arctg [(1 - \mu)/\gamma]$. Из симметричности пластины следует, что схема В может реализоваться только в случае заземления меньшей стороны и шарнирного опирания большей ($\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$). Углы ξ_1 и ξ_2 на рис. 1–3 являются углами при основании областей S_1 и S_2 соответственно.

В каждой области S_i ($i = 1, 2$) введем декартовую систему координат (x_i, y_i) , в которой ось x_i проходит по опорной стороне, а ось y_i направлена внутрь пластины. Начало координат (x_i, y_i) выбирается произвольно на опорной стороне. Тогда скорости прогибов пластины во всех схемах будут представлены в виде:

$$(x_i, y_i) \in S_i : \quad \dot{u}(x_i, y_i, t) = \dot{\alpha}_i(t)y_i. (i = 1, 2). \quad (1)$$

Уравнения движения пластины получим из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [4]

$$K = A - N, \quad (2)$$

$$K = \rho \sum_{i=1,2} \iint_{S_i} \ddot{u}i^* ds = \rho \sum_{i=1,2} \ddot{\alpha}_i \dot{\alpha}_i^* \iint_{S_i} y_i^2 dy_i dx_i, \quad (3)$$

$$A = P(t) \sum_{i=1,2} \iint_{S_i} \dot{u}^* ds = P(t) \sum_{i=1,2} \dot{\alpha}_i^* \iint_{S_i} y_i dy_i dx_i, \quad (4)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m \left[\frac{\partial \theta^*}{\partial t} \right]_{l_m} dl_m = 2M_0 \sum_{i=1,2} \dot{\alpha}_i^* [a \gamma^{i-1} (2 - \eta_i) - b_i]. \quad (5)$$

Здесь K, A, N – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно; u – прогиб; ρ – поверхностная плотность материала пластины; t – текущее время; ds – элемент площади; m – количество линий разрыва угловых скоростей; l_m – линии разрыва угловых скоростей, включая контур пластины; $\left[\frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_{l_m}$ – разрыв угловой скорости на l_m ; M_m – изгибающий момент на l_m ; dl_m – элемент линии l_m ; b_i – проекция части границы свободного отверстия в области S_i на опорную сторону области S_i ($i = 1, 2$). Верхний индекс “*” обозначает допустимые скорости.

Подставляя величины (3)–(5) в (2) и учитывая независимость $\dot{\alpha}_i^*(t)$ ($i = 1, 2$), получим следующие уравнения движения:

$$\rho \ddot{\alpha}_i \iint_{S_i} y_i^2 dy_i dx_i = P(t) \iint_{S_i} y_i dy_i dx_i - M_0 [a \gamma^{i-1} (2 - \eta_i) - b_i]. \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Условие непрерывности скоростей на границах областей S_1 и S_2 дает равенство

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 \operatorname{tg} \xi_2. \quad (7)$$

Начальные условия для $\dot{\alpha}_i, \alpha_i$ имеют вид

$$\dot{\alpha}_i(0) = \alpha_i(0) = 0, (i = 1, 2). \quad (8)$$

Система уравнений (7), (5) с начальными условиями (8) и $\xi_2(0) = \xi_2^0, \xi_1(0) = \pi/2 - \xi_2^0$ описывает динамическое поведение пластины. Начальные значения ξ_2^0 определяются в зависимости от величины P_{\max} , как это будет показано ниже.

2. Рассмотрим подробно схемы А, Б и В. Уравнения движения (6) при схеме А, учитывая $\xi_1 = \pi/2 - \xi_2$, имеют вид

$$\rho \ddot{\alpha}_1 a^3 \text{ctg}^3 \xi_2 = 2P(t) a^2 \text{ctg}^2 \xi_2 - 12M_0(2 - \eta_1), \quad (9)$$

$$\rho \ddot{\alpha}_2 a^3 [8 \mu^3 - 3\mu^2 \pi(1 + \mu^2/4) - 3\text{ctg} \xi_2 + 4 \gamma] = 2P(t) a^2 [\mu(3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 - 2\text{ctg} \xi_2 + 3(\gamma - \mu)] - 12M_0 [\gamma(2 - \eta_2) - \mu]. \quad (10)$$

Предельную нагрузку P_0 определим так. Из (9), (10) при $\ddot{\alpha}_i = 0$ ($i = 1, 2$) имеем

$$P = 6M_0(2 - \eta_1) \text{tg}^2 \xi_2 / a^2, \quad (11)$$

$$P = \frac{6M_0 [\gamma(2 - \eta_2) - \mu] / a^2}{\mu(3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 + 3(\gamma - \mu) - 2\text{ctg} \xi_2}. \quad (12)$$

Обозначим через ξ_{2p} значение ξ_2 при действии предельной нагрузки P_0 . Из (11), (12) получим, что при схеме А в зависимости от соотношения значений γ , μ , η_1 , η_2 величина ξ_{2p} определяется из уравнения

$$(2 - \eta_1) \text{tg}^2 \xi_{2p} [\mu(3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 + 3(\gamma - \mu) - 2\text{ctg} \xi_{2p}] = \gamma(2 - \eta_2) - \mu. \quad (13)$$

Тогда из (11) получим, что предельная нагрузка равна

$$P_0 = 6M_0(2 - \eta_1) \text{tg}^2 \xi_{2p} / a^2. \quad (14)$$

Уравнения движения (6) при схеме Б примут вид

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{\alpha}_1 a^3 \{4 \gamma c_1 (\gamma^2 + 3\mu^2 - c_1^2) - 6(\gamma^2 + \mu^2/4) [\mu^2 \arcsin(c_1/\mu) + \\ & \quad + c_1 \sqrt{\mu^2 - c_1^2}] - c_1 (\sqrt{\mu^2 - c_1^2})^3 + \text{ctg}^3 \xi_2 (1 - c_1)^4 \} = \\ & = 2P(t) a^2 \{c_1 (3\gamma^2 + 3\mu^2 - c_1^2) - 3\gamma [c_1 \sqrt{\mu^2 - c_1^2} + \mu^2 \arcsin(c_1/\mu)] + \\ & \quad + \text{ctg}^2 \xi_2 (1 - c_1)^3 \} - 12M_0(2 - \eta_1 - c_1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{\alpha}_2 a^3 \{4 c_2 (1 + 3\mu^2 - c_2^2) - 6(1 + \frac{\mu^2}{4}) [\mu^2 \arcsin(c_2/\mu) + \\ & \quad + c_2 \sqrt{\mu^2 - c_2^2}] - c_2 (\sqrt{\mu^2 - c_2^2})^3 + \text{tg}^3 \xi_2 (1 - c_2)^4 \} = \\ & = 2P(t) a^2 \{c_2 (3 + 3\mu^2 - c_2^2) - 3(c_2 \sqrt{\mu^2 - c_2^2} + \mu^2 \arcsin(c_2/\mu)) + \\ & \quad + (1 - c_2)^3 \text{tg}^2 \xi_2 \} - 12M_0 [\gamma(2 - \eta_2) - c_2], \end{aligned} \quad (16)$$

$$c_1 = \sin \xi_2 [\sqrt{\mu^2 - (\gamma \sin \xi_2 - \cos \xi_2)^2} - (\gamma - \text{ctg} \xi_2) \cos \xi_2],$$

$$c_2 = \cos \xi_2 \sqrt{\mu^2 - (\gamma \sin \xi_2 - \cos \xi_2)^2} + (\gamma - \text{ctg} \xi_2) \sin^2 \xi_2,$$

$$c_1^2 + c_2^2 = \mu^2.$$

Для определения P_0 считаем $\ddot{\alpha}_i = 0$ ($i = 1, 2$) в уравнениях (15), (16) и имеем

$$P = \frac{6M_0(2 - \eta_1 - c_1) / a^2}{\mu \sin \xi_2 [3 + \mu^2(2 + \cos^2 \xi_2) - 3\mu \cos \xi_2] - 3\mu^2 \xi_2 + \text{ctg}^2 \xi_2 (\gamma - \mu \sin \xi_2)^3}, \quad (17)$$

$$P = \frac{6M_0 [\gamma(2 - \eta_2) - c_2] / a^2}{\mu \cos \xi_2 [3 + \mu^2(2 + \sin^2 \xi_2) - 3\mu \sin \xi_2] - 3\mu^2 (\frac{\pi}{2} - \xi_2) + \text{tg}^2 \xi_2 (\gamma - \mu \cos \xi_2)^3}. \quad (18)$$

Из (17), (18) получим, что при схеме Б в зависимости от соотношения значений γ , μ , η_1 , η_2 величина ξ_{2p} определяется из уравнения

$$\frac{2 - \eta_1 - c_1}{\mu \sin \xi_{2p} [3 + \mu^2(2 + \cos^2 \xi_2) - 3\mu \cos \xi_{2p}] - 3\mu^2 \xi_{2p} + \text{ctg}^2 \xi_{2p} (\gamma - \mu \sin \xi_{2p})^3} = \quad (19)$$

$$= \frac{\gamma(2 - \eta_2) - c_2}{\mu \cos \xi_{2p} [3 + \mu^2(2 + \sin^2 \xi_{2p}) - 3\mu \sin \xi_{2p}] - 3\mu^2(\pi/2 - \xi_{2p}) + \text{tg}^2 \xi_{2p}(\gamma - \mu \cos \xi_{2p})^3},$$

а предельная нагрузка P_0 определяется из (17) при $\xi_2 = \xi_{2p}$.

Уравнения (6) при схеме В ($\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$) имеют вид

$$\rho \ddot{\alpha}_1 a^3 [4\gamma^3 - \mu^2 \pi(\gamma^2 + \mu^2/4) + 8\gamma\mu^3 - 3\gamma^4 \text{tg}^2 \xi_2] = 2P(t)a^2 \{ \mu(3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma\mu^2 \pi/2 + \gamma^2 [3(1 - \mu) - 2\gamma \text{tg} \xi_2] \} - 12M_0(2 - \mu), \quad (20)$$

$$\rho \ddot{\alpha}_2 a^3 \gamma^3 \text{tg}^3 \xi_2 = 2P(t)a^2 \gamma^3 \text{tg}^2 \xi_2 - 12M_0. \quad (21)$$

Для определения P_0 считаем $\ddot{\alpha}_i = 0$ ($i = 1, 2$) в уравнениях (20), (21) и имеем

$$P = \frac{6M_0(2 - \mu)/a^2}{\mu(3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma\mu^2 \pi/2 + \gamma^2 [3(1 - \mu) - 2\gamma \text{tg} \xi_2]}, \quad (22)$$

$$P = 6M_0/(a^2 \gamma^2 \text{tg}^2 \xi_2). \quad (23)$$

Из (22), (23) получим, что в зависимости от соотношения значений γ, μ величина ξ_{2p} при схеме В определяется из уравнения

$$(2 - \mu)\gamma^2 \text{tg}^2 \xi_{2p} = \mu(3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma\mu^2 \pi/2 + \gamma^2 [3(1 - \mu) - 2\gamma \text{tg} \xi_{2p}], \quad (24)$$

а P_0 определяется из (23) при $\xi_2 = \xi_{2p}$.

При $\xi_{2p} = \phi_a$ уравнения (13), (19) совпадают. Считая $\xi_{2p} = \phi_a$ в уравнении (13), получим зависимость $\mu = \mu(\gamma, \eta_1, \eta_2)$

$$\frac{2 - \eta_1}{(\gamma - \mu)^2} = \frac{\gamma(2 - \eta_2) - \mu}{\mu(3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 + \gamma - \mu}. \quad (25)$$

При $\xi_{2p} = \phi_b$ уравнения (19) при $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ и (24) совпадают. Считая $\xi_{2p} = \phi_b$ в уравнении (24), получим зависимость $\mu = \mu(\gamma)$ при $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$

$$\frac{2 - \mu}{\mu(3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma\mu^2 \pi/2 + \gamma^2(1 - \mu)} = \frac{1}{(1 - \mu)^2}. \quad (26)$$

График зависимости μ от величины γ при разных η_1, η_2 по формуле (25) приведен на рис. 4. Кривая 1 соответствует случаю $\eta_1 = \eta_2 = 0$ (защемление всех сторон); кривая 2 относится к случаю $\eta_1 = \eta_2 = 1$ (шарнирное опирание всех сторон); кривая 3 – $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$; кривая 4 – $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$. Кривая 5 на рис. 4 изображает зависимость μ от величины γ при $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ по формуле (26). Теперь, для того чтобы определить по какой схеме А, Б или В будет происходить предельное деформирование пластины с заданными параметрами $\gamma, \mu, \eta_1, \eta_2$, достаточно определить правее или левее соответствующей кривой лежит точка (γ, μ) на рис. 4. В случае $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$, если точка (γ, μ) лежит правее кривой 4, то $\xi_{2p} \geq \phi_a$, и пластина деформируется по схеме А; если (γ, μ) лежит левее кривой 5, то $\xi_{2p} \leq \phi_b$, и пластина деформируется по схеме В; если точка (γ, μ) находится левее кривой 4 и правее кривой 5, то $\phi_b \leq \xi_{2p} \leq \phi_a$, и в предельном состоянии реализуется схема Б. В случаях, отличных от $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$, если точка (γ, μ) лежит правее соответствующей кривой (1, 2 или 3), то $\xi_{2p} \geq \phi_a$, и пластина деформируется по схеме А; если точка (γ, μ) лежит левее этой кривой, то $\phi_b \leq \xi_{2p} \leq \phi_a$, и пластина деформируется по схеме Б. Из рис. 4 видно для любого μ , что в случае $\gamma = 1$ при одинаковом закреплении сторон ($\eta_1 = \eta_2$) деформирование происходит по схеме Б, а при $\gamma > 2,54$ и любом креплении сторон – по схеме А.

Предельная нагрузка P_0 при схеме А определяется из уравнения (14). Предельная нагрузка P_0 при схеме Б определяется из уравнения (17), в котором считаем $P = P_0$ и ξ_{2p} вычислено из уравнения (19). Предельная нагрузка P_0 при схеме В определяется из уравнения (23), в котором считаем $P = P_0$ и ξ_{2p} получено из уравнения (24).

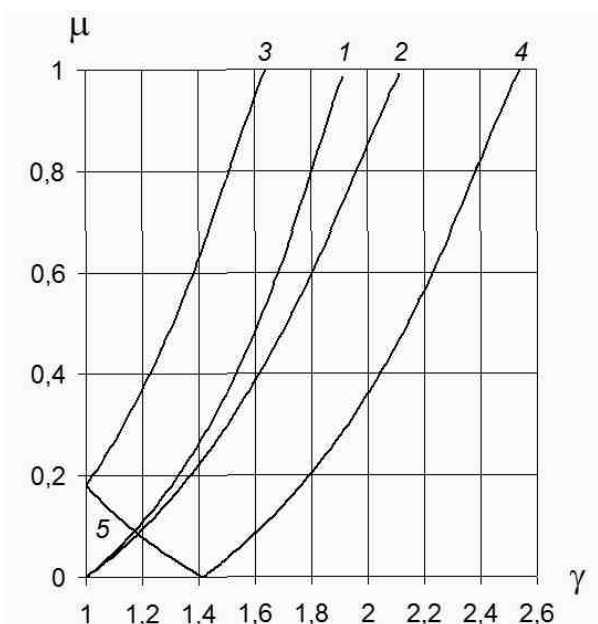


Рис. 4.

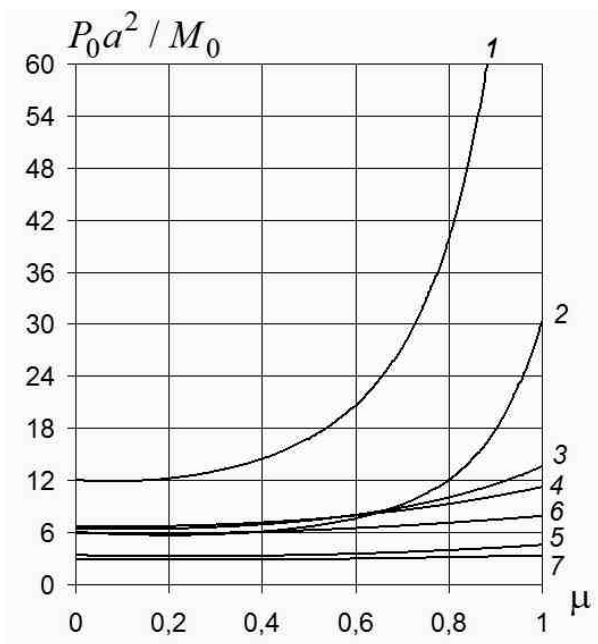


Рис. 5.

График зависимости P_0 от параметра μ при различных значениях γ, η_1, η_2 приведен на рис. 5. Кривая 1 изображает случай $\gamma = 1, \eta_1 = \eta_2 = 0$; кривая 2 – случай $\gamma = 1, \eta_1 = \eta_2 = 1$; кривая 3 – случай $\gamma = 1,7, \eta_1 = 1, \eta_2 = 0$; кривая 4 – случай $\gamma = 2,2, \eta_1 = \eta_2 = 0$; кривая

5 – случай $\gamma = 2, 2$, $\eta_1 = \eta_2 = 1$; кривая 6 – случай $\gamma = 3$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$; кривая 7 – случай $\gamma = 3$, $\eta_1 = \eta_2 = 1$. При фиксированном γ и при увеличении значения μ от нуля до единицы значение предельной нагрузки P_0 сначала немного снижается, а затем увеличивается. При росте γ значение P_0 уменьшается, также уменьшается влияние параметра отверстия μ на величину P_0 .

В случае отсутствия отверстия ($\mu = 0$) и шарнирного опирания всех сторон ($\eta_1 = \eta_2 = 1$) полученная предельная нагрузка прямоугольной пластины совпадает с предельной нагрузкой, вычисленной в работе [2]. В [2] также показано, что эта предельная нагрузка превышает не более чем на 1,55 % точное значение, определенное на основе условия текучести Треска.

3. При деформировании под действием «средних» нагрузок по схеме А динамическое поведение описывается уравнениями (7), (9), (10) с начальными условиями (11). Начальные условия $\xi_2(0) = \xi_{20}$ определим следующим образом. Интегрируя по времени уравнения (9), (10), учитывая (11), получим

$$\rho \dot{\alpha}_1 a^3 = 2 \int_0^t \frac{P(t) a^2 \operatorname{ctg}^2 \xi_2 - 6M_0(2 - \eta_1)}{\operatorname{ctg}^3 \xi_2} dt,$$

$$\rho \dot{\alpha}_2 a^3 = 2 \int_0^t \frac{P(t) a^2 [\mu (3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{ctg} \xi_2 + 3(\gamma - \mu)] - 6M_0 [\gamma (2 - \eta_2) - \mu]}{8\mu^3 - 3\mu^2 \pi (1 + \mu^2/4) - 3\operatorname{ctg} \xi_2 + 4\gamma} dt.$$

Подставляя полученные равенства в (8), имеем

$$\operatorname{tg} \xi_2 = \frac{\int_0^t \frac{P(t) a^2 \operatorname{ctg}^2 \xi_2 - 6M_0(2 - \eta_1)}{\operatorname{ctg}^3 \xi_2} dt}{\int_0^t \frac{P(t) a^2 [\mu (3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{ctg} \xi_2 + 3(\gamma - \mu)] - 6M_0 [\gamma (2 - \eta_2) - \mu]}{8\mu^3 - 3\mu^2 \pi (1 + \mu^2/4) - 3\operatorname{ctg} \xi_2 + 4\gamma} dt}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу $t \rightarrow 0$, раскрывая неопределенность по правилу Лопитала, получим уравнение для определения ξ_{20} в зависимости от величины P_{\max}

$$\begin{aligned} \{P_{\max} a^2 [\mu (3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 - 2\operatorname{ctg} \xi_{20} + 3(\gamma - \mu)] - \\ - 6M_0 [\gamma (2 - \eta_2) - \mu]\} \operatorname{ctg}^2 \xi_{20} = [P_{\max} a^2 \operatorname{ctg}^2 \xi_{20} - \\ - 6M_0(2 - \eta_1)] [8\mu^3 - 3\mu^2 \pi (1 + \mu^2/4) - 3\operatorname{ctg} \xi_{20} + 4\gamma]. \end{aligned} \quad (27)$$

На рис. 6 приведена зависимость угла ξ_{20} от максимальной нагрузки $p_{\max} = P_{\max} a^2 / M_0$ ($P_0 \leq P_{\max} \leq 5P_0$) для шарнирно опертой по всем сторонам ($\eta_1 = \eta_2 = 1$) прямоугольной пластины с круглым отверстием при $\gamma = 3$. Кривые 1–4 относятся к случаям $\mu = 0, 1$, $\mu = 0, 3$, $\mu = 0, 6$, $\mu = 0, 8$, соответственно. Видно, что при возрастании амплитуды нагрузки значение угла ξ_{20} увеличивается.

При схемах Б и В начальные значения ξ_{20} определяются аналогичным образом. При схеме Б значение ξ_{20} в зависимости от P_{\max} вычисляется из уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \xi_{20} (P_{\max} a^2 \{ \mu \cos \xi_{20} [3 + \mu^2(2 + \sin^2 \xi_{20}) - 3\mu \sin \xi_{20}] - \\ - 3\mu^2(\pi/2 - \xi_{20}) + \operatorname{tg}^2 \xi_{20} (\gamma - \mu \cos \xi_{20})^3 \} - 6M_0 [\gamma (2 - \eta_2) - c_2]) / \Sigma_1(\xi_{20}) / \Sigma_2(\xi_{20}) = \\ = P_{\max} a^2 \{ \mu \sin \xi_{20} [3 + \mu^2(2 + \cos^2 \xi_{20}) - 3\mu \cos \xi_{20}] - \\ - 3\mu^2 \xi_{20} + \operatorname{ctg}^2 \xi_{20} (\gamma - \mu \sin \xi_{20})^3 \} - 6M_0(2 - \eta_1 - c_1), \end{aligned}$$

при схеме В – из уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \xi_{20} \gamma (P_{\max} a^2 \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \xi_{20} - 6M_0) \Sigma_1(\xi_{20}) / \Sigma_2(\xi_{20}) = \\ = P_{\max} a^2 \{ \mu (3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma\mu^2 \frac{\pi}{2} + \gamma^2 [3(1 - \mu) - 2\gamma \operatorname{tg} \xi_{20}] \} - 2M_0(2 - \mu), \end{aligned}$$

где обозначено

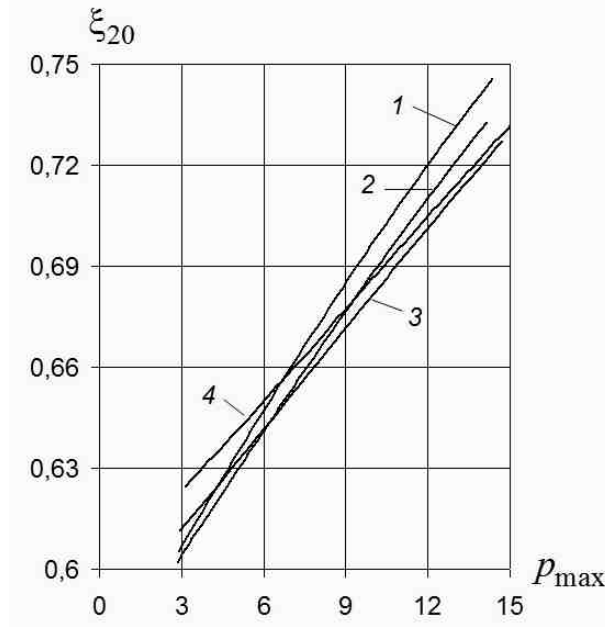


Рис. 6.

$$\Sigma_i(\xi_2) = \iint_{S_i} y_i^2 dy_i dx_i / a. (i = 1, 2). \quad (28)$$

При «средних» нагрузках и деформировании по схеме А определяющая система уравнений (8), (9), (10) с начальными условиями (11) и (28) решается численно методом Рунге-Кутты. Момент остановки пластины t_k определяется из условия

$$\dot{\alpha}_1(t_k) = 0.$$

При схемах Б и В поведение пластины определяются аналогичным образом. Все прогибы вычисляются из (1).

На рис. 7 приведены безразмерные прогибы $w = ua^2\rho/(M_0T^2)$ в сечении вдоль линии OB (на рис. 1) для прямоугольной пластины с круглым свободным отверстием с параметрами $\gamma = 3$ и $\mu = 0,3$ под действием нагрузки прямоугольного вида с $P_{\max} = 8,49M_0/a^2$ во время нагружения $0 \leq t \leq T$. Кривые 1, 2 относятся к случаю защемления всех сторон ($P_0 = 5,92M_0/a^2$, $\xi_{2p} = 0,61$, $\xi_{20} = 0,63$) и изображают прогибы в моменты снятия нагрузки $t = T$ и остановки пластины $t = t_k = 1,44T$ ($\xi_2(t_k) = 0,58$). Кривые 3, 4 соответствуют прогибам при шарнирном опирании всех сторон ($P_0 = 2,83M_0/a^2$, $\xi_{2p} = 0,60$, $\xi_{20} = 0,67$) и изображают прогибы в моменты снятия нагрузки $t = T$ и момент остановки $t = t_k = 3T$ ($\xi_2(t_k) = 0,57$).

Отметим, что во всех проведенных численных расчетах выполнялось следующее соотношение для времени деформирования пластины: $t_k \approx \int_0^T P(t)dt/P_0$.

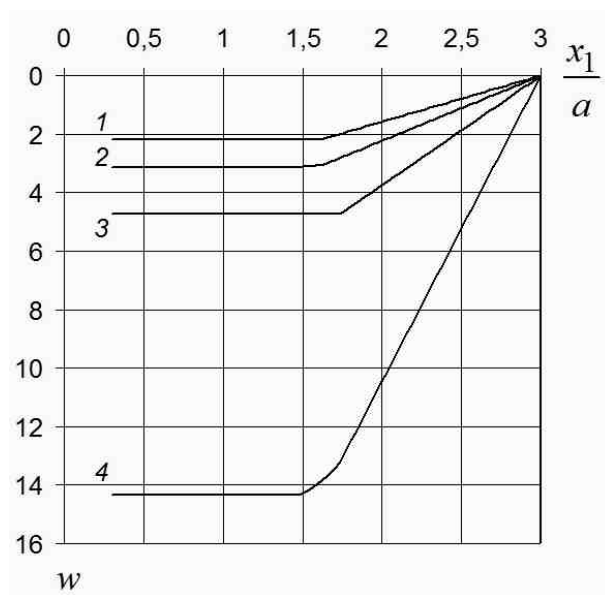


Рис. 7.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Немировский, Ю. В.* Динамика жесткопластической правильной полигональной пластины с отверстием под действием взрывных нагрузок / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Краевые задачи и математическое моделирование : сб. ст. 9-й Всерос. науч. конф., 28-29 ноября 2008 г., Новокузнецк : в 3 т. / под общ. ред. В. О. Каледина. - Новокузнецк, 2008. - Т. 1. - С. 93-97.
- [2] *Ржаницын, А. Р.* Предельное равновесие пластинок и оболочек / А. Р. Ржаницын - М. : Наука, 1983. - 288 с.
- [3] *Narasimhan, R. K.* Yield line analysis of square slabs with central rectangular openings / R. K. Narasimhan, V. Verreyya // J. Inst. Eng. (India) Civil Eng. Div. - 1978. - Vol. 59, № 2. - P. 138-143.
- [4] *Ерхов, М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. - М. : Наука, 1978. - 352 с.

Yu. V. Nemirovskiy, T. P. Romanova

**LIMIT AND DYNAMIC BEHAVIOR OF RECTANGULAR SLABS WITH FREE
ROUND APERTURE**

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch, S. Khristianovich Russian
Academy of Sciences*

Abstract. The method of calculation at ultimate load and permanent deflection of rectangular slabs with a free round aperture under the impact of uniformly distributed dynamic load of explosive type on the basis of ideal rigid-plastic material model is proposed. The slab sides are simply supported and fixed. Possible schemes of slab ultimate deforming are described. Numerical examples are given. The solutions can be used in various engineering calculations.

Keywords: ideal rigid-plastic slab, rectangular slab, round aperture, explosive load, permanent deflection.

Немировский Юрий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Романова Татьяна Павловна

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Nemirovsky Yury Vladimirovich

Dr. Sci. Phys & Math, Professor, Main Research worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Romanova Tatyana Pavlovna

Ph.D., Senior Research Worker, Main Research worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ИСКРИВЛЕННЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ДИСКОВ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Аннотация. Сформулирована и решена методом линейного программирования задача определения в условиях ползучести верхней кинематической границы несущей способности сложно армированных металлокомпозитных плоских и искривленных дисков постоянной и переменной толщины. Показано: наибольшую предельную угловую скорость вращения дискам обеспечивает структура с радиально-окружной укладкой арматуры; искривление диска приводит к резкому снижению его несущей способности; максимально допустимые скорости вращения дисков, работающих в условиях ползучести, в несколько раз ниже предельно допустимых скоростей, определенных по критерию кратковременной прочности.

Ключевые слова: диски, армирование, предельная скорость вращения, профилирование, жесткопластическая модель, жестко-ползучая модель, линейное программирование.

УДК: 539.375

В работах [1; 2; 3 и др.] авторы исследовали влияние различных структур армирования на несущую способность вращающихся плоских [1; 2] и искривленных [3] дисков на базе критериев кратковременной прочности. При этом предполагалось: все фазовые материалы дисков ведут себя упруго [1] (это позволяет свести к минимуму малоцикловую усталость и повысить долговечность дисков) либо идеально-пластично [2; 3] (что позволяет определить предельную угловую скорость вращения, выдерживаемую армированными дисками при полном исчерпании несущей способности всеми субструктурными элементами композиции). Однако на практике диски газовых турбин эксплуатируются в условиях длительного нагружения (требуемый ресурс работы таких элементов конструкции имеет порядок 10^5 часов [4, 113]) при повышенных температурах, поэтому в них могут активно развиваться деформации ползучести. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос об определении предельных угловых скоростей вращения сложно армированных металлокомпозитных дисков (которые в последнее время находят все более широкое применение на практике) с учетом развития деформаций ползучести в них.

Так как теория ползучести и длительной прочности сложно армированных тонкостенных конструкций в настоящее время находится в зачаточном состоянии [5], то для проведения оценочных технических расчетов целесообразно использовать приближенную схему жестко-ползучего тела [6; 7]. Полное решение или близкие (верхнюю и нижнюю) границы несущей способности конструкции по жестко-ползучей схеме можно получить лишь для некоторого узкого круга задач [6; 7; 8 и др.], поэтому выдвигаемые практикой новые задачи требуют привлечения численных методов решения математической задачи об определении предельной

Поступила 27.02.2009

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00046-а).

скорости вращения дисков в рамках жестко-ползучей модели. Настоящее исследование посвящено определению верхней границы несущей способности вращающихся металлокомпозитных дисков различной структуры в условиях ползучести с использованием теории линейного программирования. В общем случае срединные поверхности дисков предполагаются неплоскими (осесимметрично искривленными), что может быть вызвано конструктивными особенностями изделия или являться следствием предварительного натяга диска на вал. Кроме того, быстровращающиеся оболочки (частными случаями которых являются искривленные диски – пологие оболочки) могут использоваться в различных центрифугах и т. п., поэтому предложенный в настоящей работе алгоритм справедлив и для их расчета.

В силу известного [6] формального сходства определения несущей способности конструкции по жесткопластической и жестко-ползучей схемам, не будем останавливаться на описании метода расчета, который полностью совпадает с подробно изложенным в [3; 9], где нужно лишь заменить пределы текучести $\sigma_s = \sigma_{0,2}$ фазовых материалов на соответствующие пределы ползучести σ_c .

При проведении расчетов по жестко-ползучей схеме предел ползучести σ_c материала выбирается либо из условия предельно допустимой деформации ε_{\max} ползучести [7], либо из условия предельно допустимой скорости $\dot{\varepsilon}_{\max}$ деформации ползучести [6], которая регламентирована для целого ряда несущих элементов конструкций. Так, для дисков газовых турбин [4, 36]

$$\dot{\varepsilon}_{\max} = 10^{-9} \text{ 1/ч.} \quad (1)$$

Зная значение $\dot{\varepsilon}_{\max}$, на основании известных законов установившейся ползучести для фазовых материалов можно определить и соответствующие им пределы ползучести σ_c .

Исследуем на конкретных примерах влияние структуры армирования и формы меридионального профиля диска на его предельную угловую скорость вращения при ползучести и сравним ее с предельной скоростью вращения диска, определенной по жесткопластической схеме (по критерию кратковременной прочности). В качестве условия сопоставимости различных проектов армирования диска выберем одинаковый общий расход арматуры в них:

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{k=1}^N \Omega_k, \quad \Omega_k = \int_V \omega_k dV = 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} H(\theta) \omega_k(\theta) R_1(\theta) R_2(\theta) \sin \theta d\theta \quad (1 \leq k \leq N), \\ V &= 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} H(\theta) R_1(\theta) R_2(\theta) \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где V – объем диска; $H(\theta)$ – переменная по меридиану толщина полотна диска; θ – угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности диска; R_1, R_2 – главные радиусы кривизны срединной поверхности; θ_*, θ_{**} – координаты внутренней и внешней кромок диска соответственно ($0 \leq \theta_* < \theta_{**} < \pi$); $\omega_k(\theta)$ – плотность армирования волокнами k -го семейства; N – количество армирующих волокон (проволок).

Так как арматура предполагается постоянного поперечного сечения и обрывается только на кромках диска, то согласно [10]

$$\begin{aligned} \omega_k(\theta) &= H_* \omega_{k*} \cos \psi_{k*} R_{2*} \sin \theta_* / [H(\theta) \cos \psi_k(\theta) R_2(\theta) \sin \theta], \\ H_* &= H(\theta_*), \quad \omega_{k*} = \omega_k(\theta_*), \quad \psi_{k*} = \psi_k(\theta_*), \quad R_{2*} = R_2(\theta_*), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\psi_k(\theta)$ – углы армирования проволокой k -го семейства, отсчитываемые от меридионального направления (предполагаются изначально заданными функциями); ω_{k*} – произвольные постоянные. Равенство (3) не выполняется лишь при окружном армировании (так как $\cos \psi_k \equiv 0$), в этом случае $\omega_k(\theta)$ – произвольная функция [10].

Рассмотрим конструкцию, состоящую из диска, ограниченного кромками с радиусами $r_0 = R_2(\theta_*) \sin \theta_* = 0,05$ м, $r_1 = R_2(\theta_{**}) \sin \theta_{**} = 0,1975$ м, и лопаток длиной $l = 0,114$ м

[11] и толщиной $H_* = 0,007$ м. Лопатки изготовлены из алюминиевого сплава АМгЗ и продольно армированы стальной проволокой У8А с интенсивностью $\omega_* = 0,6$. Диск изготовлен из тех же материалов, но армирование его осуществляется по разным траекториям с разной интенсивностью. (Физико-механические характеристики фазовых материалов конструкции при температуре $T = 200$ °С приведены в таблице.) Срединная поверхность искривленного диска представляет собой часть сферы радиуса $R_1 = R_2 = 0,6$ м.

Физико-механические характеристики фазовых материалов [4; 12; 13]

Материал	σ_s , МПа	σ_c , МПа	ρ , кг / м ³
Сплав АМгЗ	108,9	$941 \cdot 10^{-6}$	2670
Проволока У8А	3500	1003	7800

Значения σ_c в таблице получены на основании законов установившейся ползучести для фазовых материалов

$$\text{АМгЗ [13]: } \dot{\varepsilon} = \exp(-K + \beta\sigma) \quad [1/\text{ч}], \quad K = 12,2, \quad \beta = 0,0673 \text{ (Па)}^{-1}; \quad (4)$$

$$\text{У8А [12]: } \dot{\varepsilon} = B\sigma^m \quad [1/\text{ч}], \quad B = 1,054 \cdot 10^{-84} \text{ (МПа)}^{-m} \cdot \text{ч}^{-1}, \quad m = 24,982 \quad (5)$$

с учетом значения $\dot{\varepsilon}_{\max}$ из (1).

Недостатком соотношения (4) является то, что при $\sigma = 0$ имеем $\dot{\varepsilon}_0 \approx 5 \cdot 10^{-6}$ 1/ч ($> \dot{\varepsilon}_{\max}$), т. е. при $0 < \dot{\varepsilon} < \dot{\varepsilon}_0$ величины $\dot{\varepsilon}$, σ имеют разные знаки, что противоречит их механическому смыслу. Для устранения этого недостатка в расчетах вместо зависимости (4) используем ее аппроксимацию двухзвенной кусочно-линейной функции

$$\sigma = \begin{cases} B_1 \dot{\varepsilon}, & 0 \leq \dot{\varepsilon} \leq \dot{\varepsilon}_1, \\ \sigma_1 + B_2 (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1), & \dot{\varepsilon} > \dot{\varepsilon}_1, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= 940,97 \text{ ГПа} \cdot \text{ч}, & B_2 &= 209,73 \text{ ГПа} \cdot \text{ч}, \\ \sigma_1 &= 30,194 \text{ МПа}, & \dot{\varepsilon}_1 &= 3,209 \cdot 10^{-5} \text{ 1/ч}. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметры (7) определены на основании зависимости (4) методом наименьших квадратов на интервале $0 \leq \dot{\varepsilon} \leq 10^{-4}$ 1/ч, при этом варьировались величины σ_1 , $\dot{\varepsilon}_1$. Значения (7) можно несколько уточнить, если в (6) варьировать параметры σ_1 , $\dot{\varepsilon}_1$, B_2 . На рис. 1 кривая 1 характеризует зависимость $\sigma \sim \dot{\varepsilon}$, определяемую соотношением (4), а двухзвенная ломаная 2 – зависимость (6) с учетом (7). Видно, что ломаная 2 удовлетворительно аппроксимирует закон установившейся ползучести (4), поэтому в расчетах значение σ_c для сплава АМгЗ (см. таблицу) определялось по формулам (6), (7) при $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{\max}$ из (1).

На рис. 2 изображены кривые, характеризующие зависимость предельного количества n оборотов дисков в минуту от угла армирования ψ . Диски имеют постоянную толщину ($H(\theta) = H_e = 7$ мм) и армированы меридионально-симметрично двумя семействами проволок ($N = 2$) с постоянными углами ($\psi_1(\theta) = -\psi_2(\theta) = \psi = \text{const}$, $\omega_1(\theta) = \omega_2(\theta)$) и с интенсивностями на внутренней кромке $\omega_{1*} = \omega_{2*} = 0,35$, поэтому объем V таких дисков и общий расход Ω арматуры в них одинаковы (см. (2), (3)).

З а м е ч а н и е 1. На рис. 2–4 сплошные линии 1–3 получены для искривленных дисков, а пунктирные кривые 1'–3' – для плоских ($R_1 = R_2 \rightarrow \infty$) дисков с теми же характерными размерами, что и искривленные. Линии 3, 3' определены для изотропных дисков из сплава АМгЗ, остальные кривые – для армированных конструкций. Кривые 1, 1' рассчитаны по жестко-ползучей схеме, остальные линии – по жесткопластической схеме – на основании критерия кратковременной прочности. (Кривые, рассчитанные по жестко-ползучей схеме для

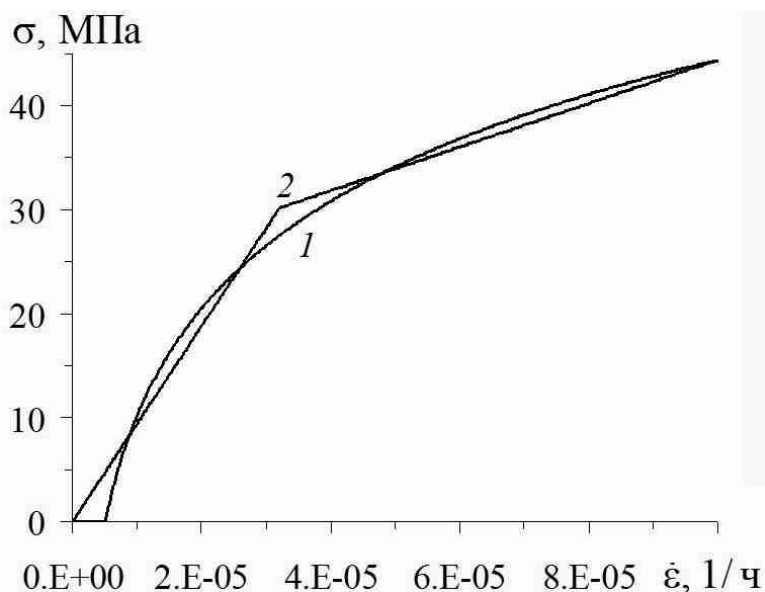


Рис. 1. Аппроксимация кривой установившейся ползучести сплава АМгЗ

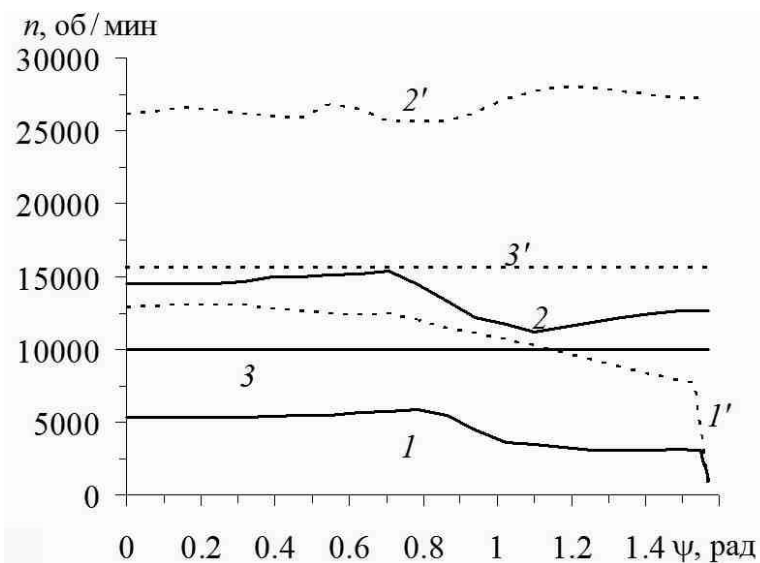


Рис. 2. Зависимости скоростей вращения дисков постоянной толщины от угла спирального армирования

изотропных дисков из сплава АМгЗ, на этих рисунках не показаны, так как предельно допустимая скорость вращения для них составляет менее 100 об/мин, что вызвано чрезвычайно малым значением предела ползучести σ_c для этого сплава, см. таблицу.)

Сравнение кривых 1, 2 и 1', 2' на рис. 2 указывает на то, что несущая способность дисков рассматриваемой структуры, определенная по ограничению (1), накладываемому на скорость деформации ползучести, далека от полного исчерпания, так как ординаты точек на кривых

1, 1' в два с лишним раза меньше, чем на кривых 2, 2' соответственно. Сопоставление горизонтальных прямых 3, 3', характеризующих несущую способность изотропных дисков, с кривыми 2, 2' соответственно, позволяет оценить эффективность замены изотропных дисков композитными дисками тех же габаритов: при пластическом деформировании в условиях кратковременной прочности замена изотропного диска (линии 3, 3') армированным (кривые 2, 2') позволяет повысить количество оборотов диска в минуту примерно в 1,5 раза. Этот эффект проявляется еще более ярко при учете ограничения (1), накладываемого явлением ползучести. Так, согласно замечанию 1 использование в условиях ползучести изотропных дисков из сплава АМгЗ при температуре $T = 200$ °С с практической точки зрения вообще не целесообразно, однако, как видно из рис. 2 (см. кривые 1, 1'), армированные диски с матрицей из этого сплава вполне могут быть использованы в инженерной практике.

Поведение кривых 1, 1', 2, 2' на рис. 2 свидетельствует о существенном влиянии структуры армирования дисков на их несущую способность как в условиях ползучести, так и в условиях кратковременной прочности. Однако не только структура армирования, но и форма срединной поверхности диска влияет на его несущую способность. Сравнение линий 1, 1' и 2, 2' позволяет заключить, что даже незначительное искривление срединной поверхности диска приводит к резкому уменьшению его несущей способности. Так, ординаты точек кривых 1, 2 в 1,5–2 раза меньше, чем на линиях 1', 2' соответственно. Искривление срединной поверхности диска приводит не только к количественному, но и качественному изменению зависимости $n(\psi)$. А именно: при $\psi_* < \psi < \pi/2$ на кривых 1, 2 наблюдается резкое уменьшение значений $n(\psi)$ по сравнению с участком $0 \leq \psi < \psi_*$ (здесь $\psi_* \approx 0,8$ для линии 1 и $\psi_* \approx 0,7$ для кривой 2); на кривой же 2', наоборот, при $0,8 < \psi < \pi/2$ наблюдается увеличение предельной скорости вращения по сравнению с армированием в пределах $0 \leq \psi < 0,8$.

Точкам максимумов на кривых 1, 1', 2, 2' соответствуют рациональные проекты армирования. Так как абсциссы этих точек существенно различны, то для плоских и искривленных дисков как в условиях ползучести, так и в условиях кратковременной прочности наибольшую несущую способность обеспечивают существенно разные структуры армирования. Хотя кривая 1' ведет себя немонотонно, вариация функции, ей соответствующей, на интервале $0 \leq \psi \leq 0,7$ (содержащем точку максимума этой линии) невелика по сравнению со средним ее (функции) значением. Поэтому, не соблюдая особо строго траекторий рационального армирования, при практической реализации таких плоских дисков можно получить структуры, обеспечивающие в условиях ползучести несущую способность, весьма близкую к максимальной, что упрощает технологию изготовления рассматриваемых конструкций.

Выше рассматривались диски постоянной толщины $H = H_e$. На практике же [6; 11] чаще используются диски переменной толщины, что позволяет при одинаковой массе повысить их несущую способность по сравнению с дисками постоянной толщины. Рассмотрим теперь диски переменной толщины, изменяющейся по линейному закону

$$H(\theta) = [(\theta - \theta_*) H_1 - (\theta - \theta_{**}) H_0] / (\theta_{**} - \theta_*), \quad H_0 = H(\theta_*), \quad H_1 = H(\theta_{**}). \quad (8)$$

Будем варьировать толщину диска H_0 на внутренней кромке, а толщину H_1 – на внешней кромке – выбирать из условия равенства объема диска $V(H_0, H_1)$ (см. (2)) объему дисков постоянной толщины, рассмотренных выше. При этом в случае $H_0 > H_e$ толщина диска уменьшается вдоль меридиана от внутренней кромки к внешней (см. (8)) и с увеличением H_0 убывает H_1 .

На рис. 3 изображены кривые, характеризующие зависимости $n(H_0)$ для меридионально армированных ($\psi_1 = 0$, $\omega_{1*} > 0$, $N = 1$) и изотропных ($\omega_{1*} = 0$) дисков (см. замечание 1). Для композитных дисков интенсивность армирования на внутреннем контуре ω_{1*} подбиралась так, чтобы общий расход арматуры (2) в профилированных дисках был такой же, как в соответствующих дисках постоянной толщины H_e при $\omega_{1*} = 0,7$). При этом с увеличением H_0 убывает ω_{1*}

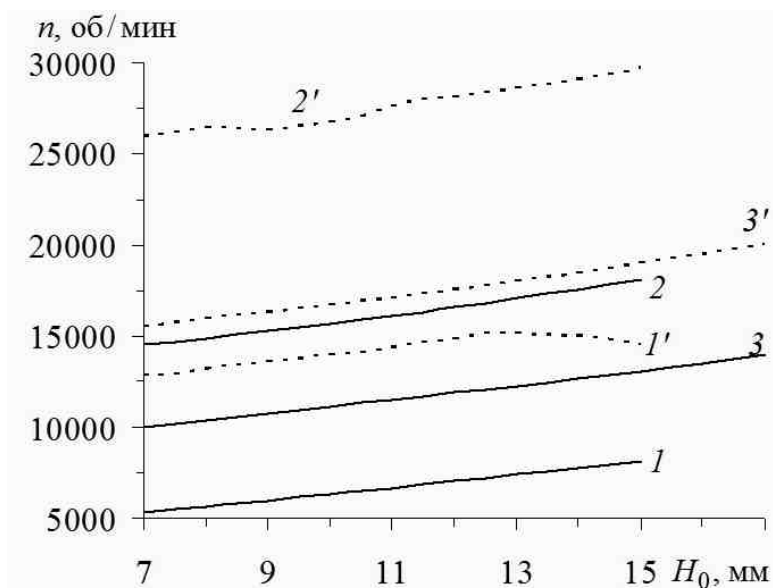


Рис. 3. Зависимости скоростей вращения профилированных дисков от толщины полотна на внутреннем контуре

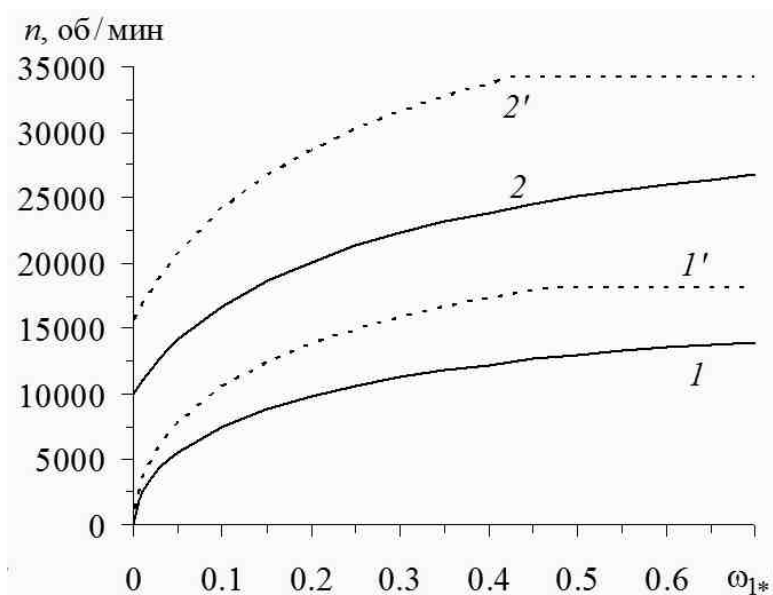


Рис. 4. Зависимости скоростей вращения дисков с радиально-окружной структурой от суммарной плотности армирования

Левые точки на кривых рис. 3 соответствуют левым точкам на линиях рис. 2 с теми же номерами. Правые точки на кривых 3 и 3' рис. 3 определяются значением толщины изотропных дисков на внешней кромке $H_1 = 0$, а правые точки на остальных линиях – значением

$\omega_1(\theta_{**}) = \omega_{\max} = 0,7$, что на практике соответствует предельно допустимому значению интенсивности армирования. При дальнейшем увеличении толщины H_0 диска на внутренней кромке получаем на внешней кромке неравенство $\omega_1(\theta_{**}) > \omega_{\max}$, поэтому соответствующие участки кривых 1, 1', 2, 2' не изображены. Все кривые на рис. 3 (за исключением линии 1') монотонно возрастают, а значит, за счет профилирования соответствующих дисков можно увеличить их предельную скорость вращения на несколько тысяч оборотов в минуту. Кривая же 1' ведет себя немонотонно и достигает максимума при $H_0 \approx 12,5$ мм; соответствующий диск можно считать рационально профилированным, причем его несущая способность на 2300 об/мин больше, чем у диска постоянной толщины H_e . Дополнительно повысить несущую способность дисков можно, по-видимому, за счет использования профилей более сложной, чем (8), формы, что и имеет место на практике [6, 11].

Рассмотрим теперь диски постоянной толщины H_e , армированные по меридионально-окружным направлениям, совпадающим с направлениями главных напряжений. Интенсивность армирования ω_1 меридиональным ($\psi_1 = 0$) семейством волокон определяется равенством (3), а интенсивность армирования окружным семейством зададим формулой $\omega_2(\theta) = \omega_{1*} - \omega_1(\theta)$. При этом суммарная плотность армирования постоянна ($\omega_{1*} = \omega_1(\theta) + \omega_2(\theta) = \text{const}$). Увеличивая ω_{1*} в пределах $0 \leq \omega_{1*} \leq \omega_{\max}$, будем увеличивать относительное объемное содержание арматуры в дисках. На рис. 4 изображены зависимости $n(\omega_{1*})$ для таких дисков (см. замечание 1). Ординаты левых точек на кривых 2, 2' рис. 4 ($\omega_{1*} = 0$) совпадают с ординатами прямых линий 3, 3' рис. 2 соответственно. Кривые 1, 2 на рис. 4 монотонно возрастают. Линии же 1', 2' являются кусочно-гладкими. Левые возрастающие участки этих линий характеризуются «течением» полотна плоского диска в условиях ползучести (кривая 1') или пластичности (линия 2'), а правые горизонтальные участки – течением лопаток в корневом сечении. Угловая скорость, при которой в лопатках достигается предельно допустимое состояние, определяется формулой, приведенной в [3, 42].

Таким образом, из всех рассмотренных структур армирования при заданных фазовых материалах композиции наибольшую несущую способность как в условиях ползучести, так и по критерию кратковременной прочности обеспечивают диски с меридионально-окружной структурой (хотя они и не профилированы).

Изменение структуры армирования дисков приводит к изменению эпюр скоростей меридионального v_1 и нормального v_3 смещений точек срединной поверхности дисков в зоне «течения» их материала, а также к изменению положения жесткопластической и жестко-ползучей границы в них. Так, при определенных структурах армирования часть полотна диска, примыкающая к внутренней кромке ($\theta_* \leq \theta < \theta_p$), остается абсолютно жесткой (в рамках жестко-ползучей схемы в этой области деформации ползучести и их скорости являются пренебрежимо малыми), а часть полотна, примыкающая к внешней кромке ($\theta_p < \theta \leq \theta_{**}$), испытывает течение в условиях ползучести или пластичности; при других же структурах армирования материал всего полотна диска находится в состоянии течения ($\theta_* = \theta_p$). Граница между абсолютно жесткой зоной и зоной течения, определяемая меридиональным углом θ_p , изменяется вместе с изменением структуры армирования или с формой профиля диска. Непрерывному изменению структуры армирования или профиля диска соответствует непрерывное изменение величины θ_p ; однако при некоторых структурах армирования (соответствующих, например, точкам изломов на кривых 1, 1', 2, 2' рис. 2) происходит скачкообразное изменение θ_p . При таких структурах армирования равновероятна реализация двух принципиально разных «механизмов течения» полотна диска. На рис. 5 изображены кривые (вычисленные с точностью до неопределенного множителя [6, 138]), качественно характеризующие скорости ползучести точек срединной поверхности искривленного диска в нормальном (линии 1, 1') и меридиональном (кривые 2, 2') направлениях при углах спирального армирования $\psi = \pi/4 - 0$ (линии 1, 2) и $\psi = \pi/4 + 0$ (кривые 1', 2'). Линии 1', 2' начинаются при $\theta = \theta_* = 0,08343$, что соответствует течению всего полотна диска, кривые же 1, 2 начинаются при $\theta = \theta_p = 0,15$,

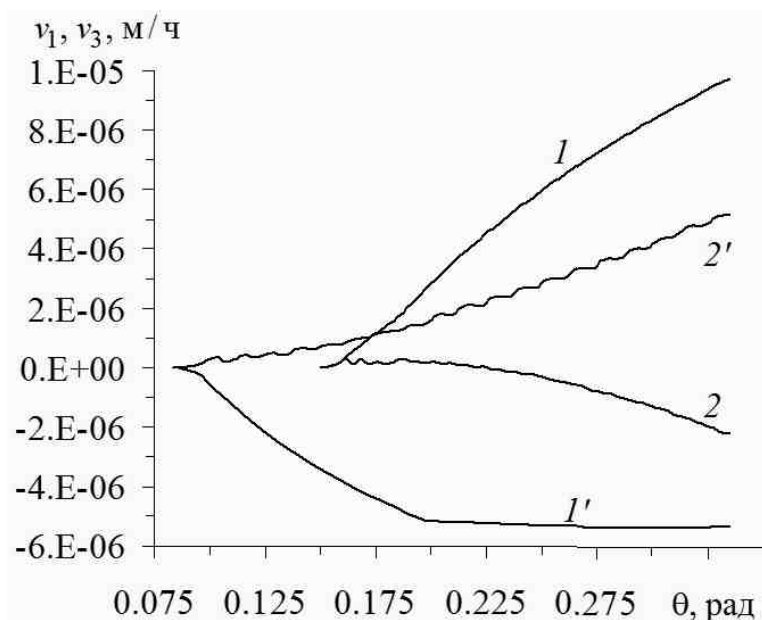


Рис. 5. Эпюры скоростей прогибов и меридиональных смещений (в условиях ползучести) точек срединной поверхности искривленного диска при спирально-ортогональной структуре армирования

т. е. в этом случае в диске имеется абсолютно жесткая зона, определяемая координатами $\theta_* \leq \theta < 0,15$.

Таким образом, проведенные в настоящей работе исследования позволяют заключить, что максимально допустимые угловые скорости вращения дисков в условиях ползучести существенно (почти вдвое) ниже предельных значений угловых скоростей вращения, при которых происходит переход в пластическое состояние (разрушение) всех фаз композиции полотна диска или лопаток. Искривление срединной плоскости диска приводит к резкому снижению его несущей способности. Из всех рассмотренных структур армирования при выбранных материалах фаз композиции наибольшую несущую способность дискам обеспечивает армирование по меридионально-окружным направлениям с постоянной суммарной плотностью армирования. Увеличить несущую способность дисков с фиксированной структурой армирования можно за счет их рационального профилирования.

З а м е ч а н и е 2. Наиболее известные и распространенные на сегодняшний день теории ползучести металлов [6; 14] не учитывают такого явления, как разносопротивляемость материалов растяжению – сжатию в условиях ползучести, которое наблюдается в экспериментах для целого ряда металлов [15; 16 и др.]. В рамках использованной в настоящем исследовании жестко-ползучей схемы это явление может быть легко учтено и использовано в расчетах оболочечных элементов центрифуг, в которых в значительной мере могут проявляться изгибания, приводящие к возникновению как растягивающих, так и сжимающих напряжений. (Описание учета такой особенности поведения материалов на базе жесткопластической модели дано в [2; 3], поэтому не будем здесь останавливаться на обсуждении этого вопроса.).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Немировский, Ю. В.* О влиянии структуры армирования на несущую способность термоупругих металлокерамических вращающихся дисков / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Проблемы прочности. - 2001. - № 4. - С. 5-24.
- [2] *Немировский, Ю. В.* Влияние структуры армирования на предельную скорость вращения композитных дисков / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2006. - № 1. - С. 44-51.
- [3] *Немировский, Ю. В.* Влияние структуры армирования и формы профиля на предельную скорость вращения композитных искривленных дисков / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Проблемы прочности. - 2007. - № 2. - С. 32-44.
- [4] *Безухов, Н. И.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н. И. Безухов и др. ; под ред. И. И. Гольденבלата. - М. : Машиностроение, 1965.
- [5] *Немировский, Ю. В.* Ползучесть однородных и композитных оболочек / Ю. В. Немировский // Актуальные проблемы механики оболочек : тр. междунар. конф., посвященной 100-летию проф. Х. М. Муштари, 90-летию проф. К. З. Галимова и 80-летию проф. М. С. Корнишина, Казань 26-30 июня 2000 г. - Казань : Новое знание, 2000. - С. 42-49.
- [6] *Качанов, Л. М.* Теория ползучести / Л. М. Качанов. - М. : Физматгиз, 1960.
- [7] *Немировский, Ю. В.* О времени эксплуатации цилиндрических оболочек в условиях ползучести / Ю. В. Немировский // Строительная механика корабля. - 1967. - Вып. 92. - С. 107-113.
- [8] *Ерхов, М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. - М. : Наука, 1978.
- [9] *Немировский, Ю. В.* Предельное состояние металлокомпозитных оболочек / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. - 2008. - № 2. - С. 129-144.
- [10] *Немировский, Ю. В.* О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. - 1997. - Т. 3, № 2. - С. 20-40.
- [11] *Пономарев, С. Д.* Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3 / С. Д. Пономарев и др. - М. : Гос. кн. изд-во машиностроит. лит., 1959.
- [12] *Композиционные материалы* : справочник / под ред. Д. М. Карпиноса. - Киев : Наук. думка, 1985.
- [13] *Соснин, О. В.* О ползучести слабо упрочняющихся материалов при нестационарных температурно-силовых режимах / О. В. Соснин // Проблемы прочности. - 1972. - № 1. - С. 74-77.
- [14] *Радченко, В. П.* Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях / В. П. Радченко, М. Н. Саушкин. - М. : Машиностроение-1, 2005.
- [15] *Соснин, О. В.* О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие / О. В. Соснин // Прикладная механика и техническая физика. - 1970. - № 5. - С. 136-139.
- [16] *Горев, Б. В.* К расчету на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса с разрывными характеристиками на растяжение и сжатие / Б. В. Горев // Динамика сплошной среды : сб. науч. тр. - Новосибирск, 1973. - Вып. 14. - С. 44-51.

Yu. V. Nemirovskiy, A. P. Yankovskii

**THE ESTIMATION OF THE MAXIMUM ROTATION SPEED OF
DEFORMED METAL-COMPOSITE DISKS IN CREEP CONDITIONS**

*S.Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian
Academy of Sciences*

Abstract. The task of detection of upper kinematical boundary of carrying capacity of complex reinforced metal-composite flat and deformed disks of constant and variable thickness in creep conditions is formulated and solved with linear programming method. It is shown that the structure with radial-circle placing of bars makes maximal angular speed of disc rotation, the disc deformation leads to abrupt reduction of its carrying capacity, maximum allowed speed of disc rotation working in creep conditions is several times less than the maximum allowed speed defined with short-term strength criterion.

Keywords: discs, reinforcement, maximum rotation speed, profiling, rigid-plastic model, rigid-creeping model, linear programming.

Немировский Юрий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Янковский Андрей Петрович

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Nemirovsky Yury Vladimirovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, S.Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Yankovskii Andrey Petrovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, S.Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯГИВАЮЩИХ УСИЛИЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается напряженно-деформированное состояние тонкой пластины с эллиптическим отверстием из анизотропного упруго-идеальнопластического материала при двусосном растяжении на бесконечности. Решение задачи находится методом малого параметра [2], в первом приближении определены компоненты напряжения и перемещения в упругой и пластической областях, определена граница пластической зоны.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, анизотропия, растяжение, отверстие.

УДК: 539.374

Рассмотрим тонкую пластину из упруго-идеальнопластического анизотропного материала, ослабленную эллиптическим отверстием с полуосями $a(1 - c)$, $a(1 + c)$. В плоскости xy пластина растягивается на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями p_1 и p_2 , контур свободен от усилий. Положим

$$c = \delta d_1, \quad \frac{p_1 - p_2}{2k} = \delta d_2, \quad \text{где } k, p_1, p_2 - \text{const},$$

где δ , d_1 , d_2 – безразмерные постоянные, принимающие значение в пределах $0 \leq \delta \leq 1$, $0 \leq d_i \leq 1$.

Очевидно, что при $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ имеет место двусосное растяжение пластины с круговым отверстием, при $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ имеет место пластина с эллиптическим отверстием, равномерно растягиваемая на бесконечности. В нулевом приближении (при $\delta = 0$) имеет место осесимметричное состояние плоскости с круговым отверстием.

Уравнение контура эллиптического отверстия запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2(1+c)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-c)^2} = 1, \quad (1)$$

при $c = 0$ согласно (1) имеет место круговое отверстие радиуса a .

В дальнейшем отнесем все величины, имеющие размерность длины к величине r_s^0 – радиусу упругопластической зоны в исходном нулевом приближении.

В дальнейшем перейдем к полярной системе координат

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}. \quad (2)$$

Переходя к полярной системе координат, согласно (2) запишем уравнение (1) в виде

$$\rho = \frac{\alpha(1 - \delta^2 d_1^2)}{\sqrt{1 - 2\delta d_1 \cos 2\theta + \delta^2 d_1^2}} = \alpha \left[-1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 d_1^2 (1 - \cos 4\theta) + \right. \quad (3)$$

$$\left. + \frac{5}{8} \delta^3 d_1^3 (\cos 2\theta + \cos 6\theta) \right] + \dots, \quad \alpha = \frac{a}{r_s^0}, \quad \rho = \frac{r}{r_s^0}.$$

Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс p наверху, а упругой – индекс e наверху.

Условие пластичности максимального касательного напряжения Треска для изотропного тела имеет вид [1]

$$(\sigma_x^p - 2k)(\sigma_y^p - 2k) - \tau_{xy}^{(p)2} = 0, \quad k - const, \quad (4)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Перейдем к безразмерным величинам, отнесем все величины, имеющие размерность, к величине предела текучести на растяжении $2k$, при этом для безразмерных величин сохраним обозначения, получим

$$(\sigma_x^p - 1)(\sigma_y^p - 1) - \tau_{xy}^{(p)2} = 0. \quad (5)$$

Для изотропного тела условие пластичности (5) перепишем в полярных координатах

$$(\sigma_\rho^p - 1)(\sigma_\theta^p - 1) - \tau_{\rho\theta}^{(p)2} = 0. \quad (6)$$

Условие пластичности для анизотропного материала примет вид

$$\left(\frac{\sigma_x^p}{k_1} - 1\right)\left(\frac{\sigma_y^p}{k_2} - 1\right) - F\tau_{xy}^{(p)2} = 0. \quad (7)$$

Условие пластичности (7) определяет свойства анизотропного идеальнопластического материала. Коэффициенты k_1, k_2, F характеризуют анизотропию материала. Отметим, что величины k_1, k_2, F – безразмерные. При $k_1 = k_2 = F = 1$ согласно (7) имеет место изотропный материал.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет вид

$$\sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta.$$

Из (7), (8) получим условие пластичности в полярных координатах

$$\frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{(\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p)^2}{4} - \frac{(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p)^2}{4} \cos^2(2\theta) - \tau_{\rho\theta}^{(p)2} \sin^2(2\theta) \right] -$$

$$-\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \frac{(\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p)}{2} + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) \left[\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \cos(2\theta) + \tau_{\rho\theta}^p \sin(2\theta) \right] -$$

$$-\frac{(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) \tau_{\rho\theta}^p \cos(2\theta) \sin(2\theta)}{k_1 k_2} - F \left[\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \sin(2\theta) - \tau_{\rho\theta}^p \cos(2\theta) \right]^2 = 0. \quad (9)$$

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(II)} + \delta^3 \sigma_{ij}^{(III)} \dots,$$

$$k_1 = 1 + \delta k_1^{(I)}, k_2 = 1 + \delta k_2^{(I)}, F = 1 + \delta F^{(I)}, \quad (10)$$

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2k}, \quad p_1, p_2 - \text{const.}$$

В дальнейшем положим

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0, \quad (11)$$

где индекс «0» наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при $\delta = 0$.

Подставив в уравнение (9) следующие выражения (10), получим

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} + \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \cos 2\theta - 1 \right) + \frac{\delta}{2} \left(\left(\sigma_\rho^{(I)p} + \sigma_\theta^{(I)p} \right) - k_1^{(I)} \left(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\left(\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} \right) - k_1^{(I)} \left(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} \right) \right) \cos 2\theta + 2\tau_{\rho\theta}^{(I)p} \sin 2\theta \right] \times \\ & \times \left[\left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} - \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \cos 2\theta - 1 \right) + \frac{\delta}{2} \left(\left(\sigma_\rho^{(I)p} + \sigma_\theta^{(I)p} \right) - k_2^{(I)} \left(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\left(\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} \right) - k_2^{(I)} \left(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} \right) \right) \cos 2\theta + 2\tau_{\rho\theta}^{(I)p} \sin 2\theta \right] - \\ & - \left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta - \delta \left[\left(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} \right) \sin 2\theta \left(\frac{\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p}}{2} \sin 2\theta - \tau_{\rho\theta}^{(I)p} \cos 2\theta \right) \right] - \\ & - 2\delta F^{(I)} \left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \sin 2\theta \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для нулевого приближения из (12) получаем случай изотропного материала

$$\sigma_\rho^{(0)p} \sigma_\theta^{(0)p} - \left(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p} \right) + 1 = 0. \quad (13)$$

Согласно [1] в нулевом приближении при условии $\sigma_\theta^{(0)p} = 1$ и граничном условии $\sigma_\rho^{(0)p} = 0$ при $\rho = \alpha$ получим

$$\sigma_\rho^{(0)p} = \left(1 - \frac{\alpha}{\rho} \right), \quad \sigma_\theta^{(0)p} = 1, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (14)$$

Для первого приближения имеет место условие пластичности

$$\sigma_\theta^{(I)p} = A_0 N_2 + B_0 N_1 - F^{(I)} \left(\sigma_\rho^0 + \sigma_\theta^0 \right)^2 \sin^2 2\theta, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} + \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \cos 2\theta - 1, \\ B_0 &= \frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} - \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2} \cos 2\theta - 1, \\ N_1 &= k_1' \left[\left(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p} \right) + \left(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} \right) \cos 2\theta \right], \end{aligned}$$

$$N_2 = k'_2 \left[\left(\sigma_\rho^{(0)P} + \sigma_\theta^{(0)P} \right) - \left(\sigma_\rho^{(0)P} - \sigma_\theta^{(0)P} \right) \cos 2\theta \right].$$

Соотношение (15) согласно (14) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(I)P} = (k'_1 + k'_2) \left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{3\alpha^2}{4\rho^2} \right) - \frac{F^{(I)}}{2} \frac{\alpha^2}{\rho^2} + (k'_1 - k'_2) \left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta + \\ + \frac{\alpha^2}{2\rho^2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) \cos 4\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая

$$\sigma_\rho^{(I)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta^{(I)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta} \right). \quad (17)$$

Из (16) и (17) найдем значение функции Φ

$$\begin{aligned} \Phi^P = \alpha (k'_1 + k'_2) \left(\rho (\ln \rho - 1) + \frac{3\alpha}{4} \ln \rho \right) + F^{(I)} \frac{\alpha^2}{2} \ln \rho + (C_{01}\rho + C_{02}) + \\ - (\alpha (k'_2 - k'_1) (\rho (\ln \rho - 1) + \alpha \ln \rho) - (C_{21}\rho + C_{22})) \cos 2\theta - \\ - \left(\frac{\alpha^2}{2} \ln \rho \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) - (C_{41}\rho + C_{42}) \right) \cos 4\theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (17) и (18) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)P} = \frac{1}{\rho} \left(-\alpha (k'_1 + k'_2) \left(\ln \rho + \frac{3\alpha}{4} \right) + \frac{\alpha^2}{2\rho} F^{(I)} + C_{01} \right) + \\ + \frac{1}{\rho} \left(\alpha (k'_2 - k'_1) \left((3 \ln \rho - 4) - \frac{\alpha}{\rho} (1 - 4 \ln \rho) \right) - 3C_{21} - \frac{4C_{22}}{\rho} \right) \cos(2\theta) + \\ + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\alpha^2}{2\rho} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (16 \ln \rho - 1) - 15C_{41} - \frac{16C_{42}}{\rho} \right) \cos 4\theta. \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)P} = -2 \left[(k'_2 - k'_1) \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} (1 - \ln \rho) \right) + \frac{C_{22}}{\rho^2} \right] \sin 2\theta + \\ - \left(\frac{2\alpha^2}{\rho^2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \rho) - \frac{4C_{42}}{\rho^2} \right) \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

В первом приближении граничные условия согласно [2] имеют вид

$$\sigma_\rho^{(I)P} = -d_1 \cos 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \quad (20)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)P} = -2d_1 \sin 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = \alpha.$$

Из (19) и (22) получим

$$\begin{aligned} C_{01} = \alpha (k'_1 + k'_2) \left(\ln \alpha + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha}{2} F^{(I)}, \\ C_{21} = \frac{\alpha}{3} (3 (k'_1 - k'_2) (\ln \alpha + 1) - 2d_1), \\ C_{22} = \alpha^2 (d_1 - (k'_1 - k'_2) (2 - \ln \alpha)), \end{aligned} \quad (21)$$

$$C_{41} = \frac{\alpha}{15} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) \left(16 \ln \alpha - \frac{17}{2} \right),$$

$$C_{42} = \frac{\alpha^2}{2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \alpha).$$

Согласно (19) и (22) компоненты напряженного состояния в первом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} = & \frac{1}{\rho} \left(-\alpha (k'_1 + k'_2) \left(\ln \rho + \frac{3\alpha}{4\rho} \right) + \frac{\alpha^2}{2\rho} F^{(I)} + \alpha (k'_1 + k'_2) \left(\ln \alpha + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha}{2} F^{(I)} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\alpha (k'_2 - k'_1) \left((3 \ln \rho - 4) - \frac{\alpha}{\rho} (1 - 4 \ln \rho) \right) - 3 \left(\frac{\alpha}{3} (3 (k'_1 - k'_2) (\ln \alpha + 1) - 2d_1) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{4}{\rho} (\alpha^2 (d_1 - (k'_1 - k'_2) (2 - \ln \alpha))) \right) \cos(2\theta) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\alpha^2}{2\rho} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (16 \ln \rho - 1) - 15 \left(\frac{\alpha}{15} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) \left(16 \ln \alpha - \frac{17}{2} \right) \right) - \right. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\left. - \frac{16}{\rho} \left(\frac{\alpha^2}{2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \alpha) \right) \right) \cos 4\theta.$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(I)p} = & (k'_1 + k'_2) \left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{3\alpha^2}{4\rho^2} \right) - \frac{F^{(I)} \alpha^2}{2 \rho^2} + (k'_1 - k'_2) \left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta + \\ & + \frac{\alpha^2}{2\rho^2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) \cos 4\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & -2 \left[(k'_2 - k'_1) \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} (1 - \ln \rho) \right) + \frac{1}{\rho^2} (\alpha^2 (d_1 - (k'_1 - k'_2) (2 - \ln \alpha))) \right] \sin 2\theta + \\ & + \left(\frac{2\alpha^2}{\rho^2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \rho) - \frac{2\alpha^2}{\rho^2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \alpha) \right) \sin 4\theta. \end{aligned}$$

Граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде

$$\sigma_\rho^e|_{\rho=\infty} = q - \delta \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^e|_{\rho=\infty} = q + \delta \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^e|_{\rho=\infty} = \delta \sin 2\theta, \quad (23)$$

где

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2k}, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2k}.$$

Уравнение упругопластической границы запишем в виде

$$\rho_s = 1 + \delta \rho_s^{(')} + \delta^2 \rho_s^{(')} \dots \quad (24)$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^p|_{\rho_s} = \sigma_\rho^e|_{\rho_s}, \quad \tau_{\rho\theta}^p|_{\rho_s} = \tau_{\rho\theta}^e|_{\rho_s}, \\ u_{\rho\theta}^p|_{\rho_s} = u_{\rho\theta}^e|_{\rho_s}, \quad u_\rho^p|_{\rho_s} = u_\rho^e|_{\rho_s}, \quad u_\theta^p|_{\rho_s} = u_\theta^e|_{\rho_s}. \end{aligned} \quad (25)$$

В первом приближении условие сопряжения (25) согласно (24) примет вид

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(I)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{\theta}^{(I)p} + \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)p}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(I)e} + \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)e}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta}^{(I)e}. \quad (26)$$

В упругой зоне ($1 < \rho < \infty$) распределение напряжений определяется согласно [1]. Удовлетворяя граничному условию при $\rho = \infty$, где $q = p/k$, получим

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = q - \frac{\alpha}{2\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = q + \frac{\alpha}{2\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0, \quad q = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (27)$$

Компоненты напряжения в упругой области в первом приближении согласно (22) и условию сопряжения (26) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} &= \frac{K}{\rho^2} + \left(\left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) N - \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \right) \cos 2\theta + \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) M \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)e} &= -\frac{K}{\rho^2} - \alpha + \left(\frac{1}{\rho^4} N + 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) M \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(\left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) \bar{N} - \left(-1 - \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \right) \sin 2\theta + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^4} \right) \bar{M} \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} K &= -\frac{3\alpha^2}{4} (k'_1 + k'_2) + \frac{\alpha^2}{2} F^{(I)} + \alpha (k'_1 + k'_2) \left(\ln \alpha + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha}{2} F^{(I)}, \\ N &= -\alpha (k'_2 - k'_1) (4 + \alpha) - 3 \left(\frac{\alpha}{3} (3(k'_1 - k'_2) (\ln \alpha + 1) - 2d_1) \right) - \\ &\quad - 4 (\alpha^2 (d_1 - (k'_1 - k'_2) (2 - \ln \alpha))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\alpha^2}{2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) - 15 \left(\frac{\alpha}{15} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) \left(16 \ln \alpha - \frac{17}{2} \right) \right) - \\ &\quad - 16 \left(\frac{\alpha^2}{2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \alpha) \right), \end{aligned}$$

$$\bar{N} = -2 \left[(k'_2 - k'_1) \alpha (1 + \alpha) + (\alpha^2 (d_1 - (k'_1 - k'_2) (2 - \ln \alpha))) \right],$$

$$\bar{M} = - \left(2\alpha^2 \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) - 4 \left(\frac{\alpha^2}{2} \left(F^{(I)} + \frac{(k'_1 + k'_2)}{2} \right) (1 - \ln \alpha) \right) \right).$$

Для определения радиуса упругопластической области в первом приближении получим

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_{\theta}^{(I)p} - \sigma_{\theta}^{(I)e}}{\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho}}. \quad (29)$$

Из (14), (27) будем иметь

$$\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = -\alpha, \quad (30)$$

откуда согласно (28)–(30) найдем

$$\begin{aligned} \rho'_s = (k'_1 + k'_2) \left(\frac{1}{4} - \ln \alpha \right) + \frac{F^{(I)}}{2} - 1 + ((k'_2 - k'_1) (6 + 8\alpha + \ln \alpha (3 - 8\alpha)) - 2d_1 (3 + 2\alpha) - 16\alpha) \cos 2\theta - \\ - \left(F^{(I)} + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left(8\alpha (-3 + \ln \alpha) + \frac{17}{2} \right) \cos 4\theta, \text{ при } \rho = 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Определим перемещение в пластической и упругой областях. Характер изменения деформированного состояния в некоторой точке P в процессе нагружения в рассматриваемом случае представляется следующим образом: сначала возрастают упругие деформации; затем, когда граница упругопластического состояния материала достигает точки P , процесс изменения упругих деформаций прекращается, так как изменение напряжений в пластической зоне в рассматриваемом случае не происходит. При дальнейшем возрастании нагрузок возникают пластические деформации.

Согласно [1] перемещения и деформации в упругой и пластической областях примут вид

$$\begin{aligned} u^0 = \frac{1}{2E} (\alpha + \rho - 2\alpha \ln \rho), v = 0, e_\rho^0 = \frac{1}{2E} \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} \right), \\ e_\theta^0 = \frac{1}{2E} \left(\frac{\alpha}{\rho} + 1 - 2\alpha \frac{\ln \rho}{\rho} \right), e_{\rho\theta}^0 = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

В упругой области согласно (25) получим

$$\begin{aligned} u_\rho^{(')e} = \frac{1}{E} \left[(1 + \mu) \left(-\frac{K}{\rho} \right) + \left(\frac{(1 + \mu)}{3\rho^3} (N - 2\bar{N}) - \frac{2}{\rho} (N - \bar{N}) - (1 + \mu) \left(\rho - \frac{1}{\rho^3} \right) - \frac{4}{\rho^3} \right) \cos 2\theta + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{5\rho^5} (1 + \mu) (2M - 3\bar{M}) - \left(1 + \frac{\mu}{3} \right) \frac{1}{\rho^3} (M - \bar{M}) \right) \cos 4\theta \right], \\ u_\theta^{(')e} = \frac{1}{E} \left[\left(\frac{(1 + \mu)}{3\rho^3} (N - 2\bar{N}) - \frac{\mu - 1}{\rho} (N - \bar{N}) + (1 + \mu) \left(\rho + \frac{1}{\rho^3} \right) + 2(1 - \mu) \frac{1}{\rho} \right) \sin 2\theta + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{5\rho^5} (1 + \mu) (2M - 3\bar{M}) - \frac{2\mu}{3\rho^3} (M - \bar{M}) \right) \sin 4\theta \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где μ - коэффициент Пуассона.

В пластической зоне согласно (9) и ассоциированному закону имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} e_\rho = e_\rho^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\rho} = \lambda \left[\frac{1}{k_1 k_2} \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)}}{2} - \frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \cos^2 2\theta \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{\cos 2\theta}{2} - \right. \\ \left. - \frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2k_1 k_2} \sin 4\theta - F \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \sin^2 2\theta - \frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2} \sin 4\theta \right) \right], \\ e_\theta = e_\theta^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta} = \lambda \left[\frac{1}{k_1 k_2} \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)}}{2} + \frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \cos^2 2\theta \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) - \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{\cos 2\theta}{2} + \right. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2k_1k_2} \sin 4\theta + F \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \sin^2 2\theta - \frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2} \sin 4\theta \right) \Big], \\
2e_{\rho\theta} = 2e_{\rho\theta}^p & = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{\rho\theta}} = \lambda \left[-\frac{2\tau_{\rho\theta}^p}{k_1k_2} \sin^2 2\theta + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \sin 2\theta - \right. \\
& \left. - \frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2k_1k_2} \sin 4\theta + F(2\tau_{\rho\theta}^p \cos^2 2\theta - \frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \sin 4\theta) \right].
\end{aligned}$$

Из (34) следует

$$\frac{e_\rho^p}{\partial f / d\sigma_\rho} = \frac{e_\theta^p}{\partial f / d\sigma_\theta} = \frac{e_{\rho\theta}^p}{\partial f / d\tau_{\rho\theta}} = \lambda. \quad (35)$$

В соотношениях (32) присутствуют компоненты пластической деформации, так как только они испытывают приращения в пластической зоне при возрастании нагрузки, причем при $t = 0$ имеют место равенства $e_\rho^p = e_\theta^p = e_{\rho\theta}^p = 0$. Момент времени $t = 0$ для каждой точки А отсчитывается от момента прохождения через нее упругопластической границы.

Полные деформации при $t = 0$, т. е. в момент возникновения пластических деформаций, отличны от нуля и совпадают с упругими деформациями, накопленными элементом тела к моменту достижения им предела текучести. Перепишем соотношения (32) в виде

$$\frac{e_\rho - e_\rho^e}{\partial f / d\sigma_\rho} = \frac{e_\theta - e_\theta^e}{\partial f / d\sigma_\theta} = \frac{2(e_{\rho\theta} - e_{\rho\theta}^e)}{\partial f / d\tau_{\rho\theta}}. \quad (36)$$

С учетом (34) соотношения (36) перепишем в виде

$$\frac{e_\rho - e_\rho^e}{\tilde{A}} = \frac{e_\theta - e_\theta^e}{\tilde{B}} = \frac{2(e_{\rho\theta} - e_{\rho\theta}^e)}{\tilde{C}}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{A} & = \left[\frac{1}{k_1k_2} \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)}}{2} - \frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \cos^2 2\theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{\cos 2\theta}{2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2k_1k_2} \sin 4\theta - F \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \sin^2 2\theta - \frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2} \sin 4\theta \right) \right], \\
\tilde{B} & = \left[\frac{1}{k_1k_2} \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)}}{2} + \frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \cos^2 2\theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) - \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{\cos 2\theta}{2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2k_1k_2} \sin 4\theta + F \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \sin^2 2\theta - \frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2} \sin 4\theta \right) \right], \\
\tilde{C} & = \left[-\frac{2\tau_{\rho\theta}^p}{k_1k_2} \sin^2 2\theta + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \sin 2\theta - \right.
\end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2k_1 k_2} \sin 4\theta + F(2\tau_{\rho\theta}^p \cos^2 2\theta - \frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \sin 4\theta) \right].$$

Упругие деформации при $\mu = \frac{1}{2}$ примут вид

$$\begin{aligned} e_\rho^e &= \frac{1}{E} \left(\sigma_\rho - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right), \\ e_\theta^e &= \frac{1}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_\rho \right), \\ e_{\rho\theta}^e &= \frac{\tau_{\rho\theta}}{2G}. \end{aligned} \quad (38)$$

Согласно [1] запишем соотношения для деформаций

$$e_\rho = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \rho}, e_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(n)}}{\rho}, e_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(n)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \theta} \right]. \quad (39)$$

Согласно [2], (37)–(41) дифференциальные уравнения для определения перемещения в пластической области в первом приближении примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(I)}}{\partial \rho} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} \left(\frac{1}{2} - \ln \rho \right) + \left(\frac{k'_2 + k'_1}{2} - \frac{k'_2 - k'_1}{2} \cos 2\theta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (k'_2 + k'_1 + F^{(I)}) \sin^2 2\theta \right) \ln \rho \right], \\ \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(I)}}{\partial \theta} &= 2 \left(\frac{2\alpha}{E\rho} + \frac{1}{2G} \right) \tau_{\rho\theta}^{(I)} + \frac{2\alpha}{E\rho} (k'_2 - k'_1) + \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\rho} (k'_2 + k'_1 + F^{(I)}) \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (40)$$

Из уравнения (40) получим

$$\begin{aligned} u_\rho^{(I)p} &= A^* + [B^* + \tilde{N}_{21}^*] \cos 2\theta + [D^* + C_{41}^*] \cos 4\theta, \\ u_\theta^{(I)p} &= \frac{\tilde{N}_{00}^*}{\rho} + [B^{**} - 2\tilde{N}_{21}^* + \tilde{N}_{22}^* \rho] \sin 2\theta + [D^{**} - 4\tilde{N}_{41}^* + \tilde{N}_{42}^* \rho] \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} A^* &= \alpha(k'_1 + k'_2) \left(-\ln^2 \rho + \ln \rho (\ln \alpha + \frac{5}{4} - \frac{3}{\rho}) + \frac{3\alpha}{8\rho} \right) + \frac{F^{(I)}}{2} \left(\ln \rho (-\alpha + \frac{\alpha^2}{\rho} + \rho) - \frac{\alpha^2}{2} - \rho \right), \\ B^* &= (k'_2 - k'_1) \left(\ln^2 \rho - \frac{7\alpha}{\rho} \ln \rho + \frac{\alpha}{\rho} (\alpha - 4 + 4\alpha \ln \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \ln \rho}{\rho} (4 + \alpha) + \rho \left(-3\alpha (\ln \alpha + 1) + \frac{1}{2} \right) \right) + 2d_1 \alpha \left(\rho + \frac{2\alpha}{\rho} \right), \\ D^* &= \left(F^{(I)} + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left(-\frac{17\alpha^2}{2\rho} (\ln \rho + 1) - \alpha \ln \rho \left(16 \ln \alpha - \frac{17}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{\rho} \left(\frac{33}{4} - 8 \ln \alpha \right) - \frac{1}{2\rho} (\ln \rho - 1) \right), \\ B^{**} &= \frac{1}{E} \left[(k'_2 - k'_1) \left(-8\alpha \ln \rho \left(\alpha + \frac{1}{\rho} \right) + \ln^2 \rho - \frac{\alpha}{\rho} (12 - 8\alpha^2 (3 - \ln \alpha) - \alpha(1 + 4 \ln \alpha)) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha \ln \rho}{\rho} (11 + \alpha) + \rho \left(-3\alpha (\ln \alpha + 1) + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{8\alpha^2}{\rho} + 2\rho + \frac{4\alpha}{\rho} \right) d_1 \Big] - \\
& -\frac{2}{G} \left[(k'_2 - k'_1) \left(\ln^2 \rho - \frac{\alpha}{\rho} \ln \rho (11 + \alpha) + \frac{\alpha}{\rho} (\alpha - 4 + 4\alpha \ln \alpha) + \rho \left(-3\alpha (\ln \alpha + 1) + \frac{1}{2} \right) \right) + 2d_1 \alpha \left(\rho + \frac{2\alpha}{\rho} \right) \right], \\
D^{**} &= \frac{1}{E} \left(F^{(I)} + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left(\alpha^2 \ln \rho \left(\frac{-8\alpha}{\rho} + 1 \right) - \frac{32\alpha^2}{15\rho} \left(16 \ln \alpha - \frac{17}{2} \right) \right) - \\
& -\frac{2}{G} \left(F^{(I)} + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \ln^2 \rho - \alpha^2 \ln \rho (1 + 2 \ln \alpha) \right).
\end{aligned}$$

Из (33), (42) и условий сопряжения (25) и найдем коэффициенты C_{00}^* , C_{21}^* , C_{22}^* , C_{41}^* , C_{42}^* .

$$C_{00}^* = 0,$$

$$C_{21}^* = N^* - \tilde{B}^*,$$

$$C_{22}^* = \bar{N}^* - \tilde{B}^{**} + 2(N^* - \tilde{B}^*),$$

$$C_{41}^* = M^* - \tilde{D}^*,$$

$$C_{42}^* = \bar{M}^* - D^{**} + 4(M^* - D^*),$$

где

$$K^* = -\frac{(1 + \mu)K}{E},$$

$$N^* = \frac{1}{E} \left(\frac{(1 + \mu)}{3} (N - 2\bar{N}) - 2(N - \bar{N}) - 4 \right),$$

$$M^* = \frac{1}{E} \left(\frac{(1 + \mu)}{5} (2M - 3\bar{M}) - \frac{(3 + \mu)}{3} (M - \bar{M}) \right),$$

$$N^{**} = \frac{1}{E} \left(\frac{(1 + \mu)}{3} (N - 2\bar{N}) - (\mu - 1) (N - \bar{N}) + 4 \right),$$

$$M^{**} = \frac{1}{E} \left(\frac{(1 + \mu)}{5} (2M - 3\bar{M}) - \frac{2\mu}{3} (M - \bar{M}) \right), \quad (42)$$

$$\tilde{A}^* = \frac{3\alpha^2}{8} (k'_1 + k'_2) - \frac{F^{(I)}}{2} \left(\frac{\alpha^2}{2} + 1 \right), \tilde{B}^* = (k'_2 - k'_1) \left(\alpha (\alpha - 7) + \alpha \ln \alpha (4\alpha - 3) + \frac{1}{2} \right) + 2d_1 \alpha (1 + 2\alpha),$$

$$\tilde{D}^* = \left(F^{(I)} + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left(\alpha^2 \left(\frac{1}{4} - 8 \ln \alpha \right) + \frac{1}{2} \right),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}^{**} &= \frac{1}{E} \left[(k'_2 - k'_1) \left(\alpha (-6 \ln \alpha + 24\alpha^2 - \alpha - 15) + \frac{1}{2} \right) + 2(4\alpha^2 + 2\alpha + 1) d_1 \right] - \\
& -\frac{2}{G} \left[(k'_2 - k'_1) \left(\alpha (\alpha - 7 + \ln \alpha (4\alpha - 3)) + \frac{1}{2} \right) + 2d_1 \alpha (1 + 2\alpha) \right],
\end{aligned}$$

$$\tilde{D}^{**} = -\frac{32\alpha^2}{15E} \left(F^{(I)} + \frac{k'_1 + k'_2}{2} \right) \left(16 \ln \alpha - \frac{17}{2} \right),$$

где $K, M, N, \bar{M}, \bar{N}$ определены согласно (28).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бицено, К. Б.* Техническая академия / К. Б. Бицено, Р. Л. Граммель. - Л. : Гостехиздат, 1950. - 900 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. - М. : Наука, 1978. - 208 с.
- [3] *Леденев, А. П.* Об анизотропном идеальнопластическом состоянии толстой плиты, ослабленной эллиптическим отверстием / А. П. Леденев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 1(48). - С. 81-85.
- [4] *Леденев, А. П.* Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из анизотропного идеальнопластического материала / А. П. Леденев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 2(49). - С. 16-21.
- [5] *Леденев, А. П.* Упругопластическое состояние анизотропной пластической трубы под действием внутреннего давления / А. П. Леденев // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чуваш. гос. пед. ун-т. - 2006. - №1(7), Т. 1. - С. 20-27.

T. N. Pavlova

ELASTOPLASTIC CONDITION OF A THIN SLAB FROM ANISOTROPIC MATERIAL WEAKENED BY AN APERTURE UNDER THE STRETCHING STRESS

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Stressedly-deformed state of a thin slab from anisotropic elastoplastic material with an elliptic aperture in biaxial tension at infinity is considered in the work. The solution of this task is made with the help of perturbation theory [2], the tension and shift components in elastic and plastic stability are found at first approximation, the limit of plastic area is determined.

Keywords: tension, deformation, elasticity, plasticity, anisotropy, an aperture.

Павлова Татьяна Николаевна

аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета, г. Чебоксары

e-mail: tn_pavlova@mail.ru

Pavlova Tatyana Nikolaevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Аннотация. Решение задач динамической теории упругости методом интегральных преобразований общеизвестно [1]. Этим методом непосредственно получится решение задачи в изображениях. Однако, обращение изображений порой не всегда удается и часто представляется серьезной математической трудностью. Каньяр [2] предложил новый метод обращения интегральных преобразований, который в дальнейшем широко применяется в динамических задачах теории упругости [3-7]. Суть метода Каньяра заключается в том, что после обратного преобразования изображения по пространственной переменной и подходящего выбора системы координат изображение приводится к преобразованию Лапласа по времени для известной функции, откуда и найдется оригинал решения. В настоящей работе предлагается метод обращения интегральных преобразований, суть которого заключается в том, что после нахождения обратного преобразования Лапласа по времени и подходящей замены переменной интегрирования, изображение приводится к интегральному преобразованию по пространственной переменной для известной функции, откуда и найдется решение задачи. В качестве примера приложения метода приводится эффективное решение до сих пор нерешенной задачи о волнах давления, распространяющихся в жидком сжимаемом упругом полупространстве при расширяющихся с произвольной скоростью поверхностных нагрузках.

Ключевые слова: упругость, давление, интегральные преобразования, изображение, волны, жидкость, полупространство.

УДК: 539.1, 539.3

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о распространении волн давления в жидкости, занимающей в системе координат (r, θ, z) полупространство $z \geq 0$, при расширяющейся с произвольной скоростью поверхностной нагрузке

$$p^*(r, \tau) = P_0 f\left(\sqrt{\gamma^2 \tau^2 - r^2}\right) \eta(\gamma \tau - r), \quad (1)$$

где $\tau = c_0 t$, $\gamma = c/c_0$, c_0 – скорость распространения возмущений в жидкости, c – скорость фронта расширяющейся поверхностной нагрузки.

В (1) фронт расширяющейся поверхностной нагрузки задается $\eta(\tau)$ функцией Хевисайда. Фактически, (1) определяет давление за фронтом распространяющейся ударной волны, которая возникает, например, при точечных взрывах в воздухе над уровнем жидкости.

Поступила 25.08.2008

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность д.ф.-м.н., проф., чл.-корр. НАН РА Багдоеву А.Г. за полезные замечания при обсуждении полученных результатов.

В рамках линейной теории распространение осесимметричных волн давления в идеальной сжимаемой жидкости при отсутствии объемных сил определяется уравнением [8]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (2)$$

Полагая

$$P_L(r, z, s) = \int_0^\infty p(r, z, \tau) e^{-\gamma\tau} d\tau, \quad (3)$$

$$P_{LH}(\xi, z, s) = \int_0^\infty P_L(r, z, s) J_0(\xi r) r dr, \quad (4)$$

найдем решение задачи (1) и (2) при однородных начальных условиях

$$p(r, z, 0) = p'_\tau(r, z, 0) = 0 \quad (5)$$

в изображениях интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля.

Из (1) и (2) получаем

$$\frac{d^2 P_{LH}}{dz^2} - (\xi^2 + s^2) P_{LH} = 0. \quad (6)$$

$$P_{LH}(\xi, 0, s) = P_{LH}^*(\xi, s). \quad (7)$$

Теперь вычислим изображение P_{LH}^* граничного условия (1).

Имеем

$$P_{LH}^*(\xi, s) = P_0 \int_0^\infty \left[\int_{r/\gamma}^\infty f(\sqrt{\gamma^2\tau^2 - r^2}) e^{-s\tau} d\tau \right] J_0(\xi r) r dr. \quad (8)$$

Далее, переменим порядок интегрирования в (8), а затем заменим переменную r на $u = \sqrt{\gamma^2\tau^2 - r^2}$, получим

$$P_{LH}^*(\xi, s) = \int_0^\infty \left(\int_0^{\gamma\tau} J_0(\xi\sqrt{\gamma^2\tau^2 - u^2}) f(u) u du \right) e^{-s\tau} d\tau. \quad (9)$$

В силу известных соотношений операционного исчисления [9] находим

$$P_{LH}^*(\xi, s) = -\frac{P_0 F'_{LH}(\sqrt{\xi^2 + s^2/\gamma^2})}{\gamma\sqrt{\xi^2 + s^2/\gamma^2}}, \quad (10)$$

где $F'_{LH}(s)$ есть изображение от $uf(u)$.

Решение уравнения (6), стремящееся к нулю при $z \rightarrow +\infty$ и удовлетворяющее условию (7), получим в виде

$$P_{LH}(\xi, z, s) = -\frac{P_0 F'_{LH}(\sqrt{\xi^2 + s^2/\gamma^2})}{\gamma\sqrt{\xi^2 + s^2/\gamma^2}} \exp[-z\sqrt{\xi^2 + s^2/\gamma^2}]. \quad (11)$$

2. Решение задачи в преобразовании Ханкеля. Формула (11) является произведением двух изображений $P_{LH}^*(\xi, s)$ и $P_{LH}^0(\xi, z, s) = \exp[-z\sqrt{\xi^2 + s^2}]$, и ее оригинал определяется формулой свертки

$$P_H(\xi, z, \tau) = \int_0^\tau P_H^*(\xi, v) P_H^0(\xi, z, \tau - v) dv. \quad (12)$$

Здесь P_H^0 есть оригинал от (11) по τ .

Из формулы (9) определим оригинал изображения $P_{LH}^*(\xi, s)$.

$$P_H^*(s, \tau) = \int_0^{\gamma\tau} J_0(\xi\sqrt{\gamma^2\tau^2 - u^2}) f(u) u du. \quad (13)$$

Оригинал изображения $P_{LH}^0(\xi, z, s)$ известен

$$P_H^0(\xi, z, \tau) = \delta(\tau - z) - \xi z \frac{J_1(\xi\sqrt{\tau^2 - z^2})}{\sqrt{\tau^2 - z^2}} \eta(\tau - z). \quad (14)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P_H(\xi, z, \tau) = \frac{P_0}{\gamma} \left\{ \int_0^\tau \left[\int_0^{\gamma v} J_0(\xi\sqrt{\gamma^2 v^2 - u^2}) f(u) u du \right] \delta(\tau - v - z) dv - \right. \\ \left. - \xi z \int_0^\tau \left[\int_0^{\gamma v} J_0(\xi\sqrt{\gamma^2 v^2 - u^2}) f(u) u du \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{J_1(\xi\sqrt{(\tau - v)^2 - z^2})}{\sqrt{(\tau - v)^2 - z^2}} \eta(\tau - v - z) dv \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

В двойных интегралах (15) переменим порядок интегрирования, получим

$$P_H(\xi, z, \tau) = \frac{P_0}{\gamma} \left\{ P_H^{(1)}(\xi, z, \tau) + P_H^{(2)}(\xi, z, \tau) \right\}, \quad (16)$$

где

$$P_H^{(1)}(\xi, z, \tau) = \int_0^{\gamma(\tau - z)} J_0(\xi\sqrt{\gamma^2(\tau - z)^2 - u^2}) f(u) u du, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} P_H^{(2)}(\xi, z, \tau) = - \int_0^{\gamma(\tau - z)} \left[\int_{u/\gamma}^{\gamma(\tau - z)} J_0(\xi\sqrt{\gamma^2 v^2 - u^2}) \times \right. \\ \left. \times \frac{J_1(\xi\sqrt{(\tau - v)^2 - z^2})}{\sqrt{(\tau - v)^2 - z^2}} dv \right] f(u) u du. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, формулы (16)–(18) дают решение задачи в виде изображения преобразования Ханкеля.

3. Переход к оригиналу. Процедура обращения изображений $P_H^{(1)}(\xi, z, \tau)$ и $P_H^{(2)}(\xi, z, \tau)$ заключается в том, чтобы привести их к преобразованию Ханкеля для известных функций, откуда и найдется их оригинал.

Очевидно, что (17) приводится к преобразованию Ханкеля для известной функции, если заменим в нем выражение $\sqrt{\gamma^2(\tau - z)^2 - u^2} = r$. После некоторых преобразований (17) приводим к виду

$$P_H^{(1)}(\xi, z, \tau) = \int_0^\infty f\left(\sqrt{\gamma^2(\tau-z)^2 - r^2}\right) \eta[\gamma(\tau-z) - r] J_0(\xi r) r dr. \quad (19)$$

Отсюда видно, что оригиналом изображения $P_H^{(1)}(\xi, z, \tau)$ будет функция

$$P_H^{(1)}(r, z, \tau) = f\left(\sqrt{\gamma^2(\tau-z)^2 - r^2}\right) \eta[\gamma(\tau-z) - r]. \quad (20)$$

Далее, чтобы найти оригинал (18) сначала рассмотрим изображение

$$Q_H(\xi, z, \tau) = - \int_0^{\gamma(\tau-z)} \left[\int_{u/\gamma}^{\tau-z} J_0\left(\xi\sqrt{\gamma^2 v^2 - u^2}\right) \times \right. \\ \left. \times J_0\left(\xi\sqrt{(\tau-v)^2 - z^2}\right) dv \right] f(u) u du, \quad (21)$$

из которого дифференцированием по z получится $P_H^{(2)}(\xi, z, \tau)$.

В (21) заменим переменную интегрирования v переменной φ по формулам

$$\sqrt{\gamma^2 v^2 - u^2} = \omega \sin \varphi, \quad \sqrt{(\tau-v)^2 - z^2} = q \cos \varphi, \quad (22)$$

где

$$\omega = \sqrt{\gamma^2(\tau-z)^2 - u^2}, \quad q = \sqrt{\left(\tau - \frac{u}{\gamma}\right)^2 - z^2} \quad (23)$$

и пользуясь формулой [10]

$$\int_0^{\pi/2} J_0(a \sin \varphi) J_0(b \cos \varphi) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{J_1(\sqrt{a^2 + b^2})}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (24)$$

получим

$$Q_H(\xi, z, \tau) = - \int_0^{\gamma(\tau-z)} \frac{\omega^2 + \gamma^2 q^2}{\gamma^2 \xi \tau} \frac{J_1\left(\xi\sqrt{\omega^2 + q^2}\right)}{\sqrt{\omega^2 + q^2}} f(u) u du. \quad (25)$$

Имеются три случая обращения $Q_H(\xi, z, \tau)$ в зависимости от значения отношений скорости распространения фронта поверхностной нагрузки к скорости звука в жидкости: сверхзвуковой ($c > c_0$), звуковой ($c = c_0$) и дозвуковой ($c < c_0$).

Сверхзвуковой случай ($\gamma > 1$). В (25) заменим переменную интегрирования u на τ по формуле $\sqrt{\omega^2 + q^2} = r$. Тогда, (25) после замены приводится к виду

$$Q(\xi, z, \tau) = \int_0^\infty \frac{2[\tau-z-u_1]f(u_1)}{\xi[\tau+(\gamma^2-1)u_1]} \eta \times \\ \times \left(\sqrt{(\gamma^2-1)\left(z - \frac{\gamma^2 \tau}{\gamma^2-1}\right)^2 - \frac{\tau^2}{\gamma^2-1} - r} \right) J_1(\xi r) dr. \quad (26)$$

Здесь введено обозначение

$$u_1 = u_1(r, z, \tau) = \sqrt{\left(z - \frac{\gamma^2 \tau}{\gamma^2-1}\right)^2 - \frac{r^2}{\gamma^2-1} - \frac{\tau}{\gamma^2-1}}. \quad (27)$$

Формула (26) представляет собой преобразование Ханкеля первого порядка для известной функции. Поэтому, если учитываем соотношение между преобразованиями Ханкеля производных функции [1]

$$\int_0^{\infty} \gamma \frac{df}{dr} J_1(\xi r) dr = -\xi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\xi r) dr, \quad (28)$$

получим

$$Q(r, z, \tau) = \int_0^r \frac{2[\gamma(\tau-z)-u_1]f(u_1)}{\gamma\tau+(\gamma^2-1)u_1} \eta \times \\ \times \left(\sqrt{(\gamma^2-1) \left(z - \frac{\gamma^2\tau}{\gamma^2-1} \right)^2 - \frac{\tau^2}{\gamma^2-1} - \omega} \right) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (29)$$

Звуковой случай ($\gamma = 1$). Оригинал изображения $Q_H(\xi, z, \tau)$ при $\gamma = 1$ получается таким же путем, как в предыдущем случае

$$Q(r, z, \tau) = \int_0^r \frac{\omega f(u_2)}{\tau^2} \eta \left(\sqrt{2\tau(\tau-z) - \omega} \right) d\omega, \quad (30)$$

где

$$u_2(\omega, z, \tau) = \tau - z - \omega^2/2\tau. \quad (31)$$

Дозвуковой случай ($\gamma < 1$). Аналогично, как в рассмотренных случаях, получим

$$Q(r, z, \tau) = \int_0^r \frac{2[(\tau-z)-u_3]f(u_3)}{\tau-(1-\gamma^2)u_3} \eta \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{r^2}{1-\gamma^2} - (1-\gamma^2) \left(z + \frac{\gamma^2\tau}{1-\gamma^2} \right) - \omega} \right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (32)$$

где

$$u_3 = u_3(\omega, z, \tau) = \sqrt{\left(z + \frac{\gamma^2\tau}{1-\gamma^2} \right)^2 + \omega^2 + \frac{\tau}{1-\gamma^2}}. \quad (33)$$

В силу линейности интегральных преобразований и соотношения $P^{(2)}(r, z, \tau) = \frac{\partial}{\partial z} Q(r, z, \tau)$ точное и аналитическое решение задачи о проникании давления в жидком полупространстве при любых скоростях расширения поверхностной нагрузки получим в виде

$$P(r, z, \tau) = \frac{P_0}{\gamma} \left\{ P^{(1)}(r, z, \tau) + \frac{\partial}{\partial z} Q(r, z, \tau) \right\}. \quad (34)$$

Таким образом, при всех скоростях расширения поверхностной нагрузки член $P^{(1)}(r, z, \tau)$ в (34) определяет часть решения для давления $P(r, z, \tau)$ в области, ограниченной поверхностями $\gamma(\tau-z) - r = 0$ и $z = 0$. В любой момент времени $\tau > 0$, уравнение $\gamma(\tau-z) - r = 0$ определяет коническую поверхность с вершиной в точке $z_0 = \tau$, $r_0 = 0$ и круг с радиусом $r_1 = \gamma\tau$ при $z = 0$. Фактически, этот член определяет часть давления, которая связана с фронтом расширяющейся поверхностной нагрузки. Далее, часть давления, которая определяется членом $Q(r, z, \tau)$ в (34) задается в области, определяемой η функцией Хевисайда при $z > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Снеддон, И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон. - М. : 1955. - 687 с.
- [2] *Cagniard, L.* Reflection and refraction of progressive seismic waves / L.Cagniard. - New York : Mc Graw-Hill, 1962. - 282 p.
- [3] *De Hoop, A. T.* A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems / A. T. de Hoop // Appl. Sci. Res. Sect. B. - 1960. - Vol. - 8, № 4. - P. 349-356.
- [4] *Gakcnheimer, D. C.* Response of an Elastic Halfspace to Expanding Surface Loads / D. C.Gakcnheimer // Transactions of the ASME. - 1970. - Vol. 37. - № 1.
- [4] *Саакян, С. Г.* Решение нестационарной задачи для упругого пространства при наличии в среде движущегося сосредоточенного импульса / С. Г. Саакян // Известия АН Арм ССР. Механика. - 1977. - Т. 30. - № 4. - С. 3-17.
- [5] *Багдоев, А. Г.* Антиплоская задача распространения трещины с произвольной скоростью в анизотропной неоднородной упругой среде / Багдоев А. Г., Саакян С. Г. // Известия РАН. МТТ. - 2002. - № 2. - С. 145-154.
- [6] *Karlssohn, T.* Lamb's problem for on Imhomogeneous Medium with Constant Velocities of Propagation / Karlsson T., Hook J. F. // Bull. Seismol. Soc. Amer. - 1963. - Vol. 53. - № 5. - P. 1007-1022.
- [7] *Газовая динамика* / Рахматулин Х. А. и др. - М. : Высш. шк., 1965. - 722 с.
- [8] *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. - М. : Наука, 1973. - 416 с.
- [9] *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции / Бейтмен Г., Эрдейи А. - М. : Наука, 1966. - 343 с.

S. G. Saakjan

EFFECTIVE METHOD OF SOLVING PROBLEMS OF DYNAMIC THEORY OF ELASTICITY

The Yerevan state university of architecture and building

Abstract. The solution of this problem in image is achieved with this method. However, the reference of images is not always possible, and often represents a serious mathematical difficulty. Kanyar offered a new method of the reference of integral transformation, which is widely applied in dynamic problems of the theory of elasticity. The essence of Kanyar's method is that after return transformations of the image in the spatial variable and a suitable choice of system of co-ordinates the image is led to Laplas time transformation for a known function where the original of solution is found. The method of the integral transformations reference which essence is that after fining Laplas time return transformation on a spatial variable for a known function is given, where the original of the solution is found. The effective decision of an unsolved problem of the waves of pressure extending in liquid compressed elastic semispace at superficial loadings extending with any speed is given an example of the method application.

Keywords: elasticity, pressure, integral conversions, image, waves, liquid, half-space.

Саакян Степан Геворгович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Ереванского государственного университета архитектуры и строительства, г. Ереван

e-mail: StepanSahakyan@gmail.am

Saakjan Stepan Gevorgovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Higher Mathematics, Erevan State University of Architecture and Building, Erevan

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА СИСТЕМ ТРЕХМЕРНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика Решетнева

Аннотация. Для общего случая статически определимой системы уравнений предельного состояния выписываются уравнения характеристических поверхностей. В качестве примера рассмотрим общий случай плоской задачи теории идеальной пластичности.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, предельное состояние, задача Коши, характеристические поверхности, плоская задача.

УДК: 539.375

Постановка задачи. Рассмотрим трехмерные статически определенные уравнения идеальной пластичности [1,18].

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f^1(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) &= 0, \\ f^2(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) &= 0, \\ f^3(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ - компоненты тензора напряжений, f^1, f^2, f^3 - некоторые гладкие функции.

Определим тип системы (1) – (2). Для этого поставим задачу Коши, которая сводится к заданию функций $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ на поверхности $\omega^1(x, y, z) = 0$.

Введем новые переменные по формулам

$$x' = \omega^1(x, y, z), \quad y' = \omega^2(x, y, z), \quad z' = \omega^3(x, y, z), \quad (3)$$

где поверхности ω^2 и ω^3 введены таким образом, чтобы система (3) была разрешима относительно переменных x, y, z .

Вычислим производные по новым переменным и подставим эти соотношения в уравнения (1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial z} + \dots &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial z} + \dots &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial z} + \dots &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь продифференцируем уравнение (2) по переменным x, y, z . Получим

Поступила 02.03.2009

$$\begin{aligned}
 f_1^i \frac{\partial \sigma_x}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_2^i \frac{\partial \sigma_y}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_3^i \frac{\partial \sigma_z}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_4^i \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_5^i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_6^i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + \dots = 0, \\
 f_1^i \frac{\partial \sigma_x}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_2^i \frac{\partial \sigma_y}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_3^i \frac{\partial \sigma_z}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_4^i \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_5^i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_6^i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + \dots = 0, \\
 f_1^i \frac{\partial \sigma_x}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_2^i \frac{\partial \sigma_y}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_3^i \frac{\partial \sigma_z}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_4^i \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_5^i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_6^i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + \dots = 0
 \end{aligned} \quad (5)$$

где $f_1^i = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma_x}$, $f_2^i = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma_y}$, $f_3^i = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma_z}$ и т. д.

Задача Коши для системы (1) - (2) разрешима в том случае если из уравнений (4),(5) мы можем однозначно выразить производные $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x^i}$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial x^i}$, $\frac{\partial \sigma_z}{\partial x^i}$, $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x^i}$, $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x^i}$, $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x^i}$.

Система (1) - (2) в новых переменных имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + \dots = 0, \\
 &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + \dots = 0, \\
 &\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + \dots = 0, \\
 &f_1^i \frac{\partial \sigma_x}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_2^i \frac{\partial \sigma_y}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_3^i \frac{\partial \sigma_z}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_4^i \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_5^i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + f_6^i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial x^i} + \dots = 0, \\
 &f_1^i \frac{\partial \sigma_x}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_2^i \frac{\partial \sigma_y}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_3^i \frac{\partial \sigma_z}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_4^i \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_5^i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + f_6^i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial y^i} + \dots = 0, \\
 &f_1^i \frac{\partial \sigma_x}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_2^i \frac{\partial \sigma_y}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_3^i \frac{\partial \sigma_z}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_4^i \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_5^i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + f_6^i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x^i} \frac{\partial \omega^1}{\partial z^i} + \dots = 0,
 \end{aligned} \right.$$

(i = 1, 2, 3)

где $f_1^i = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma_x}$, $f_2^i = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma_y}$, $f_3^i = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma_z}$ и т. д.

В системе (4) - (5) последние 6 уравнений есть линейная комбинация предыдущих, поэтому их можно исключить. Окончательно получаем: задача Коши не может быть решена, если определитель системы равен нулю

$$\begin{vmatrix}
 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & \frac{\partial \omega^1}{\partial y} & \frac{\partial \omega^1}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \omega^1}{\partial y} & \frac{\partial \omega^1}{\partial z} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \omega^1}{\partial y} & \frac{\partial \omega^1}{\partial z} \\
 f_1^1 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_2^1 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_3^1 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_4^1 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_5^1 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_6^1 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} \\
 f_1^2 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_2^2 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_3^2 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_4^2 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_5^2 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_6^2 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} \\
 f_1^3 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_2^3 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_3^3 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_4^3 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_5^3 \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & f_6^3 \frac{\partial \omega^1}{\partial x}
 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) определяет характеристическую поверхность для системы (1)-(2).

Замечание: Эта задача без труда может быть обобщена для случая $m - s$ квазилинейных дифференциальных уравнений и s конечных соотношений [2,45]

Проиллюстрируем метод на примере системы дифференциальных уравнений, содержащей одно конечное соотношение.

Рассмотрим двумерные уравнения теории пластичности с общим условием текучести

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$f(u, v) = 0, \quad (8)$$

где $u = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2$, $v = \sigma_x - \sigma_y$; σ_x, σ_y, τ - компоненты тензора напряжений, f - некоторая гладкая функция.

Для системы (7) - (8) поставим задачу Коши, которая сводится к заданию функций σ_x, σ_y на некоторой кривой $\omega^1(x, y) = 0$.

Введем новые переменные

$$x' = \omega^1(x, y), \quad y' = \omega^2(x, y), \quad (9)$$

где функция ω^2 выбрана так, чтобы систему (9) можно было разрешить относительно переменных x, y .

Система (7)-(8) в новых переменных имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} = 0, \\ f'_1 \left[2 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) - 2 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + 8\tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) \right] + f'_2 \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) \right] = 0, \\ f'_1 \left[2 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) - 2 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + 8\tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) \right] + f'_2 \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'} \frac{\partial \omega^1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y'} \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right) \right] = 0, \end{cases}$$

где $f'_1 = \frac{\partial f}{\partial u}$, $f'_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$.

Заметим, что два последних уравнения системы линейно зависимые, что позволяет нам отбросить одно из двух последних уравнений системы.

Задача Коши для системы (7)-(8) разрешима в том случае, если из системы можно однозначно выразить производные $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'}$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'}$, $\frac{\partial \tau}{\partial x'}$.

Составляем определитель Δ из коэффициентов системы при производных $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'}$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial x'}$, $\frac{\partial \tau}{\partial x'}$ и приравняем его к нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \omega^1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \omega^1}{\partial y} & \frac{\partial \omega^1}{\partial x} \\ 2f'_1 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & -2f'_1 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} - f'_2 \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} & 8f'_1 \cdot \tau \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$8f'_1 \cdot \tau \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega^1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \omega^1}{\partial y} \right)^2 \cdot (2f'_1 (\sigma_x - \sigma_y) + f'_2) + \left(\frac{\partial \omega^1}{\partial x} \right)^2 \cdot (2f'_1 (\sigma_x - \sigma_y) + f'_2) = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial \omega^1}{\partial x} / \frac{\partial \omega^1}{\partial y} = -\frac{dy}{dx}$, получим уравнения характеристик в традиционной форме

$$-8f'_1 \cdot \tau \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \cdot (2f'_1 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f'_2) - (2f'_1 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f'_2) = 0. \quad (11)$$

Разрешим уравнение (1) относительно $\frac{dy}{dx}$

$$(2f'_1 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f'_2) \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 8f'_1 \cdot \tau \cdot \frac{dy}{dx} - (2f'_1 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f'_2) = 0.$$

Получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8f'_1 \cdot \tau \pm \sqrt{D}}{2(2f'_1 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f'_2)},$$

где

$$D = (-8f'_1 \cdot \tau)^2 + 4(2f'_1 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f'_2)(2f'_1 \cdot (\sigma_x - \sigma_y) + f'_2).$$

Если

$D > 0$ – система гиперболического типа,

$D = 0$ – система параболического типа,

$D < 0$ – система эллиптического типа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 701 с.
- [2] *Дудинова, Н. Д.* Определение типа систем дифференциальных уравнений, содержащих конечные соотношения / Н. Д. Дудинова, С. И. Сенашов // Материалы научной конференции «Герценовские чтения» (16-21 апреля, г. СПб.) : РГПУ. - СПб. , 2007. - 45 с.
- [3] *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики / В. И. Смирнов - М. : Наука, 1981. - Т. 4, ч. 2. - 550 с.

S. I. Senashov, N. D. Dudinova

**THE DEFINITION OF THE THREE-DIMENSIONAL STATICALLY DEFINED
EQUATIONS SYSTEM TYPE OF IDEAL PLASTICITY**

Reshetnev Siberian State Aerospace University

Abstract. Characteristic surfaces equations are given for statically defined limiting state equations system. We shall consider a general case of ideal plasticity theory plane problem.

Keywords: tension, plasticity, limiting state, Cauchy problem, characteristic surfaces, plane problem.

Сенашов Сергей Иванович

доктор физико-математических наук, профессор Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика Решетнева, г. Красноярск

e-mail: senashov@mail.kgtei.ru

Дудинова Наталья Дмитриевна

ассистент кафедры Высшей математики Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика Решетнева, г. Красноярск

e-mail: dnd22@rambler.ru

Senashov Sergey Ivanovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

Dudinova Nataliya Dmitrievna

Assistant, Department of Higher Mathematics, Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

О ПРОГИБАХ ПЛАСТИНЫ УГЛОВОЙ ФОРМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ ПРИ ЖЕСТКОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ

Военный авиационный инженерный университет

Аннотация. Получено точное решение в конечном виде для полуограниченной упругой пластины угловой формы при жестком закреплении ее границ. Приводится анализ компонент тензора напряжений.

Ключевые слова: упругая полуограниченная пластина, угловая форма, прогибы, жесткое закрепление, компоненты тензора деформаций, равномерная нагрузка.

УДК: 539

Решению задач о прогибах упругой пластины, форма которой ограничена и имеет углы, посвящены работы [1-5] и другие.

Пусть упругая пластина имеет полуограниченную угловую форму с углом раствора α (рис. 1). Уравнение для прогибов запишем в виде неоднородного уравнения в частных производных четвертого порядка

$$\Delta^2 W = q, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где Δ —оператор Лапласа, q —равномерная нагрузка на пластину, $W(x, y)$ —ее прогибы, Ω —полуограниченная угловая область, занимаемая пластиной. Обозначим через θ_1 и θ_2 — углы между осью x и гранями пластины, уравнения которых запишем в виде

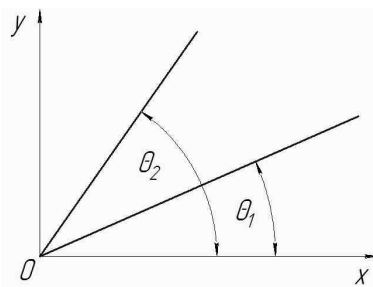


Рис. 1.

$$x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1 = 0, \quad x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2 = 0, \quad \theta_2 - \theta_1 = \alpha. \quad (2)$$

Введем новые независимые переменные (ξ_1, ξ_2) по формулам

Поступила 16.01.2009

$$\xi_1 = -x \sin \theta_1 + y \cos \theta_1, \quad \xi_2 = x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2. \quad (3)$$

В некоторых случаях удобнее эти переменные записывать в векторной форме

$$\xi_i = r n_i, \quad n_i = \left[(-1)^i \sin \theta_i, -(-1)^i \cos \theta_i \right], \quad i = 1, 2, \quad \theta_2 - \theta_1 = \alpha. \quad (4)$$

В дальнейшем будем искать частное точное решение из класса целых полиномов четвертой степени по переменным (ξ_1, ξ_2)

$$W = A_1 \xi_1 + B_1 \xi_2 + A_2 \xi_1^2 + B_2 \xi_1 \xi_2 + C_2 \xi_2^2 + A_3 \xi_1^3 + B_3 \xi_1^2 \xi_2 + C_3 \xi_1 \xi_2^2 + D_3 \xi_2^3 + A_4 \xi_1^4 + B_4 \xi_1^3 \xi_2 + C_4 \xi_1^2 \xi_2^2 + D_4 \xi_1 \xi_2^3 + E_4 \xi_2^4. \quad (5)$$

Для уравнения (1) поставим граничные условия жесткого закрепления краев пластины

$$W|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Здесь n - внутренняя единичная нормаль к Γ . Отметим, что внутри области пластины имеют место неравенства

$$\xi_1 > 0, \quad \xi_2 > 0, \quad (7)$$

а на границе Γ равенства

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0. \quad (8)$$

Зависимость (5) вначале будем упрощать за счет граничных условий. Из первого граничного условия (6) при $\xi_1 = 0$, а затем при $\xi_2 = 0$ получим

$$\text{при } \xi_1 = 0 \Rightarrow B_1 \xi_2 + C_2 \xi_2^2 + D_3 \xi_2^3 + E_4 \xi_2^4 = 0, \quad \forall \xi_2 > 0,$$

$$\text{при } \xi_2 = 0 \Rightarrow A_1 \xi_1 + A_2 \xi_1^2 + A_3 \xi_1^3 + A_4 \xi_1^4 = 0, \quad \forall \xi_1 > 0.$$

Отсюда следует

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = B_1 = C_2 = D_3 = E_4 = 0.$$

Тогда зависимость (5) упрощается

$$W = B_2 \xi_1 \xi_2 + B_3 \xi_1^2 \xi_2 + C_3 \xi_1 \xi_2^2 + B_4 \xi_1^3 \xi_2 + C_4 \xi_1^2 \xi_2^2 + D_4 \xi_1 \xi_2^3. \quad (9)$$

Для подстановки W из (9) во второе граничное условие (6) понадобятся следующие формулы для частных производных

$$\begin{aligned} \text{grad } W(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\partial W}{\partial \xi_1} n_1 + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} n_2, \\ \frac{\partial W(\xi_1, \xi_2)}{\partial n_{\Gamma}} &= n_{\Gamma} \text{grad } W = \frac{\partial W}{\partial \xi_1} (n_1 n_{\Gamma}) + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} (n_2 n_{\Gamma}). \end{aligned} \quad (10)$$

Единичная нормаль n_{Γ} на границе Γ может принимать значения: либо $n_{\Gamma} = n_1$ на крае $\xi_1 = 0$, либо $n_{\Gamma} = n_2$ на крае $\xi_2 = 0$. Поэтому формулы (10) можно представить выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n_1} \Big|_{\xi_1=0} &= \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0} + (n_1 n_2) \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_1=0}, \\ \frac{\partial W}{\partial n_2} \Big|_{\xi_2=0} &= (n_1 n_2) \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=0} + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0}, \quad (n_1 n_2) = -\cos \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь второе граничное условие из (6) при помощи (11) и (9) на гранях клина $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 0$ приводится к двум уравнениям

$$\begin{aligned}
& B_2 [\xi_2 + \xi_1 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + B_3 [2\xi_1 \xi_2 + \xi_1^2 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + C_3 [\xi_2^2 + 2\xi_1 \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + \\
& \quad + B_4 [3\xi_1^2 \xi_2 + \xi_1^3 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + 2C_4 [\xi_1 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + \\
& \quad + D_4 [\xi_2^3 + 3\xi_1 \xi_2^2 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} = B_2 \xi_2 + C_3 \xi_2^2 + D_4 \xi_2^3 = 0, \quad \forall \xi_2 \in [0, \infty), \\
& B_2 [\xi_1 + \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + B_3 [\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + C_3 [2\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + \\
& \quad + B_4 [\xi_1^3 + 3\xi_1^2 \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + 2C_4 [\xi_1^2 \xi_2 + \xi_1 \xi_2^2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + \\
& \quad + D_4 [3\xi_1 \xi_2^2 + \xi_2^3 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} = B_2 \xi_1 + B_3 \xi_1^2 + B_4 \xi_1^3 = 0, \quad \forall \xi_1 \in [0, \infty).
\end{aligned} \tag{12}$$

Равенства (12) будут выполнены при условиях

$$B_2 = B_3 = B_4 = C_3 = D_4 = 0. \tag{13}$$

С учетом (13) зависимость (9) для прогибов W принимает вид

$$W = C_4 \xi_1^2 \xi_2^2. \tag{14}$$

Итак, если прогибы пластины W представить зависимостью (14), то граничные условия жесткого закрепления краев (6) будут выполнены. Постоянную C_4 найдем, подставляя (14) в уравнение равновесия (1). Для этого вначале оператор Лапласа выразим через оператор $grad$:

$$\Delta W = grad(grad W). \tag{15}$$

Подставляя $grad W$ из (10) в (15), найдем

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} n_1 + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} n_2 \right) n_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} n_1 + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} n_2 \right) n_2 = \\
&= \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} (n_1 n_2) + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

С помощью данного выражения будем иметь

$$\Delta W = C_4 [2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 8\xi_1 \xi_2 (n_1 n_2)]. \tag{17}$$

Если в (16) формально заменить W на ΔW , для которого получено выражение (17), то уравнение (1) примет вид

$$8C_4 [1 + 2(n_1 n_2)^2] = q_0, \quad C_4 = \frac{q_0}{8(1 + 2 \cos^2 \alpha)}.$$

Отсюда приходим к решению задачи (1), (6)

$$W = \frac{q_0 \xi_1^2 \xi_2^2}{8(1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \tag{18}$$

Для анализа границ применимости полученного решения перейдем к полярной системе координат (r, φ) . Положим $\theta_1 = -\alpha/2$, $\theta_2 = \alpha/2$ т. е. ось симметрии будет соответствовать значению $\varphi = 0$, где $\varphi \in [-\alpha/2, \alpha/2]$. Проекции нормалей n_1, n_2 будут выражаться через угол раствора пластины α по формулам

$$n_1 = \left(\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} \right), \quad n_2 = \left(\sin \frac{\alpha}{2}, -\cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

В полярной системе переменные (ξ_1, ξ_2) представляются зависимостями

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x \sin \frac{\alpha}{2} + y \cos \frac{\alpha}{2} = r \sin \left(\varphi + \frac{\alpha}{2} \right), \\
\xi_2 &= x \sin \frac{\alpha}{2} - y \cos \frac{\alpha}{2} = r \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Так как в области клина $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$, т. е. при $-\frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \frac{\alpha}{2}$, должны выполняться неравенства

$$\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) \geq 0, \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right) \geq 0, \quad 0 \leq \varphi + \frac{\alpha}{2} \leq \pi, \quad 0 \leq \frac{\alpha}{2} - \varphi \leq \pi,$$

то отсюда имеем $0 \leq \alpha \leq \pi$. Однако при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ преобразование $(x, y) \rightarrow (\xi_1, \xi_2)$ становится вырожденным, поэтому для угла раствора пластины в данном рассмотрении приходим к ограничению $0 < \alpha < \pi$. Подставляя (ξ_1, ξ_2) из (19) в (18), получим решение задачи (1), (6) в цилиндрических координатах

$$W = \frac{q_0 r^4 \sin^2\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{8(1 + 2\cos^2\alpha)}, \quad 0 < \alpha < \pi. \quad (20)$$

Максимальный прогиб пластины находится на ее биссектрисе при $\varphi = 0$

$$\max W = W|_{\varphi=0} = \frac{q_0 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} r^4 \quad 0 < \alpha < \pi. \quad (21)$$

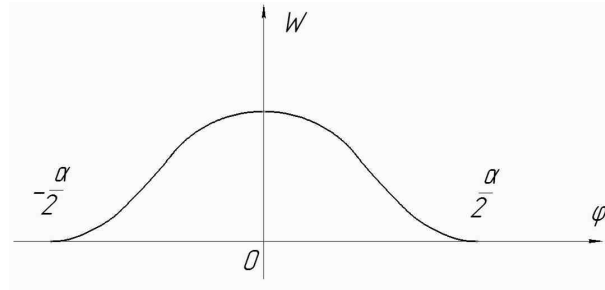


Рис. 2.

При удалении от вершины угла пластины ее прогиб быстро возрастает пропорционально четвертой степени радиуса r^4 . На дуге радиуса $r = r_0$ профиль прогиба показан на рис.2.

По прогибам пластины $W(x, y)$ из (18) можно вычислить компоненты тензора деформаций [6]

$$\begin{aligned} e_{xx} &= -zW_{xx} = \frac{q_0(\cos\alpha - 1)}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} z (\xi_1^2 + \xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2), \\ e_{yy} &= -zW_{yy} = \frac{q_0(1 + \cos\alpha)}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} z (4\xi_1\xi_2 - \xi_1^2 - \xi_2^2), \\ e_{xy} &= -zW_{xy} = \frac{q_0 \sin\alpha}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} z (\xi_1^2 - \xi_2^2), \end{aligned} \quad (22)$$

где координата z отсчитывается от срединной поверхности пластины в направлении, противоположном по отношению к направлению равномерной нагрузки q_0 . Компоненты тензора напряжений выражаются через деформации (22) по закону Гука.

На оси симметрии угловой пластины при $\xi_1 = \xi_2 = x \sin \frac{\alpha}{2}$ для деформаций из (22) будем иметь значения

$$e_{xx} = -\frac{3q_0(1 - \cos\alpha)^2}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z, \quad e_{yy} = \frac{q_0 \sin^2\alpha}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z, \quad e_{xy} = 0. \quad (23)$$

На грани пластины ($\xi_1 = 0, \xi_2 = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$) для деформаций из (22) найдем зависимости

$$\begin{aligned} e_{xx} &= -\frac{q_0(1 - \cos\alpha)^2}{4(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z, \quad e_{yy} = -\frac{q_0 \sin^2\alpha}{4(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z, \\ e_{xy} &= \frac{q_0 \sin\alpha(1 - \cos\alpha)}{4(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z. \end{aligned} \quad (24)$$

На другой грани пластины ($\xi_2 = 0, \xi_1 = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$) деформации e_{xx}, e_{yy} останутся как и в (24), а e_{xy} изменит знак на противоположный.

Заключение.

Из полученного точного решения (18) можно вычислить все компоненты тензоров деформаций и напряжений в любой точке упругой пластины. В частности, из формул (22) – (24) видно, что при удалении от угла пластины деформации и напряжения возрастают пропорционально квадрату этого расстояния.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Алейников, С. М.* Пространственная контактная задача изгиба пластин на упругом неклассическом основании / С. М. Алейников, М. Д. Гончаров // Труды 16 международной конференции по теории оболочек и пластин. - 1994. - С. 8-13.
- [2] *Журавлев, А. А.* Устойчивость ортотропной треугольной пластинки / А. А. Журавлев // Известия вузов. Строительство и архитектура. - 1985. - № 11. - С. 47-51.
- [3] *Недорезов, П. Ф.* Применение В-сплайнов в задаче определения НДС при установившихся колебаниях прямоугольной пластины из вязкоупругого материала / П. Ф. Недорезов. - Саратов : Саратовский государственный университет. - 1997. - С. 12-21.
- [4] *Никифоров, С. Н.* Теория упругости и пластичности / С. Н. Никифоров. - М. : Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1955. - 284 с.
- [5] *Gorman, D. J.* Accurate free vibration analysis of right triangular plates with one free edge / D. J. Gorman // Journal of sound and vibration. - 1989. - № 131. - P. 115-125.
- [6] *Hampshire, J.* Three mode triangular bending elements with one degree of freedom per node / J. Hampshire, B. Tooping, H. Chang // Eng. Comput. - 1992. - № 9. - P. 49-62.

N. A. Chernyshov

ABOUT ANGLE-SHAPED SLAB DEFLECTIONS UNDER THE UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD INFLUENCE AT RIGID FIXING

Military Aviation Engineering University

Abstract. The exact final solution for semi-restricted elastic angle-shaped slab at rigid fixing of its bounds is achieved. Stress tensor components analysis is given.

Keywords: elastic semi-restricted slab, angled shape, deflections, rigid fixing, stress tensor components, uniformly distributed load.

Чернышов Николай Александрович

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики Военного авиационного инженерного университета, г. Воронеж

e-mail: chernyshovad@mail.ru

Chernyshov Nikolay Aleksandrovich

Ph.D., Department of Higher Mathematics, Military Aviation Engineering University, Voronezh

*Бог поместил нас в лабиринт
чтобы двигаться вперед
надо вовремя свернуть*

Д. Д. Ивлев

ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ. 2. ДО И ПОСЛЕ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Статья содержит воспоминания автора до начала осени 1967 года.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, предельное состояние.

УДК: 539.374

В ноябре 1959 года я приступил к работе в Воронежском университете. Я работал во времена великого ректора ВГУ Бориса Ивановича Михантьева. Проректором по учебной работе был Петр Михайлович Гапонов, по научной – Владимир Иванович Соболев. Это была замечательная команда. Бытовые вопросы были решены, начались трудовые будни вузовского работника: лекции, семинары, курсовые и дипломные работы, аспирантура и т. д.

Прошел почти год после защиты диссертации, а утверждения не было. Сказано: нет ничего тайного, что бы не стало явным, стало известно, что «черным оппонентом» по моей работе является С.А. Христианович. В сентябре 1960 года я решился позвонить Христиановичу, и спросил, чем я могу быть ему полезен, вразумительного ответа не последовало. Я сказал САХу, что собираюсь побывать в Новосибирске и навестить его, САХ не возражал.

В Новосибирск из Воронежа я отправился поездом Харьков – Красноярск. Я приобрел билет в купейный вагон на нижнюю полку. Когда вошел в купе, то обнаружил, что ни о какой нижней полке и речи быть не может. На горшках сидели три карапуза, полки сплошь были заставлены мешками с луком и прочей огородной снедью, которая следовала из Солнечной Украины в Сибирь. Мне нашлось что-то полполки на верхней полке. При всем желании больше выделить было невозможно. Но трехдневное путешествие прошло, в общем, даже приятно, спутники были людьми доброжелательными, малыши некапризными, обстановка сложилась вполне семейная. Поезд тащился не спеша, останавливался на каждом полустанке. Я с интересом наблюдал российские просторы от Воронежа до Новосибирска. На меня произвела впечатление мощь Транссибирской магистрали, на которую мы попали после Омска. Здесь наш поезд уже понесся совсем по-другому, буквально через каждую минуту мимо пролетали встречные составы.

Поезд прибыл в Новосибирск, я расстался со своими спутниками и ступил на перрон Новосибирского ж/д вокзала. Обрато я летел до Москвы на ТУ-104 и обозревал просторы с высоты 11000 метров.

В Академгородке я встретился с Христиановичем. Христианович принял меня за оградой своего коттеджа, разговаривали мы стоя. Был погожий сентябрьский день, САХ был в рубашке. Я спросил, какого мнения он о моей работе, он сказал, что все это не то, заниматься пластичностью надо так: взять дробь, насыпать в воронку и посмотреть, как она поведет. Вот это и будет пластичность. Я передаю суть разговора, про дробь – 100%. Я согласился, что это интересный подход и спросил на какой отзыв могу надеяться, на что САХ, по существу, ничего не ответил. На том и расстались. Насколько я понимаю, мой визит никакого влияния на САХа не оказал, отзыв он прислал в конце декабря, по-видимому, после неоднократных напоминаний ВАК, в январе 1961 года я был утвержден. Через полгода я был утвержден в звании профессора.

Что касается дроби. САХ, по-видимому, считал, что дробинки, соприкасаясь, испытывают трение и тем самым приводят к эффекту предельного состояния. Дробь – дискретные частицы, предельный переход от дискретных моделей к сплошным средам процедура сложная. Пока толпа недостаточно уплотнена, личность сохраняет какую-то степень свободы, наиболее решительные могут работать локтями и продвигаться, расталкивая соседей. Но если толпа достаточно стеснена, уплотнена, то роль личности сводится к нулю, и толпа двигается как сплошная среда. Написать определяющие соотношения для сплошной среды проще, чем для дискретной.

Христианович уехал из Сибири, А.Ю. Ишлинский принял его на работу в ИПМ РАН. После упомянутого разговора я никогда больше не общался с САХом. Я слышал, естественно от других лиц, что в ИПМ САХ обещал «навести порядок в пластичности». Желание, конечно, похвальное, но до САХа в теории пластичности наводили и навели порядок такие гениальные ученые как Сен-Венан, Прандтль, Мизес и их хорошо известные последователи. У САХа есть работа по теории идеальной пластичности, в которой он занимался распространением пластической зоны от некругового отверстия. После результата Прандтля о распространении пластической зоны от кругового отверстия здесь принципиальных трудностей не возникает, тем не менее эту работу надо было уметь сделать.

В ИПМ САХ действительно начал активно заниматься теорией пластичности. Дробью он не занимался, опубликовал свои гипотезы и т. д. В конце концов, он определил свое отношение к пластичности ¹: *пластическое течение может наступать только через полную пластичность. . . Течение при неполной пластичности является в некотором смысле исключительным. . .* В моей работе, целиком посвященной состоянию полной пластичности, которую САХ держал больше года, все это сказано и не только сказано, но и показано – почему это так.

В конце 60-х, первой половине 70-х я был председателем экспертной комиссии по механике по премии Ленинского Комсомола при ЦК ВЛКСМ. Работы Г.И. Быковцева были выдвинуты на премию. Все знали, что я и Г.И. связаны научной работой, эксперт был назначен без моего ведома. Им оказался Христианович. От САХа я не ждал ничего хорошего, отзыв от него к заседанию экспертной комиссии не поступил. К моему удивлению, поступивший отзыв содержал прекрасную оценку работ Г.И. Если бы отзыв САХа поступил вовремя, судьба премии, возможно, была бы иной.

В свое время Алексей Антонович открыл огонь из Орудий Главного Калибра по моей диссертации. Когда впоследствии он стал писать свои замечательные работы по течению металлов по жестким поверхностям, он принял $\sigma_1 = \sigma_2$ в плоскости течения и $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$. Я сказал своему сокурснику, сотруднику А.А., в дурном сне не допускавшему, что А.А. в чем-то может быть неправ: видишь, как дошло до дела, то А.А. пришлось принять условие полной пластичности, на что мне ответили: это не то. А что тогда то?

В Воронеже я пробыл сравнительно недолго, около шести с половиной лет. Во второй половине моего пребывания на одной из конференций в МГУ я познакомился с К.Ф. Черным

¹Инженерный журнал. МГТТ, 1967. №4

и пригласил его в Воронеж. Черных приехал где-то в начале июня, была теплая, прекрасная воронежская погода. Вокруг Воронежа по берегам трех рек – Воронежа, Усманки, Дона чудесные места. Мы повезли К.Ф. на Усманку, где Усманка впадает в Воронеж, искупались, развели костер.

В те времена я был вхож в Питере на Фрунзе 9. В.В. Новожилов встретил меня в приподнято-возбужденном состоянии: Клим рассказывал нам про Воронеж, далее следовала цитата из Черныха. У В.В. было богатое художественное воображение. Судя по тому, с каким подъемом Новожилов смаковал слова Черныха, я понял, что круги разойдутся широко. В Воронеже к нам приезжал и уезжал от нас народ, но никто таких цветных пузырей не надувал, что-то во всем этом было не то. При мне больше Черныха за город не вывозили. Да и приезжал ли он при мне? После моего отъезда Черных неоднократно появлялся в Воронеже, Г.И. Быковцев был гостеприимным, широкой души человеком. В один из моих приездов в Воронеж я обнаружил там Черныха, машины были наготове и мы поехали в низовья Воронежа. Я был там впервые, судя по всему мои спутники хорошо освоили эти места. Черных надел ласты и маску, стал нырять около берега и выбрасывать раков. Набросал он больше половины ведра, которые тут же были сварены. Чем это все закончилось см. в ².

А.Н. Спорыхин подал докторскую диссертацию. В основе диссертации лежали результаты Г.И. Быковцева о возможности исследования динамического процесса потери устойчивости сведением к квазистатическому. В то время этими вопросами занимались активно, А.Н. решил много интересных задач, написал достойную работу, диссертация защищалась в Киеве у А.Н. Гузя. Голосование прошло единогласно. Черным оппонентом по диссертации был К.Ф. Черных. Один из хорошо информированных людей сказал мне: если бы ты знал, какой отзыв написал Черных. Отзыв, разумеется, мне никто не показал. ВАК принял решение направить диссертацию на дополнительное рассмотрение в тот же Совет. Положение стало напряженным, на Александра Николаевича Гузя оказывалось прямое давление. К чести А.Н. Гузя он не дрогнул и диссертация снова прошла единогласно. На этом не успокоились и диссертация была направлена в Питер, в университет, в Совет, членом которого был Черных. Я не поехал в Питер, поехал Г.И. Быковцев. Голосование было 17 – за, 3 – против. Когда Быковцев вернулся, он сказал мне: знаете, Д.Д., что сказал мне Черных: Гена, а я и не знал, что Спорыхин от тебя.

Анатолий Николаевич Спорыхин внес большой вклад в развитие воронежской школы механики, среди его учеников доктора и кандидаты наук, он – заслуженный деятель науки РФ, продолжает успешно трудиться в Воронежском госуниверситете. Сейчас в Воронеже порядка пятнадцати докторов-профессоров по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела, ситуация стабильная и никто не в состоянии ее опрокинуть.

Через некоторое время после моей защиты докторскую диссертацию в Совет мехмата МГУ подал Виктор Степанович Ленский. Его диссертация была посвящена экспериментальному доказательству справедливости постулата изотропии А.А. Ильюшина. Я уже писал³ о той заинтересованности, которую проявлял Л.И. Седов вокруг раздуваемой им дискуссии по постулату изотропии. Вторая заметка за моей подписью «О работах В.С. Ленского. . . » была, по существу, сделана Седовым. Я проявил слабость под давлением Седова. Эту заметку в собрание своих трудов я не включил. У меня начало появляться ощущение, что Седов переходит черту. Перед защитой Ленского Седов предпринял на меня мощное давление на все лады, чтобы я выступил на защите. Мне очень не хотелось этого делать. Что я мог сказать? Что работа экспериментальная, программа экспериментов, вся идейная сторона вопроса полностью определена А.А. Ильюшиным, что, по существу, любой квалифицированный техник мог эти работы выполнить с таким же успехом. Что никаких уравнений, никаких решений

²Вестник ЧГПУ. Серия «Механика предельного состояния», 2008. №1(4)

³Вестник ЧГПУ. Серия «Механика предельного состояния», 2007. №1

новых задач нет. Что влияние третьего инварианта на траекторию нагружения не выявлено и т. п.

Но я хорошо представлял, что работа проходит на фоне «выдающихся, принципиальных достижений» в теории пластичности, что В.С. – уважаемый человек на мехмате и его не остановить. Да мне и в голову не приходило останавливать Ленского. Зачем?

Превозмогая себя, я подошел к доске и что-то сказал в духе вышесказанного. Я чувствовал, ощущал, что несу большие потери. У меня стали крепнуть мысли, что, добиваясь моего выступления, Седов имел в виду не только Ленского.

В.С. Ленский, разумеется, защитился успешно. Я не знаю развития им своих исследований после защиты. Единственным продолжателем идей А.А. Ильюшина в этой области, теоретиком и экспериментатором является мой друг профессор Владимир Георгиевич Зубчанинов, который в Твери проводит интересные и важные эксперименты по сложному нагружению металлов.

Чтобы закончить тему. Где-то в феврале 1971 года я получил из Тулы персональное красиво отпечатанное приглашение принять участие в обсуждении проблем современного состояния пластичности. Я узнал, что обсуждение предполагается провести в узком кругу приглашенных лиц и оно координируется с 60-летием А.А. Ильюшина. В здании Тульского политехнического института я встретил Ю.Н. Работнова, который сказал: «Хорошо, что вы приехали, а то мы с Леонидом Ивановичем уже начали волноваться». По-видимому, оставаться наедине с Алексеем Антоновичем Работнову и Седову казалось неудобным.

В заседаниях принимали участие А.А. Ильюшин, В.С. Ленский, А.М. Жуков, Л.А. Толоконников, Л.И. Седов, Ю.Н. Работнов и я. В амфитеатральной аудитории присутствовали студенты и преподаватели ТГПИ. Заседания прошли очень спокойно, никаких споров не было, каждый изложил свою точку зрения. Говоря о сложном нагружении, я сказал, что когда процессы нагружения разделены на простые и сложные, то представьте тело с концентратором напряжений. Ясно, что вблизи концентратора нагружение сложное, а на удалении оно может быть простым. Как найти границу раздела между простым и сложным нагружениями?

Во время заседаний привлекал к себе внимание человек со звездой Героя соцтруда, которого обсуждение не интересовало, но ему явно что-то было нужно. Оказалось, что это М.Т. Калашников, конструктор знаменитого АК. Он решил стать доктором технических наук без защиты и получить поддержку приезжих академиков. Была организована экскурсия в прекрасный музей оружия при ТГПИ, а затем стрельба в тире из всех видов оружия, разработанных в Ижевском КБ, ГК которого являлся и является М.Т. Калашников. Разумеется, поддержку он получил.

После завершения официальной части дома у Л.А. Толоконникова на Циолковского 1 состоялся обед, на котором, помимо хозяина дома, присутствовали А.А. Ильюшин, Л.И. Седов, Ю.Н. Работнов, В.С. Ленский, А.М. Жуков и я. Сначала пили за здоровье А.А., потом пошли по кругу, выпили и за мое здоровье.

В Москву мы возвращались вдвоем с В.С. Ленским на вечерней электричке, в вагоне народу было мало, мы сидели напротив друг друга, говорили что-то по-мелочи. Я вышел на Курском, В.С. поехал до Каланчевки. Больше судьба меня с В.С. Ленским не сводила.

В 1962 году вышла книга Л.И. Седова «Введение в механику сплошной среды». На странице 249 сказано: *вектор полного перемещения каждой точки малой частицы тела можно представить как сумму*

$$\omega = \omega^e + \omega^p, \quad (1)$$

где ω^p – вектор перемещения, соответствующий пластическому течению после мысленной разгрузки, а ω^e – вектор перемещения, отвечающий упругому процессу. Далее идут определения

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j^p + \nabla_j v_i^p) dt, \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} (\nabla_i \nu_j^e + \nabla_j \nu_i^e) dt, \quad (3)$$

где ν_i^e, ν_i^p – компоненты скорости перемещения.

Я обратил внимание Л.И., что (1) не имеет места. Из (1), (2), (3) следует, что приращения деформаций $d\varepsilon_{ij}^p, d\varepsilon_{ij}^e$ по отдельности удовлетворяют условиям совместности, а это не так. Имеет место

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p,$$

где условиям совместности удовлетворяют приращения полной деформации $d\varepsilon_{ij}$, а $d\varepsilon_{ij}^e, d\varepsilon_{ij}^p$ условиям совместности не удовлетворяют. Прав я или нет, дело не в этом. Реакция Седова была потрясающей. Крик был такой, что трудно подобрать сравнения. Седов кричал («вы» у Седова в моих ушах звучало как «ви»): «ви неграмотный человек», «ви ничего не понимаете», «ви ильющенец». Далее он позволил себе в мой адрес оскорбительное высказывание, которое я здесь приводить не буду. Кстати, «ви ильющенец» я от Седова слышал не раз.

Я подумал, что кому надо – разберутся, а высказывания Седова отнес за счет его, как мне тогда казалось, неконтролируемого эмоционального всплеска. В этом я ошибся. Я убедился впоследствии, что Л.И. Седов отлично контролировал все свои эмоции, какими бы стихийными они не казались. Реакцию Седова следовало бы осмыслить более серьезно, в определенной, явной степени он сформулировал свое отношение ко мне.

Где-то весной 1967 года пронесся слух, что Г.П. Черепанов на одном из семинаров заявил, что результаты по теории квазихрупкого разрушения получены Ирвиным, и что результаты Г.И. Баренблатта, по существу, сводятся к результатам Ирвина. Это было сенсацией, новость я узнал, по-видимому, от Л. В. Ершова, который тогда работал в ИПМ. Я встретился с Г.П. Черепановым и из его слов узнал, что Ирвин установил, что в конце трещины имеется интегрируемая особенность для напряжений. Для меня этого было вполне достаточно, чтобы понять, что введенный Ирвиним коэффициент интенсивности напряжений является единственно возможным переменным параметром и ничего другого в рамках принятых предположений получить невозможно. Я зашел в кабинет к А.Ю. Ишлинскому (дело было в здании на Ленинградском проспекте 7) и сказал: А.Ю., оказывается у нашего народа неверное представление о состоянии теории квазихрупкого разрушения, нужен обзор результатов в этой области. А.Ю. мне сказал: вот вы и напишете. Я ответил, что в его институте много специалистов, которые могут написать обзор, что я вузовский работник и не располагаю тем временем, которым располагают сотрудники его института, на что Ишлинский ответил – напишите вы. Тогда я сказал: я не занимался квазихрупким разрушением и народу будет непонятно почему я взялся за обзор, я могу согласиться при условии, что в преамбуле будет сказано: обзор написан по предложению А.Ю. Ишлинского. А.Ю. согласился. Я собрал материал и за летний отпуск написал обзор.

Я разложил материалы по хронологии, и передо мной начала разворачиваться захватывающая картина развития теории квазихрупкого разрушения. Я почувствовал себя как, наверное, Петр I, когда он впервые попал в Амстердам: уютные добротные дома, все в цветах, чистенькие опрятные фрау, мощенные мостовые, породистые лошади и прекрасные экипажи, на верфях не по дням, а по часам растут корабли, в порту множество кораблей, кушцы, товары со всего света, вечером степенные бюргеры курят трубки, пьют шнапс и пиво и танцуют с рубенсовскими красавицами. Поневоле захочешь прорубить окно в Европу.

Знакомясь с работами Ирвина, Орована, Вильямса, Вестергарда, Бюкнера, Сандерса и др., я был поражен красотой и законченностью теории квазихрупкого разрушения, мне было жаль, что я не знал этого раньше.

Обзор⁴ я сдал в ПМТФ в конце августа, вручил его лично Н.А. Талицких; он обещал не задерживать и опубликовать в № 6 1967 года, что он и сделал.

Николай Адрианович был колоритной фигурой. После его необыкновенных приключений за границей после революции, он вернулся на Родину. Г.К. Михайлов сказал мне, что Адрианыч учился в МГУ вместе с А.Н. Несмеяновым, будущим президентом АН СССР, а тогда обоих исключили из МГУ «за происхождение». Адрианыч говорил мне, что он закончил МГУ вместе с М.В. Келдышем, по видимому, это было во время его вторичного пребывания в МГУ. Адрианыч был старше Келдыша на 13 лет. В году 1932-ом группа отцов-основателей В.В. Голубев, Л.С. Лейбензон, А.И. Лурье, А.И. Некрасов и другие корифеи решили организовать журнал «Прикладная математика и механика». Для редакции журнала была выделена комната на Арбате в Кривоколенном переулке. Я был у Н.А. в Кривоколенном. Адрианыч говорил мне, что журнал ПММ зародился у него на квартире. Насколько я понимаю, редакции выделили комнату, а Адрианыч въехал туда. С тех пор Н.А. редактировал и держал в руках все журналы по механике: ПММ, МТТ, Инженерный сборник, ПМТФ и др. Естественно, весь народ шел к нему. Келдыш был занятой человек и не снисходил до Н.А., но когда М.А. Лаврентьев приезжал из Сибири, Адрианыч собирал свои папки, садился в свою Волгу и отправлялся к Лаврентьеву с докладом.

Николай Адрианович ученой степени не имел, числился на должности мнс. Когда Алексей Антонович, будучи директором ИМЭХ АН, погорячился и издал приказ: мнс Талицких Н.А. от работы в ИМЭХ освободить, то Н.А. мгновенно перевелся в ИМАШ и увел все журналы с собой на Малый Харитоновский 4. ИМЭХ оказался без журналов. Естественно, когда был создан ИПМ, Н.А. с журналами вернулся обратно в свой кабинет.

Где-то в ноябре 1967 года я зашел в редакцию и увидел на столе у Лены Буновой последнюю корректуру обзора. Тоненьким-тоненьким карандашиком, ниточкой слова: «обзор написан по предложению А.Ю. Ишлинского» были вычеркнуты. Я спросил: Лена, а что это такое?. Лена ответила: это Николай Адрианович вычеркнул. Я сказал: это недоразумение, А. Ю. заказал мне обзор, я эту работу выполнил хорошо, я автор, я несу ответственность за свои слова, так что это надо сохранить. Лена спросила: Дюис, вы так считаете?, я ответил: да, я так считаю. Лена взяла ластик и стерла ниточку. Через два-три дня в редакцию пришли чистые листы, я застал Лену в слезах. Она сказала: Дюис, вы меня так подвели, я не знала, что это так важно, Николай Адрианович так кричал, так кричал на меня. Я сказал: Лена, вы поступили правильно, а Н.А. не прав, он не имел права кричать на вас, это моя статья и он должен был согласовать со мной эту правку, он этого не сделал и поступил неправильно и несправедливо. Я не сомневаюсь, когда он остынет и придет в себя, он извинится перед вами. Я пошел в кабинет к Адрианычу. Как всегда, он сидел за бумагами, он посмотрел на меня, я посмотрел на него. Он не сказал ни слова, я не сказал ни слова. А о чем было говорить?, все было понятно без слов. Никогда мы к этой теме не возвращались.

В сентябре 1967 года меня пригласили на совещание у М.В. Келдыша по вопросу, что там у нас с разрушением. Был погожий сентябрьский день, совещание проходило в кабинете М.Д. Миллионщикова, на совещании присутствовали: М.В. Келдыш, Н.И. Мухелишвили, Л.И. Седов, А.Ю. Ишлинский, А.И. Лурье, Г.Г. Черный, А.Л. Гольденвейзер, Г.И. Баренблатт, Р.А. Салганик и я. Слово предоставили Баренблатту, он рассказал о своем подходе, затем выступили Л.И. Седов и А.Ю. Ишлинский. По поведению Седова и Ишлинского сразу было видно, кто здесь хозяин. Я никогда не видел, чтобы Седов и Ишлинский так себя вели. Седов уже понимал, что все сделано Ирвиным, но дальше этого он еще не продвинулся. На все лады чрезвычайно эмоционально он повторял одну и ту же фразу, что все это известно, что все это сделано, что у Г.И. ничего нового нет, одни ошибки. Больше ничего он сказать не мог.

⁴Обзор в настоящее время стал библиографической редкостью. Обзор размещен по адресу <http://vestnik.chgpu.edu.ru/obzor.pdf>

Ишлинский тоже далеко не владел материалом, но повторял, что так, как делает Г.И., делать можно и что это проходит, а что касается приоритетов, то в этом еще надо тщательно разобраться. Слово предоставили мне. Я кратко напомнил положения энергетического подхода Гриффитса, а потом объяснил суть силового подхода Ирвина, который еще в 1957 году показал эквивалентность энергетического и силового подходов, разобрался в асимптотике напряженного состояния, ввел понятие коэффициента интенсивности напряжений, единственно возможного переменного параметра. Я сказал, что достижение коэффициентом интенсивности напряжений значения константы вязкости разрушения, определяемой экспериментально, это и есть, согласно Ирвину, начало квазихрупкого разрушения и что все это исчерпывает суть проблемы, что в рамках принятых предложений Ирвин решил проблему исчерпывающим образом и никаких новых условий разрушения подходы Г.И. Баренблатта не содержат и содержать не могут. Я показал М.В. Келдышу американские справочники, в которых металлы маркируются по коэффициенту вязкости разрушения.

Никаких вопросов ко мне не последовало, взять слово никто не пожелал, прения не состоялось. М.В. Келдыш схватил суть дела и сказал в адрес Г.И. Баренблатта: так делать можно, но не нужно. Л.И. Седов мне сказал: ваше выступление перед Келдышем может иметь для вас большое значение, никакого значения для меня мое выступление не имело.

После совещания я сразу поехал домой к Николаю Адриановичу. Он тогда жил на Ленинградском проспекте у Сокола, на правой стороне, если ехать из Москвы, около метро во дворе направо в кирпичной башне. У него была однокомнатная квартира на втором этаже. Стол был завален бумагами, прямо напротив кресла стоял телевизор, который Н.А. переключал, не вставая. Зимой Н.А. вывешивал за окно на веревочке кусок сала, который клевали синички. Воробьев Н.А. не жаловал.

Н.А. ждал меня с нетерпением. Я стал рассказывать как происходило совещание, Н.А. с недоверием поглядывал на меня, раздался телефонный звонок, звонил А.Л. Гольденвейзер. Что он говорил, я, разумеется, не слышал, но, судя по реакции Н.А., Гольденвейзер подтвердил все, что я говорил.

На другой день мне нужно было в редакцию, я приехал довольно рано, Адрианыч был на месте. Только я сел напротив него, как вошел Л.И. Седов. Он был небрит, в старом костюме и рубашке. Ему было не до парада. Он весь светился и, я бы сказал, раздувался, он был очень, очень доволен, на верху блаженства, можно сказать, счастлив.

Много ли нужно человеку для счастья?

D. D. Ivlev

FROM MEMOIRS. 2. BEFORE AND AFTER*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

Abstract. The article contains the author's memories prior to the fall of 1967.

Keywords: tension, deformation, elasticity, plasticity, limiting state

Ивлев Дюис Данилович

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

e-mail: ivlev21@mail.ru

Ivlev Dyuis Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

К 70-ЛЕТИЮ МАТЧЕНКО НИКОЛАЯ МИХАЙЛОВИЧА



Талантливому российскому ученому и инженеру Матченко Николаю Михайловичу, доктору физико-математических наук, профессору исполнилось 70 лет. Его научные работы связаны с теорией упругости дилатирующих материалов, аффинным моделированием упругих, упруго-пластических и идеально-пластических анизотропных материалов. По существу он является родоначальником аффинного моделирования упруго-пластических и идеально-пластических анизотропных материалов. В его работах сочетается исключительное понимание механических процессов и использование адекватного математического аппарата.

Матченко Николай Михайлович закончил в 1962 году Тульский горный институт по специальности "промышленное и гражданское строительство". После года работы в Липовецком строительном управлении Приморского края Николай Михайлович поступил в аспирантуру к выдающемуся российскому ученому Л.А. Толоконникову, и после защиты в 1967 г. кандидатской диссертации работал у него на различных кафедрах в течение многих лет. После защиты в 1975 г. докторской диссертации Николай Михайлович работает заведующим кафедрой "Теоретической механик", а затем кафедрой "Расчета и проектирования строительных

конструкций"и деканом строительного факультета Тульского государственного университета. Николай Михайлович являлся председателем диссертационного совета ТулГУ по специальности 01.02.04 "Механика деформируемого твердого тела". В настоящее время Николай Михайлович - профессор кафедры "Математического моделирования" ТулГУ, член диссертационного совета ТулГУ и заместитель председателя Ученого совета Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева (г. Чебоксары) по специальности 01.02.04 "Механика деформируемого твердого тела".

Николай Михайлович избран членом Российского Комитета по теоретической и прикладной механике РАН.

Николай Михайлович автор и соавтор более 100 научных работ и 2 монографий. Под его руководством защищено 14 кандидатских диссертаций. Пятеро его учеников стали докторами наук.

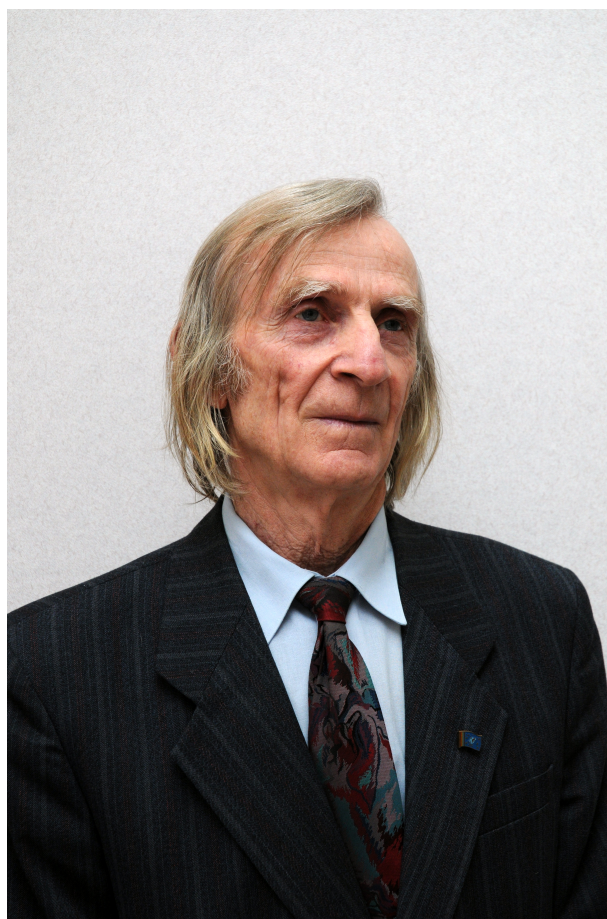
Блестящие результаты Н.М. Матченко в области аффинного моделирования упруго-пластических и идеально-пластичных анизотропных материалов открывают широкие научные перспективы перед этим направлением механики деформируемого твердого тела.

Николай Михайлович сочетает научную работу с активной инженерной деятельностью, являясь Генеральным директором крупного экспертного центра в области промышленной безопасности - НП "Приокский экспертно консультационный центр".

Николай Михайлович пользуется заслуженным авторитетом среди широкой научной общественности России.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Николая Михайловича Матченко с семидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих творческих успехов.

К 70-ЛЕТИЮ СПОРЫХИНА АНАТОЛИЯ НИКОЛАЕВИЧА



Исполнилось 70 лет со дня рождения Анатолия Николаевича Спорыхина, доктора физико-математических наук, профессора, известного талантливого ученого в области механики деформируемого твердого тела. Анатолий Николаевич окончил математико-механический факультет Воронежского университета, отработал два года в НИИ г. Коломны, вернулся в ВГУ, поступил в аспирантуру на кафедру теории упругости и пластичности, которую возглавлял профессор Д. Д. Ивлев, одновременно совмещая учебу с работой ассистентом. Защитил в 1969 году кандидатскую диссертацию под руководством профессора Г. И. Быковцева, остался работать на факультете ПММ в ВГУ, где плодотворно работает до сих пор, это его бессменное место работы. С 1989 года Анатолий Николаевич заведует кафедрой теоретической и прикладной механики, которая является преемницей кафедры теории упругости и пластичности. Воронежская школа механики деформированного твердого тела в большинстве состоит из учеников

профессоров Д.Д.Ивлева и Г.И.Быковцева, среди которых полноправно может быть назван и профессор А.Н.Спорыхин.

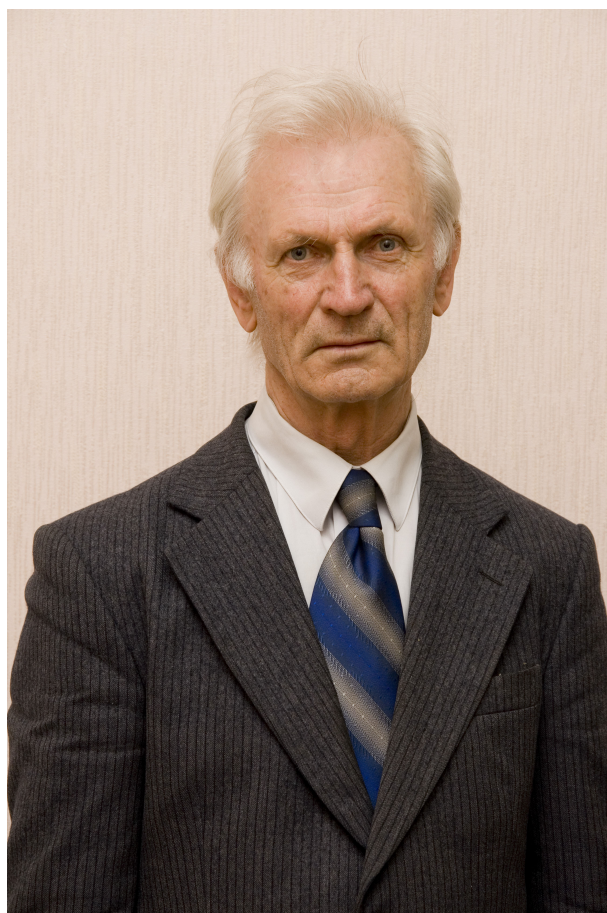
Научные работы А. Н. Спорыхина связаны: с теорией устойчивости упругопластических тел, систем и конструкций с усложненной структурой при малых и конечных деформациях; теорией устойчивости нелинейно упругих и вязкоупругих сред в "большом"; с разработкой динамических законов и условий на разрывах, когда начальное и конечное состояние среды неизвестны; с распространением пластических деформаций в трехмерных задачах геомеханики.

Научные труды А. Н. Спорыхина внесли весомый вклад в развитие теории устойчивости нелинейных механических систем.

Научная и педагогическая деятельность А.Н.Спорыхина отражена в 220 печатных трудах, в т.ч. 6 монографиях. Он активно участвует в воспитании научных кадров. Среди его учеников более 20 кандидатов и 6 докторов наук. А.Н.Спорыхин является членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, Залуженный деятель науки РФ, является членом 3 диссертационных советов по присуждению ученой степени доктора наук. В течение многих лет А.Н.Спорыхин принимает активное участие в работе диссертационного совета в г.Чебоксары.

Редколлегия и редакция, журнал от души поздравляют Анатолия Николаевича Спорыхина с семидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.

К 70-ЛЕТИЮ ЧЕРНЫШОВА АЛЕКСАНДРА ДАНИЛОВИЧА



Александр Данилович Чернышов является ярким представителем Воронежской школы механиков, основанной профессором Д. Д. Ивлевым.

Высшее образование получил в Воронежском государственном университете в 1956-1961 годах на математико – механическом факультете. Дальнейшее научное образование А. Д. повышал, прослушав курсы лекций профессора Д. Д. Ивлева по теории упругости и пластичности, а также на регулярных научных семинарах, проводившихся под его руководством, где особенное внимание уделялось теории тензорного исчисления, реологии, механике сплошных сред, нелинейным преобразованиям в механике, теории ударных волн и другим современным и оригинальным темам.

В 1966 году в Воронежском госуниверситете защитил кандидатскую диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по теме “Исследования некоторых вопросов структуры и распространения сильных скачков в сплошных средах”.

В 1971 году на Ученом совете СО АН СССР в г. Новосибирске защитил докторскую диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по теме “Некоторые вопросы распространения сильных разрывов в нелинейных сплошных средах”.

На основе результатов, опубликованных в научных статьях, А. Д. Чернышовым разработано несколько методов для решения краевых задач механики и прикладной математики: “Эвристический метод” - для решения уравнений эллиптического типа, “Метод интегральных прямых” - для решения задач тепло – массообмена; “Метод угловых суперпозиций”, изложенный в монографии; “Метод разложений в быстрые ряды Фурье – Чернышова”, “Метод расширения границ”. Все методы разноплановые, но их объединяет одна цель – получить приближенное решение в аналитическом виде.

Особую оценку заслуживают три последних метода, по уникальности которые значительно превосходят все известные методы, так как с их помощью можно решать особенно сложные нелинейные проблемы в аналитическом виде как в статической, так и динамической постановках, что недоступно для других подходов. Методы с успехом могут применяться при рассмотрении проблем космического характера или связанных с прогнозом погоды; динамикой кровообращения в подвижных кровеносных сосудах, при рассмотрении динамических задач с ударными волнами в сложных средах, контактных задач, при изучении электромагнитных процессов, новых технологий и т. д. с любой заданной точностью при минимальных вычислительных затратах.

Профессор А. Д. Чернышов разработал теорию структуры ударных волн в сложных сплошных средах, построил термодинамическую модель упругопластического тела при конечных деформациях. В свое время исследования А. Д. Чернышова получили поддержку академика Н. Н. Яненко. В научных статьях А. Д. Чернышовым опубликовано в центральной печати 42 точных решения классического характера, каждое из которых вполне может быть использовано в учебниках по различным разделам механики сплошных сред.

Следует отметить, что большинство научных работ с новаторскими идеями опубликованы лично А. Д. Чернышовым, без соавторов.

Под руководством А. Д. защищены тринадцать кандидатских диссертаций, тематика каждой из них является оригинальной.

Первый аспирант профессора А. Д. Чернышова – Анатолий Александрович Буренин избран членом - корреспондентом АН России.

Пожелаем Александру Даниловичу здоровья, творческих успехов, признания широкой научной общественностью разработанных им методов, простота и эффективность которых позволяет с успехом их применять в исследованиях важнейших реальных проблем инженерной практики.

А. А. Буренин
чл. корр. АН РФ

К 60-ЛЕТИЮ ГОРБЕНКО ОЛЕГА ДАНИЛОВИЧА



Исполнилось 60 лет со дня рождения Олега Даниловича Горбенко, чья научная и учебно-педагогическая деятельность непрерывно связана с факультетом Прикладной Математики и Механики Воронежского Госуниверситета.

Олег Данилович защитил кандидатскую диссертацию по специальности “механика”, числился он в аспирантуре у меня, но работала с ним Татьяна Дмитриевна Семькина – ныне профессор факультета ПММ. В связи с необходимостью специалистов по ЭВМ на факультете ПММ, О. Д. Горбенко целиком погрузился в информатику, с 1995 по 2006 г. он – зав. кафедрой математического обеспечения ЭВМ.

С 1986 по 1991 год - член Общесоюзного совета по информатизации образования при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР.

Один из авторов регионального (Воронежская область) стандарта общего среднего образования по информатике. Участвовал в качестве соавтора в издании нескольких учебно-методических пособий в помощь учителям общеобразовательных школ в годы становления нового учебного предмета - информатики.

В 1993 - 2009 годах - председатель жюри регионального (Воронежская область) этапа Всероссийской олимпиады школьников по информатике.

В 2003 - 2009 годах - председатель, зам. председателя жюри заключительного этапа Всероссийской студенческой олимпиады "Информатика. Программирование. Информационные технологии".

В 1999-2001 годы - сороосовский доцент.

Автор и соавтор более 200 научных, учебных и учебно-методических публикаций, отметим из них:

1. Нелинейное программирование в расчете несущей способности оболочек / Известия АН СССР. МТТ, 1978, №1.

2. Волновая аппроксимация в расчете предельного состояния оболочек вращения / Вестник факультета ПММ. - Воронеж: издательство Воронежского госуниверситета, 2002.

3. Программирование на языке Паскаль: задачник (в соавторстве). - СПб: Питер, 2005. - 376 с.

Олег Данилович принадлежит к числу тех людей, которые вносят в педагогический процесс ту высокую ноту полной преданности учебному процессу, его содержательности, требовательного и доброжелательного отношения к студентам, исключительной порядочности, без которых не должен быть ВУЗ и факультет.

Именно такие люди навсегда сохраняются в благодарной памяти о годах пребывания в ВУЗе. Для меня такими людьми остаются В. В. Голубев, А. П. Минаков, М. М. Филоненко-Бородич, разумеется у нас были и другие высокочтимые педагоги, о которых не забываешь, каждый из них – вершина, я говорю о тех, кто мне ближе.

Сердечные поздравления Олегу Даниловичу, пожелания крепкого здоровья и многих успехов.

Д. Д. Ивлев

К 60-ЛЕТИЮ РЕВУЖЕНКО АЛЕКСАНДРА ФИЛИППОВИЧА



Александр Филиппович Ревуженко - выдающийся специалист в области механики деформируемого твердого тела, горных пород и сыпучих материалов, автор 189 научных работ, из них 4 монографии (включая монографию, переведенную за рубежом) и 39 авторских свидетельств.

Основными направлениями научных исследований А.Ф. Ревуженко являются создание новых математических моделей деформирования упруго-пластических и сыпучих сред, разработка концепции горного массива как среды с внутренними источниками и стоками энергии. На этой основе им внесены уточнения в основные справочные

формулы механики сыпучих материалов и грунтов, даны расчеты давлений на ограждающие конструкции, напряженно-деформированного состояния вокруг выработок с учетом блочности среды. Построены новые классы точных решений уравнений идеальной пластичности.

Найдены закономерности возникновения регулярных структур в сплошных средах, получены и исследованы ячеистые структуры при однородном сдвиге, различные типы структур при пластическом течении в сходящихся каналах и сложном нагружении. Обнаружено явление направленного переноса масс при сложном нагружении, которое позволило обосновать положение о существовании глобального механизма переноса масс Земли и ее жидкого ядра под действием приливных сил. Выполнен цикл работ по изучению однородных процессов деформирования. На этой основе созданы новые приборы и методики для реометрических исследований сложных сред. Обнаружены новые закономерности деформирования, которые использованы при построении теории, а также для решения задач смещения, уплотнения и дозирования порошковых материалов.

Ревуженко А.Ф. принимает участие в подготовке научных кадров, он преподает в Новосибирском госуниверситете, среди его учеников 2 доктора и 7 кандидатов наук.

Ревуженко А.Ф. является членом редколлегии журнала "Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых" СО РАН, Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, Международного бюро по механике горных пород.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Александра Филипповича Ревуженко с шестидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих творческих успехов.

К 60-ЛЕТИЮ ХРОМОВА АЛЕКСАНДРА ИГОРЕВИЧА



Хромов Александр Игоревич в 1972 г. окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ), в настоящее время Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева (Национальный исследовательский университет), факультет авиадвигателестроения. В 1977 г. окончил Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики и механики. В 1981 г. окончил аспирантуру при Самарском государственном университете по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. Трудовую деятельность начал в ОКБ академика Н.Д. Кузнецова. С 1975 г. работал ассистентом, доцентом на кафедрах прикладной и высшей математики КуАИ.

Большая часть научной деятельности Александра Игоревича связана с Дальневосточным отделением РАН. Здесь он прошел путь от старшего научного сотрудника лаборатории механики деформируемого твердого тела в Тихоокеанском океанологическом институте, заведующего одноименной лабораторией в Институте автоматизи-

и процессов управления до заместителя директора по научной работе в Институте машиноведения и металлургии ДВО РАН (1987 - 2006 г.). Им была организована базовая кафедра прикладной математики в Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете. На основе этой кафедры осуществлялась систематическая подготовка специалистов высшей квалификации, докторов и кандидатов наук в рамках разрабатываемого им научного направления (1993-2006 г.). Из выпускников кафедры Александра Игоревича подготовлено 9 к.ф.-м.н. по специальности 01.02.04 -механика деформируемого твердого тела.

В настоящее время Александр Игоревич является заведующим кафедрой прочности летательных аппаратов и научным руководителем лаборатории механики деформируемого твердого тела в Самарском государственном аэрокосмическом университете имени академика С.П. Королева (Национальный исследовательский университет).

Александр Игоревич считает себя учеником научной школы профессоров Ивлева Д.Д. и Быковцева Г.И., которые оказали определяющее влияние на формирование его как ученого. Хромовым Александром Игоревичем сделан крупный вклад в развитие теории пластичности при больших пластических деформациях. Основным направлением его исследований является теория деформирования и разрушения жесткопластических тел с учетом изменения их геометрии. Предложенный подход позволил свести решение определенного класса технологических задач теории пластичности к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Получен ряд точных решений задач о внедрении плоских, клинообразных и криволинейных штампов в тела произвольной формы, задач о деформировании тел сложной формы с поверхностными и внутренними трещинами.

Основными результатами его исследований являются:

- формулировка критериев выбора предпочтительного пластического течения в теории идеального жесткопластического тела, которые позволили сформулировать задачу о зарождении и распространении трещины в идеальном жесткопластическом теле;
- на основе стандартных испытаний на одноосное растяжение сформулирован подход по определению новых механических характеристик разрушения пластических тел - предельных значений деформаций (первого главного значения тензора конечных деформаций) и удельной диссипации энергии, определяющих зарождение и скорость распространения трещины;
- обобщение этого подхода на случай упрочняющегося жесткопластического тела привело к формулировке деформационно-энергетического критерия разрушения и нового условия пластичности, связанных с поверхностью деформационных состояний несжимаемого жесткопластического тела;
- большое внимание им и его учениками уделено расчету предельных деформаций в окрестности вершины трещины при различных условиях деформирования;
- в настоящее время активно развивается численно-аналитический метод расчета процессов деформирования в окрестности дефектов элементов конструкций, возникающих в процессе изготовления и эксплуатации.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Хромова Александра Игоревича с шестидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих творческих успехов.

К 60-ЛЕТИЮ ШАШКИНА АЛЕКСАНДРА ИВАНОВИЧА



Шашкин Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Александр Иванович в 1971 году закончил факультет прикладной математики и механики (ПММ) Воронежского государственного университета по специальности “Механика”.

Работал м.н.с. хоздоговора, с 1972 года по 2000 г. ассистентом, доцентом и профессором кафедры вычислительной математики факультета ПММ. В 2000 г. избирается деканом факультета ПММ, а в 2002 г. заведующим кафедрой дифференциальных уравнений.

Научная деятельность А. И. Шашкина посвящена разработке подходов и методов решения трёхмерных задач устойчивости механики деформируемых тел с усложнёнными свойствами. Им дана постановка задач и получены новые теоретические результаты по устойчивости деформирования пространственных задач механики горных пород при наличии зон упругого и пластического деформирования для различных моделей сред. Часть исследований посвящена моделированию вакуум-сублимационной сушки. Общее количество публикаций 105, из них 34 методических.

А.И. Шашкин осуществляет руководство аспирантами, он член трёх диссертационных советов, председатель диссертационного совета для рассмотрения докторских и кандидатских диссертаций (по специальностям 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела, физико-математические науки, 05.13.17 – теоретические основы информатики, технические науки) при Воронежском государственном университете, председатель редакционного совета “Вестника Воронежского государственного университета” серии системный анализ и информационные технологии, редактор научного сборника “Вестник факультета ПММ”.

А.И. Шашкин является одним из организаторов международных научных конференций по прикладной математике, информатике и механике, регулярно проводимых в Воронежском госуниверситете, лауреатом премии администрации Воронежской области, членом Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, академиком International Academy of Refrigeration. В течение многих лет он руководит грантами РФФИ.

Свою научную деятельность А.И. Шашкин успешно сочетает с педагогической деятельностью. Он является членом президиума УМО классических университетов. В разные годы им читались такие поточные курсы как численные методы, уравнения математической физики, математический анализ и различные спецкурсы, под его руководством написано большое число курсовых и дипломных работ, магистерских диссертаций, подготовлены доклады для научных конференций.

Талантливый ученый, прекрасный организатор А. И. Шашкин пользуется большим уважением среди коллег, студентов и сотрудников.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Александра Ивановича Шашкина с шестидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих творческих успехов.

К 80-летию со дня рождения
Леонида Викторовича Ершова
доктора технических наук, профессора
(12.05.1929–12.09.1988)



К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЕРШОВА ЛЕОНИДА ВИКТОРОВИЧА

Леонид Викторович Ершов, талантливый педагог и организатор науки, доктор технических наук, профессор, родился 12 мая 1929 г. Отлично окончил школу, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, в 1958 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а в 1964 г. – доктора технических наук, с 1965 г. – профессор.

Свою трудовую деятельность начал в НИИ-88 (ЦНИИМАШ) – ведущей организации в области ракетно-космической техники. Затем перешел на преподавательскую работу. Работал в ВЗЭИ, а затем в Московском горном институте, где свыше 26 лет возглавлял кафедру высшей математики. С его именем связано развитие вычислительной техники в МГИ. Он является зачинателем широкого использования математических методов при решении задач горного давления. Л.В. Ершов сыграл важную роль в организации, формировании и становлении Московского института электронной техники, первым ректором которого он был. В течение ряда лет работал заместителем директора Института проблем механики АН СССР. Основная область научной деятельности Л.В. Ершова – механика деформируемого твердого тела. Он является основоположником использования математического аппарата устойчивости равновесия деформируемых тел в задачах механики горных пород. Впервые ввел в механику горных пород понятие нарушения единственности равновесия. На конкретных задачах показал практические пути его реализации, развил при этом общую постановку задачи об устойчивости упругопластического равновесия. Л.В. Ершовым дано объяснение горного давления как процесса потери устойчивости равновесия массива горных пород. В частности, им рассмотрена устойчивость горной выработки (плоская потеря устойчивости) и вертикального ствола (осесимметричная потеря устойчивости). Л.В. Ершов развил методы малого параметра для решения задач определения упругопластического состояния и устойчивости равновесия тел в статической и динамической постановке. В своих работах он умело использовал современный математический аппарат при решении различных прикладных проблем механики горных пород.

Им опубликовано свыше 100 работ, в том числе 6 монографий, значительное число учебников и учебных пособий. Под влиянием и при непосредственном участии Л.В. Ершова сформировалась новая, быстро развивающаяся область механики деформируемого твердого тела – устойчивость упругого и упругопластического равновесия пространственных тел применительно к задачам горных пород.

Л.В. Ершов был талантливым педагогом, лекции которого оставляли неизгладимое впечатление. Среди его учеников – многие кандидаты и доктора наук. Идеи Л.В. Ершова привлекли внимание ученых-механиков и реализованы в книгах, учебных курсах, диссертациях многочисленных учеников и последователей.

Высокоэффективный труд, большую организаторскую работу Л.В. Ершов сочетал с общественной деятельностью: неоднократно избирался в общественные организации,

участвовал в работе ряда комиссий Минвуза, экспертного совета ВАК. Отличительными чертами Л.В. Ершова были глубина суждений, находчивость, остроумие, доброжелательность, огромное человеческое обаяние. Он неизменно пользовался любовью и уважением окружающих.

За успехи в научно-педагогической деятельности Л.В. Ершов был награжден медалями, имел почетные знаки "Отличник Высшей школы "Шахтерская слава" и др. Леонид Викторович скончался на шестидесятом году жизни, он прожил короткую, но яркую и содержательную жизнь, наполненную творческим поиском и упорным трудом на благо российской науки. Память о нем, человеке большой душевной теплоты, видном ученом, отзывчивом и верном товарище сохраняется в сердцах его учеников, соратников, коллег, тех, кому посчастливилось работать и встречаться с Л.В. Ершовым.

*А. Н. Гузь, В. Г. Зубчанинов, Д. Д. Ивлев, Ю. В. Немировский,
Л. А. Пучков, С. А. Редкозубов, А. Н. Спорыхин, Г. П. Черепанов,
А. Д. Чернышов*

К 80-летию со дня рождения

Евгения Ивановича Шемякина

академика РАН

(09.12.1929–19.01.2009)



К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ШЕМЯКИНА ЕВГЕНИЯ ИВАНОВИЧА

Евгений Иванович Шемякин — выдающийся ученый-механик, автор фундаментальных исследований в области механики деформируемого твердого тела и горных пород, талантливый педагог и организатор науки.

Е. И. Шемякин родился 9 декабря 1929 г. в Новосибирске.

Евгений Иванович в 1947 г. закончил с золотой медалью среднюю школу и поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета, который окончил в 1952 г. по специальности “Механика” по кафедре теории упругости и волновых процессов в твердых телах.

Е. И. Шемякин в 1955 г. закончил аспирантуру и защитил кандидатскую диссертацию на тему “Распространение волн в неидеально упругих средах”.

После образования Сибирского отделения Академии наук СССР Е. И. Шемякин переехал в Новосибирск. С 1960 по 1970 гг., заведует лабораторией механики горных пород в Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР. В 1962 г. Е.И. Шемякин защитил диссертацию на тему “Распространение волн при подводном и подземном взрывах” на соискание ученой степени доктора технических наук.

Евгений Иванович в 1970 г. переходит на работу в Институт горного дела СО АН СССР на должность заместителя директора, с 1971 г. он становится и.о. директора, а затем директором института. На этом посту он оставался до июля 1987 г.

В декабре 1976г. Е.И. Шемякин избирается членом-корреспондентом АН СССР по отделению механики и процессов управления (механика горных пород). В 1980 г. он становится заместителем председателя Президиума Сибирского отделения АН СССР и остается на этом посту до 1986 г. В декабре 1984 г. Евгений Иванович избран действительным членом АН СССР по отделению геологии, геофизики, геохимии и горных наук (горное дело, геофизика, геология).

С 1987 по 1992 гг. начинается новый период в государственной и общественной деятельности Евгения Ивановича он переезжает в Москву и работает Председателем Высшей аттестационной комиссии при Совете Министров СССР (на правах министра).

В 1991 г. Е. И. Шемякин приглашается в Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, где он заведовал кафедрой волновой и газовой динамики механико-математического факультета до последних дней жизни.

Научная деятельность Е.И. Шемякина связана с изучением необратимых деформаций и разрушения твердых тел (включая действие удара и взрыва на горные породы), созданием математических моделей действия взрыва, позволяющих рассчитывать механический эффект хрупкого разрушения твердых тел применительно к задачам горного дела.

Е.И. Шемякину принадлежит исследование распространения волн напряжений, сейсмического эффекта при мощном *подземном* взрыве. Им использованы представления о предельном состоянии грунта, характеризуемым предельным сопротивлением

сдвиговому и объемному деформированию, установлена асимптотика распространения возмущений подтвержденная экспериментами.

Е. И. Шемякиным исследованы сейсмические эффекты при мощном *подводном* взрыве, сопровождавшимся распространением нестационарных возмущений в слое жидкости, находящимся в контакте с упругим полупространством. Изучены свойства поверхностной волны давления, распространяющейся по границе раздела воды и скального основания, моделирующего дно.

Работы по исследованию динамических и механических эффектов, сопровождающих мощные подземные и подводные взрывы, получили важные практические приложения.

В Институте горного дела СО РАН Е.И. Шемякиным создана научная школа в области механики твердого тела, горных пород и сыпучих материалов. Работы школы получили широкое признание у нас в стране и за рубежом.

Результаты научных исследований Е. И. Шемякина опубликованы в 250 печатных работах, в том числе в шести монографиях.

Творческий потенциал, ясность суждений, доходчивость изложения, наглядная физическая интерпретация сложных механических явлений, неизменная доброжелательность привлекали к Евгению Ивановичу студенческую молодежь, аспирантов, научных сотрудников, многочисленных слушателей его лекций и семинаров. Среди учеников Евгения Ивановича кандидаты и доктора наук, работающие в научных центрах и вузах России.

Е. И. Шемякин ушел из жизни, не дожив менее года до своего восьмидесятилетия. Светлая, благодарная память о выдающемся ученом, замечательном человеке Евгении Ивановиче Шемякине сохраняется в сердцах всех тех, кому посчастливилось встретиться и общаться с ним на своем жизненном пути.

Г. Н. Григорьев, А. А. Шуканов, Б. Г. Миронов, Р. Ю. Амензаде, В. Г. Баженов, А. А. Буренин, С. В. Варданян, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Д. Д. Ивлев, Р. А. Каюмов, Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, А. А. Маркин, Н. М. Матченко, В. М. Мирсалимов, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, Ю. Н. Радаев, А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, В. П. Тамуж, С. В. Тихонов, А. А. Трещев, А. И. Хромов, Г. П. Черепанов, А. В. Чигарев, А. И. Шашкин.