

ББК 95.4; 22.251  
Ч-823

Подписной индекс в каталоге Роспечать: 33285  
ISSN: 2073-5499

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2010. № 2(8). Ч. 3**

**Учредитель:** ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева»

**Главный редактор:** Г. Н. Григорьев

**ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ И  
НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

**к восьмидесятилетию профессора Д. Д. Ивлева**

**Главный редактор выпуска:** Д. М. Климов

**Заместитель главного редактора выпуска:** Ю. Н. Радаев

**Ответственный секретарь выпуска:** В. А. Ковалев

**Редакционная коллегия:** Амензаде Р. Ю., Баженов В. Г., Буренин А. А.,  
Варданян С. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Ивлев Д. Д.,  
Каюмов Р. А., Ломакин Е. В., Максимова Л. А., Маркин А. А., Матченко Н. М.,  
Манжиров А. В., Миронов Б. Г., Мирсалимов В. М., Михайлов Г. К.,  
Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Ревуженко А. Ф.,  
Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Тамуж В. П., Тихонов С. В.,  
Трещев А. А., Хромов А. И., Чигарев А. В., Шашкин А. И., Шуканов А. А.

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19

**Email:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2010

Д. М. Климов, Л. Д. Акуленко, С. А. Кумакшев

## КОЛЕБАНИЯ ПОЛЮСА ДЕФОРМИРУЕМОЙ ЗЕМЛИ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*

**Аннотация.** Исследованы вращательно-колебательные движения Земли относительно центра масс в рамках квазистационарной модели вязкоупругого осесимметричного тела, находящегося под действием возмущающих моментов гравитационных сил от Солнца и Луны. Основное внимание уделено анализу колебаний полюсов, т.е. вектора угловой скорости вращения в связанной системе координат (референц-системе). Выявлен приливной механизм возбуждения колебаний, обусловленный вращательно-поступательным движением барицентра “двойной планеты” Земля-Луна вокруг Солнца и наклоном оси вращения Земли к плоскости орбиты. Установлено, что основные характеристики колебаний остаются весьма стабильными и практически не изменяются на интервалах времени наблюдения. С помощью методов небесной механики построена простая математическая модель колебаний, содержащая две частоты (“собственную” и годичную) и адекватная точности астрометрических данных Международной Службы Вращения Земли (МСВЗ). С учетом спектрального анализа измерений МСВЗ проведена идентификация параметров модели методом наименьших квадратов. Получена статистически и визуально убедительная интерполяция данных измерений на значительных интервалах времени. Приводится прогноз на 1-5 лет, подтверждаемый наблюдениями в течение нескольких лет. Результаты представляют естественно-научный теоретический интерес, а также важны для приложений к проблемам навигации и геофизики.

**Ключевые слова:** полюс Земли, модель колебаний, интерполяция параметров, астрометрические данные.

УДК: 531.391:521.93

**1. Постановка задачи.** В основе многих астрометрических исследований лежит динамическая теория вращения Земли относительно центра масс [1–5]. Известно из астрономических наблюдений (со второй половины 19 в., а возможно, и существенно раньше), что ось вращения Земли с течением времени изменяет свою ориентацию как по отношению к связанной, так и инерциальной системам координат. Это означает, что северный и южный полюса и широты эволюционируют в заметных пределах в течение нескольких месяцев.

Измерения свидетельствуют, что в весьма сложном колебательном процессе содержатся составляющие с сильно различающимися частотными и амплитудными характеристиками. Так, малые колебания вектора угловой скорости в некоторой связанной с Землей системе

---

Поступила 28.05.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 08-01-00180, 08-01-00231, 08-01-00234, 09-01-00409) и Программы НШ-4315.2008.1.

координат (референц-системе) содержат основную составляющую, амплитуда которой достигает величины  $0.20'' - 0.25''$ , а период равен приблизительно 430-440 звездных суток [1-4]. Значительное отличие чандлеровского периода от предписываемой классической теорией твердого тела (от периода прецессии Эйлера 305 суток для недеформируемой фигуры Земли) потребовало объяснения. Оно было частично осуществлено на основе модели деформируемой Земли в исследованиях В. Томсона, С. Ньюкома, А. Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, Ф. А. Слудского, М. С. Молоденского и др. [4]. Исторически принято называть указанное движение “свободной нутацией” деформируемой Земли или чандлеровским колебанием полюса (для определенности Северного полюса).

Было установлено также существование заметной составляющей с амплитудой  $0.07'' - 0.08''$  и резко выраженным периодом, равным одному году (около 365.25 звездных суток). Наблюдаемые колебания полюса имеют характер биений. Траектория движения полюса на поверхности Земли представляет собой свертывающуюся и развертывающуюся спираль с периодом, близким к 6-ти годам (частотой  $\pi/3$  в год).

Анализ траектории полюса и прогноз его движения представляют значительный интерес в естественно-научном и прикладном аспектах. Построение высокоточной теоретической модели вращения деформируемой Земли, идентификация ее параметров на основе данных измерений МСВЗ и надежный прогноз движения полюса весьма важны при решении задач инерциальной навигации [6] на достаточно длительных для практических целей интервалах времени и при исследованиях ряда астрометрических и геофизических проблем [1-5].

Приведем ряд предварительных замечаний, относящихся к постановке задачи. Для описания вращательного движения деформируемой Земли и колебаний ее полюса рассматривается квазистатическая механическая модель вязкоупругого твердого тела [7]. Какое-либо усложнение модели фигуры Земли (многослойность) не представляется оправданным, поскольку в этом случае определение требуемых физико-механических характеристик планеты на основе измерений не может быть проведено с требуемой точностью. Следует придерживаться очевидного положения: сложность модели на всех этапах ее построения должна строго соответствовать решаемой задаче и уровню точности данных наблюдений.

С позиций теоретической механики проблема анализа процесса колебаний полюса Земли аналогична задаче исследования движений оси гироскопа под действием возмущающих моментов сил и с учетом вязкоупругих деформаций в квазистатическом приближении.

Считается, что центр масс деформированной планеты (Земли) и точечный спутник (Луна) совершают известное взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра), который перемещается по эллиптической орбите вокруг Солнца [7, 8].

На основе асимптотического анализа уравнений движения в оскулирующих переменных действие-угол ниже определяются стабильные характеристики вращательно-колебательного движения деформируемой Земли относительно центра масс в квазистатическом приближении. Сперва находят уточненные периоды (частоты) осевого вращения и чандлеровского колебания и проводятся сопоставление с данными спектрального анализа [1-3, 9]. Даются оценки амплитуд свободных колебаний вектора угловой скорости в связанной системе координат и сравниваются с наблюдаемыми значениями.

С помощью кинетических и динамических уравнений Эйлера строится математическая модель первого приближения чандлеровского колебания полюса. В заключение излагаются результаты численного определения параметров движения методом наименьших квадратов на основе ежедневных данных измерений МСВЗ [2], дается построение траектории и прогноз движения полюса Земли в сопоставлении с экспериментальными данными МСВЗ.

Дадим оценки параметров движения в задаче о “свободной нутации” полюса Земли. Основное внимание уделим определению колебаний вектора угловой скорости вращения деформируемой Земли относительно связанной с некоторой “замороженной” системой координат [1-4].

Посредством анализа уравнений возмущенных движений определяется искомое значение угловой скорости прецессии  $\Omega$  и периода колебаний  $T = 2\pi/\Omega \approx 430$  суток. Полученное значение находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными измерений периода колебаний  $T \approx 420 - 440$  звездных суток, известного как чандлеровский период колебаний полюса Земли [1–5].

Угловые координаты  $(x_c, y_c)$ , отвечающие “свободной” нутации (чандлеровские компоненты движения), годичной компоненте  $(x_s, y_s)$ , соответствующий угол  $\alpha$  между осью фигуры и осью вращения и линейные координаты  $X_{c,s}, Y_{c,s}$  на касательной к геоиду плоскости с учетом главных членов определяются тригонометрическими выражениями

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{\omega_x}{\omega}, & y_p &= -\frac{\omega_y}{\omega}; & x_p &= x_c + x_s, & y_p &= y_c + y_s, \\ x_{c,s} &= r_{c,s} \cos \psi_{c,s}, & y_{c,s} &= -r_{c,s} \sin \psi_{c,s}, \\ X_{c,s} &= R x_{c,s}, & Y_{c,s} &= R y_{c,s}; & X_p &= X_c + X_s, & Y_p &= Y_c + Y_s, \\ \cos \alpha &= \frac{\omega_3}{\omega} \approx 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{2\omega^2}, \\ \max |X_c|, |Y_c| &\approx 7.5\text{м}, & \max |X_s|, |Y_s| &\approx 2.5\text{м}, & R &= 6.38 \cdot 10^6\text{м}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Индекс  $c$  относится к чандлеровской, а  $s$  — к солнечной (годичной) компонентам.

В первом приближении полодия, отвечающая свободной нутации с периодом Чандлера, есть эллипс с весьма малым эксцентриситетом  $e \approx 0.005$ . Данные МСВЗ [2] подтверждают теоретические оценки (1.1). Период и амплитуда колебаний, как показывает анализ влияния приливных моментов диссипативных сил, несущественно изменяются на значительных интервалах времени. Этот вопрос требует дополнительного обсуждения.

**2. Математическая модель колебаний полюса первого приближения.** Для построения модели вращательного движения относительно центра масс представим уравнения в форме классических динамических уравнений Эйлера с переменным тензором инерции  $J$  [1, 3–5, 7–9]

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + \omega \times J\omega &= \mathbf{M}, & \omega &= (p, q, r)^T, & J &= J^* + \delta J, & J^* &= \text{const}, \\ J^* &= \text{diag}(A^*, B^*, C^*), & \delta J &= \delta J(t), & \|\delta J\| &\ll \|J^*\|. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\omega$  — вектор угловой скорости в некоторой связанной с Землей системе координат (референц-системе [4]), которая приближенно совпадает с главными центральными осями инерции  $J^*$  “замороженной” Земли с учетом “экваториального выступа” [1 - 5, 7]. Дополнительные возмущающие члены, получающиеся при дифференцировании вектора кинетического момента деформируемой Земли (см. [8]), отнесены к вектору возмущающего момента сил  $\mathbf{M}$  весьма сложной структуры. Считается, что малые вариации тензора инерции  $\delta J$  могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные влиянием гравитационных суточных приливов от Солнца и Луны и, возможно, другие (годичные, полугодовые, месячные, полусуточные). В качестве основных факторов возмущающих внешних моментов сил  $\mathbf{M}$ , вызывающих нутационные колебания, принимаются гравитационные воздействия. Возможное наличие слагаемого типа  $\dot{J}\omega$  не приводит к уточнению модели первого приближения. Попытки строгой оценки этих членов путем учета геофизических факторов затруднительны и не приводят к удовлетворительным результатам. Анализ их влияния в известной литературе часто носит сугубо спекулятивный и схоластический характер, поскольку не связан с определением моментов сил (их амплитудой, направлением, частотными и фазовыми характеристиками).



Кинематические уравнения Эйлера, задающие ориентацию связанных осей относительно орбитальной системы координат, имеют вид [10]

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi - \omega_0(\nu) \sin \psi, \quad \dot{\nu} = \omega_0(\nu) = \omega_*(1 + e \cos \nu)^2, \\ \dot{\psi} &= \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} - \omega_0(\nu) \operatorname{ctg} \theta \cos \psi, \quad e = 0.0167, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta + \omega_0(\nu) \frac{\cos \psi}{\sin \theta}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь  $\nu(t)$  — истинная аномалия,  $e$  — эксцентриситет орбиты,  $\omega_*$  — постоянная, определяемая гравитационным и фокальным параметрами. При исследовании системы (2.1), (2.2) в ситуации, отвечающей движению полюса, пропорциональные  $\omega_0$  члены уравнений (2.2) оказываются существенно большими по сравнению с  $p, q$  (приблизительно в 300 раз) и определяющими для  $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ . В научной литературе это важное свойство не отмечено, а указанные выше члены не учитывались без должного обоснования (орбитальное и вращательное движения разделялись) [1–5].

**3. Годичная компонента вынужденных колебаний полюса Земли.** Структура выражений для компонент момента сил гравитации от Солнца имеет вид [9]

$$\begin{aligned}M_q &= 3\omega^2 [(A^* + \delta A - (C^* + \delta C))\gamma_r\gamma_p + \delta J_{pq}\gamma_r\gamma_q + \\ &+ \delta J_{pr}(\gamma_r^2 - \gamma_p^2) - \delta J_{rq}\gamma_p\gamma_q], \quad \omega = \omega_*(1 + e \cos \nu)^{3/2}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь  $\gamma_p, \gamma_q, \gamma_r$  — направляющие косинусы радиус-вектора Солнца относительно центра масс Земли в связанной системе; они выражаются через углы Эйлера  $\theta, \psi, \varphi$  [10]. Для вычисления  $M_{p,r}$  в (3.1) делается циклическая перестановка индексов  $p, q, r$ . Из анализа (3.1) следует, что годичная компонента колебаний полюса может быть обусловлена слагаемым, содержащим произведения направляющих косинусов  $\gamma_p\gamma_r$  и  $\gamma_q\gamma_r$ . Для их вычисления в первом приближении интегрируются уравнения (3.1)

$$\begin{aligned}r &= r^0, \quad \varphi \approx rt + \varphi^0, \quad \nu \approx \omega_*t + \nu^0, \quad \cos \theta(\nu) = a(\theta^0, \psi^0) \cos \nu, \\ \theta(0) &= \theta^0 = 66^\circ 33', \quad 0.4 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq \psi^0 \leq 2\pi, \\ \cos \theta \sin \theta &= b(\theta^0, \psi^0) \cos \nu + d \cos 3\nu + \dots, \quad 0.4 \leq b \leq \frac{4}{3\pi}, \quad |d| \ll 1.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Вторая и более высокие гармоники по  $\nu$  приводят к величинам, меньшим основных в  $10^2 - 10^3$  раз и поэтому не учитываются. Величина  $B^* - A^*$  также существенно меньше, чем  $C^* - A^*$  (приблизительно в 160 раз). Оценка членов уравнений (2.1) для  $p, q$  приводит с учетом выражений (3.2) после усреднения по быстрой фазе  $\varphi$  к упрощенной аналитической модели вида

$$\begin{aligned}\dot{p} + N_{pq} &= \varkappa_p r^2 + 3b\omega_*^2 \chi_p \cos \nu, \quad N_{p,q} \approx N = 2\pi/T_1 \approx (0.84 - 0.85)\omega_*, \\ \dot{q} - N_{qp} &= -\varkappa_q r^2 - 3b\omega_*^2 \chi_q \cos \nu, \quad p(0) = p^0, \quad q(0) = q^0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Здесь  $\varkappa_p, \varkappa_q$  — средние значения  $\delta J_{pr}/B^*, \delta J_{qr}/A^*$ , которые могут быть медленными функциями. Величины  $\chi_p, \chi_q$  получаются в результате усреднения по  $\varphi$  коэффициентов при  $\cos \nu$  в компонентах момента гравитационных сил от Солнца, причем  $\chi_p = \chi_q$ . Они обусловлены, как отмечалось, суточными приливами. Моменты сил гравитации от Луны не учитываются из-за относительной малости их влияния на нутационные колебания вследствие значительного различия частот. Правые части уравнений (3.3) содержат в явной форме гармоническое воздействие с годичным периодом, объясняющее механизм нутационных колебаний, регистрируемых наблюдениями МСВЗ. Хотя чувствительность коэффициентов  $\varkappa_{p,q}$  на 5 порядков выше,

чем  $\chi_{p,q}$ , однако явный регулярный механизм годичного (силомоментного) воздействия с требуемой, согласно оценкам, амплитудой  $M_h \sim 10^{20} \text{ кг м}^2 \text{ с}^{-2}$  посредством внутренних геофизических факторов (атмосферных, океанических, сезонных) представляется несостоятельным в механическом аспекте. Частотный анализ годичной компоненты колебаний также свидетельствует о несостоятельности геофизической интерпретации [1].

Проблема построения гравитационно-приливного механизма колебаний с периодом, весьма близким к чандлеровскому, аналогична исследованной выше [11].

**4. Интерполяция и прогноз движения полюса.** Величины коэффициентов  $\varkappa_{p,q}$ ,  $\chi_{p,q}$  и начальные значения  $p^0$ ,  $q^0$  в (3.3) неизвестны. Они подлежат определению на основе данных наблюдений МСВЗ [2]. Вводя переменные  $x(\tau) = p(t)$ ,  $y(\tau) = q(t)$ , где  $\tau = t/T_h$  — время, измеряемое годами, получим структуру решения системы (3.3) вида [7-9, 11]

$$\begin{aligned} x(\tau) &= c_x^0 + c_x^1 \tau - a_x^c \cos 2\pi\Omega\tau + a_x^s \sin 2\pi\Omega\tau - \\ &\quad - \frac{\Omega}{1 - \Omega^2} d_x^c \cos 2\pi\tau - \frac{1}{1 - \Omega^2} d_x^s \sin 2\pi\tau, \\ y(\tau) &= c_y^0 + c_y^1 \tau + a_y^c \cos 2\pi\Omega\tau + a_y^s \sin 2\pi\Omega\tau - \\ &\quad - \frac{\Omega}{1 - \Omega^2} d_y^c \cos 2\pi\tau + \frac{1}{1 - \Omega^2} d_y^s \sin 2\pi\tau, \\ \Omega &= 0.840 - 0.845. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $a_{x,y}^{c,s}$ ,  $c_{x,y}^{0,1}$ ,  $d_{x,y}^{c,s}$  — величины, подлежащие вычислению с помощью метода наименьших квадратов [12] по данным измерений МСВЗ [2]. Эти коэффициенты однозначно связаны с неизвестными, содержащимися в системе (3.3). При этом следует иметь в виду равенства

$$a_x^{c,s} = a_y^{s,c}, \quad d_x^{c,s} = d_y^{s,c}, \quad (4.2)$$

являющиеся структурным свойством модели. При вычислениях они должны выполняться с достаточно наглядной точностью.

Введенные параметры могут на достаточно длительном интервале  $0 \leq \tau \leq \Theta$  (где, например,  $\Theta \sim 10-20$  лет) подвергаться коррекции вида:  $c_{x,y} = c_{x,y}^0 + c_{x,y}^1 \tau + \dots$ , и аналогично —  $a_{x,y}^{c,s}$ ,  $d_{x,y}^{c,s}$ . Вековые члены должны учитывать эволюцию параметров системы (2.1), (3.1), (3.3) для улучшения интерполяции процесса колебаний. Теоретическая модель (4.1) может быть уточнена посредством учета второстепенных факторов, что на данном этапе исследований не представляется целесообразным и оправданным вследствие недостаточно высокой точности измерений.

Ниже излагаются результаты расчетов на основе упрощенной процедуры метода наименьших квадратов [12], который применялся независимо к переменным  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  в виде шестимерной аппроксимации согласно модели (4.1)

$$\begin{aligned} x(\tau) &= (\xi, f(\tau)), \quad y(\tau) = (\eta, f(\tau)), \\ \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_6)^T, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_6)^T, \\ f(\tau) &= (1, \tau, \cos 2\pi\Omega\tau, \sin 2\pi\Omega\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T, \quad \Omega = 0.845. \end{aligned} \quad (4.3)$$

**5. Результаты численного моделирования задач интерполяции и прогноза.** Представляет интерес исследование эффективности интерполяции и прогноза движения полюса с помощью весьма простой математической модели (4.3) на основе известных ежедневных данных измерений МСВЗ [2]. На рис. 1 приводятся теоретические кривые  $x^*(\tau)$ ,  $y^*(\tau)$  в угловых секундах интерполяции ежедневных измерений на 8-летнем промежутке времени  $0 \leq \tau \leq 8$ , начиная с 1988 г. по конец 1995 г.; светлыми точками обозначены данные измерений. Среднеквадратические отклонения равны  $\sigma_x = 0.014$ ,  $\sigma_y = 0.017$ , что свидетельствует об удовлетворительной точности построенной модели (4.1), (4.2), отвечающей оптимальным значениям  $\xi^*$ ,

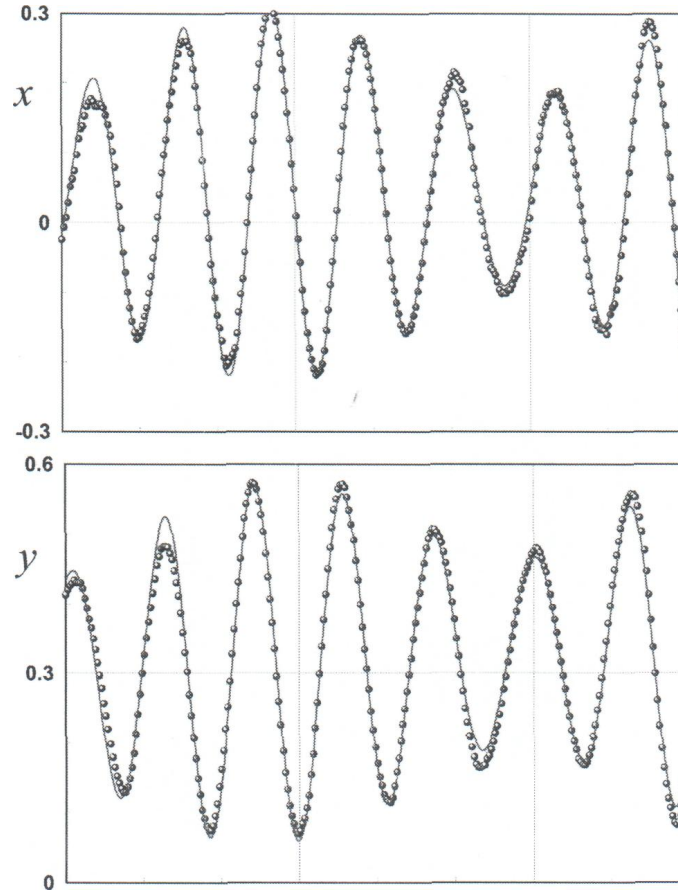


Рис. 1.

$\eta^*$ :

$$\begin{aligned}\xi^* &= (-0.041, -0.0004, -0.034, 0.194, -0.023, -0.065)^T, \\ \eta^* &= (0.300, 0.005, 0.193, 0.033, -0.060, 0.020)^T.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Сравнение коэффициентов  $\xi_3^*$  и  $\eta_4^*$ ,  $\xi_4^*$  и  $\eta_3^*$ , определяющих чандлеровские составляющие колебаний, а также  $\xi_5^*$  и  $\eta_6^*$ ,  $\xi_6^*$  и  $\eta_5^*$ , (с учетом множителя  $\Omega = 0.845$ ), отвечающих годичной компоненте в (5.1), подтверждает указанное выше структурное свойство (4.2) модели (4.1), (4.3).

В 2001 г. была проведена высокоточная интерполяция данных наблюдений на 7-летнем интервале времени (1994–2000 гг.). Вычисленные оптимальные значения параметров  $\xi^*$ ,  $\eta^*$  модели (4.3) и среднеквадратические отклонения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  равны соответственно

$$\begin{aligned}\xi^* &= (0.039, 0.0001, 0.015, 0.161, -0.046, -0.076)^T, \quad \sigma_x = 0.024, \\ \eta^* &= (0.334, 0.0005, 0.162, -0.0139, -0.068, 0.043)^T, \quad \sigma_y = 0.025.\end{aligned}\tag{5.2}$$

По результатам интерполяции на основе величин (5.2) был дан двухлетний прогноз движения полюса (на 2001–2002 гг.).

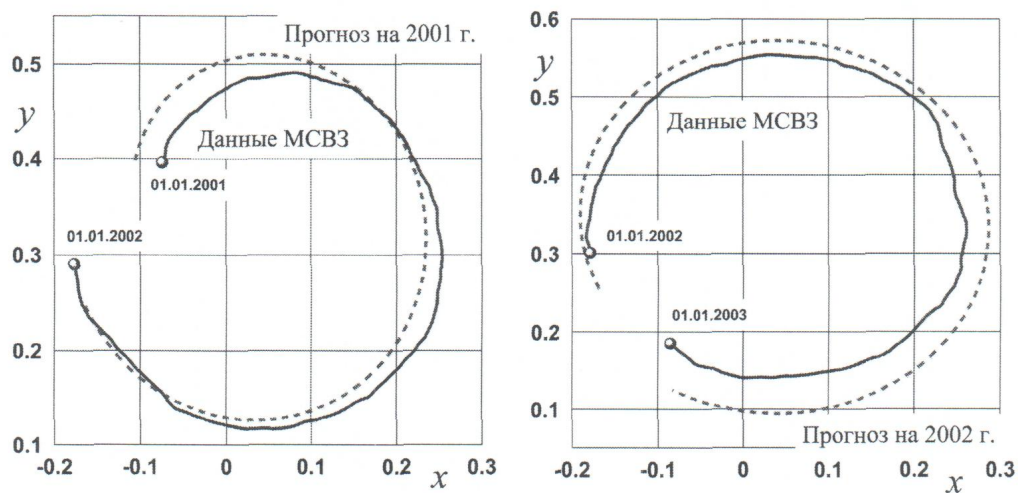


Рис. 2.

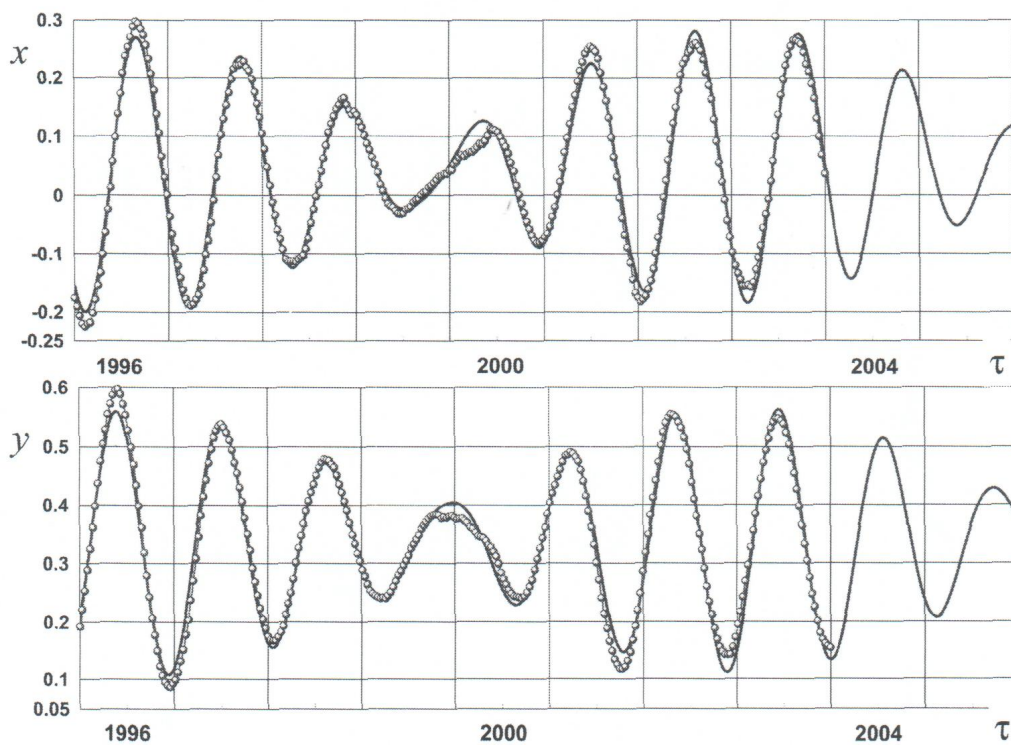


Рис. 3.

На рис. 2 штриховой линией 1 представлена теоретическая кривая  $(x^*, y^*)$ , которая для удобства изображена двумя отрезками длиной по одному году (2001 г. и 2003 г. соответственно). Сплошными линиями 2 представлены соответствующие по времени части экспериментальной кривой, построенной по данным измерений МСВЗ. Сравнение “реальной” и

теоретически полученной траекторий движения полюса свидетельствует об адекватности построенной модели данным наблюдений.

В ежегодных отчетах [2] и на основе оперативных данных МСВЗ предпринимает попытки построить прогноз движения полюса на 100-150 суток вперед (IERS, EOP Product Center, <http://hpiers.obspm.fr/eoprc/eop/eopc04/eopc04-xy.gif>). Принятые МСВЗ собственные модель и методика приводят к весьма неточному и неустойчивому прогнозу, требующему еженедельной коррекции. Разница в прогнозах может составлять величину, сравнимую с максимальным отклонением полюса.

На рис. 3 представлена интерполяция наблюдаемого процесса колебаний полюса на 8-летнем интервале ежедневных данных наблюдений МСВЗ (1996–2003 гг.). Соответствующие оптимальные значения  $\xi^*$ ,  $\eta^*$  и среднеквадратические отклонения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  равны

$$\begin{aligned}\xi^* &= (0.0314, 0.0027, -0.1347, -0.0596, -0.0494, -0.0741)^T, & \sigma_x &= 0.0175, \\ \eta^* &= (0.3315, 0.0010, -0.0613, 0.1341, -0.0679, 0.0426)^T, & \sigma_y &= 0.0175.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Сравнение компонент векторов  $\xi^*$ ,  $\eta^*$  (5.3) свидетельствует о выполнении равенств (4.2), характеризующих свойства модели.

Начиная с 2004 г. представлен прогноз движения полюса на 2 года (до конца 2005 г.). Его качество (*sine ira et studio*) можно оценить в процессе наблюдений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Munk, W. H.* The rotation of the earth / W. H. Munk, G. J. F. Macdonald. – Cambridge : Univ. Press, 1960. – 323 p.
- [2] IERS Annual Reports, 1990 July 1991 bis 2000 July 2001 / Central Burea of IERS, Observatoire de Paris.
- [3] *Moritz, H.* Earth rotation: theory and observation / H. Moritz, I. I. Mueller. – New York : Ungar, 1987. – 617 p.
- [4] *Авсюк, Ю. Н.* Приливные силы и природные процессы / Ю. Авсюк. – М. : Изд-во ОИФЗ РАН, 1996. – 188 с.
- [5] *Сидоренков, Н. С.* Физика неустойчивостей вращения Земли / Н. Сидоренков. – М. : Наука : Физматлит, 2002. – 384 с.
- [6] *Ишлинский, А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А. Ю. Ишлинский. – М. : Наука, 1976. – 670 с.
- [7] *Акуленко, Л. Д.* Модель движения полюса деформируемой Земли, адекватная астрометрическим данным / Л. Д. Акуленко и др. // *Астрономический журнал*. – 2002. – Т. 79, № 1. – С. 81–89.
- [8] *Акуленко, Л. Д.* Прогноз движения полюса деформируемой Земли / Л. Д. Акуленко и др. // *Астрономический журнал*. – 2002. – Т. 79, № 10. – С. 952–960.
- [9] *Vondrak, J.* Earth rotation parameters 1899.7-1992.0 after reanalysis within the Hipparcos frame / J. Vondrak // *Surveys Geophys.* – 1999. – Vol. 20. – P. 169–195.
- [10] *Белецкий, В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле / В. В. Белецкий. – М. : Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
- [11] *Акуленко, Л. Д.* Гравитационно-приливной механизм колебаний полюса Земли / Л. Д. Акуленко и др. // *Астрономический журнал*. – 2005. – Т. 82, № 10. – С. 950–960.
- [12] *Губанов, В. С.* Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии / В. С. Губанов. – СПб. : Наука, 1997. – 318 с.

*D. M. Klimov, L. D. Akulenko, S. A. Kumakshev*

## THE POLE FLUCTUATIONS OF THE DEFORMABLE EARTH

*A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences*

**Abstract.** Rotationally oscillatory movements of the Earth concerning the centre of weights within the limits of quasistationary model of a viscoelastic axially symmetric body which are under the influence of the revolting moments of gravitational forces from the Sun and the Moon are investigated. The basic attention is given to the analysis of poles fluctuations, that is a vector of angular speed of rotation in the connected system of coordinates (referents-system). The excitation mechanism of fluctuations, caused by the rotationally-progressive movement of a barycenter of “a double planet” the Earth-Moon round the Sun and an inclination of a rotation axis of the Earth to an orbit plane is revealed. It is established that the basic characteristics of fluctuations remain rather stable and practically do not change on supervision time intervals. By means of celestial mechanics methods the simple mathematical model of the fluctuations, containing two frequencies (“own” and a year’s) and adequate to accuracy of the astrometric data of the International Service of Rotation of the Earth (ISRE) is constructed. Taking into account the spectral analysis of measurements of ISRE the identification of model parametres by a method of the least squares is made. A statistically and visually convincing interpolation of the given measurements on considerable time intervals is received. The forecast for 1-5 years, confirmed with supervision within the several years is given. The results represent a natural-scientific theoretical interest, and also are important for appendices to navigation and geophysics problems.

**Keywords:** the Earth pole, a fluctuations model, interpolation of parametres, the astrometric data.

*Климов Дмитрий Михайлович*

*академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

*e-mail: klimov@ipmnet.ru*

*Акуленко Леонид Денисович*

*доктор физико-математических наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

*e-mail: kumak@ipmnet.ru*

*Кумакшев Сергей Анатольевич*

*кандидат физико-математических наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

*e-mail: kumak@ipmnet.ru*

*Klimov, Dmitry Mikhailovich*

*Academician of RAS, Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow*

*Akulenko, Leonid Denisovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow*

*Kumakshev, Sergei Anatolyevich*

*Candidate of Phys. & Math., Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow*

В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ГНИИ-ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

*Московский городской университет управления Правительства Москвы*

*Самарский государственный университет*

**Аннотация.** В представляемой статье в рамках обобщенной линейной теории ГНИИ-термоупругости на основе связанной системы уравнений движения и теплопроводности дается анализ гармонических термоупругих волн, распространяющихся вдоль оси свободного цилиндрического волновода кругового поперечного сечения. Боковая поверхность волновода предполагается непроницаемой для тепла. Проведено исследование частотного уравнения и форм гармонических волн перемещений и температуры в бесконечном цилиндрическом волноводе в условиях как осесимметричного окружного волнового профиля, так и в случае окружных гармоник сколь угодно высокого азимутального порядка. Численно определена зависимость волнового числа от частоты и построены профили форм перемещений и температуры в связанной ГНИИ-термоупругой волне третьего азимутального порядка. Установлено, что каждой заданной частоте отвечает счетное число комплексных волновых чисел. Основному исследованию предшествует изучение распространения плоских гармонических связанных ГНИИ-термоупругих волн.

**Ключевые слова:** обобщенная термоупругость, волновод, волновое число, гармоническая волна, тепловая волна, азимутальное число, частотное уравнение.

УДК: 539.375

**Введение.** Классическая линейная теория термоупругости (СТЕ; см., например, [1]–[5]) основывается на законе теплопроводности Фурье, который устанавливает пропорциональность вектора потока тепла  $\mathbf{h}$  и отрицательного градиента температуры  $\theta$

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta,$$

где  $\Lambda_*$  – коэффициент теплопроводности (thermal conductivity). Соответствующее уравнение теплопроводности, как известно, принадлежит к параболическому типу. Поэтому температурное возмущение, локализованное в определенном месте термоупругого тела, должно немедленно ощущаться и в любом другом месте, а это, вообще говоря, противоречит принципу причинности. Классическая теория термоупругости предсказывает, таким образом, бесконечную большую скорость распространения любого термического сигнала.

---

Поступила 04.05.2010

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (ГК 02.741.12.2173) и при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №10-01-00184-а “Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости”).



Первоначально исследование процессов теплопроводности в твердых телах никак не связывалось с их напряженно-деформированным состоянием. Соответствующее направление обычно называют аналитической теорией теплопроводности; основные результаты из области аналитической теории теплопроводности содержатся в классических монографиях [6]–[8]. В рамках этой теории были решены важнейшие прикладные задачи расчета конструкций, работающих в условиях нестационарного теплового режима. Синтез теории упругости и теории теплопроводности в единую теорию термоупругости произошел в середине XX в. Предметом исследования теории термоупругости является взаимодействие (сопряжение) деформаций и температуры. Систематическое изложение динамической теории связанной (сопряженной) СТЕ-термоупругости дано в известной монографии [3].

Эксперименты, проведенные в разные годы различными исследователями, подтверждают вывод о том, что тепло при определенных условиях может распространяться как незатухающая волна. Явление теплопроводности посредством распространения (с конечной скоростью) незатухающих термических волн получило название “второго звука”. Как уже указывалось, имеется ряд экспериментальных доказательств существования “второго звука”, хотя его экспериментальное обнаружение всегда сопряжено с очень большими трудностями, поскольку в твердых телах он обнаруживается лишь в кристаллах высокой чистоты и лишь в узком диапазоне весьма низких температур. Первоначально (1946 г.) термические волны “второго звука” были экспериментально обнаружены в жидком гелии и позднее (1966 г.) — в твердом гелии. Исчерпывающий анализ основных моделей теплопроводности посредством распространяющихся с конечной скоростью волн “второго звука”, включая и исторический аспект их развития, изложен в обстоятельной обзорной статье [9], которая содержит практически полную библиографию работ по тематике тепловых волн, опубликованных до 1989 г.

Последние два десятилетия быстрыми темпами развиваются математические модели обобщенного термоупругого поведения деформируемых твердых тел, основанные на различных модификациях закона теплопроводности Фурье, ставивших своей целью получение связанных гиперболических уравнений термоупругости, которые гарантировали бы конечную скорость распространения теплового сигнала. Это направление развития термоупругости (гиперболическая термоупругость) помимо всего прочего имеет огромную познавательную ценность, поскольку только в его рамках может быть решен фундаментальный вопрос о природе распространения тепловых волн в сплошных средах, которая согласовывалась бы основополагающими принципами термодинамики необратимых процессов. Особенно многообещающей в плане возможности моделирования “второго звука” в твердых телах представляется теория, предложенная в [10], [11].

Обобщенная термоупругость развита (см. [10], [11]) в общей нелинейной форме в трех вариантах GNI, GNII, GNIII: в линейном приближении первый вариант приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности и поэтому эквивалентен СТЕ; второй вариант a priori трактует распространение тепла как волновой недиссипативный процесс, принимая вместо классического закона теплопроводности Фурье соотношение

$$\dot{\mathbf{h}} = -\Lambda \nabla \theta,$$

где  $\Lambda$  – определяющая скорость теплопроводности (thermal conductivity rate), и приводит к гиперболическому уравнению распространения тепла; третий вариант — смешанный — включает первые два в качестве предельных случаев, поскольку в обобщенной линейной GNIII-термоупругости вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  выражается через градиенты температуры  $\theta$  и температурного смещения  $\vartheta$  ( $\dot{\vartheta} = \theta$ ) согласно

$$\mathbf{h} = -\Lambda \nabla \vartheta - \Lambda_* \nabla \theta.$$

Ясно, что обе теории GNII и GNIII преодолевают недостатки классической теории СТЕ и в состоянии моделировать *конечную* скорость распространения теплового сигнала. Особенно

интересным в этом плане представляется вариант GНИ. Теория GНИ-термоупругости была развита в качестве альтернативного подхода к математическому моделированию процесса теплопроводности в твердых телах с помощью уравнений гиперболического аналитического типа, обеспечивающих конечную скорость распространения теплового сигнала. Поэтому GНИ-термоупругость – это как раз такая теория, которую с достаточным основанием можно назвать гиперболической термоупругостью. Она допускает вариационную формулировку: все основные соотношения GНИ-термоупругости могут быть последовательно выведены из принципа наименьшего действия с соответствующим образом подобранным лагранжианом. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать термоупругость типа GНИ как физическую теорию поля [12], [13]. В статье [12] развита полевая Лагранжева формулировка теории типа GНИ и с помощью теории вариационных симметрий получены законы сохранения для уравнений связанного динамического термоупругого поля.

Содержание представляемой работы может быть охарактеризовано следующим образом. Сначала рассматриваются основные соотношения линейной GНИИ-термоупругости. Основному исследованию предшествует изучение распространения плоских гармонических связанных GНИИ-термоупругих волн. Найдены их волновые числа и произведено отделение многозначных ветвей квадратных корней на комплексной плоскости, определяющих четыре возможных значения волновых чисел плоской гармонической GНИИ-термоупругой волны. Получены определяющие ограничения и ограничения на частоту, которые обеспечивают нормальный характер затухания прямых волн. Отмечены предельные случаи, в контексте GНИИ включающие вариант GНИ/СТЕ (классическая термоупругость) и вариант GНИ (гиперболическая термоупругость). Заметим, что анализ плоских гармонических GНИ/СТЕ-термоупругих волн был выполнен в статье [14] и было показано, что для каждой частоты всегда имеется ровно два волновых числа, вещественная и мнимая части которых положительны. В работах [15], [16] приводится исследование плоских волн в GНИИ-термоупругих средах. Плоские термоупругие волны “второго звука” характеризуются четырьмя вещественными волновыми числами, два из которых положительны.

Далее в рамках обобщенной линейной теории термоупругости GНИИ на основе связанных уравнений движения и теплопроводности проводится анализ гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного (в том смысле, что боковая стенка волновода непроницаема для тепла) цилиндрического волновода. Решения аналогичных задач для вариантов GНИ/СТЕ и GНИИ были получены в работах [14] и [15]–[17]. Окружной профиль волны предполагается произвольным, хотя все вычисления проводятся лишь для окружных гармоник, правда, с произвольным азимутальным порядком. С помощью метода разделения переменных построено решение связанных уравнений GНИИ-термоупругости, содержащее достаточное число произвольных постоянных, с тем чтобы оказалось возможным удовлетворить всем граничным условиям на боковой поверхности цилиндра. Проведен анализ частотного уравнения и форм гармонических волн в бесконечном цилиндрическом термоупругом волноводе в условиях как осесимметричного окружного волнового профиля, так и в случае окружных гармоник произвольного, сколь угодно высокого порядка симметрии. С помощью системы символьных вычислений Mathematica 6.0 численно определена зависимость волнового числа от частоты. Построены профили форм перемещений и температуры в связанной GНИИ-термоупругой волне. Особое внимание уделяется волнам третьего порядка окружной симметрии. Показано, что каждой заданной частоте отвечает счетное число комплексных волновых чисел. Некоторые из них могут иметь весьма малые вещественные или мнимые части, что затрудняет их локализацию.

Главная сложность при изучении распространения гармонических по времени линейно упругих волн в волноводах проистекает от наличия ограничивающих стенок, что вызывает дисперсию волн (т.е. зависимость фазовой скорости от частоты), а многократные отражения

упругих волн от боковых стенок приводят к весьма сложному волновому полю, не поддающемуся элементарному анализу, который возможен, например, в случае плоских гармонических волн. В бесконечных волноводах в силу трансляционной инвариантности волнового поля каждая естественная форма волны характеризуется единственным волновым числом  $k$  и гармонической зависимостью  $e^{ikz}$  от осевой координаты  $z$ , что позволяет отделить указанную координату в самом начале исследования. Зависимость волнового поля от двух оставшихся координат (радиальной и угловой) по-прежнему остается довольно сложной. Зависимость формы волны от угловой координаты можно представить как сумму Фурье-гармоник, а затем ограничиться исследованием волн с окружной формой, определяемой той или иной гармоникой. Известно, что характер волнового поля очень сильно зависит от порядка окружной симметрии волны (азимутального порядка).

Распространение чисто упругих продольных гармонических волн в бесконечных цилиндрических волноводах с помощью точных пространственных уравнений линейной теории упругости изучалось впервые Похгаммером (L. Pochhammer, 1876 г.) [18] и независимо от него Кри (C. Chree, 1889 г.) [19], а также несколько позже Релеем (Reyleigh). В книгах [1, с. 193-199], [20, с. 58-73], [21, pp. 287-292], [22, pp. 214-225], [23, pp. 464-474] заинтересованный читатель может найти основные результаты и указания на литературные источники по этому предмету. Похгаммером в 1876 г. были построены точные решения уравнений динамической теории упругости в форме продольных осесимметричных (по их окружному профилю) гармонических (по времени) волн, распространяющихся вдоль оси свободного цилиндрического волновода. Им было выведено частотное уравнение для этого типа волн, из которого, в принципе, можно было бы получить фазовую скорость гармонических волн любой частоты. Однако частотное уравнение Похгаммера долгое время не поддавалось анализу. Только через полвека удалось получить ряд численных результатов (см., например, [24]) и численно определить полный комплексный спектр волновых чисел продольных осесимметричных волн (т.е. волн нулевого азимутального порядка). Частотное уравнение для волн с первой окружной гармоникой (изгибные волны) первоначально было получено в трудно обозримой форме и было признано непригодным для практического использования, пока в работе [25] не был выполнен его численный анализ. В настоящее время подобного рода задачи и построение графических зависимостей волнового числа от частоты чаще всего решаются конечно-элементными методами.

Хорошо известно, что характер волнового поля в цилиндрическом волноводе весьма сильно зависит от порядка окружной симметрии волны (азимутального порядка). Упругие волны в цилиндрическом волноводе с окружными гармониками второго и более высоких порядков, по-видимому, вообще никем не исследовались. В настоящее время неизвестно ни одного результата, касающегося, например, частотных уравнений для таких волн. Именно поэтому теория Похгаммера—Кри и ее обобщения на случай термоупругого волновода до сих пор привлекает внимание исследователей; анализ теплового и упругого волновых полей в волноводах кругового и эллиптического поперечного сечения и в настоящее время представляется актуальной задачей.

**1. Основные соотношения связанной GNIII-термоупругости.** Рассмотрим связанную систему уравнений движения и теплопроводности для линейного изотропного термоупругого (типа GNIII, обобщенная термоупругость) тела при отсутствии массовых сил, источников (стоков) тепла<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda \nabla^2 \theta + \Lambda_* \nabla^2 \dot{\theta} - \kappa \ddot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

<sup>1</sup>Приводимые ниже связанные уравнения динамических полей температуры и упругих деформаций достаточно хорошо известны; их вывод воспроизводится в работах, посвященных обобщенной термоупругости.

где  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения среды из отсчетного состояния;  $\rho$  — плотность среды;  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламе;  $\nabla$  — трехмерный оператор Гамильтона;  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  — оператор Лапласа;  $\theta$  — приращение температуры над отсчетной температурой;  $\theta_0$  — отсчетная температура;  $\Lambda$  — характерная скорость теплопроводности;  $\Lambda_*$  — коэффициент теплопроводности;  $\kappa$  — теплоемкость (на единицу объема) при постоянной деформации; термомеханическая постоянная  $\alpha = (1/3)(3\lambda + 2\mu)\beta^*$ , где  $\beta^*$  — коэффициент объемного теплового расширения; точка над символом обозначает частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных координатах.

Скалярное уравнение в системе (1) называется обобщенным уравнением теплопроводности, сопряженным с уравнением движения (первое уравнение в системе (1)).

Предельный переход  $\Lambda_* \rightarrow 0$  трансформирует GNIII-модель в GNII-термоупругость (гиперболическая термоупругость), а  $\Lambda \rightarrow 0$  преобразует ее к классической теории термоупругости GNI/СТЕ (параболическая термоупругость).

К уравнениям (1) следует добавить определяющий закон GNIII-термоупругости (закон Дюгамеля—Неймана)

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha\theta)\mathbf{I}, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений Коши,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор малых деформаций,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, и геометрические соотношения Коши

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T, \quad (3)$$

устанавливающие связь между малыми деформациями и перемещениями.

С целью упрощения записи и лучшего восприятия уравнений GNIII-термоупругости (1) введем следующие обозначения:

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{\theta_0}, \quad \Lambda'_* = \frac{\Lambda_*}{\theta_0}, \quad \kappa' = \frac{\kappa}{\theta_0}.$$

Разделив обе части обобщенного уравнения теплопроводности на  $\Lambda$ , перепишем (опуская при этом штрихи в записи постоянных  $\Lambda', \Lambda'_*, \kappa'$ ) затем второе уравнение системы (1) в несколько более простой форме. Окончательно уравнения связанной динамической GNIII-термоупругости для целей настоящего исследования принимаются в форме

$$\begin{cases} \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \nabla^2\theta + \frac{\Lambda_*}{\Lambda}\nabla^2\dot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda}\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Отметим два предельных случая уравнений GNIII-термоупругости: полагая  $\Lambda \rightarrow 0$ , приходим к динамическим связанным уравнениям классической теории термоупругости GNI/СТЕ

$$\begin{cases} \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \nabla^2\theta - \frac{\kappa}{\Lambda_*}\dot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda_*}\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0; \end{cases} \quad (5)$$

совершая предельный переход  $\Lambda_* \rightarrow 0$ , получим уравнения GNII-термоупругости

$$\begin{cases} \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \nabla^2\theta - \frac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda}\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

**2. Плоские гармонические связанные GNIII-термоупругие волны.** В этом разделе работы будут рассматриваться плоские гармонические связанные GNIII-термоупругие волны. Плоские гармонические волны являются одним из наиболее часто исследуемых в волновых задачах термоупругости (и вообще в динамике сплошных сред [26]) предметом. При анализе плоских гармонических связанных термоупругих волн, которые описываются линейными уравнениями GNIII-термоупругости, ставится задача вычисления их волновых чисел и их последующее исследование в зависимости от определяющих параметров GNIII-термоупругости

и частоты. Поскольку волновое число  $k$  плоской термоупругой волны является, вообще говоря, комплексной величиной, то ограничиваясь лишь исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}$ , необходимо найти только такие волновые числа, которые удовлетворяли бы условиям  $\operatorname{Re} k > 0$ ,  $\operatorname{Im} k > 0$ . Мы будем называть их нормальными волновыми числами. Решение этой задачи требует систематического исследования знаков вещественной и мнимой части в многозначном комплексном представлении волнового числа и выполнения в этой связи значительного объема вычислительной работы. Волновое число  $k$  в том виде, в котором оно обычно находится, помимо всего прочего определяется несколькими независимо изменяющимися определяющими параметрами, что также существенно осложняет решение указанной задачи.

Плоская гармоническая термоупругая волна<sup>2</sup> имеет вид ( $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\omega$  — циклическая частота,  $\mathbf{A}$  — вектор поляризации волны,  $B$  — амплитуда отклонений температуры от отсчетной температуры)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \\ \theta &= Be^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим связанную систему уравнений GNIII-термоупругости

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \theta + \frac{\Lambda_*}{\Lambda} \nabla^2 \dot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Подставив выражения (1) в уравнения системы (2), а также учитывая, что

$$\nabla = i\mathbf{k}, \quad \partial/\partial t = -i\omega,$$

получим следующую систему уравнений, связывающую волновой вектор  $\mathbf{k}$ , циклическую частоту  $\omega$ , вектор поляризации волны  $\mathbf{A}$  и амплитуду  $B$ :

$$\begin{aligned} -\mu k^2 \mathbf{A} + (\lambda + \mu)(i\mathbf{k})(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - \alpha(i\mathbf{k})B + \rho\omega^2 \mathbf{A} &= \mathbf{0}, \\ \left( \frac{\kappa}{\Lambda} \omega^2 + k^2 \left( i \frac{\Lambda_*}{\Lambda} \omega - 1 \right) \right) B + \frac{\alpha}{\Lambda} i\omega^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k$  является волновым числом (модулем волнового вектора  $\mathbf{k}$ ) плоской гармонической волны.

Волновое число  $k$  может быть, вообще говоря, комплексной величиной. Вполне естественным представляется ограничиться лишь исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении вектора  $\mathbf{k}$ . Поэтому следует разыскивать волновые числа, подчиняющиеся условиям

$$\operatorname{Re} k > 0, \quad \operatorname{Im} k > 0.$$

Заметим, что в физической литературе собственно волновым числом называется  $\operatorname{Re} k$ ; величина  $\operatorname{Im} k$  обычно называется коэффициентом затухания. С волновым числом  $k$  связана также следующая терминология:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\operatorname{Re} k} &— \text{фазовая скорость волны;} \\ \frac{1}{\operatorname{Im} k} &— \text{глубина проникания волны;} \\ 4\pi \left| \frac{\operatorname{Im} k}{\operatorname{Re} k} \right| &— \text{коэффициент потерь.} \end{aligned}$$

С помощью первого из уравнений (3) можно заключить, что в связанной термоупругой волне  $B \neq 0$  векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{k}$  не могут быть ортогональными.

<sup>2</sup>В физической литературе такие волны обычно называются плоскими монохроматическими волнами.

**2.1. Волновые числа плоской связанной гармонической GNIII-термоупругой волны.** Умножив обе части первого из уравнений системы (2) скалярно на волновой вектор  $\mathbf{k}$ , приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})(\rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu)) - i\alpha k^2 B = 0, \\ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) \frac{\alpha}{\Lambda} i\omega^2 + \left( \frac{\kappa}{\Lambda} \omega^2 + i \frac{\Lambda_*}{\Lambda} k^2 \omega - k^2 \right) B = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для нетривиальной совместности системы уравнений (4) должно выполняться равенство

$$\begin{vmatrix} \rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu) & -i\alpha k^2 \\ i \frac{\alpha}{\Lambda} \omega^2 & \frac{\kappa}{\Lambda} \omega^2 + i \frac{\Lambda_*}{\Lambda} k^2 \omega - k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Вычисляя определитель, приходим к следующему биквадратному уравнению относительно неизвестного волнового числа  $k$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\kappa}{\Lambda} \omega^4 - k^2 \frac{\kappa}{\Lambda} \omega^2 (\lambda + 2\mu) + \rho \omega^2 k^2 \left( i \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda} - 1 \right) - \\ - k^4 (\lambda + 2\mu) \left( i \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda} - 1 \right) - \frac{\alpha^2}{\Lambda} k^2 \omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения

$$c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda},$$

где  $c_l$  и  $l$  имеют размерность скорости, а также безразмерные постоянные

$$h_3^2 = \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda}, \quad s^2 = \frac{\alpha^2}{\rho \Lambda}, \quad h_2^2 = \frac{c_l^2}{l^2}.$$

Определим еще один безразмерный параметр соотношением

$$h_1^2 = 1 + \frac{c_l^2}{l^2} + s^2$$

и обозначим квадрат волнового числа упругой продольной волны через

$$k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}.$$

Принимая во внимание новые обозначения, уравнение (6), из которого находятся значения волновых чисел, представим в следующей форме:

$$(ih_3^2 - 1) \frac{k^4}{k_{\parallel}^4} + (h_1^2 - ih_3^2) \frac{k^2}{k_{\parallel}^2} - h_2^2 = 0. \quad (7)$$

Заметим, что в силу данных выше определений а priori удовлетворяются определяющие неравенства

$$h_1 > 1, \quad h_1^2 - h_2^2 > 1. \quad (8)$$

Первое из них является следствием второго. Поэтому имеется только одно априорное определяющее ограничение на постоянные  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ .

Ясно, что безразмерное волновое число  $k/k_{\parallel}$  может быть найдено в зависимости от постоянных  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , из которых две первые являются определяющими и лишь последняя зависит от частоты.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>В теории GNII термоупругих волн "второго звука" выполняется равенство  $h_3 = 0$ .

Квадраты волновых чисел плоской гармонической связанной термоупругой волны находятся из уравнения (7) в виде

$$2 \frac{k^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + \sqrt{(h_1^2 - ih_3^2)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)}}{ih_3^2 - 1}. \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем изложении квадратный корень из комплексного числа понимается как двузначный.

Отступая от основной линии изложения, заметим, что поскольку в теории GNI термоупругих волн “второго звука” величина  $h_3 = 0$ , то отношение  $k/k_{\parallel}$  не зависит от частоты. Нетрудно видеть, что уравнение (9) в этом случае упрощается

$$2 \frac{k^2}{k_{\parallel}^2} = h_1^2 \pm \sqrt{h_1^4 - 4h_2^2}. \quad (10)$$

Выражение под знаком квадратного корня всегда положительно:

$$h_1^4 - 4h_2^2 = (1 + s^2 - h_2^2)^2 + 4s^2h_2^2 > 0.$$

Правая часть в (10), как нетрудно проверить, также положительна при любом выборе знака. Поэтому плоские GNI-термоупругие волны “второго звука” характеризуются четырьмя вещественными волновыми числами, два из которых положительны.

Для определения значений квадрата волнового числа  $k$  проведем ряд дополнительных вычислений и извлечение квадратного корня в соотношении (9).

Вспользуемся известной формулой для нахождения квадратного корня из комплекснозначного выражения  $p = \operatorname{Re} p + i\operatorname{Im} p$ . Положив  $\sqrt{p} = q = \operatorname{Re} q + i\operatorname{Im} q$ , имеем ровно два отличающихся лишь знаками значения для  $\sqrt{p}$ , которые определяются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} q &= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{Re} p + \sqrt{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p)^2}}{2}}, \\ \operatorname{Im} q &= \frac{\operatorname{Im} p}{2\operatorname{Re} q}. \end{aligned} \quad (11)$$

Приведенные формулы вычисления значений  $\sqrt{p}$  пригодны только в том случае, когда  $\operatorname{Re} \sqrt{p} \neq 0$ . Это условие не выполняется только тогда, когда  $p = \operatorname{Re} p + i\operatorname{Im} p$  есть отрицательное вещественное число.

В рассматриваемом нами случае  $p = (h_1^2 - ih_3^2)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)$ , значения величин  $\operatorname{Re} p$  и  $\operatorname{Im} p$  следует принять равными

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p &= h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2, \\ \operatorname{Im} p &= 2h_3^2(2h_2^2 - h_1^2). \end{aligned}$$

Тогда на основании (11), обозначая  $\operatorname{Re} q = a_{1,2}$  и  $\operatorname{Im} q = b_{1,2}$ , находим

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2)^2 + 4h_3^4(2h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, \\ b_{1,2} &= \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая найденные выше значения  $a_{1,2}$  и  $b_{1,2}$ , равенство (9) можно компактно представить в следующем виде:

$$2 \frac{k^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1}. \quad (13)$$

Продолжим анализ, отделяя мнимую и вещественные части в правой части (13). Для этого умножим и разделим правую часть уравнения (13) на комплексно сопряженную знаменателю величину

$$2 \frac{k^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1} \cdot \frac{-ih_3^2 - 1}{-ih_3^2 - 1}. \quad (14)$$

Преобразуя и извлекая в (14) корень, приходим к

$$\frac{k}{k_{\parallel}} = \sqrt{\frac{h_3^4 + b_{1,2}h_3^2 + h_1^2 - a_{1,2} + i(h_1^2h_3^2 - h_3^2a_{1,2} - h_3^2 - b_{1,2})}{2(h_3^4 + 1)}}. \quad (15)$$

Для дальнейшего вычисления волновых чисел плоской гармонической термоупругой волны еще раз осуществим операцию извлечения квадратного корня в (15). Для этого воспользуемся уже применявшимся алгоритмом и соответствующими формулами, полагая

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p &= h_3^4 + b_{1,2}h_3^2 + h_1^2 - a_{1,2}, \\ \operatorname{Im} p &= h_1^2h_3^2 - h_3^2a_{1,2} - h_3^2 - b_{1,2}. \end{aligned}$$

В результате находим

$$\sqrt{2(h_3^4 + 1)} \frac{k}{k_{\parallel}} = a'_{1,2;3,4} + ib'_{1,2;3,4}, \quad (16)$$

где номера 1, 2 выбираются независимо от номеров 3, 4 и поэтому имеется всего четыре различных варианта;

$$\begin{aligned} a'_{1,2;3,4} &= \pm \sqrt{\frac{S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2} + \sqrt{(S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2})^2 + (T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2})^2}}{2}}, \\ b'_{1,2;3,4} &= \frac{T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2}}{2a_{1,2;3,4}}; \end{aligned} \quad (17)$$

$S^2$  и  $T^2$  определяются согласно

$$\begin{aligned} S^2 &= h_3^4 + h_1^2, \\ T^2 &= h_3^2(h_1^2 - 1). \end{aligned} \quad (18)$$

**2.2. Параметрический анализ значений волновых чисел плоской GNIII-термоупругой волны.** Поскольку волновое число  $k$  плоской термоупругой волны является, вообще говоря, комплексной величиной, то ограничиваясь лишь исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении вектора  $\mathbf{k}$ , необходимо найти только такие волновые числа, которые удовлетворяли бы условиям  $\operatorname{Re} k > 0$ ,  $\operatorname{Im} k > 0$ . Такие волновые числа мы называем нормальными. Решение этой задачи требует систематического исследования знаков вещественной и мнимой части в (16) и выполнения значительного объема вычислительной работы, т. к. волновое число  $k$  в том виде, в котором оно было найдено выше, определяется тремя независимо изменяющимися параметрами  $h_1, h_2, h_3$ . Напомним, что они подчинены всего одному априорному определяющему ограничению  $h_1^2 - h_2^2 > 1$ .

Совсем просто решается вопрос с вещественной частью волнового числа  $k$ : неравенству  $\operatorname{Re} k > 0$  при всех допустимых значениях параметров  $h_1, h_2, h_3$  удовлетворяют лишь значения  $a'_{1,3}$  и  $a'_{2,3}$ .

Таким образом, остается выяснить знаки величин  $b'_{1,3}$  и  $b'_{2,3}$  в области допустимых значений параметров  $h_1, h_2, h_3$  с тем, чтобы указать знак мнимой части волнового числа.

Прежде всего заметим, что знак  $b'_{1,2;3}$  совпадает со знаком величины

$$\tau_{1,2} = h_1^2h_3^2 - a_{1,2}h_3^2 - h_3^2 - b_{1,2}. \quad (19)$$

Замечая далее, что

$$b_{1,2} = \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}},$$



выражение для  $\tau_{1,2}$  можно преобразовать в

$$\tau_{1,2} = h_3^2(h_1^2 - 1) - h_3^2 \frac{a_{1,2}^2 + 2h_2^2 - h_1^2}{a_{1,2}} \quad (20)$$

или

$$\tau_{1,2} = \frac{h_3^2}{a_{1,2}} [-a_{1,2}^2 + (h_1^2 - 1)a_{1,2} + h_1^2 - 2h_2^2]. \quad (21)$$

Заметим, что в силу своего определения  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$  в области допустимых значений параметров  $h_1, h_2, h_3$ . Следовательно, можно заключить, что

$$\begin{aligned} \text{sign } \tau_1 &= \text{sign} [-a_1^2 + (h_1^2 - 1)a_1 + h_1^2 - 2h_2^2], \\ \text{sign } \tau_2 &= -\text{sign} [-a_2^2 + (h_1^2 - 1)a_2 + h_1^2 - 2h_2^2]. \end{aligned} \quad (22)$$

Продолжая рассуждения, связанные с оценкой знаков величины  $\tau_{1,2}$ , рассмотрим вспомогательный квадратный трехчлен

$$\delta(\kappa) = -\kappa^2 + (h_1^2 - 1)\kappa + h_1^2 - 2h_2^2. \quad (23)$$

Оценим его знак для различных диапазонов изменения переменной  $\kappa$ . Определим сначала его корни

$$\kappa_{1,2} = \frac{-(h_1^2 - 1) \pm \sqrt{(h_1^2 - 1)^2 + 4(h_1^2 - 2h_2^2)}}{-2}. \quad (24)$$

Для дальнейшего анализа необходимо исследовать знак дискриминанта квадратного трехчлена (23). Обозначая указанный дискриминант через  $\varsigma$ , имеем

$$\varsigma = (h_1^2 - 1)^2 + 4(h_1^2 - 2h_2^2). \quad (25)$$

Будем рассматривать дискриминант  $\varsigma$  как квадратный трехчлен от переменной  $\xi = h_1^2 - 1$ . Нас будет интересовать лишь положительный диапазон изменения переменной  $\xi$ . Ясно, что

$$\varsigma = \xi^2 + 4\xi + 4(1 - 2h_2^2).$$

Корни  $\varsigma$  определяются как

$$\xi_{1,2} = 2(-1 \pm \sqrt{2}h_2). \quad (26)$$

В области значений  $\xi > 0$  может располагаться только корень  $\xi_1$ , да и то только, когда выполняется неравенство  $h_2^2 > 1/2$ . Учитывая все сказанное выше, можно заключить, что оценка знака дискриминанта  $\varsigma$  в зависимости от тех или иных ограничений распадается на три случая

- (i)  $\varsigma < 0$ , если  $h_1^2 - h_2^2 > 1$ ,  $h_2^2 > 1/2$  и  $\xi < \xi_1$ ;
- (ii)  $\varsigma > 0$ , если  $h_1^2 - h_2^2 > 1$ ,  $h_2^2 < 1/2$ ;
- (iii)  $\varsigma > 0$ , если  $h_1^2 - h_2^2 > 1$ ,  $h_2^2 > 1/2$  и  $\xi > \xi_1$ .

Исследуем каждый из указанных выше вариантов.

В случае (i), который характеризуется априорным определяющим неравенством  $h_1^2 - h_2^2 > 1$  и определяющими неравенствами  $h_2^2 > 1/2$ ,  $0 < h_1^2 - 1 < 2(-1 + \sqrt{2}h_2)$ , дискриминант  $\varsigma$  отрицателен и, следовательно, квадратный трехчлен  $\delta$  не имеет вещественных корней. Поэтому трехчлен  $\delta$  принимает только отрицательные значения, откуда заключаем, что  $\tau_1 < 0$ ,  $\tau_2 > 0$ . Неравенства  $\text{Re } k > 0$ ,  $\text{Im } k > 0$ , таким образом, выполняются, если в выражении для волнового числа (16) выбрать индексы 2 и 3. Исследование неравенств  $h_1^2 - h_2^2 > 1$  и  $0 < h_1^2 - 1 < 2(-1 + \sqrt{2}h_2)$  показывает, что они несовместны, поэтому случай (i) следует исключить из рассмотрения.

В случае (ii), который характеризуется априорным определяющим неравенством  $h_1^2 - h_2^2 > 1$  и еще одним определяющим неравенством  $h_2^2 < 1/2$ , дискриминант  $\varsigma$  положителен; квадратный трехчлен  $\delta$  имеет ровно два вещественных корня  $\kappa_1, \kappa_2$ , которые удовлетворяют неравенствам  $\kappa_1 < 0$ ,  $\kappa_2 > 0$ . Ясно, что  $\tau_1 > 0$ , только если  $a_1 < \kappa_2$ ;  $\tau_2 > 0$ , только если  $a_2 < \kappa_1$ . Заметим, что неравенства  $a_1 < \kappa_2$  и  $a_2 < \kappa_1$  не имеют смысла определяющих ограничений,

поскольку они устанавливают ограничения на параметр  $h_3$ , который зависит от циклической частоты  $\omega$ . Неравенства  $\text{Re } k > 0$ ,  $\text{Im } k > 0$ , таким образом, выполняются, если в выражении для волнового числа (16) выбрать: (ii-1) номера 1 и 3 при условии  $a_1 < \kappa_2$ ; (ii-2) номера 2 и 3 при условии  $a_2 < \kappa_1$ . В пределах исследуемого случая пока остается открытым вопрос о спектре частот, подчиняющихся неравенствам  $a_1 > \kappa_2$  или  $0 > a_2 > \kappa_1$ : при априорном определяющем ограничении  $h_1^2 - h_2^2 > 1$  и определяющем ограничении  $h_2^2 < 1/2$  неравенство  $\text{Im } k > 0$ , обеспечивающее нормальный характер затухания плоской волны, никогда не удовлетворяется, если частота подчинена ограничению  $a_1 > \kappa_2$  или  $0 > a_2 > \kappa_1$ .

В случае (iii), который характеризуется априорным определяющим неравенством  $h_1^2 - h_2^2 > 1$  и определяющими неравенствами  $h_2^2 > 1/2$ ,  $h_1^2 - 1 > 2(-1 + \sqrt{2}h_2)$ , второе из которых является следствием априорного определяющего неравенства, дискриминант  $\varsigma$  положителен; квадратный трехчлен  $\delta$  имеет ровно два вещественных корня  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , второй из которых положителен, а знак первого корня необходимо выяснить. Заметим, что справедливо неравенство  $\kappa_1 < \kappa_2$ . На основании (24) имеем

$$\kappa_1 = \frac{-(h_1^2 - 1) + \sqrt{(h_1^2 - 1)^2 + 4(h_1^2 - 2h_2^2)}}{-2}, \quad (27)$$

т. е. знак  $\kappa_1$  (положительный или отрицательный) может быть указан в зависимости от выполнения равенств

$$\begin{aligned} \xi &> \sqrt{\xi^2 + 4\xi + 4(1 - 2h_2^2)}, \\ \xi &< \sqrt{\xi^2 + 4\xi + 4(1 - 2h_2^2)}, \end{aligned}$$

которые сводятся соответственно к

$$\begin{aligned} h_1^2 - 1 &< 2h_2^2 - 1, \\ h_1^2 - 1 &> 2h_2^2 - 1. \end{aligned}$$

В рамках рассматриваемого случая имеется априорное определяющее ограничение  $h_1^2 - h_2^2 > 1$ , которое не противоречит ограничению  $h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1$ , только если выполняется неравенство  $h_2^2 > 1$ . Суммируя все рассуждения, можно сделать следующий вывод. В рамках (iii) неравенства  $\text{Re } k > 0$ ,  $\text{Im } k > 0$  удовлетворяются, если в выражении для волнового числа (16) выбрать:

- (iii-1-1) индексы 2 и 3 при выполнении неравенств  $h_1^2 - h_2^2 > 1$ ,  $h_2^2 > 1$  и дополнительного определяющего ограничения  $h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1$ ;
- (iii-1-2) индексы 2, 3, а также 1, 3 при выполнении  $h_1^2 - h_2^2 > 1$ ,  $h_2^2 > 1$  и дополнительного определяющего ограничения  $h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1$  и ограничения на частоту  $0 < \kappa_1 < a_1 < \kappa_2$ ;
- (iii-2-1) индексы 1 и 3 при выполнении  $h_1^2 - h_2^2 > 1$  и дополнительного определяющего ограничения  $h_1^2 - 1 > 2h_2^2 - 1$  и ограничения на частоту  $a_1 < \kappa_2$ ;
- (iii-2-2) индексы 2 и 3 при выполнении  $h_1^2 - h_2^2 > 1$  и дополнительного определяющего ограничения  $h_1^2 - 1 > 2h_2^2 - 1$  и ограничения на частоту  $a_2 < \kappa_1 < 0$ .

Таким образом, нормальные волновые числа  $k$  плоских GНИИ-термоупругих волн, т.е. волновые числа удовлетворяющие неравенствам  $\text{Re } k > 0$ ,  $\text{Im } k > 0$ , определены во всем допустимом диапазоне изменения параметров  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ .

**3. Разделение пространственных переменных в связанных уравнениях GНИИ-термоупругости для цилиндрической области.** Метод разделения переменных является одним из самых эффективных при решении граничных задач для линейных уравнений в частных производных и систем таких уравнений. Сам метод и его реализация излагаются

практически во всех без исключения руководствах по математической физике (см., например, [27], [28], [29], [30]).

Далее будем рассматривать только гармоническую зависимость перемещений  $\mathbf{u}$  и приращений температуры  $\theta$  от времени

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{-i\omega t}, \quad \theta = \Theta e^{-i\omega t},$$

где  $\omega$  есть циклическая частота изменения гармонических полей смещений и приращений температуры;  $\mathbf{U}$ ,  $\Theta$  — комплексные амплитуды.

Тогда систему уравнений (2) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} - \alpha \nabla \Theta + \omega^2 \rho \mathbf{U} &= \mathbf{0}, \\ (1 - ih_3^2) \nabla^2 \Theta + \frac{\omega^2}{l^2} \Theta + \frac{\alpha \omega^2}{\Lambda} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Построим решения системы дифференциальных уравнений в частных производных (2) для неограниченного кругового цилиндра в форме нормальных гармонических волн, распространяющихся вдоль оси цилиндра, предполагая, что боковая поверхность цилиндра свободна и теплоизолирована. Эти решения должны содержать *достаточное* количество произвольных постоянных с тем, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности волновода.

Для определения указанных решений системы (1) представим вектор  $\mathbf{U}$  в виде разложения Гельмгольца на безвихревую и вихревую составляющие

$$\mathbf{U} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi, \quad (2)$$

где  $\Phi$  — скалярный потенциал,  $\Psi$  — векторный потенциал. Для однозначной определенности векторного потенциала необходимо учесть также дополнительное условие, которое обычно называют калибровочным условием (gauge condition)

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \quad (3)$$

Подставляя разложение Гельмгольца (2) в систему (1), получим

$$\begin{aligned} \nabla ((\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi - \alpha \Theta + \omega^2 \rho \Phi) + \nabla \times (\omega^2 \rho \Psi + \mu \nabla^2 \Psi) &= \mathbf{0}, \\ (1 - ih_3^2) \nabla^2 \Theta + \frac{\omega^2}{l^2} \Theta + \frac{\alpha \omega^2}{\Lambda} \nabla^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ясно, что все уравнения системы (4) удовлетворяются, если

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho \Psi + \mu \nabla^2 \Psi &= \mathbf{0}, \\ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi - \alpha \Theta + \omega^2 \rho \Phi &= 0, \\ (1 - ih_3^2) \nabla^2 \Theta + \frac{\omega^2}{l^2} \Theta + \frac{\alpha \omega^2}{\Lambda} \nabla^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь волновые потенциалы перемещений и приращения температуры связаны только через посредство второго и третьего уравнений.

Для векторного потенциала  $\Psi$  имеем независимое векторное уравнение (уравнение Гельмгольца)

$$\nabla^2 \Psi + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Для дальнейшего исследования необходимо ввести цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , направив координатную ось  $z$  вдоль оси волновода. Физические компоненты вектора перемещения  $\mathbf{u}$  в этой системе координат мы будем представлять в форме

$$u_r = U e^{-i\omega t}, \quad u_\varphi = V e^{-i\omega t}, \quad u_z = W e^{-i\omega t},$$

где  $U, V, W$  являются физическими компонентами вектора комплексной амплитуды  $\mathbf{U}$  в цилиндрической системе координат.

Для приращений температуры по-прежнему имеем

$$\theta = \Theta e^{-i\omega t}.$$

Векторное уравнение (6) в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , представленное через физические компоненты векторного потенциала  $\Psi_r, \Psi_\varphi, \Psi_z$ , будет иметь вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi_r &= 0, \\ \nabla^2 \Psi_\varphi - \frac{\Psi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi} + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi_\varphi &= 0, \\ \nabla^2 \Psi_z + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi_z &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где для оператора Лапласа в цилиндрической системе координат имеем следующее выражение:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Компоненты  $\Psi_r, \Psi_\varphi$  связаны двумя первыми уравнениями системы дифференциальных уравнений в частных производных (7). Для определения компоненты  $\Psi_z$  имеется отдельное уравнение, и мы рассмотрим его позднее.

Относительно физических компонент  $\Psi_r, \Psi_\varphi$  необходимо решить связанную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi_r &= 0, \\ \nabla^2 \Psi_\varphi - \frac{\Psi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi} + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для этого представим указанные компоненты в виде

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, \varphi, z) &= A_r(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_\varphi(r, \varphi, z) &= A_\varphi(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k$  — волновое число (или постоянная распространения), значения  $n = 0, 1, 2, \dots$  нумеруют окружные гармоники и определяют окружной профиль волны. Число  $n$  также называют азимутальным порядком волны.<sup>4</sup>

На основании формул (9) для определения компонент  $A_r, A_\varphi$  из (8) получим следующую, также пока еще связанную, систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_r}{dr} - \left( \frac{n^2 + 1}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \right) A_r + \frac{2n}{r^2} A_\varphi &= 0, \\ \frac{d^2 A_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_\varphi}{dr} - \left( \frac{n^2 + 1}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \right) A_\varphi + \frac{2n}{r^2} A_r &= 0. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая почленно приведенные выше уравнения, можно относительно суммы  $A_r + A_\varphi$  и разности  $A_r - A_\varphi$  получить уже несвязанные уравнения

<sup>4</sup>Осесимметричная волна характеризуется значением  $n = 0$ . Ясно, что линейные комбинации окружных гармоник вида (9) составляют волну сколь угодно сложного окружного профиля.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2}(A_r + A_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(A_r + A_\varphi) - \left( \frac{(n-1)^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \right) (A_r + A_\varphi) &= 0, \\ \frac{d^2}{dr^2}(A_r - A_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(A_r - A_\varphi) - \left( \frac{(n+1)^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \right) (A_r - A_\varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

которые можно интегрировать независимо друг от друга.

Полученные уравнения (10) являются уравнениями Бесселя.<sup>5</sup>

В дальнейшем мы будем оперировать с модифицированными функциями Бесселя (или функциями Бесселя мнимого аргумента), которые являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$\xi^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \xi \frac{dw}{d\xi} - (\xi^2 + \nu^2)w = 0.$$

Решение этого уравнения, ограниченное при  $\xi \rightarrow 0$ , находится в виде степенного ряда

$$I_\nu(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left( \frac{\xi}{2} \right)^{\nu + 2k}$$

и называется функцией Бесселя первого рода мнимого аргумента.

Решениями уравнений (10) являются линейные комбинации модифицированных функций Бесселя первого и второго рода. Однако в силу того, что функции Бесселя второго рода не удовлетворяют условиям ограниченности на оси цилиндра, то для  $A_r + A_\varphi$  и  $A_r - A_\varphi$ , если

ввести обозначение  $q_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}$ , получаем

$$\begin{aligned} A_r + A_\varphi &= C_3 I_{n-1}(q_2 r), \\ A_r - A_\varphi &= C_4 I_{n+1}(q_2 r). \end{aligned}$$

Здесь  $C_3, C_4$  — произвольные постоянные. Величина  $q_2$ , квадрат которой есть  $q_2^2 = -q_2'^2$ , называется „поперечным“ волновым числом.

Следовательно, для комплексных амплитуд  $A_r, A_\varphi$  векторного потенциала  $\Psi$  имеем формулы

$$\begin{aligned} A_r &= C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r), \\ A_\varphi &= C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r). \end{aligned}$$

Таким образом, сами компоненты  $\Psi_r, \Psi_\varphi$  векторного потенциала  $\Psi$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_\varphi(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим третье уравнение системы (7) относительно компоненты  $\Psi_z$ . Его решение, как и выше, будем искать в форме

$$\Psi_z(r, \varphi, z) = A_z(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}.$$

Для определения комплексной амплитуды  $A_z$  получается уравнение

$$\frac{d^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr} - \left( \frac{n^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) A_z = 0,$$

<sup>5</sup>См., например: Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.; Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы). М.: Наука, 1968. 344 с.; Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.

решением которого, ограниченным на оси цилиндра, также является модифицированная функция Бесселя первого рода. Поэтому комплексная амплитуда  $A_z$  векторного потенциала находится как

$$A_z = C_5 I_n(q_2 r),$$

где  $C_5$  — произвольная постоянная. В результате, для физической компоненты  $\Psi_z$  векторного потенциала получаем следующее представление:

$$\Psi_z(r, \varphi, z) = C_5 I_n(q_2 r) \left\{ \begin{array}{l} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz}. \quad (12)$$

Второе и третье уравнения в системе (5) содержат лишь скалярный потенциал  $\Phi$  и комплексную амплитуду приращений температуры  $\Theta$  и составляют связанную систему дифференциальных уравнений в частных производных с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi - \alpha \Theta + \omega^2 \rho \Phi &= 0, \\ (1 - ih_3^2) \nabla^2 \Theta + \frac{\omega^2}{l^2} \Theta + \frac{\alpha \omega^2}{\Lambda} \nabla^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (13) представим через новую вспомогательную неизвестную функцию  $\Omega$  в форме

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Omega, \quad (14)$$

где  $a, b$  есть некоторые постоянные, причем будем считать, что функция  $\Omega$  также является решением уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \Omega + \gamma^2 \Omega = 0 \quad (15)$$

с некоторой постоянной  $\gamma$ , вообще говоря комплексной, имеющей смысл волнового числа гармонической связанной GNIII-термоупругой волны.

Выполняя подстановку (14) в систему (13) и учитывая (15), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} [\gamma^2(\lambda + 2\mu) - \omega^2 \rho] a \Omega + \alpha b \Omega &= 0, \\ -\frac{\alpha \omega^2 \gamma^2}{\Lambda} a \Omega + \left[ \frac{\omega^2}{l^2} - (1 - ih_3^2) \gamma^2 \right] b \Omega &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений относительно  $a \Omega$  и  $b \Omega$  будет иметь нетривиальное решение только при условии, что ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \gamma^2(\lambda + 2\mu) - \omega^2 \rho & \alpha \\ -\frac{\alpha \omega^2 \gamma^2}{\Lambda} & \frac{\omega^2}{l^2} - (1 - ih_3^2) \gamma^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Заметим, что аналогичный определитель получается при поиске волновых чисел  $k$  плоской гармонической связанной GNIII-термоупругой волны. Поэтому сразу же можно выписать в наиболее удобной форме биквадратное уравнение для определения  $\gamma$

$$(ih_3^2 - 1) \frac{\gamma^4}{k_{\parallel}^4} + (h_1^2 - ih_3^2) \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} - h_2^2 = 0, \quad (18)$$

где по-прежнему

$$\begin{aligned} c_l^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda}, \\ h_3^2 &= \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda}, \quad h_2^2 = \frac{c_l^2}{l^2}, \quad h_1^2 = 1 + \frac{c_l^2}{l^2} + s^2, \\ s^2 &= \frac{\alpha^2}{\rho \Lambda}, \quad k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}, \end{aligned}$$

и констатировать то обстоятельство, что величина  $\gamma$  обладает в точности такими же свойствами, что и волновое число плоской гармонической связанной GNIII-термоупругой волны.

Ниже нам потребуются постоянная

$$s_*^2 = \frac{\alpha^2}{\rho\Lambda_*},$$

безразмерная постоянная

$$\tilde{s}_* = \frac{s_*}{\sqrt{\omega}},$$

и еще две безразмерные постоянные

$$h_0^2 = \frac{\Lambda_* c_l}{R\Lambda}, \quad h_4^2 = \frac{s_*^2 R}{c_l}.$$

Ясно, что

$$h_3^2 = h_0^2 R k_{\parallel}, \quad \tilde{s}_* = \frac{h_4}{\sqrt{R k_{\parallel}}}.$$

Подчеркнем, что в силу данных выше определений а priori удовлетворяются определяющие неравенства

$$h_1 > 1, \quad h_1^2 - h_2^2 > 1. \quad (19)$$

Первое из них является следствием второго. Поэтому имеется только одно априорное определяющее ограничение на постоянные  $h_1, h_2, h_3$ .

В частности, для квадрата  $\gamma$  имеем

$$2 \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + \sqrt{(h_1^2 - ih_3^2)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)}}{ih_3^2 - 1}, \quad (20)$$

где квадратный корень двузначен.

Извлекая в (20) квадратный корень, находим два различных значения квадрата волнового числа

$$2 \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1}, \quad (21)$$

где

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2)^2 + 4h_3^4(2h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, \quad (22)$$

$$b_{1,2} = \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}.$$

Введем следующие обозначения с целью более компактного представления формул:

$$g^2 = k^2 - \frac{1 + ih_3^2 \omega^2}{1 + h_3^4 l^2},$$

$$p_j^2 = k^2 - \gamma_j^2 \quad (j = 1, 2).$$

Напомним, что при  $h_3 \rightarrow 0$  осуществляется переход к модели гиперболической термоупругости GNII; предельный переход  $h_3^{-1} \rightarrow 0$  позволяет перейти к соотношениям классической термоупругости GNI/СТЕ. При этом соответственно имеем:

$$\frac{1 + ih_3^2 \omega^2}{1 + h_3^4 l^2} \rightarrow \frac{\omega^2}{l^2}, \quad \frac{1 + ih_3^2 \omega^2}{1 + h_3^4 l^2} \rightarrow \frac{i\omega}{l_*^2};$$

$$\text{GNII} : g^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{l^2},$$

$$\text{GNI/СТЕ} : g^2 = k^2 - \frac{i\omega}{l_*^2}.$$

Здесь  $\frac{1}{l_*^2} = \frac{\kappa}{\Lambda_*}$ .

Заметим, что систематически используемые в дальнейшем изложении величины  $q_1^2, q_2^2, p_1^2, p_2^2, g^2$  отличаются *знаком* от принятых, например, в книге [1] в той части, где изложение касается распространения чисто упругих волн в цилиндрическом волноводе.

Для каждого из двух возможных значений квадрата волнового числа  $\gamma^2$  (см. (21)) с помощью однородной системы линейных уравнений (16) относительно постоянных  $a, b$  находим

$$a_j = b_j \frac{p_j^2 - g^2}{\frac{\alpha \omega^2}{\Lambda} \frac{1 + ih_3^2}{1 + h_3^4} \gamma_j^2} \quad (j = 1, 2),$$

откуда, не ограничивая общности, получаем

$$a_j = p_j^2 - g^2, \quad b_j = h\omega \frac{\alpha}{\Lambda_*} \gamma_j^2 \quad (j = 1, 2), \quad (23)$$

где

$$h = h_3^2 \frac{1 + ih_3^2}{1 + h_3^4}.$$

В случае классической термоупругости GNI/CTE в формуле (23) следует положить  $h = i$ . Итак, связанные поля  $\Phi$  и  $\Theta$  определяются как линейные комбинации

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \Omega|_{\gamma=\gamma_2}, \quad (24)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Для нахождения функции  $\Omega$  необходимо разделить переменные в уравнении Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \gamma_j^2 \Omega = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (25)$$

Для этого его решения будем разыскивать, отделяя все три пространственных координаты, в форме

$$\Omega = F(r) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz}. \quad (26)$$

При подстановке формулы (26) в (25), обозначая штрихом дифференцирование по переменной  $r$ , снова получаем уравнение Бесселя для определения комплексной амплитуды  $F$

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) - \left( \frac{n^2}{r^2} + k^2 - \gamma_j^2 \right) F(r) = 0. \quad (27)$$

Поэтому функция  $\Omega$ , определяющая форму скалярного потенциала перемещений и температуры, находится в виде

$$\Omega|_{\gamma=\gamma_j} = I_n(p_j r) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} \quad (j = 1, 2). \quad (28)$$

Следовательно, необходимые нам решения связанной системы (13) будут представляться формулой

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \left[ C_1 \begin{pmatrix} p_1^2 - g^2 \\ h\omega \frac{\alpha}{\Lambda_*} \gamma_1^2 \end{pmatrix} I_n(p_1 r) + C_2 \begin{pmatrix} p_2^2 - g^2 \\ h\omega \frac{\alpha}{\Lambda_*} \gamma_2^2 \end{pmatrix} I_n(p_2 r) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz}. \quad (29)$$

Таким образом, удается построить решение уравнений связанной GNIII-термоупругости, содержащее пять произвольных постоянных  $C_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ). Как мы увидим ниже, за счет выбора указанных произвольных постоянных можно добиться того, чтобы построенное решение



удовлетворяло всем граничным условиям на боковой поверхности цилиндрического волновода.

Используемые в формулах для перемещений и температуры величины  $q_1, q_2, p_1, p_2, g$  в силу своего определения многозначны. С целью контроля их значений произведем явное вычисление соответствующих квадратных корней. Для этого воспользуемся тем, что извлечение квадратного корня в выражении

$$q = \sqrt{k^2 - \xi^2} \quad (30)$$

приводит к двум следующим значениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} q &= \pm \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 + 4Q^2}}{2}}, \\ \operatorname{Im} q &= \frac{Q}{\operatorname{Re} q}, \end{aligned} \quad (31)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} P &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} \xi)^2 + (\operatorname{Im} \xi)^2, \\ Q &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) - (\operatorname{Re} \xi)(\operatorname{Im} \xi). \end{aligned}$$

Ясно, что приведенные только что формулы вычисления значений  $\sqrt{k^2 - \xi^2}$  пригодны только в том случае, когда  $\operatorname{Re} \sqrt{k^2 - \xi^2} \neq 0$ . Это условие не выполняется только тогда, когда разность  $k^2 - \xi^2$  есть отрицательное вещественное число.

На основании (30), (31) для величин

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{k^2 - k_{\parallel}^2}, \quad k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}, \\ q_2 &= \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}, \quad k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2} \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} q_1 &= \pm \sqrt{\frac{P_{\parallel} + \sqrt{P_{\parallel}^2 + 4Q_{\parallel}^2}}{2}}, \\ \operatorname{Im} q_1 &= \frac{Q_{\parallel}}{\operatorname{Re} q_1}, \\ P_{\parallel} &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - k_{\parallel}^2, \\ Q_{\parallel} &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k); \\ \operatorname{Re} q_2 &= \pm \sqrt{\frac{P_{\perp} + \sqrt{P_{\perp}^2 + 4Q_{\perp}^2}}{2}}, \\ \operatorname{Im} q_2 &= \frac{Q_{\perp}}{\operatorname{Re} q_2}, \\ P_{\perp} &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - k_{\perp}^2, \\ Q_{\perp} &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k). \end{aligned}$$

Квадратный корень в выражении

$$g = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \xi^2 = k_{\parallel}^2 h_2^2 \frac{1 + ih_3^2}{1 + h_3^4},$$

поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \xi &= \pm h_2 k_{\parallel} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + h_3^4}}{2(1 + h_3^4)}}, \\ \operatorname{Im} \xi &= \frac{k_{\parallel}^2 h_2^2 h_3^2}{2(1 + h_3^4) \operatorname{Re} \xi}, \end{aligned} \quad (32)$$

извлекается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g &= \pm \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 + 4Q^2}}{2}}, \\ \operatorname{Im} g &= \frac{Q}{\operatorname{Re} g}, \\ P &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} \xi)^2 + (\operatorname{Im} \xi)^2, \\ Q &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) - (\operatorname{Re} \xi)(\operatorname{Im} \xi). \end{aligned}$$

В формуле (32) необходимо выбрать один из знаков (все равно какой, т. к. дальнейшие вычисления не зависят от конкретизации знака). По смыслу величина  $\xi$  есть комплексное волновое число плоской чисто термической (т. е. не сопровождающейся деформацией) волны. Поскольку термические волны в чистом виде в термоупругой среде не существуют, то значение  $\xi$  имеет указанный выше смысл только с этой поправкой.

Остается рассмотреть квадратные корни в

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{k^2 - \gamma_1^2}, \\ p_2 &= \sqrt{k^2 - \gamma_2^2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma_{1,2}^2}{k_{\parallel}^2} &= \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1}, \\ a_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2)^2 + 4h_3^4(2h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, \\ b_{1,2} &= \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \sqrt{1 + h_3^4 \operatorname{Re} \gamma_{1,2}} &= \\ &= \pm \sqrt{\frac{h_3^4 + h_3^2 b_{1,2} + h_1^2 - a_{1,2} + \sqrt{(h_3^4 + h_3^2 b_{1,2} + h_1^2 - a_{1,2})^2 + (h_1^2 h_3^2 - a_{1,2} h_3^2 - h_3^2 - b_{1,2})^2}}{2}}, \\ \frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \sqrt{1 + h_3^4 \operatorname{Im} \gamma_{1,2}} &= \frac{h_1^2 h_3^2 - a_{1,2} h_3^2 - h_3^2 - b_{1,2}}{2 \frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \sqrt{1 + h_3^4 \operatorname{Re} \gamma_{1,2}}}, \end{aligned} \tag{33}$$

значения  $p_1, p_2$  вычисляются как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p_1 &= \pm \sqrt{\frac{P_1 + \sqrt{P_1^2 + 4Q_1^2}}{2}}, \\ \operatorname{Im} p_1 &= \frac{Q_1}{\operatorname{Re} p_1}, \\ P_1 &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} \gamma_1)^2 + (\operatorname{Im} \gamma_1)^2, \\ Q_1 &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) - (\operatorname{Re} \gamma_1)(\operatorname{Im} \gamma_1); \\ \operatorname{Re} p_2 &= \pm \sqrt{\frac{P_2 + \sqrt{P_2^2 + 4Q_2^2}}{2}}, \\ \operatorname{Im} p_2 &= \frac{Q_2}{\operatorname{Re} p_2}, \\ P_2 &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} \gamma_2)^2 + (\operatorname{Im} \gamma_2)^2, \\ Q_2 &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) - (\operatorname{Re} \gamma_2)(\operatorname{Im} \gamma_2). \end{aligned}$$

В формуле (33) также необходимо указать один из знаков (все равно какой, т.к. интересные нас вычисления не зависят от того, какой именно знак выбран). Заметим, что постоянные  $\gamma_1, \gamma_2$  — скорости распространения плоских связанных GНИИ-термоупругих волн.

**4. Связанные перемещения, напряжения и температура (модель GНИИ обобщенной термоупругости).** Решение термоупругой задачи подразумевает определение перемещений, деформаций и напряжений. С этой целью мы привлечем стандартные уравнения Коши для деформаций (3) и определяющие уравнения линейного изотропного термоупругого тела (2). Приведем необходимые формулы (см., например, [4, с. 168-179], [23, pp. 600-602]) для расчета перемещений, деформаций и напряжений в термоупругом теле, используя цилиндрическую систему координат,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha\theta, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\varepsilon + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) - \alpha\theta, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \alpha\theta, \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), \quad \sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \sigma_{\varphi z} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Приведем также выражения для физических компонент перемещений через скалярный и векторный потенциалы, опуская при этом гармоническую экспоненту,

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial z}, \\ u_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}, \\ u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\Psi_\varphi}{r} + \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

При проведении преобразований нам потребуются также следующие рекуррентные соотношения между модифицированными функциями Бесселя:

$$\begin{aligned} \xi I_{\nu-1}(\xi) - \xi I_{\nu+1}(\xi) &= 2\nu I_\nu(\xi), \\ I_{\nu-1}(\xi) + I_{\nu+1}(\xi) &= 2 \frac{d}{d\xi} I_\nu(\xi), \end{aligned}$$

и, кроме того, формулы дифференцирования модифицированных функций Бесселя

$$\begin{aligned} \xi \frac{d}{d\xi} I_\nu(\xi) + \nu I_\nu(\xi) &= \xi I_{\nu-1}(\xi), \\ \xi \frac{d}{d\xi} I_\nu(\xi) - \nu I_\nu(\xi) &= \xi I_{\nu+1}(\xi). \end{aligned}$$

С их помощью можно найти производные

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} I_n(p\xi) &= pI_{n+1}(p\xi) + \frac{n}{\xi} I_n(p\xi), \\ \frac{d}{d\xi} I_{n-1}(q\xi) &= qI_n(q\xi) + \frac{n-1}{\xi} I_{n-1}(q\xi), \\ \frac{d}{d\xi} I_{n+1}(q\xi) &= qI_n(q\xi) - \frac{n+1}{\xi} I_{n+1}(q\xi),\end{aligned}$$

участвующие в последующих преобразованиях.

С учетом (29), (11), (12) для форм гармонических связанных GНИИ-термоупругих волн получаем следующие комплексные представления:

$$\begin{aligned}U &= \left[ C_1 (p_1^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_2 (p_2^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) + (\mp ik) \left( C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz}, \\ \\ V &= \left[ (\pm ik) \left( C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right. \\ &\quad \left. - C_5 \left( \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n}{r} \{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz}, \\ \\ W &= \left[ \pm (ik) \{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \} + \right. \\ &\quad \left. + (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz}.\end{aligned}\tag{4}$$

Подсчитывая частные производные от физических компонент перемещений и температуры по пространственным координатам, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \left[ C_1 (p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_1^2 r^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + C_2 (p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_2^2 r^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \mp \right. \\ &\quad \left. \mp (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n-1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm (ik) C_4 \left\{ q_2 I_n(q_2 r) - \frac{n+1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + C_5 \left\{ \frac{n^2 - n}{r^2} I_n(q_2 r) + \frac{q_2 n}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = & \left[ C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ -\frac{n^2}{r} I_n(p_1 r) - n p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \\ & \left. + C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ -\frac{n^2}{r} I_n(p_2 r) - n p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right\} \pm \right. \\ & \left. \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2}{q_2 r} I_n(q_2 r) + n I_{n+1}(q_2 r) \right\} \mp (ik) C_4 n I_{n+1}(q_2 r) + \right. \\ & \left. + C_5 \frac{n^2}{r} I_n(q_2 r) \right] \left\{ \begin{array}{l} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial z} = & \left[ \pm (ik) C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right\} \pm \right. \\ & \left. \pm (ik) C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right\} + \right. \\ & \left. + k^2 C_3 \left\{ \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + I_{n+1}(q_2 r) \right\} - k^2 C_4 I_{n+1}(q_2 r) \pm \right. \\ & \left. \pm (ik) C_5 \frac{n}{r} I_n(q_2 r) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = & \left[ C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{n p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \\ & \left. + C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{n p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \pm \right. \\ & \left. \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n - 1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm \right. \\ & \left. \pm (ik) C_4 \left\{ q_2 I_n(q_2 r) - \frac{n + 1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} - \right. \\ & \left. - C_5 \left\{ \frac{n^2 - n + q_2^2 r^2}{r^2} I_n(q_2 r) - \frac{q_2}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = & \left[ -C_1 \frac{n^2}{r} (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) - C_2 \frac{n^2}{r} (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \pm \right. \\ & \left. \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2}{q_2 r} I_n(q_2 r) + n I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm (ik) C_4 n I_{n+1}(q_2 r) - \right. \\ & \left. - C_5 \left\{ \frac{n^2}{r} I_n(q_2 r) + n q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = & \left[ \mp (ik) C_1 \frac{n}{r} (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) \mp (ik) C_2 \frac{n}{r} (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) - \right. \\ & \left. - k^2 C_3 \left\{ \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + I_{n+1}(q_2 r) \right\} - k^2 C_4 I_{n+1}(q_2 r) - \right. \\ & \left. \mp (ik) C_5 \left\{ \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial r} = & \left[ \pm (ik) C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right\} \pm \right. \\ & \left. \pm (ik) C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right\} + \right. \\ & \left. + (C_3 - C_4) q_2 \left\{ \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} = & \left[ \mp (ik) (C_1(p_1^2 - g^2) n I_n(p_1 r) + C_2(p_2^2 - g^2) n I_n(p_2 r)) - \right. \\ & \left. - (C_3 - C_4) n q_2 I_n(q_2 r) \right] \left\{ \begin{array}{l} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = [-k^2 C_1(p_1^2 - g^2)I_n(p_1r) - k^2 C_2(p_2^2 - g^2)I_n(p_2r) \pm \pm(ik)(C_3 - C_4)q_2 I_n(q_2r)] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}.$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = h\omega \frac{s_*^2 \rho}{\alpha} \left[ C_1(k^2 - p_1^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_1r) + p_1 I_{n+1}(p_1r) \right) + C_2(k^2 - p_2^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_2r) + p_2 I_{n+1}(p_2r) \right) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

где  $s_*^2 = \alpha^2 / (\rho \Lambda_*)$ .

Затем на основании формул Коши и определяющих уравнений термоупругости могут быть получены выражения для деформаций и напряжений. Мы выпишем лишь три компоненты тензора напряжений, которые существенны для дальнейшего изложения

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = \mu e^{\pm ikz} \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\} & \left[ \pm(2ik)C_1(p_1^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_1r) + p_1 I_{n+1}(p_1r) \right) \pm \right. \\ & \pm(2ik)C_2(p_2^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_2r) + p_2 I_{n+1}(p_2r) \right) + C_3 \left( \frac{q_2 n}{r} + \frac{2nk^2}{q_2 r} \right) I_n(q_2r) + \\ & + C_3(k^2 + q_2^2) I_{n+1}(q_2r) - C_4 \frac{nq_2}{r} I_n(q_2r) - \\ & \left. - C_4(k^2 + q_2^2) I_{n+1}(q_2r) \pm (ik) \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2r) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} = \mu e^{\pm ikz} \left\{ \begin{array}{l} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} & \left[ 2C_1(p_1^2 - g^2) \left( \frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_1r) - \frac{n}{r} p_1 I_{n+1}(p_1r) \right) + \right. \\ & + 2C_2(p_2^2 - g^2) \left( \frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_2r) - \frac{n}{r} p_2 I_{n+1}(p_2r) \right) \pm \\ & \pm(ik)C_3 \left( \frac{4n^2 - 4n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2r) + \frac{2(n-1)}{r} I_{n+1}(q_2r) \right) \pm \\ & \pm(ik)C_4 \left( q_2 I_n(q_2r) - \frac{2(n+1)}{r} I_{n+1}(q_2r) \right) + \\ & \left. + C_5 \left( \frac{2n - 2n^2 - q_2^2 r^2}{r^2} I_n(q_2r) + \frac{2q_2}{r} I_{n+1}(q_2r) \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \left[ (\lambda + 2\mu) \left( C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_1^2 r^2}{r^2} I_n(p_1r) - \frac{p_1}{r} I_{n+1}(p_1r) \right\} + \right. \right. \\ & + C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_2^2 r^2}{r^2} I_n(p_2r) - \frac{p_2}{r} I_{n+1}(p_2r) \right\} \mp \\ & \mp(ik)C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2r) + \frac{n-1}{r} I_{n+1}(q_2r) \right\} \mp \\ & \mp(ik)C_4 \left\{ -q_2 I_n(q_2r) + \frac{n+1}{r} I_{n+1}(q_2r) \right\} + \\ & \left. + C_5 \left\{ \frac{n^2 - n}{r^2} I_n(q_2r) + \frac{q_2 n}{r} I_{n+1}(q_2r) \right\} \right) + \\ & + \lambda \left( C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2 - k^2 r^2}{r^2} I_n(p_1r) + \frac{p_1}{r} I_{n+1}(p_1r) \right\} + \right. \\ & + C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2 - k^2 r^2}{r^2} I_n(p_2r) + \frac{p_2}{r} I_{n+1}(p_2r) \right\} \pm \\ & \pm(ik)C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2r) + \frac{n-1}{r} I_{n+1}(q_2r) \right\} \pm \\ & \left. \pm(ik)C_4 \left\{ -q_2 I_n(q_2r) + \frac{n+1}{r} I_{n+1}(q_2r) \right\} + \right. \end{aligned}$$

$$+C_5 \left\{ \frac{n-n^2}{r^2} I_n(q_2 r) - \frac{q_2 n}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} - C_1 \rho h \omega s_*^2 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1 r) - \\ - C_2 \rho h \omega s_*^2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2 r) \left[ \begin{array}{c} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right] e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}.$$

Постоянные  $C_j$  и волновое число  $k$ , входящие в выражения для форм гармонических волн, должны подбираться так, чтобы удовлетворялись граничные условия на боковой поверхности цилиндра. Мы считаем, что боковая поверхность волновода свободна и теплоизолирована. Последнее означает, что на поверхности волновода  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = 0$ , где  $\mathbf{h}$  — вектор потока тепла,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, нормальный поверхности волновода. В обобщенной GNIII-термоупругости вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  выражается через градиенты температуры  $\theta$  и температурного смещения  $\vartheta$  ( $\dot{\vartheta} = \theta$ ) согласно

$$\mathbf{h} = -\Lambda \nabla \vartheta - \Lambda_* \nabla \theta.$$

Поэтому граничные условия на боковой поверхности волновода будут иметь следующий вид:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=R} = 0, \quad \left( \Lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \Lambda_* \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

Последнее из них выражает отсутствие теплового потока во внутрь и во внешность цилиндрического волновода.

Заметим также, что на основании (11), (12) уравнение (3), выражающее условие калибровки векторного потенциала, позволяет заключить, что должно выполняться соотношение

$$(C_3 + C_4)q_2 \pm (ik)C_5 = 0. \quad (6)$$

Это соотношение устраняет, в чем мы убедимся ниже, избыточность произвольных постоянных в той форме решения, которое было построено ранее методом разделения переменных.

**5. Частотное уравнение для осесимметричных связанных GNIII-термоупругих волн в цилиндрическом волноводе.** Номер окружной гармоники существенно влияет на деформацию термоупругого волновода. При  $n = 0$  волна будет продольной и обладать осевой симметрией. Если  $n = 1$ , то характер деформации будет изгибным. Более высоким окружным гармоникам будут соответствовать иные, более сложные, типы деформаций.

Рассмотрим случай осевой симметрии, полагая окружной профиль термоупругой волны совпадающим с нулевой гармоникой, т.е. положим  $n = 0$  во всех предшествующих уравнениях. Компоненты  $\Psi_r$ ,  $\Psi_z$  векторного потенциала обращаются в нуль. В формулах (11) модифицированные функции Бесселя при  $n = 0$  становятся линейно зависимыми. Поэтому мы примем, что  $C_3 + C_4 = 0$  и  $C_5 = 0$ , а разность  $C_3 - C_4$  будет играть роль независимой произвольной постоянной.

Ясно, что в условиях осевой симметрии  $V = 0$ , а оставшиеся выражения для форм (4) существенно упрощаются и приобретают следующий вид:

$$U = [C_1 (p_1^2 - g^2) p_1 I_1(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) p_2 I_1(p_2 r) \mp \\ \mp (ik)(C_3 - C_4) I_1(q_2 r)] e^{\pm ikz},$$

$$W = [\pm (ik) \{C_1 (p_1^2 - g^2) I_0(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_0(p_2 r)\} + \\ + (C_3 - C_4) q_2 I_0(q_2 r)] e^{\pm ikz}.$$

Уравнение (6) в случае осевой симметрии заведомо удовлетворяется. Граничное условие для компоненты  $\sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0$  тензора напряжений также заведомо удовлетворяется. Остальные граничные условия из (5) дают с учетом найденных в предыдущем разделе работы выражений для компонент тензора напряжений три соотношения

$$(\lambda + 2\mu) \left[ C_1(p_1^2 - g^2)p_1 \left( \frac{1}{R}I_1(p_1R) + p_1I_2(p_1R) \right) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 \left( \frac{1}{R}I_1(p_2R) + p_2I_2(p_2R) \right) \mp \mp ik(C_3 - C_4) \left( \frac{1}{R}I_1(q_2R) + q_2I_2(q_2R) \right) \right] + \quad (1)$$

$$+ \frac{\lambda}{R} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2R) \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2R)] + + \lambda [-k^2 \{C_1(p_1^2 - g^2)I_0(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2R)\} \pm ik(C_3 - C_4)q_2I_0(q_2R)] - - C_1\rho h\omega s_*^2(k^2 - p_1^2)I_0(p_1R) - C_2\rho h\omega s_*^2(k^2 - p_2^2)I_0(p_2R) = 0,$$

$$\pm(2ik) \{C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2R)\} + + (k^2 + q_2^2)(C_3 - C_4)I_1(q_2R) = 0, \quad (2)$$

$$C_1(k^2 - p_1^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(k^2 - p_2^2)p_2I_1(p_2R) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) разделим на  $\rho\omega^2$  и, учитывая

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho\omega^2} = \frac{1}{k^2 - q_1^2}, \quad \frac{\lambda}{\rho\omega^2} = \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)},$$

где вводится обозначение

$$q_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}$$

(величина  $g_1$ , квадрат которой есть  $g_1^2 = -q_1^2$ , называется „поперечным“ волновым числом), после ряда преобразований приходим к

$$\frac{1}{k^2 - q_1^2} \left[ C_1(p_1^2 - g^2)p_1 \left( \frac{1}{R}I_1(p_1R) + p_1I_2(p_1R) \right) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 \left( \frac{1}{R}I_1(p_2R) + p_2I_2(p_2R) \right) \mp \mp ik(C_3 - C_4) \left( \frac{1}{R}I_1(q_2R) + q_2I_2(q_2R) \right) \right] + + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)R} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2R) \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2R)] + + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} [-k^2 \{C_1(p_1^2 - g^2)I_0(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2R)\} \pm ik(C_3 - C_4)q_2I_0(q_2R)] - - C_1 \frac{hs_*^2}{\omega} (k^2 - p_1^2)I_0(p_1R) - C_2 \frac{hs_*^2}{\omega} (k^2 - p_2^2)I_0(p_2R) = 0. \quad (4)$$

Обезразмерим уравнения, образующие систему (1)–(3), вводя следующие обозначения для безразмерных аналогов размерных величин:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= Rk, & \tilde{g} &= Rg, & \tilde{p}_1 &= Rp_1, & \tilde{p}_2 &= Rp_2, & \tilde{q}_1 &= Rq_1, & \tilde{q}_2 &= Rq_2, \\ \tilde{s}_* &= \frac{s_*}{\sqrt{\omega}}, & \tilde{C}_1 &= R^{-4}C_1, & \tilde{C}_2 &= R^{-4}C_2, & \tilde{C}_j &= R^{-2}C_j \quad (j = 3, 4, 5). \end{aligned} \quad (5)$$



В дальнейших выкладках, для более компактной записи соотношений будем опускать знак волны над безразмерными величинами (5). С учетом этого замечания система (1)–(3) в безразмерной форме (мы переставим также уравнения местами) будет иметь вид

$$\pm(2ik) \{C_1(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2)\} + \\ + (k^2 + q_2^2)(C_3 - C_4)I_1(q_2) = 0,$$

$$C_1(k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1) + C_2(k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{k^2 - q_1^2} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1 (I_1(p_1) + p_1 I_2(p_1)) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 (I_1(p_2) + p_2 I_2(p_2))] \mp \\ \mp (ik)(C_3 - C_4) (I_1(q_2) + q_2 I_2(q_2)) + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) + \\ + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2) \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2)] + \\ + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} [-k^2 \{C_1(p_1^2 - g^2)I_0(p_1) + \\ + C_2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2)\} \pm ik(C_3 - C_4)q_2 I_0(q_2)] - \\ - C_1 h s_*^2 (k^2 - p_1^2) I_0(p_1) - C_2 h s_*^2 (k^2 - p_2^2) I_0(p_2) = 0.$$

Приведенная выше система линейных уравнений относительно постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  имеет нетривиальное решение, только если ее определитель равен нулю. Таким образом получается частотное уравнение (дисперсионное соотношение) для связанных ГНП-термоупругих волн, распространяющихся в свободном теплоизолированном цилиндрическом волноводе, из которого можно определить зависимость волнового числа  $k$  от частоты  $\omega$ . Ясно, что в рассматриваемом случае частотное уравнение является чрезвычайно сложным и даже его качественное исследование представляется весьма трудоемким.

Так как  $I_1(\xi) = 0$  при  $\xi = 0$ , то система (6) имеет нетривиальные решения вида  $C_3 - C_4 \neq 0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ , если  $q_2 = 0$  (волновое число равно волновому числу чисто упругой поперечной волны). В этом случае  $\theta = 0$  и, следовательно, этот корень частотного уравнения не представляет никакого интереса, поскольку волновое число  $k = \frac{\omega}{c_t}$  не соответствует никакой распространяющейся термической волне. Поэтому мы выразим из первого уравнения системы (6) разность  $C_3 - C_4$

$$C_3 - C_4 = \mp \frac{2ik}{(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} (C_1(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2)) \quad (7)$$

и подставим результат в третье уравнение. В итоге приходим к системе двух линейных однородных уравнений относительно постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ . Определитель полученной системы имеет следующие элементы:

$$D_{11} = (k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1), \\ D_{12} = (k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2),$$

$$D_{21} = (k^2 - q_2^2)(p_1^2 - g^2)p_1 (p_1 I_0(p_1) - I_1(p_1)) - \frac{2k^2(I(q_2) - 1)}{k^2 + q_2^2} (k^2 - q_2^2)(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) + \\ + (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) - \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)}{k^2 + q_2^2} (p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) - \\ - (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)k^2(p_1^2 - g^2)I_0(p_1) + \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)I(q_2)}{k^2 + q_2^2} (p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) - \\ - h s_*^2 (k^2 - p_1^2)(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)I_0(p_1),$$

$$D_{22} = (k^2 - q_2^2)(p_2^2 - g^2)p_2(p_2I_0(p_2) - I_1(p_2)) - \frac{2k^2(I(q_2) - 1)}{k^2 + q_2^2}(k^2 - q_2^2)(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2) +$$

$$+ (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2) - \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)}{k^2 + q_2^2}(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2) -$$

$$- (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)k^2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2) + \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)I(q_2)}{k^2 + q_2^2}(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2) -$$

$$- hs_*^2(k^2 - p_2^2)(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)I_0(p_2).$$

Здесь вводится обозначение

$$I(\xi) = \frac{\xi I_0(\xi)}{I_1(\xi)} = 2 + \frac{\xi^2}{2^2} - \frac{\xi^4}{2^5 \cdot 3} + \frac{\xi^6}{2^9 \cdot 3} - \frac{\xi^8}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{13\xi^{10}}{2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5} - \dots$$

Частотное уравнение

$$D(\tilde{k}, \omega) = D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} = 0 \tag{8}$$

является чрезвычайно сложным для анализа. Из этого уравнения можно получить фазовую скорость гармонической GNIII-термоупругой волны, распространяющейся вдоль оси волновода, любой частоты. Для чисто упругой волны подобное уравнение было впервые получено Похгаммером в 1876 г. и позднее, в 1886 г., Кри. Оно было хорошо известно всем исследователям в области распространения упругих волн, однако численный анализ этого частотного уравнения оказался возможным лишь через полвека. Вывод частотных уравнений для чисто упругих гармонических волн в бесконечном цилиндрическом волноводе при  $n = 0$ ,  $n = 1$  имеется в монографиях [1, с. 193-199], [20, с. 58-73], [21, pp. 287-292].

Частотное уравнение (8) было проанализировано численно с помощью системы символьных вычислений Mathematica 6.0. Сначала задавались безразмерные параметры  $\frac{c_l}{c_t} = 1.9$ ,

$$h_0 = \sqrt{\frac{\Lambda_* c_l}{R\Lambda}} = 0.1, h_2 = 100.0, h_4 = \sqrt{\frac{s_* R}{c_l}} = 30.0;$$

затем для различных значений безразмерного отношения  $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_l} = \tilde{k}_{||}$  осуществлялся поиск корней частотного уравнения и

определялись безразмерные величины  $\tilde{k} = kR$ . Численный анализ проводился лишь для гармонического множителя  $e^{+ikz}$ . Поэтому физический смысл будут иметь лишь такие корни частотного уравнения, для которых  $\text{Im } \tilde{k} > 0$ . Если ограничиваться волнами, фазовые поверхности которых распространяются в положительном направлении вдоль оси цилиндра, то приходится также полагать, что  $\text{Re } \tilde{k} > 0$ . Результаты численного анализа<sup>6</sup> сведены в таблицу 1, которая приводится ниже (в ней указаны лишь несколько наиболее близко расположенных к нулю ( $\text{Re } \tilde{k} = 0, \text{Im } \tilde{k} = 0$ ) волновых чисел). На приводимых ниже рис. 1-3, 4-6, 7-9 даны графики (в форме поверхностей) величины  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  в зависимости от  $\text{Re } \tilde{k}$  и  $\text{Im } \tilde{k}$ , а также кривые пересечения указанных поверхностей с плоскостями  $\text{Im } \tilde{k} = 0$  и  $\text{Re } \tilde{k} = 0$ . Приведенный графический материал свидетельствует о том, что волновые числа GNIII-термоупругой волны не могут быть чисто мнимыми. Вопрос о наличии чисто вещественных корней частотного уравнения нуждается в дополнительном исследовании. На приводимых ниже рис. 10-12 изображены кривые, являющиеся сечениями поверхности  $|D| = |D|(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  плоскостью  $\text{Im } \tilde{k} = 0$  в окрестности значений  $\text{Re } \tilde{k} = 0.117481$ ,  $\text{Re } \tilde{k} = 0.235197$ ,  $\text{Re } \tilde{k} = 1.23043$ . При этом видно, что корни частотного уравнения  $\tilde{k} = 0.117481 + 1.47982 \cdot 10^{-12}i$ ,  $\tilde{k} = 0.235197 + 5.84438 \cdot 10^{-12}i$ ,  $\tilde{k} = 1.23043 + 7.6382 \cdot 10^{-11}i$  можно считать вещественными, если опираться только на данные численного анализа в пределах возможностей, предоставляемых Mathematica 6.0. Подтвердить окончательно вещественность этих волновых чисел пока не удастся; на самом деле они могут иметь весьма малую мнимую часть.

<sup>6</sup>Численный анализ рассматриваемой задачи был выполнен совместно с Д.А. Семеновым.

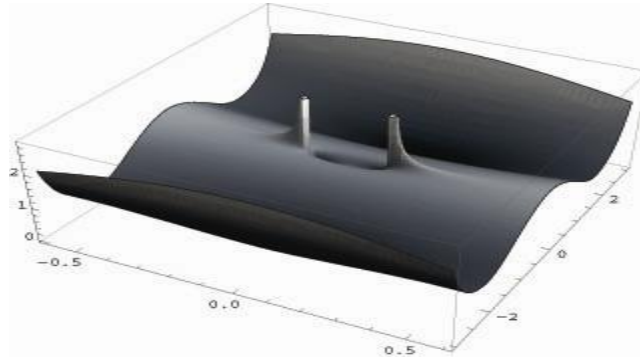


Рис. 1. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 0$ ) как функция от вещественной  $\text{Re } \tilde{k}$  и мнимой части  $\text{Im } \tilde{k}$  волнового числа  $\tilde{k}$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$

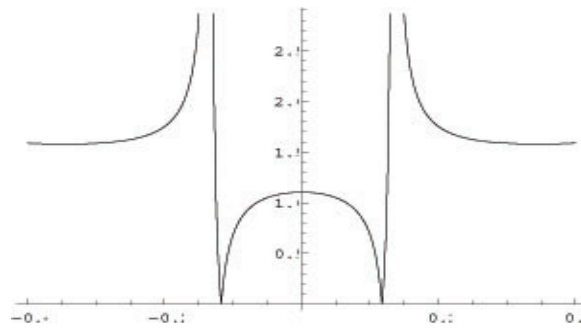


Рис. 2. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 0$ ) как функция от  $\text{Re } \tilde{k}$  ( $\text{Im } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$

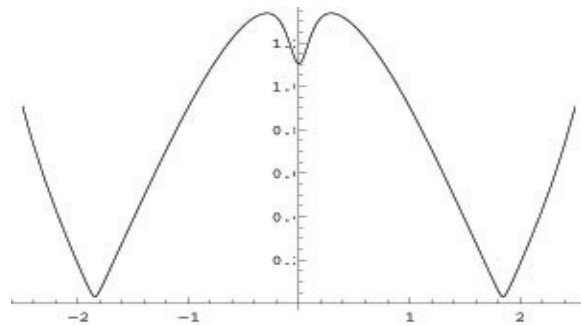


Рис. 3. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 0$ ) как функция от  $\text{Im } \tilde{k}$  ( $\text{Re } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$

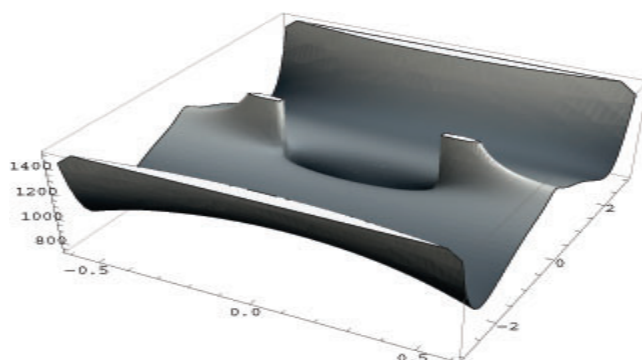


Рис. 4. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 0$ ) как функция от вещественной  $\text{Re } \tilde{k}$  и мнимой части  $\text{Im } \tilde{k}$  волнового числа  $\tilde{k}$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$

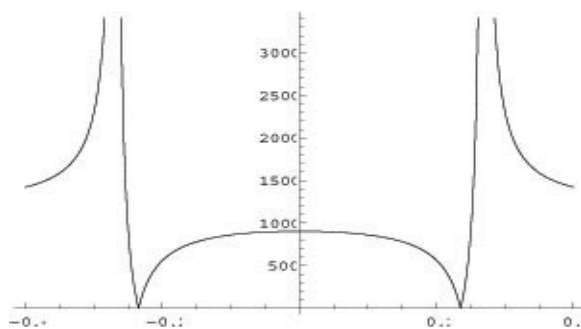


Рис. 5. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 0$ ) как функция от  $\text{Re } \tilde{k}$  ( $\text{Im } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$

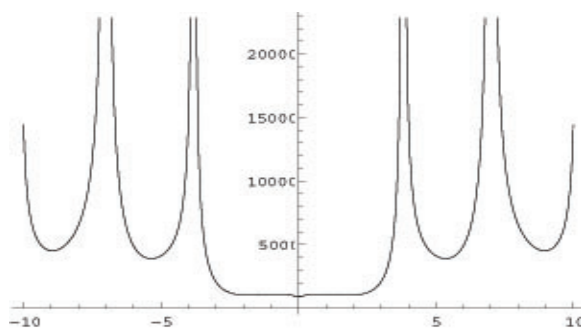


Рис. 6. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от  $\text{Im } \tilde{k}$  ( $\text{Re } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$

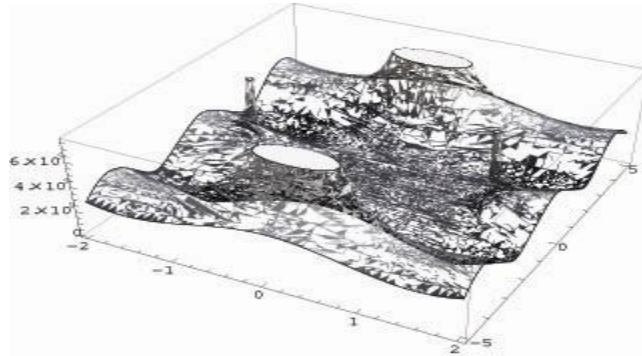


Рис. 7. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от вещественной  $\text{Re } \tilde{k}$  и мнимой части  $\text{Im } \tilde{k}$  волнового числа  $\tilde{k}$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$

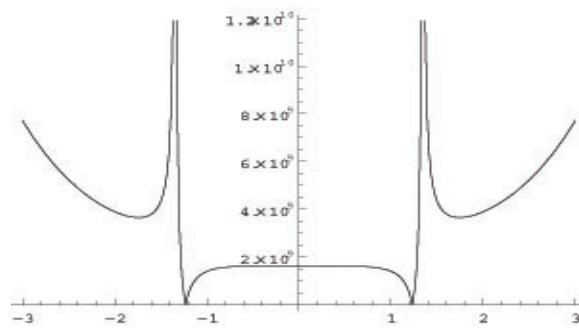


Рис. 8. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от  $\text{Re } \tilde{k}$  ( $\text{Im } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$

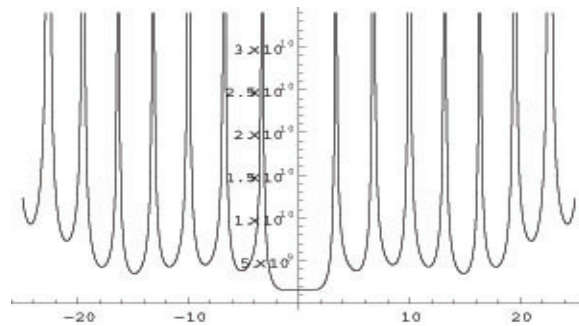


Рис. 9. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от  $\text{Im } \tilde{k}$  ( $\text{Re } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$

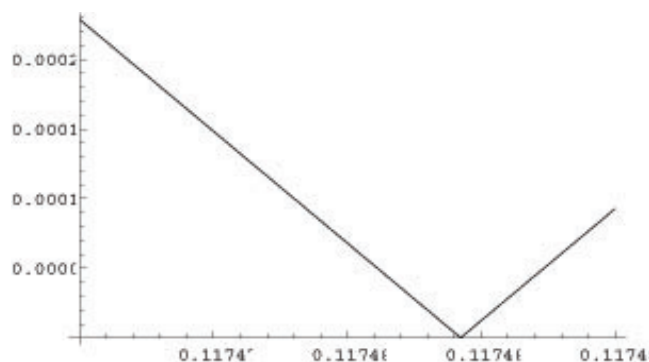


Рис. 10. Сечение поверхности  $|D| = |D|(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  ( $n = 0$ ) плоскостью  $\text{Im } \tilde{k} = 0$  в окрестности корня частотного уравнения с малой мнимой частью  $\tilde{k} = 0.117481 + 1.47982 * 10^{-12}i$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$

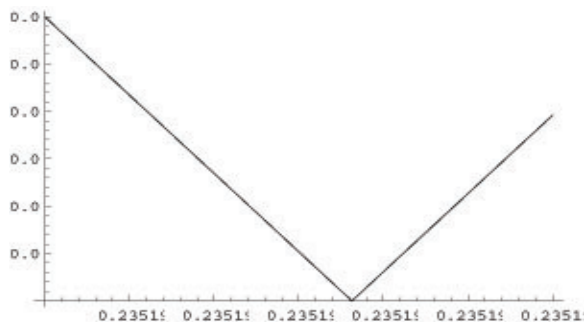


Рис. 11. Сечение поверхности  $|D| = |D|(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  ( $n = 0$ ) плоскостью  $\text{Im } \tilde{k} = 0$  в окрестности корня частотного уравнения с малой мнимой частью  $\tilde{k} = 0.235197 + 5.84438 * 10^{-12}i$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$

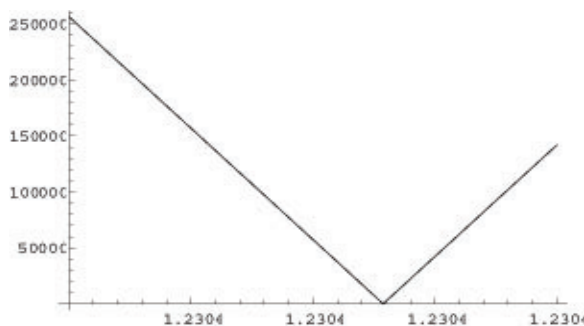


Рис. 12. Сечение поверхности  $|D| = |D|(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  ( $n = 0$ ) плоскостью  $\text{Im } \tilde{k} = 0$  в окрестности корня частотного уравнения с малой мнимой частью  $\tilde{k} = 1.23043 + 7.6382 * 10^{-11}i$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$

Волновые числа $\tilde{k}_{\parallel}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$	$-0.117481 - 1.47982 * 10^{-12}i$ , $0.117481 + 1.47982 * 10^{-12}i$ $-0.0270992 - 1.84668i$ , $0.0270992 + 1.84668i$ $-0.0270992 - 1.84668i$ , $0.0270992 + 1.84668i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$	$-0.235197 - 5.84438 * 10^{-12}i$ , $0.235197 + 5.84438 * 10^{-12}i$ $-1.3631 - 2.70769i$ , $1.3631 + 2.70769i$ $-1.3631 + 2.70769i$ , $1.3631 - 2.70769i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.3$	$-0.353398 - 1.2838 * 10^{-11}i$ , $0.353398 + 1.2838 * 10^{-11}i$ $-1.36529 - 2.68424i$ , $1.36529 + 2.68424i$ $-0.116126 - 11.6356i$ , $0.116126 + 11.6356i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.4$	$-0.472366 - 2.21675 * 10^{-11}i$ , $0.472366 + 2.21675 * 10^{-11}i$ $-1.36825 + 2.65107i$ , $1.36825 + 2.65107i$ $1.64015 - 6.03101i$ , $1.64015 + 6.03101i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.5$	$-0.592438 - 3.33978 * 10^{-11}i$ , $0.592438 + 3.33978 * 10^{-11}i$ $-1.37185 + 2.60784i$ , $1.37185 + 2.60784i$ $22.3355 - 0.280073i$ , $22.3355 + 0.280073i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.6$	$-0.714034 - 4.72892 * 10^{-11}i$ , $0.714034 + 4.72892 * 10^{-11}i$ $-1.37588 + 2.55406i$ , $1.37588 + 2.55406i$ $1.64322 - 5.99252i$ , $1.64322 + 5.99252i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.7$	$-0.837703 - 6.89264 * 10^{-11}i$ , $0.837703 + 6.89264 * 10^{-11}i$ $-1.38009 + 2.48909i$ , $1.38009 + 2.48909i$ $-1.97022 + 12.3979i$ , $1.97022 + 12.3979i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.8$	$-0.964197 - 7.00239 * 10^{-11}i$ , $0.964197 + 7.00239 * 10^{-11}i$ $-1.3841 - 2.41212i$ , $1.3841 + 2.41212i$ $-1.64716 - 5.93817i$ , $1.64716 + 5.93817i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.9$	$-1.09458 - 7.56649 * 10^{-11}i$ , $1.09458 + 7.56649 * 10^{-11}i$ $1.38737 - 2.32209i$ , $1.38737 + 2.32209i$ $-1.64932 - 5.90491i$ , $1.64932 + 5.90491i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$	$-1.23043 - 7.6382 * 10^{-11}i$ , $1.23043 + 7.6382 * 10^{-11}i$ $-1.38908 + 2.21765i$ , $1.38908 + 2.21765i$ $-1.65154 - 5.8675i$ , $1.65154 + 5.8675i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$	$0.169578 - 1.90007 * 10^{-9}i$ , $-0.169578 + 1.90007 * 10^{-9}i$ $1.65281 - 5.23841i$ , $1.65281 + 5.23841i$ $-2.08624 + 15.3075i$ , $2.08624 + 15.3075i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$	$-2.01863 - 5.82384 * 10^{-9}i$ , $2.01863 + 5.82384 * 10^{-9}i$ $-1.38674 - 3.9628i$ , $1.38674 + 3.9628i$ $-2.07232 + 14.9224i$ , $2.07232 - 14.9224i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 10.0$	$-5.17739 - 8.3026 * 10^{-8}i$ , $5.17739 + 8.3026 * 10^{-8}i$ $-0.87126 + 5.35248i$ , $0.87126 + 5.35248i$ $-5.52896 * 10^{-8} - 14.8681i$ , $5.52896 * 10^{-8} + 14.8681i$

Таблица 1. Безразмерные волновые числа  $\tilde{k}$  (связанная GНИИ-термоупругая осесимметричная волна в цилиндрическом волноводе)

Перейдем далее к вычислению перемещений и температуры в осесимметричной GНИИ-термоупругой волне. Поскольку после исключения разности  $C_3 - C_4$  постоянные  $C_1, C_2$  удовлетворяют системе двух линейных однородных уравнений с нулевым определителем, то можно выразить  $C_2$  через  $C = C_1$  из наиболее простого второго уравнения системы (6)

$$C_2 = -\frac{(k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2)} C.$$

А затем с помощью (7) найти разность  $C_3 - C_4$  как

$$C_3 - C_4 = \mp \frac{2ikCp_1I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} \left( (k^2 - p_2^2)(p_1^2 - g^2) - (k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2) \right).$$

После этого можно вычислить перемещения и температуру в осесимметричной термоупругой волне.

Вводя следующие безразмерные отношения

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{R}, \quad \tilde{u}_r = \frac{u_r}{R}, \quad \tilde{u}_z = \frac{u_z}{R}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\rho\omega s_*^2 \alpha^{-1}}$$

и опуская знак волны над безразмерными величинами, получим

$$\begin{aligned} u_r &= Ce^{\pm ikz} e^{-i\omega t} \left( (p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1 r) - \frac{(k^2 - p_1^2)(p_1^2 - g^2)I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)I_1(p_2)} p_1 I_1(p_2 r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2k^2 p_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} \left( (k^2 - p_2^2)(p_1^2 - g^2) - (k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2) \right) I_1(q_2 r) \right), \\ u_z &= Ce^{\pm ikz} e^{-i\omega t} \left( (\pm ik)(p_1^2 - g^2)I_0(p_1 r) - (\pm ik) \frac{(k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2)p_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2)} I_0(p_2 r) \mp \right. \\ &\quad \left. \mp \frac{2ikp_1 q_2 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} \left( (k^2 - p_2^2)(p_1^2 - g^2) - (k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2) \right) I_0(q_2 r) \right), \\ \theta &= hCe^{\pm ikz} e^{-i\omega t} \left( (k^2 - p_1^2)I_0(p_1 r) - \frac{(k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1)}{p_2 I_1(p_2)} I_0(p_2 r) \right). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что в этих формулах все величины не имеют физической размерности. Опуская затем множитель  $Ce^{-i\omega t}$  в приведенных формулах, получаем безразмерные формы радиального и осевого перемещений и температуры.

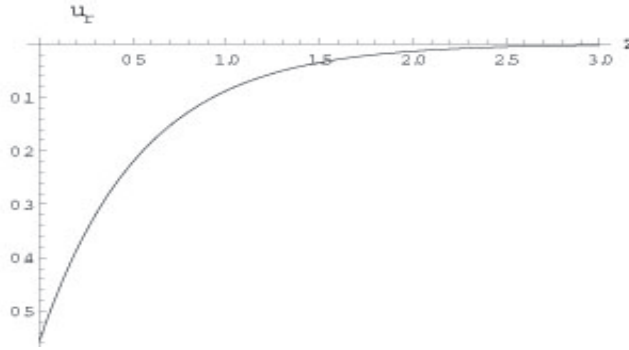


Рис. 13. Профиль формы осесимметричной волны радиального перемещения  $u_r$  на поверхности волновода. Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 0.02709924450224977 + 1.8466796463561086i$ ,  $0 \leq \tilde{z} \leq 3$

На рис. 13-17 изображены типичные профили *форм* перемещений на центральной оси, на поверхности волновода и в центральном сечении цилиндра для одной из затухающих осесимметричных волн с комплексным волновым числом  $kR = 0.0270992445 + 1.8466796464i$ . Приняты следующие значения безразмерных постоянных:  $\frac{c_l}{c_t} = 1.9$ ,  $h_0 = \sqrt{\frac{\Lambda_* c_l}{R\Lambda}} = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,

$h_4 = \sqrt{\frac{s_* R}{c_l}} = 30.0$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ . Соответствующие *формы* для температуры приводятся на рис. 18-20.



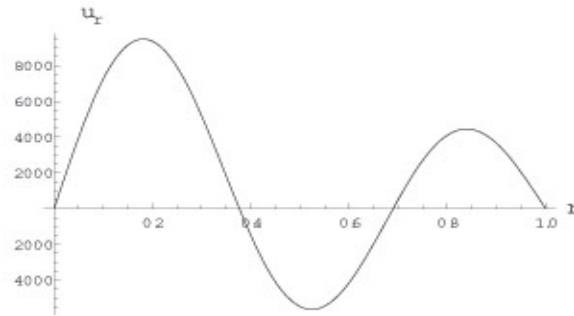


Рис. 14. Профиль формы осесимметричной волны радиального перемещения  $u_r$  в плоскости  $z = 0$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 0.02709924450224977 + 1.8466796463561086i$

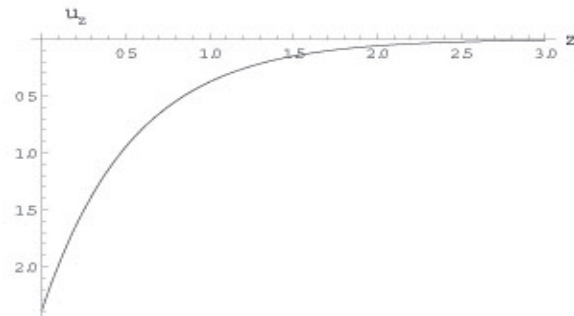


Рис. 15. Профиль формы осесимметричной волны вертикального перемещения  $u_z$  на оси волновода. Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 0.02709924450224977 + 1.8466796463561086i$ ,  $0 \leq \tilde{z} \leq 3$

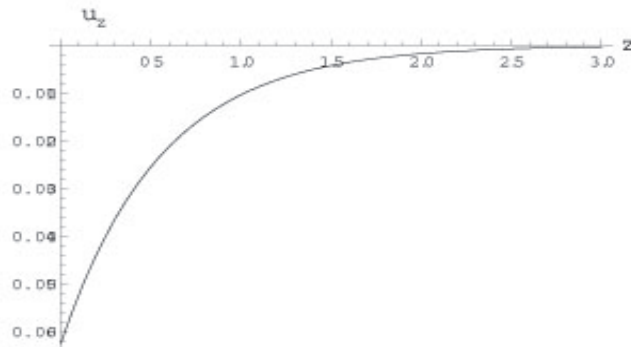


Рис. 16. Профиль формы осесимметричной волны вертикального перемещения  $u_z$  на поверхности волновода. Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 0.02709924450224977 + 1.8466796463561086i$ ,  $0 \leq \tilde{z} \leq 3$

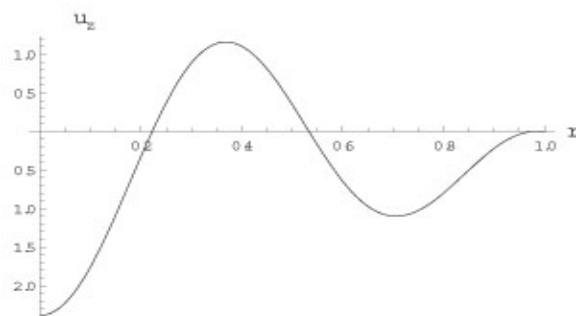


Рис. 17. Профиль формы осесимметричной волны вертикального перемещения  $u_z$  в плоскости  $z = 0$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 0.02709924450224977 + 1.8466796463561086i$

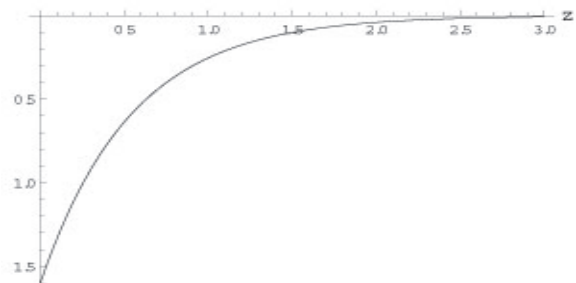


Рис. 18. Профиль формы осесимметричной температурной “волны” на оси волновода. Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 0.02709924450224977 + 1.8466796463561086i$ ,  $0 \leq \tilde{z} \leq 3$

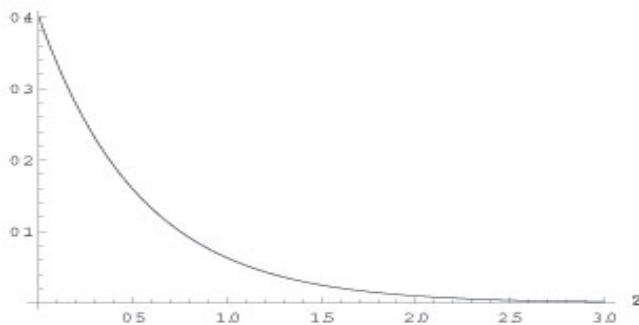


Рис. 19. Профиль формы осесимметричной температурной “волны” на поверхности волновода. Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 0.02709924450224977 + 1.8466796463561086i$ ,  $0 \leq \tilde{z} \leq 3$

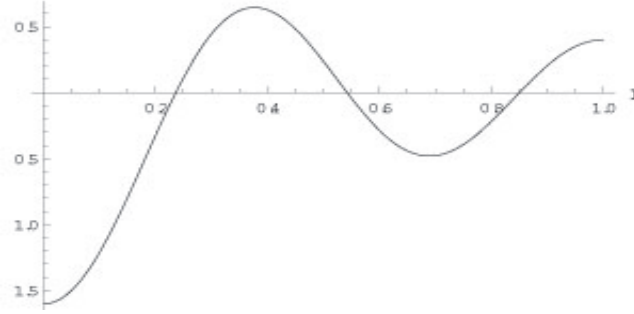


Рис. 20. Профиль формы осесимметричной температурной “волны” в плоскости  $z = 0$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 30.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 0.02709924450224977 + 1.8466796463561086i$

### 6. Частотное уравнение в случае окружных гармоник произвольного порядка.

Рассмотрения становятся несколько более сложными, если поставить задачу вывода частотного уравнения в случае термоупругой волны с окружной гармоникой сколь угодно высокого порядка  $n$ .

Подставляя выражения для компонент тензора напряжений и градиента температуры в граничные условия (5) и условие (6), получим систему пяти линейных однородных уравнений

$$D_{jl}C_l = 0 \quad (j, l = \overline{1, 5}) \quad (1)$$

относительно пяти постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ .

Нас интересует условие нетривиальной разрешимости указанной системы. Приравняв нулю определитель системы, приходим к частотному уравнению. Оно содержит в качестве параметра порядок окружной гармоники  $n$ . Выполняя ряд преобразований, частотное уравнение можно обезразмерить и несколько упростить.

Мы не будем останавливаться на деталях. Окончательно частотное уравнение для волны с произвольным номером  $n$  окружной гармоники есть

$$D = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

где элементы определителя вычисляются как

$$D_{11} = \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_1^2 - g^2) \{ (n^2 - n + p_1^2) I_n(p_1) - p_1 I_{n+1}(p_1) \} + \\ + \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_1^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ (n - n^2 - k^2) I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1) \} - \\ - h s_*^2 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1),$$

$$\begin{aligned}
 D_{12} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_2^2 - g^2) \{ (n^2 - n + p_2^2) I_n(p_2) - p_2 I_{n+1}(p_2) \} + \\
 &\quad + \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_2^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ (n - n^2 - k^2) I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2) \} - \\
 &\quad \quad \quad - h s_*^2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2), \\
 D_{13} &= \mp (ik) \frac{2}{k^2 - q_2^2} \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2}{q_2} I_n(q_2) + (n - 1) I_{n+1}(q_2) \right\}, \\
 D_{14} &= \mp (ik) \frac{2}{k^2 - q_2^2} \{ -q_2 I_n(q_2) + (n + 1) I_{n+1}(q_2) \}, \\
 D_{15} &= \frac{2}{k^2 - q_2^2} \{ (n^2 - n) I_n(q_2) + q_2 n I_{n+1}(q_2) \}, \\
 D_{21} &= 2(p_1^2 - g^2) \{ (n - n^2) I_n(p_1) - n p_1 I_{n+1}(p_1) \}, \\
 D_{22} &= 2(p_2^2 - g^2) \{ (n - n^2) I_n(p_2) - n p_2 I_{n+1}(p_2) \}, \\
 D_{23} &= \pm (ik) \left\{ \frac{4n^2 - 4n + q_2^2}{q_2} I_n(q_2) + (2n - 2) I_{n+1}(q_2) \right\}, \\
 D_{24} &= \pm (ik) \{ q_2 I_n(q_2) - (2n + 2) I_{n+1}(q_2) \}, \\
 D_{25} &= (2n - 2n^2 - q_2^2) I_n(q_2) + 2q_2 I_{n+1}(q_2), \\
 D_{31} &= \pm (2ik) (p_1^2 - g^2) \{ n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1) \}, \\
 D_{32} &= \pm (2ik) (p_2^2 - g^2) \{ n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2) \}, \\
 D_{33} &= \frac{2k^2 n + q_2^2 n}{q_2} I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2) I_{n+1}(q_2), \\
 D_{34} &= -q_2 n I_n(q_2) - (q_2^2 + k^2) I_{n+1}(q_2), \\
 D_{35} &= \pm (ik) n I_n(q_2), \\
 D_{41} &= (k^2 - p_1^2) (n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1)), \\
 D_{42} &= (k^2 - p_2^2) (n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2)), \\
 D_{43} &= 0, \quad D_{44} = 0, \quad D_{45} = 0, \\
 D_{51} &= 0, \quad D_{52} = 0, \quad D_{53} = q_2, \quad D_{54} = q_2, \quad D_{55} = \pm (ik).
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что при вычислении отношений  $\xi^{-1} I_n(\xi)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) удобнее всего воспользоваться формулой

$$\frac{I_n(\xi)}{\xi} = \frac{I_{n-1}(\xi) - I_{n+1}(\xi)}{2n}.$$

В случае  $n = 3$  частотное уравнение  $D(\tilde{k}, \omega) = 0$  было проанализировано численно с помощью системы символьных вычислений Mathematica 6.0. Сначала задавались безразмерные параметры  $\frac{c_l}{c_t} = 1.9$ ,  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ; затем для различных значений безразмерного отношения  $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_l}$  осуществлялся поиск корней частотного уравнения и определялись безразмерные величины  $\tilde{k} = kR$ . Численный анализ проводился лишь для гармонического множителя  $e^{+ikz}$ . Поэтому физический смысл будут иметь лишь такие корни частотного уравнения, для которых  $\text{Im } \tilde{k} > 0$ . Если ограничиваться волнами, фазовые поверхности которых распространяются в положительном направлении вдоль оси цилиндра, то приходится также полагать, что  $\text{Re } \tilde{k} > 0$ . Результаты численного анализа сведены в таблицу 2, которая приводится ниже (в ней указаны лишь несколько наиболее близко расположенных к нулю ( $\text{Re } \tilde{k} = 0$ ,  $\text{Im } \tilde{k} = 0$ ) волновых чисел).

$\tilde{k}_{\parallel}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
0.1	$-0.19 - 2.10252 * 10^{-8}i, 0.19 + 2.10252 * 10^{-8}i$ $-0.1 - 4.83608 * 10^{-10}i, 0.1 + 4.83608 * 10^{-10}i, -6.09669 * 10^{-15} - 9.46289$ $1.13985 + 3.24725i, 6.09669 * 10^{-15} + 9.46289$
0.2	$-6.09669 * 10^{-15} - 9.46289i, 6.09669 * 10^{-15} + 9.46289i$ $-0.38 - 1.26192 * 10^{-9}i, 0.38 + 1.26192 * 10^{-9}i$ $-0.2 - 3.36497 * 10^{-9}i, 0.2 + 3.36497 * 10^{-9}i$
0.3	$-0.3 - 2.98905 * 10^{-9}i, 0.3 + 2.98905 * 10^{-9}i$ $0.57 - 1.29308 * 10^{-9}i, 0.57 + 1.29308 * 10^{-9}i$ $-2.77234 * 10^{-12} + 5.30783i, 2.77234 * 10^{-12} - 5.30783i$
0.4	$0.4 - 2.72124 * 10^{-9}i, -0.4 + 2.72124 * 10^{-9}i$ $0.76 - 2.57065 * 10^{-8}i, -0.76 + 2.57065 * 10^{-8}i$ $-9.17546 * 10^{-15} - 5.28181i, 3.56323 * 10^{-15} - 5.28181i$
0.5	$0.5 - 5.77165 * 10^{-9}i, -0.5 - 5.81286 * 10^{-9}i$ $-1.14575 - 3.15963i, 1.14575 + 3.15963i$ $-6.00267 * 10^{-15} - 5.24822i, -5.54574 * 10^{-15} - 5.24822i$
0.6	$0.6 - 1.05453 * 10^{-9}i, -0.6 - 1.05453 * 10^{-9}i$ $1.14 - 5.07791 * 10^{-9}i, -1.14 - 5.07791 * 10^{-9}i$ $3.59621 * 10^{-16} + 12.7771i, 2.85347 * 10^{-16} - 12.7771i$
0.7	$-0.7 + 4.70654 * 10^{-11}i, 0.7 + 4.70654 * 10^{-11}i$ $1.15167 + 3.05575i, 1.71787 + 6.92031i$ $6.08371 * 10^{-16} - 12.7587i, 4.37649 * 10^{-16} + 12.7587i$
0.8	$0.8 - 1.32561 * 10^{-10}i, -0.8 - 1.32561 * 10^{-10}i$ $-1.15489 - 2.9886i, 1.15489 + 2.9886i$ $-2.32351 * 10^{-16} + 5.1009i, -3.8298 * 10^{-15} - 5.1009i$
0.9	$-0.9 - 8.2359 * 10^{-11}i, 0.9 + 8.2359 * 10^{-11}i$ $-1.15807 + 2.91021i, 1.15807 + 2.91021i$ $-1.94289 * 10^{-16} - 15.9925i, 2.93483 * 10^{-16} + 15.9925i$
1.0	$-1.9 + 4.40555 * 10^{-9}i, -1.0 + 8.04426 * 10^{-11}i$ $-1.16098 + 2.81946i, -1.16098 - 2.81946i$ $5.41956 * 10^{-16} + 12.6862i, -5.57868 * 10^{-16} + 12.6862i$
2.0	$-2.0 + 7.57289 * 10^{-13}i, 2.0 + 7.35271 * 10^{-13}i$ $3.8 + 1.00438 * 10^{-7}i, 0.397822 + 10.0548i$ $3.50031 * 10^{-17} + 12.2521i, 2.08443 * 10^{-17} - 12.2521i$
3.0	$3.0 + 1.29906 * 10^{-14}i, 3.0 + 6.46005 * 10^{-15}i$ $1.64906 + 5.29023i, 1.87818 + 9.35711i$ $6.3467 * 10^{-16} + 1.3806i, 1.56924 * 10^{-16} - 1.3806i$
10.0	$2.73793 + 2.97708 * 10^{-16}i, -2.73793 - 3.9886 * 10^{-15}i$ $6.4125 - 5.14375 * 10^{-16}i, 1.19694 + 8.50238i$ $2.1414 * 10^{-15} + 3.59702i, 3.38397 * 10^{-15} - 3.59702i$

Таблица 2. Безразмерные волновые числа  $\tilde{k}$  (связанная GNIII-термоупругая волна третьего азимутального порядка)

На приводимых ниже рисунках 21-23, 24-26, 27-29 даны графики (в форме поверхностей) величины  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  в зависимости от  $\text{Re } \tilde{k}$  и  $\text{Im } \tilde{k}$ , а также кривые пересечения указанных поверхностей с плоскостями  $\text{Im } \tilde{k} = 0$  и  $\text{Re } \tilde{k} = 0$ .

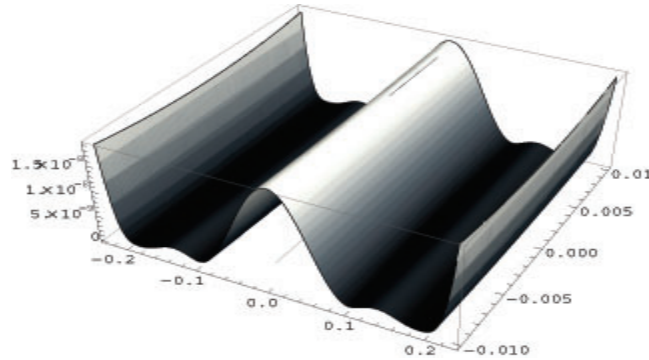


Рис. 21. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от вещественной  $\text{Re } \tilde{k}$  и мнимой части  $\text{Im } \tilde{k}$  волнового числа  $\tilde{k}$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$

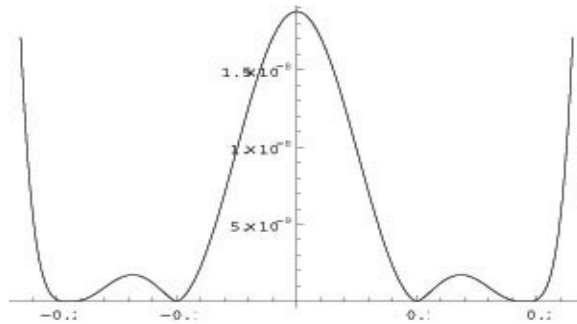


Рис. 22. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от  $\text{Re } \tilde{k}$  ( $\text{Im } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$

Переходим к определению перемещений и температуры в случае связанной термоупругой волны с окружной гармоникой произвольного порядка  $n$ . Для этого рассмотрим систему линейных уравнений (1). Поскольку определитель этой системы равен нулю (см. (2)), то мы попытаемся выразить постоянные  $C_j$  через одну из них, скажем,  $C_1 = C$ . С этой целью из пятого уравнения системы (1) выразим  $C_5$  через  $C_3$  и  $C_4$ , считая при этом, что  $D_{55} \neq 0$ . Полученное значение  $C_5$  подставим в первое, второе и третье уравнения системы (1). Затем из преобразованного первого уравнения найдем выражение  $C_4$  через  $C_1, C_2, C_3$  и подставим результат во второе и третье уравнения.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>При этом нам придется полагать, что удовлетворяется условие  $D_{15}D_{53} - D_{14}D_{55} \neq 0$ .

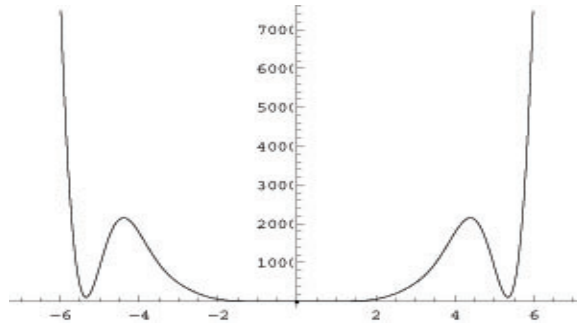


Рис. 23. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от  $\text{Im } \tilde{k}$  ( $\text{Re } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$

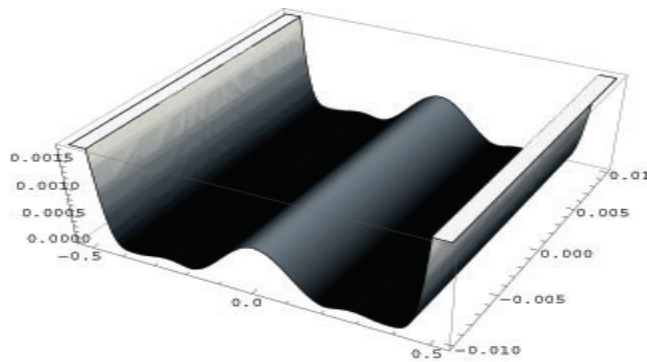


Рис. 24. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от вещественной  $\text{Re } \tilde{k}$  и мнимой части  $\text{Im } \tilde{k}$  волнового числа  $\tilde{k}$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$

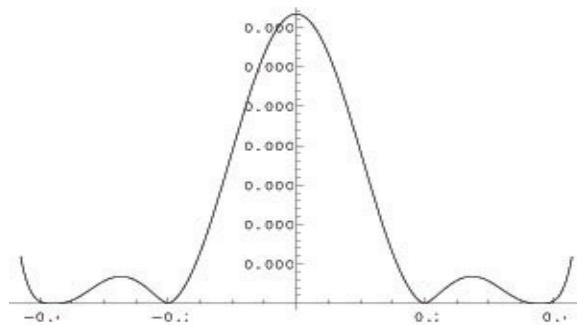


Рис. 25. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от  $\text{Re } \tilde{k}$  ( $\text{Im } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$

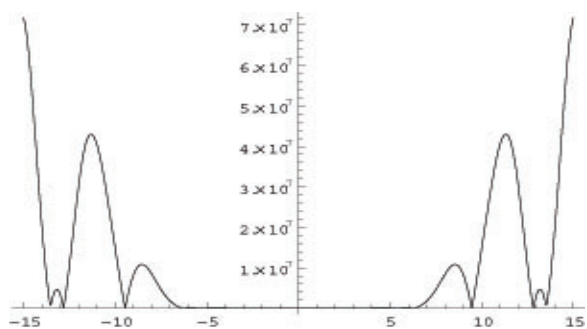


Рис. 26. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от  $\text{Im } \tilde{k}$  ( $\text{Re } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$

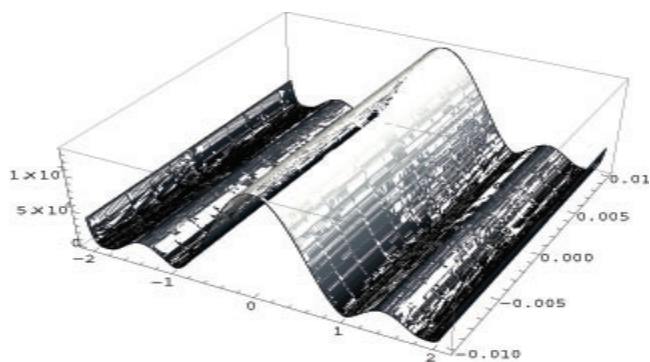


Рис. 27. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от вещественной  $\text{Re } \tilde{k}$  и мнимой части  $\text{Im } \tilde{k}$  волнового числа  $\tilde{k}$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$

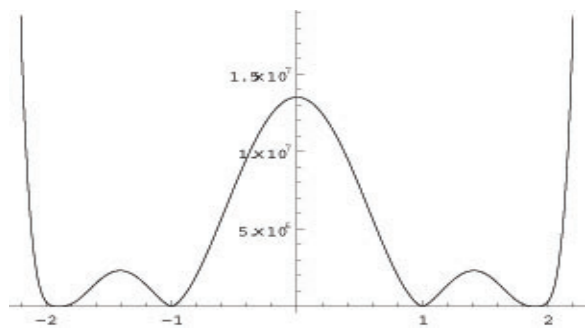


Рис. 28. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от  $\text{Re } \tilde{k}$  ( $\text{Im } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$



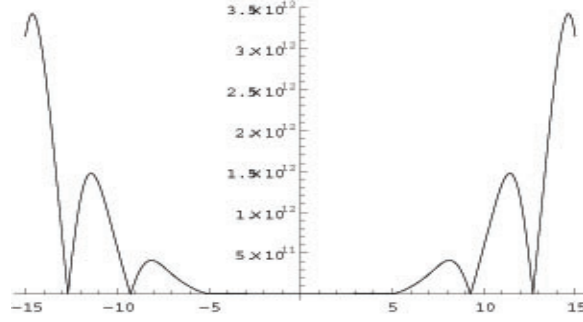


Рис. 29. Величина  $|D(\tilde{k}, \omega)|$  ( $n = 3$ ) как функция от  $\text{Im } \tilde{k}$  ( $\text{Re } \tilde{k} = 0$ ). Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$

Тогда второе и третье уравнения будут содержать только постоянные  $C_1, C_2, C_3$ . Из второго уравнения находим  $C_3$  через  $C_1, C_2$ , предполагая

$$D_{55}(D_{23}D_{14} - D_{13}D_{24}) + D_{53}(D_{13}D_{25} + D_{15}D_{24} - D_{15}D_{23} - D_{14}D_{25}) \neq 0.$$

Из четвертого уравнения выразим  $C_2$  через  $C$  при условии  $D_{42} \neq 0$ . Тогда появляется возможность найти выражение  $C_3$  через  $C$ , затем  $C_4$  через  $C$  и  $C_5$  через  $C$ . В итоге, вводя обозначения

$$K = D_{55}(D_{23}D_{14} - D_{13}D_{24}) + D_{53}(D_{13}D_{25} + D_{15}D_{24} - D_{15}D_{23} - D_{14}D_{25}),$$

$$K_1 = D_{42}D_{11} - D_{41}D_{12},$$

$$K_2 = D_{15}D_{53} - D_{14}D_{55},$$

$$K_3 = D_{24}D_{55} - D_{25}D_{53},$$

$$K_4 = D_{42}D_{21} - D_{41}D_{22},$$

$$K_5 = D_{15}D_{53} - D_{13}D_{55},$$

после ряда преобразований получаем

$$C_2 = -\frac{D_{41}}{D_{42}}C,$$

$$C_3 = \frac{K_3K_1 + K_2K_4}{D_{42}K}C,$$

$$D_{42}C_4 = \frac{K_1K - K_2K_4K_5 - K_1K_3K_5}{KK_2}C,$$

$$C_5 = -\frac{D_{53}}{D_{55}D_{42}} \frac{K_1K_2K_3 + K_2^2K_4 + KK_1 - K_2K_4K_5 - K_1K_3K_5}{KK_2}C.$$

Перемещения и температура в связанной термоупругой волне, как было указано ранее, имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_r &= \left[ C_1 (p_1^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + C_2 (p_2^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) \mp (ik) \left( C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \\
 u_\varphi &= \left[ \pm (ik) \left( C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - C_5 \left( \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n}{r} \{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \\
 u_z &= \left[ \pm (ik) \{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \} + \right. \\
 &\quad \left. + (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \\
 \theta &= \frac{\rho h s_x^2 \omega}{\alpha} (C_1 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1 r) + C_2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},
 \end{aligned}$$

и для их определения необходимо подставить только что найденные выражения для произвольных постоянных в приведенные формулы.

Стоит отметить, что при вычислении отношений  $\xi^{-1} I_n(\xi)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) при малых  $\xi$  удобнее всего, как и ранее, воспользоваться формулой

$$\frac{I_n(\xi)}{\xi} = \frac{I_{n-1}(\xi) - I_{n+1}(\xi)}{2n}.$$

На рис. 30-35 изображены типичные профили *форм* перемещений на поверхности волновода и в центральном сечении цилиндра для одной из затухающих волн ( $n = 3$ ) с комплексным волновым числом  $kR = 1.139857 + 3.247254i$ .

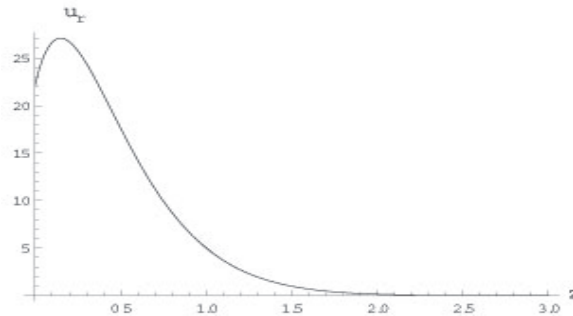


Рис. 30. Профиль формы волны радиального перемещения  $u_r$  ( $n = 3$ ) на поверхности волновода. Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 1.139856940654411 + 3.247254308230259i$

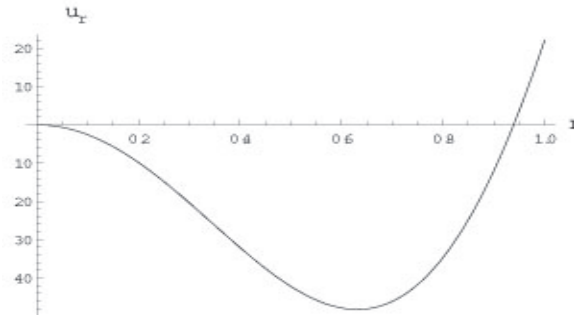


Рис. 31. Профиль формы волны радиального перемещения  $u_r$  ( $n = 3$ ) в плоскости  $z = 0$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 1.139856940654411 + 3.247254308230259i$

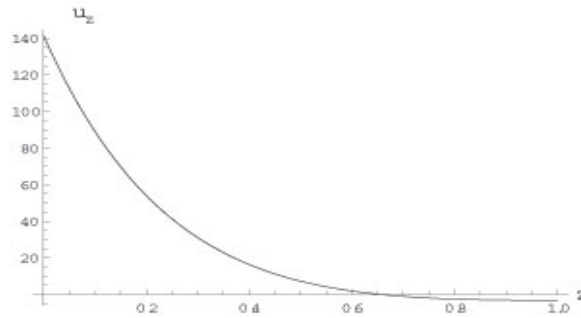


Рис. 32. Профиль формы волны вертикального перемещения  $u_z$  ( $n = 3$ ) на поверхности волновода. Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 1.139856940654411 + 3.247254308230259i$

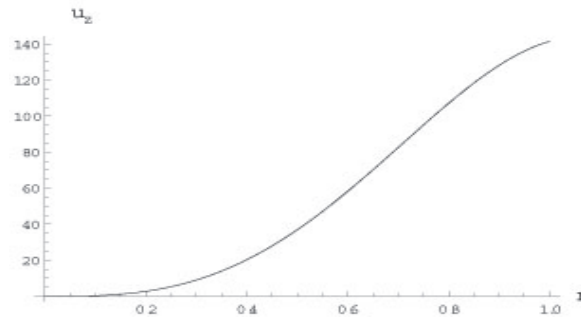


Рис. 33. Профиль формы волны вертикального перемещения  $u_z$  ( $n = 3$ ) в плоскости  $z = 0$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 1.139856940654411 + 3.247254308230259i$

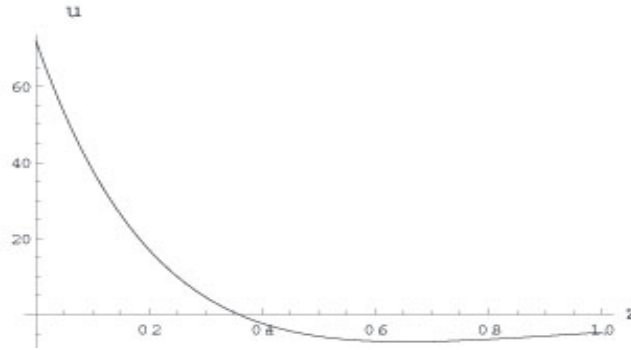


Рис. 34. Профиль формы волны тангенциального перемещения  $u_\varphi$  ( $n = 3$ ) на поверхности волновода. Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 1.139856940654411 + 3.247254308230259i$

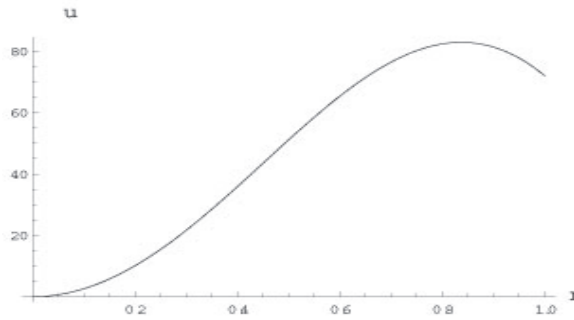


Рис. 35. Профиль формы волны тангенциального перемещения  $u_\varphi$  ( $n = 3$ ) в плоскости  $z = 0$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 1.139856940654411 + 3.247254308230259i$

Приняты следующие значения безразмерных постоянных:  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\frac{c_l}{c_t} = 1.9$ ,  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ . Соответствующие формы для температуры приводятся на рис. 36, 37.

Описанная выше процедура редукции системы линейных алгебраических уравнений (1) приводит к системе из *двух* уравнений  $\Delta_{jl}C_l = 0$  ( $j, l = 1, 2$ ). Коэффициенты в редуцированной системе вычисляются как

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= D_{41}, & \Delta_{12} &= D_{42}, \\ \Delta_{21} &= \frac{1}{K_2} \left[ D_{11}P + D_{31}K_2 - \frac{S}{K} (D_{11}K_3 + D_{21}K_2) \right], \\ \Delta_{22} &= \frac{1}{K_2} \left[ D_{12}P + D_{32}K_2 - \frac{S}{K} (D_{12}K_3 + D_{22}K_2) \right], \end{aligned}$$

где для сокращения записи формул были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P &= D_{34}D_{55} - D_{35}D_{53}, \\ S &= D_{55}(D_{14}D_{33} - D_{13}D_{34}) + D_{53}(D_{13}D_{35} + D_{15}D_{34} - D_{14}D_{35} - D_{15}D_{33}). \end{aligned}$$

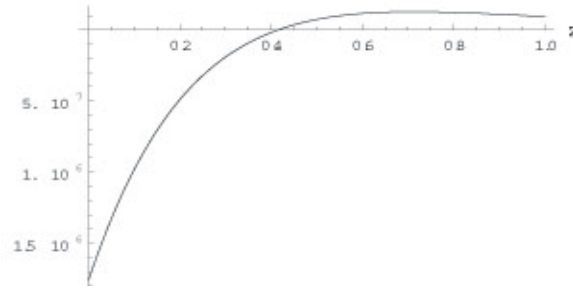


Рис. 36. Профиль формы температурной “волны” ( $n = 3$ ) на поверхности волновода. Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 1.139856940654411 + 3.247254308230259i$

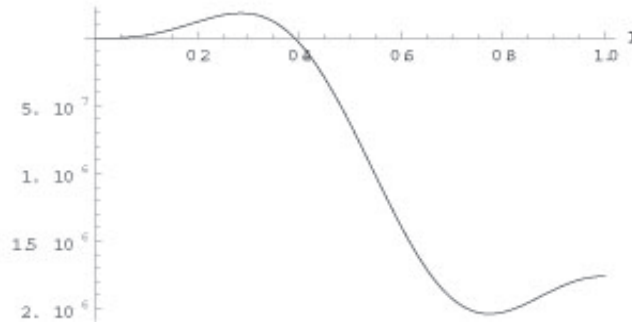


Рис. 37. Профиль формы температурной “волны” ( $n = 3$ ) в плоскости  $z = 0$ . Данные численного анализа при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$ ,  $\tilde{k} = 1.139856940654411 + 3.247254308230259i$

Ясно, что частотное уравнение будет иметь вид

$$\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{21}\Delta_{12} = 0.$$

Корни этого уравнения при заданной частоте будут определять волновые числа связанных ГНИИ-термоупругих волн с произвольным номером окружной гармоники  $n$ , распространяющихся вдоль цилиндрического волновода.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Снеддон, И. Н.* Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. – М. : Физматлит, 1961. – 220 с.
- [2] *Новацкий, В.* Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
- [3] *Новацкий, В.* Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1970. – 256 с.
- [4] *Новацкий, В.* Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
- [5] *Боли, Б.* Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : Мир, 1964. – 518 с.
- [6] *Карслоу, Х. С.* Теория теплопроводности / Х. С. Карслоу. – М. ; Ленинград [СПб.] : Гостехтеоретиздат, 1947. – 288 с.
- [7] *Карслоу, Х. С.* Теплопроводность твердых тел / Х. С. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.
- [8] *Лыков, А. В.* Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Гостехтеоретиздат, 1952. – 392 с.
- [9] *Joseph, D. D.* Heat waves / D. D. Joseph, L. Preziosi // Rev. Modern Physics. – 1989. – Vol. 61, № 1. – P. 41–73.
- [10] *Green, A. E.* On undamped heat waves in an elastic solid / A. E. Green, P. M. Naghdi // J. Therm. Stress. – 1992. – Vol. 15. – P. 253–264.
- [11] *Green, A. E.* Thermoelasticity without energy dissipation / A. E. Green, P. M. Naghdi // J. Elasticity. – 1993. – Vol. 31. – P. 189–208.
- [12] *Kalpakides, V. K.* Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity without dissipation / V. K. Kalpakides, G. A. Maugin // Reports in Mathematical Physics. – 2004. – Vol. 53. – P. 371–391.
- [13] *Ковалев, В. А.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 156 с.
- [14] *Радаев, Ю. Н.* Гармонические связанные СТЕ-термоупругие волны в свободном цилиндрическом волноводе / Ю. Н. Радаев, Д. А. Семенов // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – № 8/1(67). – 2008. – С. 411–459.
- [15] *Радаев, Ю. Н.* Гармонические связанные термоупругие волны в свободном теплоизолированном цилиндрическом волноводе / Ю. Н. Радаев, Д. А. Семенов // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – № 8/2(67). – 2008. – С. 109–129.
- [16] *Ковалев, В. А.* Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев, Д. А. Семенов // Известия Саратовского университета: Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, вып. 4, ч. 2. – С. 94–128.
- [17] *Радаев, Ю. Н.* Гармонические связанные термоупругие волны в свободном теплоизолированном цилиндрическом волноводе / Ю. Н. Радаев, Д. А. Семенов // Успехи механики сплошных сред : сб. научн. тр. к 70-летию акад. В. А. Левина. – Владивосток, 2009. – С. 615–641.
- [18] *Pochhammer, L.* Uber Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder / L. Pochhammer // J. reine angew. Math. – 1876. – Vol. 81. – P. 324–336.
- [19] *Chree, C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates: their solution and application / C. Chree // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1889. – Vol. 14. – P. 250–369.
- [20] *Кольский, Г.* Волны напряжения в твердых телах / Г. Кольский. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1955. – 192 с.
- [21] *Love, A. E. H.* A treatise on the mathematical theory of elasticity / A. E. H. Love. – New York : Dover, 1944. – 644 p.

- [22] *Miklowitz, J.* The theory of elastic waves and waveguides / J. Miklowitz. – Amsterdam etc. : North-Holland Publ. Co., 1978. – 618 p.
- [23] *Graff, K. F.* Wave motion in elastic solids / K. F. Graff. – New York : Dover, 1991. – 649 p.
- [24] *Bancroft, D.* The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars / D. Bancroft // *Phys. Rev.* – 1941. – Vol. 59. – P. 588–593.
- [25] *Hudson, G. E.* Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders / G. E. Hudson // *Phys. Rev.* – 1943. – Vol. 63. – P. 46–51.
- [26] *Бреховских, Л. М.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) / Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров. – М. : Наука, 1982. – 336 с.
- [27] *Зоммерфельд, А. А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики / А. А. Зоммерфельд. – М. : Изд-во иностр. лит., 1950. – 456 с.
- [28] *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1970. – 712 с.
- [29] *Левин, В. И.* Дифференциальные уравнения математической физики / В. И. Левин, Ю. И. Гросберг. – М. ; Ленинград [СПб.] : Гостехтеоретиздат, 1951. – 576 с.
- [30] *Положий, Г. Н.* Уравнения математической физики / Г. Н. Положий. – М. : Высш. шк., 1964. – 560 с.

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev

**TRANSMISSION OF THE CONNECTED HARMONIOUS  
GNIII-THERMOELASTIC WAVES INSIDE A LONG CYLINDRICAL WAVE  
GUIDE**

*Samara State University*

*Moscow City Government University of Management*

**Abstract.** In the given article within the limits of the generalised linear theory of GNIII-thermoelasticity, on the basis of the connected system of movement and heat conductivity equations the analysis of the harmonious thermoelastic waves extending along an axis of a free cylindrical wave guide of circular cross-section section is given. The lateral surface of a wave guide is supposed impenetrable for heat. The research of the frequency equation and forms of harmonious waves of movings and temperature is conducted in an infinite cylindrical wave guide in conditions both in the axially symmetric district wave profile, and in case of district harmonics of azimuthal order as high as possible. The dependence of wave number on frequency is numerically defined and the profiles of movings and temperature forms in the connected GNIII-thermoelastic wave of the third azimuthal order are constructed. It is established that to each set frequency answers a denumerable number of complex wave numbers. The basic research is preceded by a studying of distribution of the flat harmonious connected GNIII-thermoelastic waves.

**Keywords:** generalised thermoelasticity, a wave guide, a wave number, a harmonious wave, a thermal wave, an azimuthal number, a frequency equation.

*Ковалев Владимир Александрович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва*

*e-mail: vlad\_koval@mail.ru*

*Радаев Юрий Николаевич*

*доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара*

*e-mail: radayev@ssu.samara.ru*

*Kovalev, Vladimir Alexandrovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow City Government University of Management, Moscow*

*Radayev, Yuri Nikolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara*



Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

## О ВОЗМОЖНОСТИ АФФИННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Тульский государственный университет

**Аннотация.** Рассматриваются анизотропные среды, подчиняющиеся квадратичному критерию пластичности Мизеса. Предлагается построение теории идеальной пластичности анизотропных сред посредством использования аффинного моделирования. Вводятся аффинные преобразования координат, компонент вектора скорости перемещения, компонент тензора напряжения и скоростей деформации. Принимается гипотеза о несжимаемости пластического течения в аффинном пространстве (гипотеза о квазинесжимаемости). Эта гипотеза накладывает только одно ограничение на коэффициенты пластической податливости. Для среды с моноклинной симметрией приведены уравнения плоской деформации. Показано, что уравнения поля напряжений и скоростей перемещений являются гиперболическими. Характеристики этих полей в аффинном пространстве совпадают.

**Ключевые слова:** анизотропия, идеальная пластичность, аффинное моделирование, квазинесжимаемость, плоская деформация.

УДК: 539.375

**1. Квадратичное условие пластичности.** Жесткопластический анизотропный материал отнесем к прямоугольной лабораторной системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Условие пластичности идеально-связной анизотропной среды примем в виде квадратичной функции компонент тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  [3]

$$A_{ijmn}\sigma_{ij}\sigma_{mn} = 1, \quad (1.1)$$

где  $A_{ijmn}$  – экспериментально определяемые характеристики анизотропии пластических свойств. Компоненты тензора четвертого ранга  $A_{ijmn}$  обладают свойствами симметрии

$$A_{ijmn} = A_{jimn} = A_{ijnm} = A_{mnij}. \quad (1.2)$$

Из (1.2) следует, что пластическая анизотропия характеризуется 21 параметром. Из них только 18 являются константами, а три коэффициента (типа тех углов Эйлера) связаны с выбором лабораторной системы координат и не являются механическими характеристиками материала.

Диссипация механической энергии при пластическом деформировании определяется соотношением

$$2D = \sigma_{ij}e_{ij}, \quad (1.3)$$

где  $e_{ij}$  – компоненты тензора скорости деформации, связанные с компонентами вектора скорости перемещения  $u_i$  формулами

$$2e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (1.4)$$

Принимая функцию (1.1) в качестве пластического потенциала, получим ассоциированный закон пластического течения

$$e_{ij} = \lambda A_{ijmn} \sigma_{mn}, \quad (1.5)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа.

Если к определяющим соотношениям (1.1 – 1.3) присоединить уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad (1.6)$$

и краевые условия

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \text{ или } u_i = u_i^0, \quad (1.7)$$

где  $p_i$  – вектор внешних усилий, приложенных на поверхности тела;  $u_i^0$  – компоненты вектора скорости смещения на границе тела;  $n_i$  – направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали к граничной поверхности

$$h = h(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (1.8)$$

то получим замкнутую систему уравнений теории идеальной пластичности анизотропной среды.

Использование приведенной системы уравнений для решения конкретных задач наталкивается на значительные трудности и поэтому Р. Мизес [3], следуя тенденциям теории идеальной пластичности изотропных сред, предложил упрощение исходного условия пластичности (1.1), введя гипотезу о нечувствительности пластического течения анизотропного тела к воздействию гидростатического давления. Эта гипотеза и ассоциированный закон пластического течения (1.2) приводят к шести условиям совместности характеристик пластической анизотропии

$$A_{ijmn} \delta_{mn} = 0. \quad (1.9)$$

Условие пластичности (1.1) при ограничениях (1.9) в случае плоской деформации для среды с моноклинным типом симметрии [2] и ортотропных сред [4] позволяет получить дифференциальные уравнения поля напряжений и скоростей деформации гиперболического типа.

Использование гипотезы о нечувствительности анизотропной среды к воздействию гидростатического давления в многочисленных приложениях обработки металлов давлением безусловно оправданно, поскольку металлы, как правило, проявляют слабую анизотропию пластических свойств. В общем случае квадратичного условия пластичности (1.1) гидростатическое давление может привести анизотропный материал к пластическому состоянию. Поэтому рассмотрим возможности получения на базе критерия (1.1) условия пластичности с минимальным количеством условий совместности характеристик пластических анизотропий, однако позволяющего ставить и решать прикладные задачи. Для достижения этой цели используем аффинные преобразования [1,5,6].

## 2. Аффинные пространства.

### 2.1. Аффинно-подобные материалы. Введем преобразования координат

$$x_i = a_i + a_{ij} y_j, \quad |a_{ij}| \neq 0, \quad y_k = b_k + b_{ki} x_i, \quad b_k = -b_{ki} a_i, \quad (2.1)$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_{ki}$  – произвольные действительные невырожденные взаимно обратные матрицы:  $b_{ki} a_{ij} = \delta_{kj}$ ,  $a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik}$ ;  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера. Формулы (2.1) определяют общее аффинное преобразование координат. Постоянные  $a_i$  и  $b_k$  задают сдвиги по осям. Из (2.1) получим

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_j} b_{ji}. \quad (2.2)$$

Учитывая (2.2), уравнения равновесия (1.4) приведем к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial y_k} b_{kj} \sigma_{ij} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y_k} b_{mi} b_{kj} \sigma_{ij} = 0. \quad (2.3)$$

Если ввести аффинные напряжения

$$\tau_{mn} = b_{mi} b_{nj} \sigma_{ij}, \quad \sigma_{mn} = a_{mi} a_{nj} \tau_{ij}, \quad (2.4)$$

то уравнения равновесия (2.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \tau_{sk} = 0. \quad (2.5)$$

Применим аффинные преобразования к формуле мощность рассеивания механической энергии (1.3)

$$2D = \sigma_{ij} e_{ij} = a_{ip} a_{jq} \tau_{pq} e_{ij} = \tau_{pq} (a_{ip} a_{jq} e_{ij}) = \tau_{rs} \varepsilon_{rs}, \quad (2.6)$$

где  $\varepsilon_{rs}$  – компоненты тензора аффинных скоростей деформаций, причем

$$\varepsilon_{mn} = a_{im} a_{jn} e_{ij}, \quad e_{mn} = b_{mi} b_{nj} \varepsilon_{ij}. \quad (2.7)$$

Таким образом, диссипация механической энергии анизотропной среды при аффинных преобразованиях является инвариантом.

Далее из (1.4) и (2.7) получим

$$2\varepsilon_{ij} = a_{im} a_{jn} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jn} (a_{im} u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} a_{im} (a_{jn} u_j) \right) = \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i}, \quad (2.8)$$

где  $v_i$  – компоненты аффинного вектора скорости перемещения, причем

$$v_i = a_{ki} u_k, \quad u_k = b_{ik} v_i. \quad (2.9)$$

Проведем аффинные преобразования ассоциированного закона пластического течения (1.5)

$$e_{ij} = \lambda A_{ijmn} \sigma_{mn} = \lambda A_{ijmn} b_{rm} b_{sn} \tau_{rs}, \\ b_{pi} b_{qj} e_{ij} = \lambda b_{pi} b_{qj} A_{ijmn} a_{rm} a_{sn} \tau_{rs}, \quad \varepsilon_{ij} = \lambda A'_{ijmn} \tau_{mn}, \quad (2.10)$$

где  $A'_{ijmn}$  – параметры анизотропии пластических свойств в аффинном пространстве, причем

$$A'_{ijmn} = a_{pi} a_{qj} A_{pqrs} a_{rm} a_{sn}, \quad A_{ijmn} = b_{ip} b_{jq} A'_{pqrs} b_{mr} b_{ns}. \quad (2.11)$$

Условие пластичности (1.1) в аффинном пространстве принимает вид

$$A'_{ijmn} \tau_{ij} \tau_{mn} = 1. \quad (2.12)$$

Компоненты единичной нормали к граничной поверхности (1.8) имеют вид

$$n_i = h_i / \sqrt{h_j h_j}, \quad h_i = \partial h / \partial x_i. \quad (2.13)$$

Уравнение преобразованной граничной поверхности принимает форму

$$h = h(x_1, x_2, x_3) = h(a_1 + a_{1i} y_i, a_2 + a_{2i} y_i, a_3 + a_{3i} y_i) = \tilde{h}(y_1, y_2, y_3) = 0. \quad (2.14)$$

Тогда компоненты вектора градиента и единичной нормали

$$\tilde{n}'_i = \tilde{h}_i / \sqrt{\tilde{h}_j \tilde{h}_j} = h_m a_{im} / \sqrt{(h_{rj} a_{rj})(h_{sj} a_{sj})}. \quad (2.15)$$

С учетом (2.4) из первого краевого условия (1.7) получим

$$a_{ip}a_{jq}\tau_{pq}n_j = p_i, \quad \tau_{sq}a_{iq}n_j = b_{si}p_i, \quad \tau_{sq}\tilde{n}_q = \tilde{p}_s, \quad (2.16)$$

где

$$\tilde{n}_q = a_{sq}n_s, \quad n_q = b_{sq}\tilde{n}_s, \quad \tilde{p}_s = b_{si}p_i, \quad p_i = a_{is}\tilde{p}_s. \quad (2.17)$$

Заметим, что в (2.15)  $\tilde{n}'_i$  – направляющие косинусы единичной нормали к поверхности  $\tilde{h}(y_1, y_2, y_3) = 0$ , а в уравнениях (2.16) и (2.17)  $\tilde{n}_q = h_i a_{iq} / \sqrt{h_m h_m} = n_j a_{jq}$  – направляющие косинусы неединичной нормали, поскольку  $\tilde{n}_q \tilde{n}_r = n_i n_j a_{iq} a_{jr} \neq 1$ , если матрица аффинного преобразования  $a_{ij}$  – неортогональная матрица.

Используя зависимости (2.9), из второго граничного условия (1.7) получаем

$$a_{ip}u_i = a_{ip}u_i^0, \quad v_i = v_i^0. \quad (2.18)$$

Таким образом, все соотношения теории идеальной пластичности в аффинном пространстве имеют такой же вид, как и аналогичные уравнения в физическом пространстве.

Поскольку коэффициенты матрицы аффинного преобразования  $a_{ij}$  произвольны, то исходному жесткопластическому материалу с параметрами пластической анизотропии  $A_{ijmn}$  в физическом пространстве можно противопоставить бесчисленное множество аффинно-подобных материалов с параметрами пластической анизотропии  $A'_{ijmn}$ .

**2.2. Объемно изотропные аффинно-подобные материалы.** В физическом пространстве квадратичная форма (1.1) не расщепляется на шаровую часть и девиаторную. Поэтому, используя соответствующий выбор коэффициентов аффинных преобразований, проведем расщепление квадратичной формы (2.12) в аффинном пространстве.

Подвергнем анизотропный материал в аффинном пространстве воздействию аффинного гидростатического давления  $\tau_0$

$$\tau_{ij} = \tau_0 \delta_{mn}, \quad \tau_0 = \tau_{ij} \delta_{ij} / 3. \quad (2.19)$$

Из (2.4) и (2.20) следует, что аффинное гидростатическое давление определяется соотношением

$$\tau_0 = b_{im} b_{jn} \sigma_{mn} \delta_{ij} / 3. \quad (2.20)$$

Ассоциированный закон пластического течения записывается в форме

$$\varepsilon_{ij} = \lambda A'_{ijmn} \delta_{mn} \tau_0. \quad (2.21)$$

Вычислим скорость изменения объема

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} = \lambda A'_{ijmn} \delta_{ij} \delta_{mn} \tau_0 = \lambda A'_0 \tau_0, \quad (2.22)$$

где  $A'_0 = A'_{ijmn} \delta_{ij} \delta_{mn}$  – пластическая характеристика скорости изменения объема анизотропного материала в аффинном пространстве. Из (2.21) и (2.22) следует, что воздействие аффинного гидростатического давления на аффинно-подобный анизотропный материал вызывает в нем изменение формы

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij} / 3 = \lambda (A'_{ijmn} \delta_{mn} - A'_0 \delta_{ij} / 3) \tau_0. \quad (2.23)$$

Следовательно, если для аффинно-подобного материала выполняются соотношения

$$A'_{ijmn} \delta_{mn} = A'_0 \delta_{ij} / 3, \quad (2.24)$$

то он является объемно-изотропным, т.е. воздействие аффинного давления не вызывает в нем пластическое формоизменение и в этом случае квадратичная форма (2.12) расщепляется

на шаровую часть и девиаторную. Термин “объемно-изотропный материал” заимствован у Я. Рыхлевского.

Для вычисления коэффициентов матрицы аффинных преобразований, позволяющих анизотропный материал перевести из физического пространства в аффинное объемно-изотропное пространство, систему уравнений (2.24) представим в форме

$$a_{pi}a_{qj}A_{pqrs}a_{rm}a_{sn}\delta_{mn} = A'_0\delta_{ij}/3. \quad (2.25)$$

Система шести уравнений (2.25) содержит семь неизвестных: шесть коэффициентов  $a_{ij}$  и параметр  $A'_0$ , поэтому запишем ее с точностью до одного из коэффициентов аффинного преобразования, например  $a_{pq} = a_*$ ,

$$a_{pi}^*a_{qj}^*A_{pqrs}a_{rm}^*a_{sn}^*\delta_{mn} = A_0^*\delta_{ij}, \quad (2.26)$$

где  $a_{ij}^* = a_{ij}/a_*$ ,  $A_0^* = A'_0/3a_*^4$ . Поскольку коэффициент  $a_{ij=pq}^* = 1$ , то система шести уравнений (2.26) содержит шесть неизвестных: пять коэффициентов матрицы  $a_{ij}^*$  и параметр  $A_0^*$ .

Таким образом, параметры перехода из физического пространства в аффинное объемно-изотропное пространство находятся с точностью до коэффициента  $a_*$ . Поскольку произвол в выборе коэффициента  $a_*$  не влияет на конечный результат, то можно положить  $a_* = 1$ , или же ввести нормировку

$$a_{ij}a_{ij} = 3.$$

Тогда, принимая, например,  $a_{11}^* = 1$  найдем

$$a_* = \sqrt{3/\{1 + (a_{22}^*)^2 + (a_{33}^*)^2 + 2[(a_{12}^*)^2 + (a_{23}^*)^2 + (a_{13}^*)^2]\}}.$$

Этот коэффициент так же можно вычислить из условия сопряжения физического и аффинного пространства. Если потребовать, например, инвариантность одного из коэффициентов пластической анизотропии при аффинных преобразованиях, то

$$a_* = \sqrt[4]{A_{ijmn}/a_{ki}^*a_{lj}^*A_{klrs}a_{rm}^*a_{sn}^*}.$$

**2.3. Гипотеза о квазинесжимаемости пластического течения анизотропного материала.** Анизотропный аффинно-подобный материал несжимаемый в одном из аффинных пространств будем называть квазинесжимаемым. В этом случае

$$\varepsilon_{ij}\delta_{ij} = 0. \quad (2.27)$$

Тогда из (2.22) и (2.26) следует

$$A'_{ijmn}\delta_{mn} = 0. \quad (2.28)$$

Условие пластичности квазинесжимаемого анизотропного материала в аффинном объемно-изотропном пространстве принимает вид, аналогичный условию пластичности Мизеса [3] в физическом пространстве

$$\begin{aligned} & k_{12}(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + k_{23}(\tau_{22} - \tau_{33})^2 + k_{13}(\tau_{11} - \tau_{33})^2 + 2[k_{14}(\tau_{11} - \tau_{33}) + \\ & + k_{24}(\tau_{22} - \tau_{33}) + k_{45}\tau_{13} + k_{46}\tau_{12}]\tau_{23} + 2[k_{15}(\tau_{11} - \tau_{33}) + \\ & + k_{25}(\tau_{22} - \tau_{33}) + k_{45}\tau_{23} + k_{56}\tau_{12}]\tau_{13} + 2[k_{16}(\tau_{11} - \tau_{33}) + k_{26}(\tau_{22} - \tau_{33}) + \\ & + k_{46}\tau_{23} + k_{56}\tau_{13}]\tau_{12} + k_{44}\tau_{23}^2 + k_{55}\tau_{13}^2 + k_{66}\tau_{12}^2 = 1, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где для удобства записи введены обозначения для коэффициентов  $k_{12} = -A'_{1122}$ ,  $k_{13} = -A'_{1133}$ ,  $k_{14} = A'_{1123}$ ,  $k_{15} = A'_{1113}$ ,  $k_{16} = A'_{1112}$ ,  $k_{23} = -A'_{2233}$ ,  $k_{24} = A'_{2233}$ ,  $k_{25} = A'_{2213}$ ,  $k_{26} = A'_{2212}$ ,  $k_{33} = A'_{3333}$ ,  $k_{34} = A'_{3323}$ ,  $k_{35} = A'_{3313}$ ,  $k_{36} = A'_{3312}$ ,  $k_{44} = A'_{2323}$ ,  $k_{45} = A'_{2313}$ ,  $k_{46} = A'_{2312}$ ,  $k_{55} = A'_{1313}$ ,  $k_{56} = A'_{1312}$ ,  $k_{66} = A'_{1212}$  и компонент тензора напряжений  $\tau_1 = \tau_{11}$ ,  $\tau_2 = \tau_{22}$ ,  $\tau_3 = \tau_{33}$ ,  $\tau_4 = \tau_{23}$ ,  $\tau_5 = \tau_{13}$ ,  $\tau_6 = \tau_{12}$ .

Ассоциированный закон пластического течения для квазинесжимаемой среды в аффинных объемно-изотропных пространствах записывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= k_{12}(\tau_2 - \tau_1) + k_{13}(\tau_3 - \tau_1) + k_{14}\tau_4 + k_{15}\tau_5 + k_{16}\tau_6, \\ &\dots \\ 2\varepsilon_6 &= k_{16}(\tau_1 - \tau_3) + k_{26}(\tau_2 - \tau_3) + k_{46}\tau_4 + k_{56}\tau_5 + k_{66}\tau_6, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_6 = \varepsilon_{12}$ .

Подчеркнем, что введение гипотезы о квазинесжимаемости накладывает только одно ограничение на пластические характеристики анизотропного материала, в то время как условие несжимаемости пластического течения в физическом пространстве накладывает шесть ограничений.

Следовательно, гипотеза о квазинесжимаемости анизотропного аффинно-подобного материала является менее жесткой, чем гипотеза о несжимаемости анизотропного материала в физическом пространстве, и условие пластичности (2.29) позволяет описывать более широкий класс анизотропных сред, чем условие пластичности Мизеса, полученное из (1.1) при условиях (1.9).

Если имеется решение задачи теории идеальной пластичности для несжимаемого анизотропного материала в физическом пространстве, то, используя аффинные преобразования, это решение можно распространить на объемно-изотропный материал и получить новое решение задачи для материала с менее жестким ограничением на коэффициенты пластической анизотропии.

**3. Плоская деформация.** Плоская деформация при произвольной форме области, занятой анизотропной средой, и произвольных граничных условиях возможна только тогда, когда имеются существенные ограничения на коэффициенты пластической анизотропии материала или имеется плоскость симметрии. Материал самого низшего класса симметрии, для которого возможна постановка задачи плоской деформации, имеет плоскость симметрии и обладает моноклинной сингонией.

Пусть в физическом пространстве с координатами  $x, y, z$  плоскость симметрии ортогональна оси  $z$ . Матрица коэффициентов аффинных преобразований для материала моноклинной сингонии имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

В аффинном пространстве системе координат  $x, y, z$  соответствует система координат  $\xi, \eta, \zeta$ . Ось  $\zeta$  направлена ортогонально плоскости симметрии. Можно положить, что  $a_{33} = 1$ , т.е. масштабы осей  $z$  и  $\zeta$  совпадают. При аффинном преобразовании (3.1) класс симметрии материала не изменяется.

При плоской деформации выполняются условия

$$u_z = v_\zeta = 0, \quad v_\xi = v_\xi(\xi, \eta), \quad v_\eta = v_\eta(\xi, \eta), \quad (3.2)$$

и все компоненты аффинных напряжений  $\tau_\xi, \tau_\eta$  и  $\tau_{\xi\eta}$  не зависят от координаты  $\zeta$ .

Подставляя (3.1) в ассоциированный закон пластического течения (2.16), получим

$$\tau_{\xi\zeta} = \tau_{\eta\zeta} = 0, \quad \tau_\zeta = (k_{13}\tau_\xi + k_{23}\tau_\eta + k_{36}\tau_{\xi\eta})q, \quad (3.3)$$

где  $q = (k_{13} + k_{23})^{-1}$ .

Условие пластичности (2.15) в этом случае можно представить в виде

$$(\tau_\xi - \tau_\eta + 2\nu\tau_{\xi\eta})^2 + 4\mu^2\tau_{\xi\eta}^2 = 4k^2, \quad (3.4)$$

где  $4\mu^2 = [k_{36}(k_{36} - 2k_{26} + k_{16}) - 2k_{66}(k_{13} + k_{23}) - (k_{16}k_{23} - k_{26}k_{13})^2]p$ ,  $4k^2 = (k_{13} + k_{23})p$ ,  $2\nu = (k_{16}k_{23} - k_{26}k_{13})p$ ,  $p = (k_{12}k_{13} + k_{12}k_{23} + k_{13}k_{23})^{-1}$ .

Уравнения равновесия с учетом (3.3) записываются в форме

$$\frac{\partial \tau_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_\eta}{\partial \eta} = 0. \quad (3.5)$$

Условию пластичности (3.4) удовлетворим тождественной подстановкой

$$\tau_\xi + \nu \tau_{\xi\eta} = \sigma + \sin 2\phi, \quad \tau_\eta - \nu \tau_{\xi\eta} = \sigma - \sin 2\phi, \quad \tau_{\xi\eta} = -\cos 2\phi/\mu. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + 2 \left( \cos 2\phi - \frac{\nu}{\mu} \sin 2\phi \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{2}{\mu} \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} - 2 \left( \cos 2\phi - \frac{\nu}{\mu} \sin 2\phi \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{2}{\mu} \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Уравнения (3.7) являются гиперболическими и имеют два семейства действительных характеристик

$$\left( \frac{d\xi}{d\eta} \right)_{1,2} = \frac{\sin 2\phi}{(\mu \cos 2\phi - \nu \sin 2\phi) \pm \sqrt{(\mu \cos 2\phi - \nu \sin 2\phi)^2 + \sin^2 2\phi}}, \quad (3.8)$$

и соотношения вдоль них

$$\sigma/2 \pm \omega(\phi) = \gamma_{1,2} = const, \quad (3.9)$$

где

$$\omega(\phi) = \frac{1}{\mu} \int \sqrt{(\mu \cos 2\phi - \nu \sin 2\phi)^2 + \sin^2 2\phi} d\phi. \quad (3.10)$$

Принимая за новые переменные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , уравнения (3.7) преобразуем к канонической форме

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \xi} + tg 2\theta \frac{\partial \gamma_1}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi} tg 2\theta - \frac{\partial \gamma_2}{\partial \eta} = 0, \quad (3.11)$$

где  $\theta$  – угол наклона характеристик  $\gamma_{1,2}$  к оси  $0\xi$ . Используя преобразование М.Леви, можно получить линейную систему

$$\frac{\partial \eta}{\partial \gamma_2} = tg 2\theta \frac{\partial \xi}{\partial \gamma_2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_1} = -ctg 2\theta \frac{\partial \xi}{\partial \gamma_1}. \quad (3.12)$$

Эту систему можно свести к системе с ограниченными коэффициентами, введя в качестве новых неизвестных составляющие  $U$  и  $V$  радиуса вектора в рассматриваемой точке по направлениям касательной и нормали к характеристике (3.8), проходящей через данную точку

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma_2} - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\omega} U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\omega} V = 0. \quad (3.13)$$

Интегрирование этих уравнений аналогично интегрированию уравнений пластического течения изотропных сред.

Преобразование М. Леви выполнимо, если  $D(\gamma_1, \gamma_2)/D(\xi, \eta) \neq 0$ . Равенство  $D(\gamma_1, \gamma_2)/D(\xi, \eta) \neq 0$  возможно только в следующих случаях: 1)  $\gamma_1 = const$ ,  $\gamma_2 \neq const$ ; 2)  $\gamma_1 \neq const$ ,  $\gamma_2 = const$ ; 3)  $\gamma_1 = const$ ,  $\gamma_2 = const$ .

Каждому из этих случаев отвечает особый тип интегралов уравнений пластичности.

В случае 1 этот интеграл имеет вид

$$\sigma/2 + \omega(\phi) = const, \quad \eta = -\frac{(\mu \cos 2\phi - \nu \sin 2\phi)^2 + \sin^2 2\phi}{\sin 2\phi} \xi + \psi_1(\phi). \quad (3.14)$$

В случае 2

$$\sigma/2 - \omega(\phi) = const, \eta = -\frac{\sin 2\phi}{(\mu \cos 2\phi - \nu \sin 2\phi) + \sqrt{(\mu \cos 2\phi - \nu \sin 2\phi)^2 + \sin^2 2\phi}} \xi + \psi_2(\phi). \quad (3.15)$$

В случае 3  $\sigma$  и  $\theta$  являются постоянными, что соответствует равномерно напряженному состоянию.

В случаях 1 и 2 характеристики одного из семейств являются прямыми. В случае 3 прямолинейны характеристики обоих семейств.

Используя аффинные преобразования, полученную систему уравнений задачи плоской деформации можно перевести в физическое пространство. Поскольку при аффинных преобразованиях тип дифференциальных уравнений не изменяется, то уравнения для поля напряжений и скоростей в физическом пространстве также будет гиперболической.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кузнецов, Е. Е. О закономерностях аффинного моделирования в линейной теории упругости анизотропных сред / Е. Е. Кузнецов // Известия ТулГУ. Серия: Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. – Тула, 2006. – Вып. 3. – С. 31–39.
- [2] Маховер, Е. В. Некоторые задачи теории идеальной пластичности анизотропных сред / Е. В. Маховер // Доклады АН СССР. – 1948. – Т. 28, № 2. – С. 209–212.
- [3] Mises, R. Mechanic der plastischen Formagerung von Kristalen / R. Mises // Z. angew. Math. u. Mech. – 1928. – Bd. 8, № 5. – S. 161–185.
- [4] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
- [5] Lodge, A. S. A new theorem in the classical theory of elasticity / A. S. Lodge // Nature. – 1952. – Vol. 169, № 4309. – P. 926–927.
- [6] Lodge, A. S. The transformation to isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids / A. S. Lodge // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1955. – Vol. 8, № 2. – P. 211–225.

*Y. Y. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko*

### AFFINE MODELLING OF ANISOTROPIC ENVIRONMENTS SQUARE-LAW CONDITION OF PLASTICITY

*Tula State University*

**Abstract.** The anisotropic environments, submitting to square-law criterion of plasticity are considered. Construction of the theory of ideal plasticity of anisotropic environments by means of use of affine modeling is offered. Affine transformations of coordinates, a component of a vector of speed of moving, a component of tensors stress and speeds of deformation are entered. The hypothesis about incompressible plastic current in affine space (a hypothesis about quasi-incompressible) is accepted. This hypothesis imposes only one restriction on factors of a plastic pliability. For the environment with monoclinic symmetry the equations of flat deformation are resulted. It is shown, that the equations of a field of pressure and speeds of movings are hyperbolic. Characteristics of these fields in affine space coincide.

**Keywords:** anisotropy, ideal plasticity, affine modeling, quasi-incompressible, flat deformation.



*Кузнецов Евгений Евгеньевич*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: ekc\_05@mail.ru*

*Матченко Илья Николаевич*

*доктор физико-математических наук, доцент кафедры городского строительства и архитектуры, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: ekc\_05@mail.ru*

*Матченко Николай Михайлович*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: ekc\_05@mail.ru*

*Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenievich*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula*

*Mattchenko, Ilya Nikolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, City Construction and Architecture, Tula State University, Tula*

*Mattchenko, Nikolay Mikhailovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Modeling, Tula State University, Tula*

Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

## ГИБРИДНОЕ УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Тулский государственный университет*

**Аннотация.** Вводятся линейные инварианты главных ранжированных напряжений, позволяющие сформулировать для изотропного материала трехпараметрическое квадратичное условие пластичности. Классические критерии Треска и Мизеса вытекают из предложенного условия пластичности как частные случаи.

**Ключевые слова:** вектор напряжения, ранжированные главные напряжения, линейные инварианты, гибридное условие пластичности.

УДК: 539.375

**Введение.** В теории пластичности изотропных материалов, пластические свойства которых не чувствительны к воздействию гидростатического давления, как правило, используется кусочно-линейное условие Треска [11]

$$\max[|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|] = \sigma_p, \quad (1.1)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения,  $\sigma_p$  – предел текучести при одноосном растяжении, и гладкое условие Мизеса [10]

$$J'_2 = \sigma_p^2/3, \quad (1.2)$$

где  $J'_2 = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]/6$  – второй инвариант девиатора тензора напряжений.

В пространстве главных напряжений поверхность текучести Треска представляет собой правильную шестигранную призму, ось которой равнонаклонена к декартовым осям этого пространства, а поверхность текучести Мизеса представляет собой цилиндр.

Экспериментальные данные по началу текучести пластичных изотропных материалов, пластические свойства которых не чувствительны к воздействию гидростатического давления, обычно лежат между поверхностями Мизеса и Треска. Поэтому делались попытки сформулировать критерий пластичности, обобщающий критерий Мизеса и дающий поверхность текучести, промежуточной между цилиндрами Треска и Мизеса. В частности [5], для того чтобы более точно описать экспериментальные данные Тейлора и Квинни, Прагер предложил условие пластичности в виде

$$(J'_2)^3 - C(J'_3)^2 = R^6, \quad (1.3)$$

где  $J'_3 = (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)/27$  – третий инвариант девиатора напряжений,  $C$  и  $R$  – механические характеристики пластических свойств.

При равенстве  $C$  нулю, это условие пластичности переходит в критерий Мизеса. Поскольку условие пластичности Прагера в пространстве главных напряжений представляет собой гладкую поверхность, то переход к критерию Треска принципиально невозможен.

Б. Поль [5] приводит следующую формулу, обобщающую критерий Мизеса:

$$\frac{1}{3} \left[ \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^{2n} + \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_3}{2} \right)^{2n} + \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^{2n} \right] = K^{2n}, \quad (1.4)$$

где  $K$  и  $n$  – механические характеристики пластических свойств.

При равенстве  $n$  нулю это условие сводится к критерию Мизеса, а при значении параметра  $n$ , стремящемуся к бесконечности, оно приближается к критерию Треска, но не переходит в него.

Обычно [5], если ссылаются на то, что отношения предела упругого деформирования при одноосном растяжении к пределу упругого сопротивления при чистом сдвиге при условиях предельного состояния Мизеса и Треска отличаются не более чем на 14%, то, по умолчанию, предполагается, что эти критерии могут описывать один и тот же материал. Однако при исследовании пластического деформирования [2, 6] вопрос выбора условия пластичности имеет принципиальное значение.

Введя предположение, что каждый из критериев Мизеса или Треска отражает реальные свойства конкретных материалов, сформулируем обобщенное условие пластичности, из которого как частный случай вытекает условие Мизеса и Треска. При таком подходе закрывается вопрос об альтернативности критериев Мизеса и Треска [9]. При формулировке критериев пластичности принципиальным является выбор инвариантов напряжений, входящих в критерий [8].

Ниже вводятся линейные инварианты ранжированных главных напряжений, позволяющие сформулировать трехпараметрическое квадратичное условие пластичности. В этом случае для определения характеристик пластических свойств материала необходимо проведение трех базовых экспериментов: одноосное растяжение, сжатие и чистый сдвиг. При равенстве пределов пластического сопротивления при растяжении и сжатии это условие пластичности переходит в двухпараметрическое. Поскольку из двухпараметрического условия пластичности как частные случаи вытекает условие пластичности Треска и Мизеса, то предложенное условие пластичности названо гибридным.

**1. Линейные инварианты главных ранжированных напряжений.** Рассмотрим трехмерное пространство главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Растягивающие напряжения далее считаются положительными. Пусть  $\vec{i}_1^0, \vec{i}_2^0, \vec{i}_3^0$  – тройка ортогональных единичных векторов, характеризующих направления главных напряжений.

Напряженное состояние в точке характеризуется вектором напряжений

$$\vec{\Sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3 = \sigma_1 \vec{i}_1^0 + \sigma_2 \vec{i}_2^0 + \sigma_3 \vec{i}_3^0. \quad (2.1)$$

Выделим плоскость, проходящую через начало координат и имеющую одинаковые наклоны к координатным осям

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \quad (2.2)$$

Единичный вектор  $\vec{m}_I^0$  является нормалью этой площадки. Направляющие косинусы вектора  $\vec{m}_I^0$  по отношению к координатным осям одинаковы

$$\vec{i}_1^0 \cdot \vec{m}_I^0 = \vec{i}_2^0 \cdot \vec{m}_I^0 = \vec{i}_3^0 \cdot \vec{m}_I^0 = 1/\sqrt{3}. \quad (2.3)$$

Ось, задаваемая направлением  $\vec{m}_I^0$ , называется гидростатической осью, причем  $\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 58,8^\circ$ . Следовательно,

$$\vec{m}_I^0 = (\vec{i}_1^0 + \vec{i}_2^0 + \vec{i}_3^0)/\sqrt{3}.$$

Плоскость, задаваемая уравнением (2.2), называется девиаторной плоскостью. Проекция вектора напряжения  $\vec{\Sigma}$  на гидростатическую ось определяется соотношением

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \vec{\Sigma} \cdot \vec{m}_I^0 = (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3) \cdot \vec{m}_I^0 = \\ &= (\sigma_1 \vec{i}_1^0 + \sigma_2 \vec{i}_2^0 + \sigma_3 \vec{i}_3^0) \cdot \vec{m}_I^0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / \sqrt{3} = \sqrt{3} \sigma_0,\end{aligned}\quad (2.4)$$

где  $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$  – гидростатическое напряжение.

Таким образом, составляющая вектора напряжения  $\vec{\Sigma}$ , направленная вдоль вектора  $\vec{m}_I^0$ , определяется соотношением

$$\vec{\sigma}_I = \sigma_I \vec{m}_I^0 = \sigma_I (\vec{i}_1^0 + \vec{i}_2^0 + \vec{i}_3^0) / \sqrt{3}.\quad (2.5)$$

Проекция вектора  $\vec{\Sigma}$  на девиаторную плоскость (2.4) представляет собой вектор  $\vec{S}_D$  – вектор интенсивности девиаторных напряжений:

$$\begin{aligned}\vec{S}_D &= \vec{\Sigma} - \vec{\sigma}_I = (\sigma_1 \vec{i}_1^0 + \sigma_2 \vec{i}_2^0 + \sigma_3 \vec{i}_3^0) - \sigma_I (\vec{i}_1^0 + \vec{i}_2^0 + \vec{i}_3^0) / \sqrt{3} = \\ &= (\sigma_1 - \sigma_I / \sqrt{3}) \vec{i}_1^0 + (\sigma_2 - \sigma_I / \sqrt{3}) \vec{i}_2^0 + (\sigma_3 - \sigma_I / \sqrt{3}) \vec{i}_3^0 = \\ &= (\sigma_1 - \sigma_0) \vec{i}_1^0 + (\sigma_2 - \sigma_0) \vec{i}_2^0 + (\sigma_3 - \sigma_0) \vec{i}_3^0 = s_1 \vec{i}_1^0 + s_2 \vec{i}_2^0 + s_3 \vec{i}_3^0,\end{aligned}\quad (2.6)$$

где  $s_i = \sigma_i - \sigma_0$  – главные девиаторные напряжения, при этом  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ .

Модуль вектора  $\vec{S}_D$  определяется соотношением

$$\begin{aligned}\Sigma_D &= \sqrt{\Sigma^2 - \sigma_I^2} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3}}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Рассмотрим квадратичную форму  $\vec{S}_D$

$$S_D^2 = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3) / 3 \quad (2.8)$$

и найдем собственные значения и направляющие косинусы ее собственных векторов. Собственные значения будут  $k_I = 0$ ,  $k_{II} = k_{III} = 1$ . Выделим шесть вариантов собственных векторов, которые определяются следующей системой направляющих косинусов:

$$\begin{aligned}m_{1I}^{0(1,4)} &= m_{2I}^{0(1,4)} = m_{3I}^{0(1,4)} = 1/\sqrt{3}, & m_{1II}^{0(1,4)} &= -m_{3II}^{0(1,4)} = \pm 1/\sqrt{2}, \\ m_{2II}^{0(1,4)} &= 0, & -m_{1III}^{0(1,4)} &= -m_{3III}^{0(1,4)} = m_{2III}^{0(1,4)} / 2 = 1/\sqrt{6};\end{aligned}\quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}m_{1I}^{0(2,5)} &= m_{2I}^{0(2,5)} = m_{3I}^{0(2,5)} = 1/\sqrt{3}, & m_{1II}^{0(2,5)} &= 0, \\ m_{2II}^{0(2,5)} &= -m_{3II}^{0(2,5)} = \pm 1/\sqrt{2}, & m_{1III}^{0(2,5)} / 2 &= -m_{2III}^{0(2,5)} = -m_{3III}^{0(2,5)} = 1/\sqrt{6};\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}m_{1I}^{0(3,6)} &= m_{2I}^{0(3,6)} = m_{3I}^{0(3,6)} = 1/\sqrt{3}, & -m_{1II}^{0(3,6)} &= m_{2II}^{0(3,6)} = \pm 1/\sqrt{2}, \\ m_{3II}^{0(3,6)} &= 0, & -m_{1III}^{0(3,6)} &= -m_{2III}^{0(3,6)} = m_{3III}^{0(3,6)} / 2 = 1/\sqrt{6}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

В круглых скобках обозначены варианты направляющих косинусов собственных векторов. Отсюда следуют шесть вариантов функций напряжений собственных векторов:

$$\sigma_I^{(1,4)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_{II}^{(1,4)} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_{III}^{(1,4)} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{6}};\quad (2.12)$$

$$\sigma_I^{(2,5)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_{II}^{(2,5)} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_{III}^{(2,5)} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{6}};\quad (2.13)$$

$$\sigma_I^{(3,6)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_{II}^{(3,6)} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_{III}^{(3,6)} = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{6}}.\quad (2.14)$$

Во всех представлениях собственных векторов вектор  $\vec{\sigma}_I$  равнонаклонен к векторам главных напряжений.

Этим представлениям функций напряжений собственных векторов соответствуют шесть вариантов собственных векторов:

$$\vec{\sigma}_I, \vec{\sigma}_{II}^{(1,4)}, \vec{\sigma}_{III}^{(1,4)}; \vec{\sigma}_I, \vec{\sigma}_{II}^{(2,5)}, \vec{\sigma}_{III}^{(2,5)}; \vec{\sigma}_I, \vec{\sigma}_{II}^{(3,6)}, \vec{\sigma}_{III}^{(3,6)}. \quad (2.15)$$

Разложение модуля вектора напряжения по собственным векторам в виде варианта (2,5) рассматривались А.А. Ильюшиным [2], а в виде варианта (3,6) - В.В. Новожиловым [7]. Разложение вектора напряжения Христиановича-Шемакина [8] не относится к классу разложений на собственные векторы с единичными собственными значениями.

Разложение в виде варианта (1,4) наталкивает на идею введения линейных инвариантов главных ранжированных напряжений. Термин “главные ранжированные напряжения” означает, что главные напряжения выстроены в определенном порядке.

Главные девиаторные напряжения  $s_1, s_2$  и  $s_3$  выражаются через модуль интенсивности девиаторных напряжений  $\Sigma_D$  и фазовый инвариант девиаторных напряжений  $\varphi_\sigma$

$$s_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_D \sin\left(\varphi_\sigma + \frac{2\pi}{3}\right), \quad s_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_D \sin\varphi_\sigma, \quad s_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\Sigma_D \sin\left(\varphi_\sigma + \frac{4\pi}{3}\right), \quad (2.16)$$

где  $\varphi_\sigma$  – фазовый инвариант девиаторных напряжений. Если спроектировать направления осей главных напряжений на девиаторную плоскость, то эта плоскость разделится на шесть секторов с раствором угла по  $\pi/3$  каждый. Назначим нумерацию секторов цифрами  $1, \dots, 6$  проводя обход против часовой стрелки от главного напряжения  $\sigma_1$ . Биссектриса раствора угла в каждом секторе является линией сдвига. Положения линий сдвига определим углами  $\theta_1 = \pi/6, \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = 5\pi/6, \theta_4 = 7\pi/6, \theta_5 = 3\pi/2, \theta_6 = 11\pi/6$ , отсчитываемыми от направления главного напряжения  $\sigma_1$  в направлении против часовой стрелки.

Составив произведение главных девиаторных напряжений, получим

$$s_1 s_2 s_3 = -\frac{1}{3\sqrt{6}} \sin 3\varphi_\sigma \Sigma_D^3.$$

Отсюда

$$\varphi_\sigma = -\frac{1}{3} \arcsin\left(3\sqrt{6} \frac{s_1 s_2 s_3}{\Sigma_D^3}\right). \quad (2.17)$$

Отсчет угла  $\varphi_\sigma$  производится против часовой стрелки от линии сдвига первого сектора. Диапазон изменения угла  $\varphi_\sigma$  в зависимости от соотношения между главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  находится в интервале  $0 \leq \varphi_\sigma \leq 2\pi$  [4].

Неравенствами

$$\sigma_1^r \geq \sigma_2^r \geq \sigma_3^r, \quad (2.18)$$

введем ранжированные главные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_1^r &= \sigma_0 + s_1^r = [\sigma_I + \sqrt{2}\Sigma_D \sin(\phi_\sigma + 2\pi/3)]/\sqrt{3}, \\ \sigma_2^r &= \sigma_0 + s_2^r = (\sigma_I + \sqrt{2}\Sigma_D \sin\phi_\sigma)/\sqrt{3}, \\ \sigma_3^r &= \sigma_0 + s_3^r = [\sigma_I + \sqrt{2}\Sigma_D \sin(\phi_\sigma + 4\pi/3)]/\sqrt{3}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $\phi_\sigma = \varphi_\sigma - \theta_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 6$ ) – фазовый инвариант ранжированных девиаторных напряжений,  $s_1^r, s_2^r, s_3^r$  – ранжированные главные напряжения. Угол  $\phi_\sigma$  изменяется в диапазоне  $-\pi/6 \leq \phi_\sigma \leq \pi/6$  и отсчитывается в каждом секторе от линии сдвига. Положительное направление отсчета совпадает с движением вокруг вектора  $\vec{\sigma}_I$  против часовой стрелки.

В каждом из секторов связь между главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и ранжированными главными напряжениями  $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \sigma_3^r$  и их инвариантами записывается в виде таблицы.

Подставив ранжированные напряжения в выражения (2.12 – 2.14), получим функции напряжений собственных векторов  $\vec{\Sigma}_I, \vec{\Sigma}_{II}, \vec{\Sigma}_{III}$ .

$n$	$\theta$	$\sigma_1^r \geq \sigma_2^r \geq \sigma_3^r$	$\sqrt{2}\Sigma_{II} = \sigma_1^r - \sigma_3^r$	$\sqrt{6}\Sigma_{III} = 2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r$
1	$\pi/6$	$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	$\sigma_1 - \sigma_3$	$2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3$
2	$\pi/2$	$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$	$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$
3	$5\pi/6$	$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 - \sigma_1$	$2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2$
4	$7\pi/6$	$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$\sigma_3 - \sigma_1$	$2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3$
5	$3\pi/2$	$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 - \sigma_2$	$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$
6	$11\pi/6$	$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$	$\sigma_1 - \sigma_2$	$2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2$

$$\Sigma_I = \sigma_I = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r), \quad \Sigma_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1^r - \sigma_3^r), \quad \Sigma_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r). \quad (2.20)$$

Векторы  $\vec{\Sigma}_I$ ,  $\vec{\Sigma}_{II}$ ,  $\vec{\Sigma}_{III}$  имеют простой геометрический смысл. Вектор  $\vec{\Sigma}_I$  является проекцией вектора напряжения  $\vec{\Sigma}$  на гидростатическую ось. Вектор  $\vec{\Sigma}_{II}$  лежит в девиаторной плоскости и совпадает в каждом из секторов с линией сдвига. Вектор  $\vec{\Sigma}_{III}$  также лежит в девиаторной плоскости и является проекцией вектора  $\vec{\Sigma}$  на направление, перпендикулярное вектору  $\vec{\Sigma}_{II}$ . Положительное направление вектора  $\vec{\Sigma}_{III}$  определяется поворотом вектора  $\vec{\Sigma}_{II}$  против часовой стрелки. Сумма векторов  $\vec{\Sigma}_{II}$  и  $\vec{\Sigma}_{III}$  является вектором девиаторных напряжений

$$\vec{\Sigma}_d = \vec{\Sigma}_{II} + \vec{\Sigma}_{III}. \quad (2.21)$$

Введем параметр

$$m_\sigma = \Sigma_{III}/\Sigma_{II} = \operatorname{tg}\phi_\sigma. \quad (2.22)$$

Параметр  $m_\sigma$  аналогичен параметру Лоде  $\mu_\sigma$  и отличается от параметра Лоде на величину  $\sqrt{3}$

$$m_\sigma = \mu_\sigma/\sqrt{3}. \quad (2.23)$$

Параметр  $m_\sigma$  изменяется в диапазоне  $-1/\sqrt{3} \leq m_\sigma \leq 1/\sqrt{3}$ . При одноосном растяжении  $m_\sigma = -1/\sqrt{3}$ ,  $\phi_\sigma = -\pi/6$ , при чистом сдвиге  $m_\sigma = 0$ ,  $\phi_\sigma = 0$ , при одноосном сжатии  $m_\sigma = 1/\sqrt{3}$ ,  $\phi_\sigma = \pi/6$ .

Интенсивность девиаторных напряжений определяется соотношениями

$$\Sigma_d = \sqrt{\Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2} = \Sigma_{II}\sqrt{1 + m_\sigma^2} = \Sigma_{II}/\cos\phi_\sigma = \Sigma_{III}/\sin\phi_\sigma. \quad (2.24)$$

Направление вектора  $\vec{\Sigma}_d$  определяется фазовым инвариантом ранжированных напряжений  $\phi_\sigma = \operatorname{arctg}(\Sigma_{III}/\Sigma_{II})$ .

Тройку функций  $\Sigma_I$ ,  $\Sigma_{II}$ ,  $\Sigma_{III}$  будем называть линейными инвариантами ранжированных напряжений.

Легко проследить связь между линейными инвариантами  $\Sigma_I$ ,  $\Sigma_{II}$ ,  $\Sigma_{III}$  с гидростатическим напряжением  $\sigma_0$ , максимальным касательным напряжением  $T_{\max} = (\sigma_1^r - \sigma_3^r)/2$  и промежуточным ранжированным главным напряжением  $\sigma_2^r$ :

$$\Sigma_I = \sqrt{3}\sigma_0, \quad \Sigma_{II} = \sqrt{2}T_{\max}, \quad \Sigma_{III} = \sqrt{1,5}(\sigma_2^r - \sigma_0). \quad (2.25)$$

**2. Гибридное условие пластичности.** Основываясь на простейших экспериментах, можно сформулировать различные условия пластичности. Далее, рассмотрим класс материалов, пластические свойства которых не зависят от действия гидростатического напряжения. Характеристикой пластических свойств материала является предел сопротивления пластическому деформированию, который будем называть пределом текучести [1]. Рассмотрим особенности экспериментального определения предела текучести в условиях простого нагружения в

пространстве напряжений. В этом случае направления осей главных напряжений и параметр вида напряженного состояния в процессе эксперимента остаются неизменными. Таким образом, образец нагружается усилиями, возрастающими прямо пропорционально некоторому параметру, т.е. в пространстве напряжений на девиаторной плоскости нагружение ведется по лучу  $m_\sigma = \frac{m}{\tilde{m}_\sigma} = const$  при возрастающей величине вектора  $\vec{\Sigma}_D$ . При некотором значении нагрузок достигается предельное состояние и начинается пластическое течение. Процесс простого нагружения можно также представить как движение вдоль луча  $m_\sigma = \frac{m}{\tilde{m}_\sigma} = const$  точки пересечения двух прямых

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = f(\frac{m}{\tilde{m}_\sigma}), \quad 2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r = \sqrt{3}\frac{m}{\tilde{m}_\sigma} f(\frac{m}{\tilde{m}_\sigma}), \quad (3.1)$$

или пересечения прямой и кривой линий

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = f(\rightarrow m_\sigma), \quad \Sigma_D = \Sigma_{II} \cos \phi_\sigma = \sqrt{1 + \rightarrow m_\sigma^2} f(\rightarrow m_\sigma) / \sqrt{2}. \quad (3.2)$$

В результате таких опытов на девиаторной плоскости определяется ряд экспериментальных точек, соответствующих возникновению пластических деформаций. Используя приемы оптимизации экспериментальных данных, можно построить невогнутую кривую, которая называется кривой пластичности. Поскольку выбор приема оптимизации является субъективным актом, то полученному набору экспериментальных точек может соответствовать набор различных кривых текучести.

В теории идеальной пластичности наиболее часто используются условия пластичности Треска и Мизеса, которые зачастую считаются альтернативными [9]. Совершенно очевидно, что задание одной экспериментальной точки не влияет на выбор возможных условий текучести, устанавливая лишь их взаимное расположение.

Совершенствуя попытку представления пластических свойств изотропных материалов, сформулируем трехпараметрическое условие кривой пластичности в виде квадратичной функции инвариантов главных ранжированных напряжений  $\Sigma_{II}$  и  $\Sigma_{III}$

$$a_1 \Sigma_{II}^2 + a_2 \Sigma_{II} \Sigma_{III} + a_3 \Sigma_{III}^2 = 1, \quad (3.3)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  – характеристики пластических свойств материала.

Уравнение кривой пластичности (3.3) можно представить также в виде

$$\Sigma_D^2 (a_1 + a_2 m_\sigma + a_3 m_\sigma^2) = (1 + m_\sigma^2). \quad (3.4)$$

На девиаторной плоскости в каждом из шести секторов кривая пластичности (3.3) или (3.4) представляет след от пересечения криволинейной грани призмы пластичности и девиаторной плоскости. В силу изотропных свойств материала достаточно провести построение этой кривой только в одном из шести секторов. Выберем первый сектор, который характеризуется углом  $\theta_1 = \pi/6$ . Для определения характеристик пластических свойств материала  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  необходимо назначить три опыта. В качестве таких опытов выберем: эксперимент на одноосное растяжение, одноосное сжатие и чистый сдвиг. Эти эксперименты соответствуют трем характерным точкам кривой (3.1) или (3.2). Две точки при значениях ( $\frac{m}{\tilde{m}_\sigma} = \mp 1/\sqrt{3}$ ) расположены на границах сектора, а одна при значении ( $\frac{m}{\tilde{m}_\sigma} = 0$ ) - на его биссектрисе (линии сдвига). В этих трех экспериментах реализуются принципиально различные режимы пластического деформирования. В эксперименте на чистый сдвиг ( $\frac{m}{\tilde{m}_\sigma} = 0$ ) предельное состояние наступает на площадке максимального главного касательного напряжения. При одноосном растяжении ( $\frac{m}{\tilde{m}_\sigma} = -1/\sqrt{3}$ ) и одноосном сжатии ( $\frac{m}{\tilde{m}_\sigma} = 1/\sqrt{3}$ ) предельное состояние наступает одновременно на двух из трех площадок главных касательных напряжений, при этом между главными ранжированными напряжениями справедливы зависимости, соответственно ( $\sigma_2^r = \sigma_3^r$ ) или ( $\sigma_1^r = \sigma_2^r$ ). Режим пластического течения, при котором предельное состояние

возникает одновременно на двух площадках главных касательных напряжений, по терминологии Кармана-Хаара называется полной пластичностью [6].

Пусть в экспериментах определены предельные сопротивления пластическому деформированию: при одноосном растяжении –  $\sigma_p$ , при одноосном сжатии –  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге –  $\tau_s$ . Тогда характеристики пластических свойств материала  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  вычисляются по формулам

$$a_1 = \frac{1}{2\tau_s^2}, \quad a_2 = \sqrt{3} \left( \frac{1}{\sigma_c^2} - \frac{1}{\sigma_p^2} \right), \quad a_3 = 3 \left( \frac{1}{\sigma_c^2} + \frac{1}{\sigma_p^2} - \frac{1}{2\tau_s^2} \right).$$

Обратим внимание на то, что пределы пластическому деформированию материала  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  и  $\tau_s$  получают из экспериментов в условиях простого нагружения, т.е. в процессе эксперимента направления осей главных напряжений, и значение параметра вида напряженного состояния не изменяется.

Если свойства материала таковы, что при одноосном растяжении и сжатии величины  $\sigma_p$  и  $\sigma_c$  одинаковы, то материал является нормально изотропным. Для нормально изотропного материала  $\sigma_p = \sigma_c$  и

$$a_1 = \frac{1}{2\tau_s^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 6 \left( \frac{1}{\sigma_p^2} - \frac{1}{4\tau_s^2} \right).$$

Условия предельного состояния (3.2) и (3.3) будем называть гибридными, поскольку из них при конкретных соотношениях между параметрами  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  и  $\tau_s$  можно получить условие пластичности Треска и Мизеса. Например, если для материала экспериментально подтверждаются зависимости  $\sigma_p = \sigma_c$  и  $\sigma_p = 2\tau_s$ , то условие предельного состояния (3.2) трансформируется в условие пластичности Треска

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = 2\tau_s.$$

Если же в материале пластические свойства материала таковы, что экспериментально установлены зависимости  $\sigma_p = \sigma_c$  и  $\sigma_p = \sqrt{3}\tau_s$ , то условие предельного состояния (3.2) трансформируется в условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_1^r - \sigma_2^r)^2 + (\sigma_2^r - \sigma_3^r)^2 + (\sigma_3^r - \sigma_1^r)^2 = 6\tau_s^2.$$

Таким образом, выбор функции предельного состояния в виде (3.2) или (3.3) позволяет как частные случаи получить классические критерии пластичности и заранее не устанавливает зависимость между тремя базовыми характеристиками предельного состояния  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  и  $\tau_s$ .

Условие пластичности (3.2) можно также представить в виде уравнения

$$\Sigma_{II} = (\sigma_1^r - \sigma_3^r)/\sqrt{2} = (a_1 + a_2 m_\sigma + a_3 m_\sigma^2)^{-1/2}, \quad (3.5)$$

и одного из двух уравнений

$$\Sigma_{III} = (2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r)/\sqrt{6} = m_\sigma (a_1 + a_2 m_\sigma + a_3 m_\sigma^2)^{-1/2}, \quad (3.6)$$

$$\Sigma_D^2 = [(\sigma_1^r - \sigma_2^r)^2 + (\sigma_2^r - \sigma_3^r)^2 + (\sigma_3^r - \sigma_1^r)^2]/3 = (1 + m_\sigma^2)/(a_1 + a_2 m_\sigma + a_3 m_\sigma^2). \quad (3.7)$$

Зависимости (3.5) и (3.6) устанавливают предельные значения линейных инвариантов главных ранжированных напряжений от параметра вида напряженного состояния  $m_\sigma$ , а соотношение (3.7) также определяет зависимость интенсивности девиатора напряжений от вида напряженного состояния.

Далее будем считать соотношение (3.5) основным, поскольку оно устанавливает зависимость максимального касательного напряжения от параметра вида напряженного состояния и постулирует сдвиговый характер пластического деформирования. Соотношения (3.6) и (3.7)



будем рассматривать как соотношения для вычисления промежуточного главного напряжения  $\sigma_2^r$ .

В условиях простого нагружения соотношения (3.5) – (3.7) можно записать в виде

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_1 + a_2 \tilde{m}_\sigma + a_3 \tilde{m}_\sigma^2}}, \quad (3.8)$$

$$2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r = \frac{\sqrt{6} \tilde{m}_\sigma}{\sqrt{a_1 + a_2 \tilde{m}_\sigma + a_3 \tilde{m}_\sigma^2}}, \quad (3.9)$$

$$(\sigma_1^r - \sigma_2^r)^2 + (\sigma_2^r - \sigma_3^r)^2 + (\sigma_3^r - \sigma_1^r)^2 = \frac{3(1 + \tilde{m}_\sigma^2)}{a_1 + a_2 \tilde{m}_\sigma + a_3 \tilde{m}_\sigma^2}, \quad (3.10)$$

где  $\tilde{m}_\sigma = m_\sigma = const$ .

Условие пластичности в пространстве Хейга представляет собой ребро пересечения двух плоскостей (3.8) и (3.9), или ребро пересечения плоскости (3.8) и криволинейной грани (3.10).

Следовательно: в условиях простого нагружения в пространстве напряжений кривая пластичности, записанная в форме (3.2) или в форме (3.3), является геометрическим местом проявления ребер пластичности (3.8) и (3.9) или (3.8) и (3.10).

В базовых экспериментах на сдвиг, одноосное растяжение и сжатие, пластические свойства проявляются в виде ребер пластичности:

– при сдвиге

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = 2\tau_s, \quad 2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r = 0 \quad (3.11)$$

или

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = 2\tau_s, \quad (\sigma_1^r - \sigma_2^r)^2 + (\sigma_2^r - \sigma_3^r)^2 + (\sigma_3^r - \sigma_1^r)^2 = 6\tau_s^2; \quad (3.12)$$

– при одноосном сжатии

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \sigma_c, \quad 2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r = 0 \quad (3.13)$$

или

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \sigma_c, \quad (\sigma_1^r - \sigma_2^r)^2 + (\sigma_2^r - \sigma_3^r)^2 + (\sigma_3^r - \sigma_1^r)^2 = 2\sigma_c^2; \quad (3.14)$$

и при одноосном растяжении

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \sigma_p, \quad 2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r = -\sigma_p \quad (3.15)$$

или

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \sigma_p, \quad (\sigma_1^r - \sigma_2^r)^2 + (\sigma_2^r - \sigma_3^r)^2 + (\sigma_3^r - \sigma_1^r)^2 = 2\sigma_p^2. \quad (3.16)$$

Подчеркнем, что при всех режимах нагружения, кроме режимов  $\tilde{m}_\sigma = \mp 1/\sqrt{3}$ , предельное состояние реализуется только на одной площадке - площадке максимального главного касательного напряжения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Ленинград [СПб.] : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [3] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
- [4] *Новожилов, В. В.* О классе сложных нагружений, которые характеризуются сохранением направления главных осей / В. В. Новожилов // ПММ. – Т. 18, № 4. – С. 415–424.
- [5] *Поль, Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Б. Поль // Математические основы теории разрушения. – М., 1975. – С. 376–520.
- [6] *Хаар, А. К.* Теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. К. Хаар // Теория пластичности : сб. переводов. – М., 1948. – С. 41–56.
- [7] *Черных, К. Ф.* Введение в анизотропную упругость / К. Ф. Черных. – М. : Наука, 1988. – 192 с.
- [8] *Шемякин, Е. И.* Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях сплошной среды / Е. И. Шемякин // Доклады РАН. – Т. 373, № 5. – С. 632–634.
- [9] *Шемякин, Е. И.* Вопросы прочности твердых тел и горных пород / Е. И. Шемякин // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 26–45.
- [10] *Mises, R.* Mechanic der plastischen Formagerung von Kristalen / R. Mises // Z. angew. Math. und Mech. – 1928. – Bd. 8, № 5. – S. 161–185.
- [11] *Tresca, H.* In Memoires presentes par divers / H. Tresca // Acad. Sci. – Paris, 1868. – № 18. – P. 733–799.

*Y. Y. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko*

## HYBRID CONDITION OF PLASTICITY OF ISOTROPIC MATERIALS

*Tula State University*

**Abstract.** Linear invariants of main ranged stresses which allow to formulate three parametrical square-law plasticity condition for an isotropic material are entered. Classical Tresca and Mises criteria follow from the offered plasticity condition as special cases.

**Keywords:** stress vector, ranged main stresses, linear invariants, hybrid condition of plasticity.

Кузнецов Евгений Евгеньевич

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

Матченко Илья Николаевич

доктор физико-математических наук, доцент кафедры городского строительства и архитектуры, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

Матченко Николай Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenievich

Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

Mattchenko, Ilya Nikolaevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, City Construction and Architecture, Tula State University, Tula

Mattchenko, Nikolay Mikhailovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Modeling, Tula State University, Tula

Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

## О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ КВАДРАТИЧНОГО УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА К ОПИСАНИЮ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ АНИЗОТРОПИИ ЛИСТОВЫХ ПРОКАТНЫХ МЕТАЛЛОВ

Тульский государственный университет

**Аннотация.** Выписаны условия совместности механических характеристик анизотропии пластических свойств, вытекающие из квадратичного условия пластичности и ассоциированного с ним закона пластического течения. Приводятся данные экспериментов на листовых прокатных металлах. Показано, что для большинства металлов теория пластичности Мизеса-Хилла приводит к ошибкам, выходящим за пределы точности экспериментов.

**Ключевые слова:** анизотропия пластических свойств, квадратичное условие пластичности, ассоциированный закон пластического течения, условия совместности механических характеристик.

УДК: 539.3

Мизес [1] в 1928 г. сформулировал критерий пластичности анизотропных сред в виде квадратичной функции компонент тензора напряжения инвариантной относительно точечной группы преобразования координат, характеризующих класс симметрии среды. Предложив закон пластического деформирования, ассоциированный с критерием пластичности, Мизес заложил основы теории идеальной пластичности анизотропных сред. При формулировке основных соотношений Мизесом использовалась гипотеза о независимости пластического деформирования от гидростатического давления. Позже, в 1948 г., Хилл [2] использовал соотношения Мизеса при исследовании поликристаллических металлов (ортотропных материалов). Теория течения Мизеса-Хилла нашла широкое применение при проектировании процессов обработки металлов давлением [3].

Ниже, определены границы применения квадратичного условия пластичности Мизеса. Анализ данных экспериментов, полученных на листовых прокатных металлах, показывает, что во многих случаях применение условия пластичности Мизеса приводит к ошибкам, выходящим за границы точности эксперимента.

**1. Квадратичное условие пластичности Мизеса.** Рассматривается жесткопластический ортотропный материал. Введем декартову систему координат  $x, y, z$ , совпадающую с осями ортотропии.

Хилл предложил для ортотропных материалов соотношения пластичности Мизеса записывать в форме [1]:

условие пластичности

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1; \quad (1.1)$$

зависимости для приращения деформаций

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= d\lambda[H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)], & d\gamma_{yz} &= d\lambda L\tau_{yz}, \\ d\varepsilon_y &= d\lambda[F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)], & d\gamma_{zx} &= d\lambda M\tau_{zx}, \\ d\varepsilon_z &= d\lambda[G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)], & d\gamma_{xy} &= d\lambda N\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$  – компоненты тензора напряжения,  $F, \dots, N$  – характеристики пластической анизотропии,  $d\varepsilon_x, \dots, d\gamma_{xy}$  – приращения компонент тензора деформаций,  $d\lambda$  – коэффициент пропорциональности.

Из соотношений (1.2) вытекает тождество

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = 0. \quad (1.3)$$

На примере листового прокатного металла рассмотрим возможности экспериментального определения параметров анизотропии. Пусть ось  $x$  совпадает с направлением прокатки, ось  $y$  направлена поперек прокатки, а ось  $z$  направлена по нормали к плоскости листа.

Для плоского напряженного состояния ( $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ) условие пластичности (1.1) и соотношения для приращения деформаций упрощаются:

$$(G + H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H + F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1; \quad (1.4)$$

$$d\varepsilon_x = d\lambda[(H + G)\sigma_x - H\sigma_y], \quad d\varepsilon_y = d\lambda[-H\sigma_x + (H + F)], \quad d\gamma_{xy} = d\lambda N\tau_{xy}. \quad (1.5)$$

Если вырезать образцы из листового металла вдоль прокатки, поперек прокатки и под углом  $\pi/4$  к направлению прокатки, то в процессе одноосного растяжения можно определить шесть механических характеристик материала:  $\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_{xy}$  – пределы пластического сопротивления при растяжении соответственно вдоль осей  $x, y$  и оси  $x'$ , направленной под углом  $\pi/4$  к оси  $x$ ;  $R_x, R_y, R_{xy}$  – показатели пластической анизотропии. В отличие от линейно упругих анизотропных материалов, для вычисления поперечных деформаций которых используются коэффициенты поперечного деформирования, в определяющих соотношениях теории пластичности несжимаемых ортотропных сред применяется показатель пластической анизотропии, введенный Хиллом [2]. Показатель анизотропии определяется как частное: приращение пластической деформации, поперечной к направлению растяжения в плоскости листа, к приращению пластической деформации в направлении, нормальном к плоскости листа. Показатель пластической анизотропии ориентирован на описание пластической анизотропии несжимаемых листовых металлов.

Из (1.5) следует

$$R_x = H/G, \quad R_y = H/F, \quad R_{xy} = H/N. \quad (1.6)$$

Поскольку параметров анизотропии четыре, а экспериментально определенных характеристик шесть, то это несоответствие порождает два условия совместности экспериментально определенных механических характеристик. Соотношения (1.4) и (1.6) позволяют вычислить однозначно характеристики анизотропии  $F$  и  $G$ :

$$F = \frac{1}{\Sigma_y^2(1 + R_y)}, \quad G = \frac{1}{\Sigma_x^2(1 + R_x)}. \quad (1.7)$$

Характеристика анизотропии  $H$  определяется неоднозначно. Из экспериментов на одноосное растяжение вдоль и поперек прокатки и соотношений (1.5) следует

$$H_x = \frac{R_x}{\Sigma_x^2(1 + R_x)}, \quad H_y = \frac{R_y}{\Sigma_y^2(1 + R_y)}. \quad (1.8)$$

Здесь нижний индекс величины  $H$  указывает на эксперимент, из которого эта характеристика определена.

Ассоциированный закон пластического деформирования постулирует равенство величин  $H_x$  и  $H_y$ . Тогда из (1.8) вытекает первое условие совместности

$$R_x \Sigma_y^2 (1 + R_y) = R_y \Sigma_x^2 (1 + R_x). \quad (1.9)$$

Введем критерий несовместности параметров  $H_{(x)}$  и  $H_{(y)}$ :

$$K_I = 100 |H_x H_y^{-1} - 1| \%. \quad (1.10)$$

Параметр  $N$  из эксперимента на одноосное растяжение образца, вырезанного под углом  $\pi/4$  к направлению прокатки, также определяется неоднозначно: из уравнения (1.4) следует

$$N_1 = (4/\Sigma_{xy}^2 - F - G)/2; \quad (1.11)$$

из закона пластического деформирования (1.5) вытекает

$$N_2 = (1/2 + R_{xy})(F + G). \quad (1.12)$$

Соотношения (1.11) и (1.12) порождают второе условие совместности механических характеристик

$$2/\Sigma_{xy}^2 = (1 + R_{xy})(F + G). \quad (1.13)$$

Критерий несовместности параметров  $N_{(1)}$  и  $N_{(2)}$  примем в виде

$$K_{II} = 100 |N_2 N_1^{-1} - 1| \%. \quad (1.14)$$

В таблице 1 приведены результаты выполнения условий совместности экспериментально определенных параметров [3].

Материал	$\Sigma_x$ МПа	$\Sigma_{xy}$ МПа	$\Sigma_y$ МПа	$R_x$	$R_{45}$	$R_y$	$K_I$	$K_{II}$
Сталь								
08кп	208.3	255.8	218.0	1.31	0,70	2,12	8,73	10,17
11ЮА	643.0	608.0	690.0	1.00	0.50	1.25	3,64	102,48
12Х18Н9	362.3	336.1	360.4	0.77	1.15	0.76	0,53	7,00
10 (отож.)	246.3	242.0	245.0	0.80	0.83	0.80	0,50	1,6
СтЗсп	280.0	270.0	280.0	0.88	1.00	0.93	3,18	3,84
Ал. спл.								
АМг6М	171.0	160.0	171.0	0.73	0.85	0.65	6.40	5,81
АМг2М	68.0	68.0	66.0	0.54	0.71	0.47	2,92	20,57
АМцАМ	72.7	65.1	78.8	0.28	0.97	0.33	3,76	14,47
Лат. Л63	215.0	210.0	225.0	0.666	0.820	0.759	1,46	4,00

Таблица 1.

В таблице 2 приведены результаты выполнения условий совместности экспериментально определенных параметров при различной степени пластического деформирования в направлении растяжения.

Здесь через  $t$  обозначена толщина листа. Экспериментальные данные, приведенные в таблице 2, получены в лаборатории Тульского государственного университета профессором С. С. Яковлевым. Поскольку эксперименты по определению характеристик пластической анизотропии выполнялись с точностью до 5% [3], то отклонение в критериях  $K_I$  и  $K_{II}$  за пределы

Материал	Пл. деф.	$\Sigma_x$ МПа	$\Sigma_{xy}$ МПа	$\Sigma_y$ МПа	$R_x$	$R_{xy}$	$R_y$	$K_I$	$K_{II}$
Сталь	е								
08кп	0,01	274,14	256,21	244,94	0,845	0,629	0,661	8,13	12,23
	0,1	489,88	528,72	458,41	0,883	0,751	0,7	0,32	25,85
	0,15	557,12	561,91	521,12	0,9	0,72	0,805	7,14	15,93
08X18H10T	0,01	796,69	799,4	827,55	0,548	0,610	0,634	1,56	2,43
	0,1	873,86	878,11	884,33	0,605	0,706	0,986	6,74	2,45
	0,15	1017,3	1014,8	996,17	0,641	0,73	0,752	12,74	40,52
Ал. спл.									
АДО 4,7 мм	0,01	157,33	138,01	147,01	0,721	0,776	0,626	4,98	19,26
	0,1	274,12	212,64	225,34	0,832	0,908	0,57	15,48	23,02
	0,15	292,3	256,88	290,76	0,732	0,946	0,718	0,02	89,69
АДО 2,8 мм	0,01	129,36	125,51	190,14	0,698	0,838	0,661	123,1	45,62
	0,1	286,62	214,27	356,20	0,786	0,953	0,675	68,62	125,78
	0,15	352,03	270,13	460,69	0,840	1,032	0,718	87,10	226,24
Медь									
М1 4 мм	0,01	109,3	98,58	94,22	0,706	0,761	0,653	22,15	0,38
	0,1	199,83	195,22	190,43	0,791	0,859	0,721	4,29	8,08
	0,15	232,47	222,00	214,19	0,847	0,892	0,769	10,42	5,34
М13 мм	0,01	105,00	103,67	90,07	0,742	0,811	0,795	29,24	20,59
	0,1	192,45	192,18	186,87	0,832	0,923	0,898	9,50	38,05
	0,15	229,96	233,81	221,5	0,933	0,995	0,913	6,19	13,68
Лат. Л63	0,01	148,32	139,66	139,13	0,706	244,29	218,97	11,45	2,90
	0,1	244,29	218,97	228,65	0,792	0,848	0,767	12,08	13,97
	0,15	287,38	251,64	253,69	0,850	0,921	0,818	5,72	37,74

Таблица 2.

точности эксперимента свидетельствует о том, что большинство материалов, приведенных в таблицах 1 и 2, не подчиняется условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону пластического деформирования. Следовательно, для этих материалов теория пластичности Мизеса-Хилла не применима.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Mises, R.* Mechanic der plastischen Formagerung von Kristalen / R. Mises // Z. angew. Math. und Mech. – 1928. – Bd. 8, № 5. – S. 161–185.
- [2] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
- [3] *Андрейченко, В. А.* Обработка давлением анизотропных материалов / В. А. Андрейченко, С. П. Яковлев, С. С. Яковлев. – Кичпенеv : Квант, 1997. – 330 с.

Y. Y. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko

**BORDERS OF APPLICABILITY OF THE QUADRATIC CONDITION OF  
MISES' PLASTICITY TO THE DESCRIPTION OF ANISOTROPY OF PLASTIC  
PROPERTIES OF METAL SHEET ROLLING**

*The Tula State University*

**Abstract.** The compatibility conditions of mechanical characteristics of the anisotropy of plastic properties arising from the quadratical condition of plasticity and associated with the law of plastic current are written out. The data of experiments on metal sheet rolling are given. It is shown that for most metals, Mises-Hill's plasticity theory leads to the errors beyond the limits of experimental accuracy.

**Keywords:** anisotropy of plastic properties, a quadratic condition of plasticity, a special law of plastic current, a consistency relation of mechanical characteristics.

*Кузнецов Евгений Евгеньевич*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула*

**e-mail:** ekc\_05@mail.ru

*Матченко Илья Николаевич*

*доктор физико-математических наук, доцент кафедры городского строительства и архитектуры, Тульский государственный университет, г. Тула*

**e-mail:** ekc\_05@mail.ru

*Матченко Николай Михайлович*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула*

**e-mail:** ekc\_05@mail.ru

*Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenievich*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula*

*Mattchenko, Ilya Nikolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, City Construction and Architecture, Tula State University, Tula*

*Mattchenko, Nikolay Mikhailovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Modeling, Tula State University, Tula*



Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

## СЖАТИЕ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО ОРТОТРОПНОГО СЛОЯ

Тулльский государственный университет

**Аннотация.** Для ортотропного материала, подчиняющегося квадратичному условию пластичности, используя аффинные преобразования координат, компонент вектора скорости, компонент тензора напряжения и компонент тензора скорости деформации, получено решение задачи о сжатии ортотропного идеально пластического слоя.

**Ключевые слова:** ортотропия, напряжение, квадратичное условие пластичности, скорости пластических деформаций, аффинные преобразования, сжатие слоя.

УДК: 539.3

**1. Квадратичное условие пластичности ортотропного материала.** Жесткопластический ортотропный материал отнесем к декартовой системе координат  $x, y, z$ , совпадающей с осями ортотропии.

В качестве условия пластичности рассмотрим квадратичную функцию [5]

$$A_{11}\sigma_x^2 + A_{22}\sigma_y^2 + A_{33}\sigma_z^2 - 2(A_{12}\sigma_x\sigma_y + A_{13}\sigma_x\sigma_z + A_{23}\sigma_y\sigma_z) + 2(A_{44}\sigma_{xz}^2 + A_{55}\sigma_{yz}^2 + A_{66}\sigma_{xy}^2) = 1, \quad (1.1)$$

где  $\sigma_x, \dots, \sigma_{xy}$  – компоненты тензора напряжений,  $A_{11}, \dots, A_{66}$  – экспериментально определяемые константы, характеризующие пластические свойства материала.

Параметры анизотропии  $A_{11}, \dots, A_{66}$  связаны с величинами сопротивления материала пластическому деформированию следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sigma_{sx}^{-2}, & A_{22} &= \sigma_{sy}^{-2}, & A_{33} &= \sigma_{sz}^{-2}, & A_{12} &= (\sigma_{sx}^{-2} + \sigma_{sy}^{-2} - \sigma_{2s(xy)}^{-2})/2, \\ A_{13} &= (\sigma_{sx}^{-2} + \sigma_{sz}^{-2} - \sigma_{2s(xz)}^{-2})/2, & A_{23} &= (\sigma_{sy}^{-2} + \sigma_{sz}^{-2} - \sigma_{2s(yz)}^{-2})/2, \\ A_{44} &= \tau_{sxz}^{-2}/2, & A_{55} &= \tau_{syz}^{-2}/2, & A_{66} &= \tau_{sxy}^{-2}/2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \sigma_{sz}$  – величины сопротивления материала пластическому деформированию при растяжении в главных осях ортотропии;  $\tau_{sxy}, \tau_{syz}, \tau_{sxz}$  – величины сопротивления материала пластическому деформированию при сдвиге по отношению к главным осям ортотропии;  $\sigma_{2s(xy)}, \sigma_{2s(yz)}, \sigma_{2s(xz)}$  – величины сопротивления материала пластическому деформированию при двухосном растяжении в соответствующих плоскостях ортотропии.

В отличие от известного условия пластичности Мизеса-Хилла [4] соотношение (1.1) учитывает чувствительность ортотропного материала к гидростатическому давлению.

Принимая функцию (1.1) в качестве пластического потенциала, получим закон пластического течения

$$\begin{aligned} e_x &= \lambda(A_{11}\sigma_x - A_{12}\sigma_y - A_{13}\sigma_z), & e_{xz} &= \lambda A_{44}\sigma_{xz}, \\ e_y &= \lambda(A_{22}\sigma_y - A_{12}\sigma_x - A_{23}\sigma_z), & e_{yz} &= \lambda A_{55}\sigma_{yz}, \\ e_z &= \lambda(A_{33}\sigma_z - A_{13}\sigma_x - A_{23}\sigma_y), & e_{xy} &= \lambda A_{66}\sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $e_x, \dots, e_{xy}$  – компоненты тензора скорости деформации,  $\lambda$  – множитель Лагранжа.

Присоединяя сюда уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (xyz) \quad (1.4)$$

и соотношения между компонентами тензора скорости деформации  $e_x, \dots, e_{xy}$  и компонентами вектора скорости перемещения  $u_x, u_y, u_z$

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad 2e_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (xyz) \quad (1.5)$$

получим замкнутую систему уравнений теории пластичности идеально связной ортотропной среды. Символ  $(xyz)$  означает, что остальные уравнения получаются круговой перестановкой.

Решение задачи о сжатии ортотропного слоя плитами с использованием приведенной системы уравнений отсутствует. Известно решение этой задачи для несжимаемого материала [1]. Однако условие несжимаемости накладывает три ограничения на параметры пластической анизотропии

$$A_{11} - A_{12} - A_{13} = 0, \quad A_{22} - A_{12} - A_{23} = 0, \quad A_{33} - A_{13} - A_{23} = 0. \quad (1.6)$$

Условие совместности механических характеристик (1.6) требует выполнения следующих зависимостей между пределами пластического сопротивления

$$\sigma_{2s(xy)} = \sigma_{sz}, \quad \sigma_{2s(yz)} = \sigma_{sx}, \quad \sigma_{2s(zx)} = \sigma_{sy}, \quad (1.7)$$

т.е. предел текучести при двухосном растяжении в плоскости ортотропии вдоль главных осей равен пределу текучести при одноосном растяжении вдоль оси, перпендикулярной этой плоскости. Такое ограничение характеристик пластической анизотропии является явно искусственным, поскольку в равенства (1.7) входят характеристики, корреляция между которыми экспериментально не установлена и вряд ли возможна.

Покажем, что использование аффинного моделирования [2] позволяет получить решение задачи о сжатии ортотропного идеально пластичного слоя только при одном условии совместности характеристик пластической анизотропии.

**2. Аффинное моделирование ортотропного материала.** Введем аффинные преобразования:

– координат

$$\xi = ax, \quad \eta = by, \quad \zeta = cz; \quad (2.1)$$

– компонент вектора скорости перемещения

$$u_\xi = u_x/a, \quad u_\eta = u_y/b, \quad u_\zeta = u_z/c; \quad 2.2$$

– компонент тензора напряжений

$$\tau_\xi = a^2 \sigma_x, \quad \tau_\eta = b^2 \sigma_y, \quad \tau_\zeta = c^2 \sigma_z, \quad \tau_{\xi\eta} = ab \sigma_{xy}, \quad \tau_{\eta\zeta} = bc \sigma_{yz}, \quad \tau_{\xi\zeta} = ac \sigma_{xz}; \quad (2.3)$$

– компонент тензора скорости деформации

$$\varepsilon_\xi = \frac{e_x}{a^2}, \quad \varepsilon_\eta = \frac{e_y}{b^2}, \quad \varepsilon_\zeta = \frac{e_z}{c^2}, \quad \varepsilon_{\xi\eta} = \frac{e_{xy}}{ab}, \quad \varepsilon_{\eta\zeta} = \frac{e_{yz}}{bc}, \quad \varepsilon_{\xi\zeta} = \frac{e_{xz}}{ac}. \quad (2.4)$$

где  $a, b, c$  – пока неизвестные компоненты аффинных преобразований.

Несложно видеть, что преобразования (2.1) – (2.4) переводят ортотропный материал из физического пространства в аффинные, сохраняя класс симметрии, при этом основные уравнения принимает вид:

уравнения равновесия (1.4) –

$$\frac{\partial \tau_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial \zeta} = 0 \quad (\xi\eta\zeta); \quad (2.5)$$

соотношения Коши (1.5) –

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}, \quad 2\varepsilon_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \quad (\xi\eta\zeta); \quad (2.6)$$

условие пластичности (1.6) –

$$B_{11}\tau_\xi^2 + B_{22}\tau_\eta^2 + B_{33}\tau_\zeta^2 - 2(B_{12}\tau_\xi\tau_\eta + B_{13}\tau_\xi\tau_\zeta + B_{23}\tau_\eta\tau_\zeta - B_{44}\tau_\eta^2 - B_{55}\tau_\xi^2 - B_{66}\tau_\zeta^2) = 1 \quad (2.7)$$

ассоциированный закон пластического течения –

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \lambda(B_{11}\tau_\xi - B_{12}\tau_\eta - B_{13}\tau_\zeta), & \varepsilon_{\eta\zeta} &= \lambda B_{44}\tau_\eta\zeta, \\ \varepsilon_\eta &= \lambda(B_{22}\tau_\eta - B_{12}\tau_\xi - B_{23}\tau_\zeta), & \varepsilon_{\xi\zeta} &= \lambda B_{55}\tau_\xi\zeta, \\ \varepsilon_\zeta &= \lambda(B_{33}\tau_\zeta - B_{13}\tau_\xi - B_{23}\tau_\eta), & \varepsilon_{\xi\eta} &= \lambda B_{66}\tau_\xi\eta, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11}/a^4, \quad B_{22} = A_{22}/b^4, \quad B_{33} = A_{33}/c^4, \quad B_{12} = A_{12}/a^2b^2, \quad B_{23} = A_{23}/b^2c^2, \\ B_{13} &= A_{13}/a^2c^2, \quad B_{44} = A_{44}/b^2c^2, \quad B_{55} = A_{55}/a^2c^2, \quad B_{66} = A_{66}/a^2b^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Обратим внимание, что преобразования (2.1) – (2.4) вводят аффинное моделирование ортотропного материала в аффинных пространствах, причем преобразования вводятся так, что диссипация механической энергии при пластическом деформировании в физическом пространстве и аффинных пространствах тождественна

$$\begin{aligned} D &= \sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + 2(\sigma_{xy} e_{xy} + \sigma_{yz} e_{yz} + \sigma_{zx} e_{zx}) = \\ &= \tau_\xi \varepsilon_\xi + \tau_\eta \varepsilon_\eta + \tau_\zeta \varepsilon_\zeta + 2(\tau_{\xi\eta} \varepsilon_{\xi\eta} + \tau_{\eta\zeta} \varepsilon_{\eta\zeta} + \tau_{\xi\zeta} \varepsilon_{\xi\zeta}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поскольку компоненты аффинного преобразования выбираются произвольно, то исходному материалу с параметрами анизотропии  $A_{11}, \dots, A_{66}$  сопоставлено бесчисленное множество аффинно-подобных материалов с параметрами анизотропии  $B_{11}, \dots, B_{66}$ .

**3. Гипотеза о квазинесжимаемости пластического течения ортотропного материала.** Примем гипотезу о квазинесжимаемости пластического течения в аффинном пространстве [3]

$$\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta = 0. \quad (3.1)$$

Тогда из (2.8) следует

$$B_{11} - B_{12} - B_{13} = 0, \quad B_{22} - B_{12} - B_{23} = 0, \quad B_{33} - B_{13} - B_{23} = 0. \quad 3.2$$

В уравнениях (3.2) перейдем к параметрам пластической анизотропии физического пространства

$$\frac{A_{11}}{a^2} - \frac{A_{12}}{b^2} - \frac{A_{13}}{c^2} = 0, \quad -\frac{A_{12}}{a^2} + \frac{A_{22}}{b^2} - \frac{A_{23}}{c^2} = 0, \quad -\frac{A_{13}}{a^2} - \frac{A_{23}}{b^2} + \frac{A_{33}}{c^2} = 0. \quad (3.3)$$

Система уравнений (3.3) является однородной относительно неизвестных  $a^{-2}$ ,  $b^{-2}$  и  $c^{-2}$ , поэтому ее определитель должен быть равным нулю

$$\begin{vmatrix} A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Отсюда следует уравнение совместности характеристик пластической анизотропии

$$A_{11}A_{22}A_{33} - 2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2 = 0. \quad (3.5)$$

Для выделения аффинных пространств, в которых материал будет квазинесжимаемым, возникает необходимость нахождения значений параметров аффинных преобразований  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Зададимся значением одной из компонент  $a$ ,  $b$  или  $c$ , например,  $c^{-2} = k$ , тогда из первых двух уравнений (3.3) найдем

$$a = \pm k \sqrt{\frac{A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}}, \quad b = \pm k \sqrt{\frac{A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}}. \quad (3.6)$$

В силу положительной определенности пластического потенциала (2.1) должны соблюдаться неравенства  $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$ ,  $A_{22}A_{33} - A_{23}^2 > 0$ ,  $A_{11}A_{33} - A_{13}^2 > 0$ . Отсюда следует, что компоненты  $a$  и  $b$  преобразующего тензора являются действительными числами.

Поскольку введение значения компоненты  $c$  преобразующего тензора произвольно, то условия (3.6) выполняется в бесчисленном множестве аффинных пространств, в которых пластическое течение ортотропного материала будет квазинесжимаемым.

Для сопряжения физического и аффинного пространства необходимо выбрать параметр сопряжения этих пространств.

При решении задачи о сжатии ортотропного слоя удобно назначить параметр аффинного преобразования  $c = 1$ . В этом случае масштаб в направлении осей  $z$  и  $\zeta$  при аффинных преобразованиях одинаков.

С учетом (3.3) условие пластичности (2.7) записывается в виде

$$B_{12}(\tau_\xi - \tau_\eta)^2 + B_{13}(\tau_\zeta - \tau_\xi)^2 + B_{23}(\tau_\eta - \tau_\zeta)^2 + 2(B_{44}\tau_{\eta\zeta}^2 + B_{55}\tau_{\xi\zeta}^2 + B_{66}\tau_{\xi\eta}^2) = 1. \quad (3.7)$$

Из (3.7) видно, что квазинесжимаемый материал нечувствителен к воздействию аффинного гидростатического давления

$$\tau_0 = (\tau_\xi + \tau_\eta + \tau_\zeta)/3. \quad (3.8)$$

Ассоциированный закон пластического деформирования теперь записывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \lambda[B_{12}(\tau_\xi - \tau_\eta) + B_{13}(\tau_\xi - \tau_\zeta)], & \varepsilon_{\eta\zeta} &= \lambda B_{44}\tau_{\eta\zeta}, \\ \varepsilon_\eta &= \lambda[B_{23}(\tau_\eta - \tau_\zeta) + B_{12}(\tau_\eta - \tau_\xi)], & \varepsilon_{\xi\zeta} &= \lambda B_{55}\tau_{\xi\zeta}, \\ \varepsilon_\zeta &= \lambda[B_{13}(\tau_\zeta - \tau_\xi) + B_{23}(\tau_\zeta - \tau_\eta)], & \varepsilon_{\xi\eta} &= \lambda B_{66}\tau_{\xi\eta}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Соотношения (3.7) и (3.9) можно представить в виде

$$B_{12}(a^2\sigma_x - b^2\sigma_y)^2 + B_{13}(a^2\sigma_x - \sigma_z)^2 + B_{23}(b^2\sigma_y - \sigma_z)^2 + 2(A_{44}\sigma_{yz}^2 + A_{55}\sigma_{xz}^2 + A_{66}\sigma_{xy}^2) = 1, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} e_x &= \lambda a^2[B_{12}(a^2\sigma_x - b^2\sigma_y) + B_{13}(a^2\sigma_x - \sigma_z)], & e_{yz} &= \lambda A_{44}\sigma_{yz}, \\ e_y &= \lambda b^2[B_{23}(b^2\sigma_y - \sigma_z) + B_{12}(b^2\sigma_y - a^2\sigma_x)], & e_{xz} &= \lambda A_{55}\sigma_{xz}, \\ e_z &= \lambda[B_{13}(\sigma_z - a^2\sigma_x) + B_{23}(\sigma_z - b^2\sigma_y)], & e_{xy} &= \lambda A_{66}\sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (3.10) как частные случаи при значениях  $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 1$  получается модифицированное условие пластичности Толоконникова-Матченко [3], а при соотношениях  $a = b = 1$  – модифицированное условие пластичности Мизеса-Хилла [4].

Подчеркнем, что введение гипотезы о квазинесжимаемости накладывает только одно ограничение (3.5) на пластические характеристики ортотропного материала, в то время как модификации Мизеса-Хилла и Толоконникова-Матченко накладывают по три ограничения.

Следовательно, гипотеза о квазинесжимаемости материала в аффинном пространстве является менее жесткой, чем гипотеза о несжимаемости в физическом пространстве. Отсюда

следует, что гипотеза о несжимаемости пластического течения в физическом пространстве является частным случаем гипотезы о квазинесжимаемости.

#### 4. Сжатие идеально пластичного ортотропного слоя.

Рассмотрим слой из жесткопластического материала толщиной  $2h$ . Оси  $x, y$  декартовой системы координат расположим в срединной плоскости слоя, ось  $z$  направим ортогонально средней плоскости. Для несжимаемого ортотропного материала решение этой задачи приведено в монографии А.Ю. Ишлинского и Д.Д. Ивлева [1].

Уравнение срединного слоя запишем в виде

$$|z| \leq h, \quad z = \pm h, \quad u_z = mz. \quad (4.1)$$

В аффинном пространстве оси  $\xi, \eta$  так же расположены в срединной плоскости, а ось  $\zeta$  совпадает с осью  $z$  по направлению и масштабу.

В аффинном пространстве введем предположение о кинематике пластического течения

$$u_\xi = p\xi + q_*\eta + u_\xi^*(\zeta), \quad u_\eta = p_*\xi + q\eta + u_\eta^*(\zeta), \quad u_\zeta = m\zeta, \quad (4.2)$$

где  $p, q_*, p_*, q, m$  – константы.

Подставляя (4.2) в (2.6), получим

$$\varepsilon_\xi = p, \quad \varepsilon_\eta = q, \quad \varepsilon_\zeta = m, \quad 2\varepsilon_{\xi\eta} = p_* + q_*, \quad 2\varepsilon_{\eta\zeta} = du_\eta^*/d\zeta, \quad 2\varepsilon_{\xi\zeta} = du_\xi^*/d\zeta. \quad (4.3)$$

Из условия квазинесжимаемости (3.2) и (4.3) следует

$$p + q + m = 0. \quad (4.4)$$

Соотношения (4.2) – (4.4) определяют кинематику пластического деформирования плиты.

Подставляя (4.3) в соотношения ассоциированного закона пластического течения (3.9), запишем

$$\begin{aligned} B_{12}(\tau'_\xi - \tau'_\eta) + B_{13}(\tau'_\xi - \tau'_\zeta) &= p/\lambda, \\ B_{23}(\tau'_\eta - \tau'_\zeta) + B_{12}(\tau'_\eta - \tau'_\xi) &= q/\lambda, \\ B_{13}(\tau'_\zeta - \tau'_\xi) + B_{23}(\tau'_\zeta - \tau'_\eta) &= mk/\lambda. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Знаком штрих обозначена девиаторная часть нормальных аффинных напряжений  $\tau'_\xi = \tau_\xi - \tau_0$ ,  $\tau'_\eta = \tau_\eta - \tau_0$ ,  $\tau'_\zeta = \tau_\zeta - \tau_0$ .

Разрешая (4.5) относительно напряжений, имеем

$$\begin{aligned} \tau'_\xi &= Q_\xi/3\lambda Q, \quad Q_\xi = 2pB_{23} - qB_{13} - mB_{12}, \\ \tau'_\eta &= Q_\eta/3\lambda Q, \quad Q_\eta = 2qB_{13} - pB_{23} - mB_{12}, \quad \tau'_\zeta = Q_\zeta/3\lambda Q, \\ Q_\zeta &= 2mB_{12} - pB_{23} - qB_{13}, \quad Q = B_{12}B_{13} + B_{12}B_{23} + B_{13}B_{23}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (3.9) при условии (3.2) получим выражения для касательных напряжений

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{p_* + q_*}{2\lambda B_{66}}, \quad \tau_{\xi\zeta} = \frac{1}{2\lambda B_{55}} \frac{du_\xi^*}{d\zeta}, \quad \tau_{\eta\zeta} = \frac{1}{2\lambda B_{44}} \frac{du_\eta^*}{d\zeta}. \quad (4.7)$$

Из уравнений (3.7), (4.6) и (4.8) вычислим множитель Лагранжа

$$1/\lambda = \sqrt{P(1 - 2B_{55}\tau_{\xi\zeta}^2 - 2B_{44}\tau_{\eta\zeta}^2)}, \quad (4.8)$$

где

$$P = \frac{B_{23}(qB_{13} - mB_{12})^2 + B_{13}(mB_{12} - pB_{23})^2 + B_{12}(pB_{23} - qB_{13})^2}{Q^2} + \frac{(p_* + q_*)^2}{2B_{66}}. \quad (4.9)$$

Предположим, что

$$\tau_{\xi\zeta} = a_{\xi}\zeta + c_{\xi}, \quad \tau_{\eta\zeta} = a_{\eta}\zeta + c_{\eta}, \quad a_{\xi}, c_{\xi}, a_{\eta}, c_{\eta} - const. \quad (4.10)$$

Тогда множитель Лагранжа  $\lambda$  является функцией  $\zeta$ .

Из (4.7) – (4.10) найдем

$$u_{\xi}^* = 2B_{55} \int (a_{\xi}\zeta + c_{\xi})\lambda d\zeta, \quad u_{\eta}^* = 2B_{44} \int (a_{\eta}\zeta + c_{\eta})\lambda d\zeta. \quad (4.11)$$

Используя значения компонент тензора-девиатора напряжений, уравнения равновесия запишем в виде

$$\frac{\partial\tau_0}{\partial\xi} + a_{\xi} = 0, \quad \frac{\partial\tau_0}{\partial\eta} + a_{\eta} = 0, \quad \frac{\partial\tau_0}{\partial\zeta} + \frac{\partial\tau'_{\zeta}}{\partial\zeta} = 0. \quad (4.12)$$

Отсюда

$$\tau_0 = -a_{\xi}\xi - a_{\eta}\eta + C - \tau'_{\zeta}, \quad \tau_{\zeta} = -a_{\xi}\xi - a_{\eta}\eta + C. \quad (4.13)$$

Следовательно

$$grad\tau_{\zeta} = -a_{\xi}\vec{i} - a_{\eta}\vec{j}, \quad grad\tau_{\zeta} = -\sqrt{a_{\xi}^2 - a_{\eta}^2}(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j}), \quad \text{tg}\phi = a_{\eta}/a_{\xi}, \quad (4.14)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}$  – единичные орты осей  $\xi\eta$ .

Из (4.14) видно, что плоскость (4.13) имеет скат по направлению вектора.

Нормальные напряжения  $\tau_{\xi}, \tau_{\eta}, \tau_{\zeta}$  определяются с точностью до постоянной  $C$ .

Параметры  $a_{\xi}$  и  $a_{\eta}$  зависят от контактных касательных усилий на сдавливающих плитах.

Введем вектор

$$\vec{T} = \tau_{\xi\zeta}\vec{i} + \tau_{\eta\zeta}\vec{j}, \quad T = |\vec{T}| = \sqrt{\tau_{\xi\zeta}^2 + \tau_{\eta\zeta}^2}. \quad (4.15)$$

Множитель Лагранжа  $\lambda$  может быть представлен в виде

$$\lambda = \left[ P \sqrt{1 - \left( \frac{\tau_{\xi\zeta}^2}{R^2} + \frac{\tau_{\eta\zeta}^2}{S^2} \right)} \right]^{-1}, \quad (4.16)$$

где  $R^2 = 2B_{55}, S^2 = 2B_{44}$ .

Из (4.15) следует

$$T \leq \frac{\sqrt{2}RS}{\sqrt{(R^2 + S^2) + (R^2 - S^2)\cos^2\phi}}, \quad \text{tg}\phi = \frac{\tau_{\eta\zeta}}{\tau_{\xi\zeta}}. \quad (4.17)$$

Если приписать индекс плюс наверху компонентам вектора  $\vec{T}$  на верхней стороне слоя при  $\zeta = h$ , а индекс минус на нижней стороне слоя при  $\zeta = -h$ , то можно записать

$$\vec{T}^- = (-a_{\xi}h + c_{\xi})\vec{i} + (-a_{\eta}h + c_{\eta})\vec{j}, \quad \vec{T}^+ = (a_{\xi}h + c_{\xi})\vec{i} + (a_{\eta}h + c_{\eta})\vec{j}. \quad (1)$$

Пусть касательное усилие  $T$  достигает предельного значения на верхней и нижней стороне плиты

$$|T^+| = K^+ \quad \text{при} \quad \zeta = h, \quad \phi = \phi^+, \quad |T^-| = K^- \quad \text{при} \quad \zeta = -h, \quad \phi = \phi^-.$$

Тогда

$$K^+ = \frac{\sqrt{2}RS}{\sqrt{(R^2 + S^2) + (R^2 - S^2)\cos^2\phi^+}}, \quad \text{tg}\phi^+ = \frac{a_{\eta}h + c_{\eta}}{a_{\xi}h + c_{\xi}}, \\ K^- = \frac{\sqrt{2}RS}{\sqrt{(R^2 + S^2) + (R^2 - S^2)\cos^2\phi^-}}, \quad \text{tg}\phi^- = \frac{-a_{\eta}h + c_{\eta}}{-a_{\xi}h + c_{\xi}}. \quad (4.17)$$

Разрешая (4.17) относительно постоянных  $a_\xi$ ,  $a_\eta$ ,  $c_\xi$  и  $c_\eta$ , найдем

$$\begin{aligned} a_\xi &= \frac{1}{2} \left( \frac{K^+}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \phi^+}} - \frac{K^-}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \phi^-}} \right), & a_\eta &= \frac{1}{2} \left( \frac{K^+ \operatorname{tg}^2 \phi^+}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \phi^+}} - \frac{K^- \operatorname{tg}^2 \phi^-}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \phi^-}} \right), \\ c_\xi &= \frac{1}{2} \left( \frac{K^+}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \phi^+}} + \frac{K^-}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \phi^-}} \right), & c_\eta &= \frac{1}{2} \left( \frac{K^+ \operatorname{tg}^2 \phi^+}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \phi^+}} + \frac{K^- \operatorname{tg}^2 \phi^-}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \phi^-}} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Константа  $C$  может быть определена из интегральных ограничений на величину равнодействующих усилий вдоль осей  $\xi\eta$ .

Переход из аффинного пространства в физическое пространство осуществляется посредством соотношений (2.1) – (2.4).

Если свойства пластической анизотропии таковы, что параметры аффинного преобразования удовлетворяют равенство  $a = b = 1$ , то выписанное здесь решение совпадает с аналогичным решением для материала, подчиняющегося условию пластичности Мизеса-Хилла [4].

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
- [2] *Кузнецов, Е. Е.* К построению теории идеальной пластичности ортотропных сред : сб. ст. : к 70-летию Д. Д. Ивлева / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко. – М. : Физматлит, 2001. – С.177–183.
- [3] *Матченко, Н. М.* Некоторые вопросы теории идеальной пластичности анизотропных сред : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Н. М. Матченко. – Тула, 1975. – 36 с.
- [4] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
- [5] *Mises, R.* Mechanic der plastischen Formagerung von Kristalen / R. Mises // Z. angew. Math. und Mech. – 1928. – Bd. 8, № 5. – S. 161–185.

*Y. Y. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko*

### COMPRESSION OF THE IDEAL-PLASTIC ORTHOTROPIC LAYER

*Tula State University*

**Abstract.** For orthotropic material, which obeys a quadratic condition of plasticity, using an affine transformation of coordinates, component of velocity vector, stress tensor component and tensor of a speed deformation, the decision of the problem about the compression of the ideal-plastic orthotropic layer is received.

**Keywords:** orthotropic, pressures, a quadratic condition of plasticity, speed of plastic deformations, affine transformations, compression of the layer.

*Кузнецов Евгений Евгеньевич*

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

*Матченко Илья Николаевич*

доктор физико-математических наук, доцент кафедры городского строительства и архитектуры, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

*Матченко Николай Михайлович*

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

*Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenievich*

Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

*Mattchenko, Ilya Nikolaevich*

Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, City Construction and Architecture, Tula State University, Tula

*Mattchenko, Nikolay Mikhailovich*

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Modeling, Tula State University, Tula



Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

## К ПОСТРОЕНИЮ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Тульский государственный университет

**Аннотация.** Введены линейные инварианты главных ранжированных напряжений, которые позволяют сформулировать гибридное двухпараметрическое условие пластичности, на основе которого выписаны соотношения малых упругопластических деформаций. Концепции теории малых упругопластических деформаций Генки-Ильюшина [1] и Кармана-Хаара [3] вытекают из предложенных как частные случаи. Показано, что в общем случае при сохранении в процессе нагружения направления главных осей упругопластическое деформирование является сложным.

**Ключевые слова:** квадрат модуля вектора напряжения, собственные векторы, гибридное условие пластичности, неполная и полная пластичность, малые упругопластические деформации.

УДК: 539.3

**1. Инварианты собственного упругого состояния.** Напряженное состояние элемента сплошной среды характеризуется главными нормальными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и триэдром главных направлений. Растягивающие напряжения будем считать положительными.

В отличие от общепринятой формы инвариантов напряженного состояния [4], введем набор инвариантов [2]

$$\Sigma_I = (\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r)/\sqrt{3}, \quad \Sigma_{II} = (\sigma_1^r - \sigma_3^r)/\sqrt{2}, \quad \Sigma_{III} = (2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r)/\sqrt{6}, \quad (1.1)$$

где  $\sigma_1^r \geq \sigma_2^r \geq \sigma_3^r$  – ранжированные главные нормальные напряжения. Особенность предложенного набора инвариантов заключается в линейной зависимости от ранжированных напряжений.

В трехмерном пространстве главных напряжений вектор напряжения определяется соотношением

$$\vec{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \vec{\sigma}_i = \sum_{i=1}^3 \vec{\sigma}_i^r = \sum_{\alpha=I}^{III} \vec{\Sigma}_\alpha, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\alpha = I, II, III).$$

Инварианты  $\Sigma_\alpha$  связаны с собственными векторами  $\vec{\Sigma}_\alpha$  квадратичных функций:

– модуля вектора напряжения

$$\Sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \Sigma_I^2 + \Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2;$$

– удельной энергии линейно упругого деформирования изотропного тела

$$2W = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)/E - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)/E = \mu_I \Sigma_I^2 + \mu_{II} \Sigma_{II}^2 + \mu_{III} \Sigma_{III}^2,$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mu_I = (1 - 2\nu)/E$ ,  $\mu_{II} = \mu_{III} = (1 + \nu)/E$  – собственные значения. Поскольку векторы  $\vec{\Sigma}_\alpha$  являются собственными векторами удельной энергии линейно упругого деформирования изотропного тела, то набор инвариантов (1.1) будем называть инвариантами собственного упругого состояния.

Собственные векторы  $\vec{\Sigma}_\alpha$  имеют простой механический и геометрический смысл [2]. Вектор  $\vec{\Sigma}_I$  является проекцией вектора напряжения  $\vec{\Sigma}$  на нормаль к девиаторной плоскости. Сумма векторов  $\vec{\Sigma}_{II}$  и  $\vec{\Sigma}_{III}$  является вектором девиаторных напряжений

$$\vec{\Sigma}_д = \vec{\Sigma}_{II} + \vec{\Sigma}_{III}.$$

Интенсивность девиаторных напряжений определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \Sigma_д &= 3^{-1} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \sqrt{\Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2} = \Sigma_{II} \sqrt{1 + m_\sigma^2} = \Sigma_{II} \cos \varphi_\sigma, \end{aligned}$$

где  $\varphi_\sigma$  – угол вида напряженного состояния. Таким образом, направление вектора  $\vec{\Sigma}_д$  определяется фазовым инвариантом девиаторных напряжений  $\phi_\sigma = \text{arctg}(\Sigma_{III}/\Sigma_{II})$ , который изменяется в диапазоне  $-\pi/6 \leq \varphi_\sigma \leq \pi/6$ . В зависимости от сочетания главных напряжений вектор  $\vec{\Sigma}_{II}$  на проекции Хейга может занимать одно из шести положений, определяемых углом  $\theta = (\pi/6; \pi/2; 5\pi/6; 7\pi/6; 3\pi/2; 11\pi/6)$ , отсчитываемым от главного напряжения  $\sigma_1$  против часовой стрелки.

Легко проследить связь инвариантов (1.1) со средним напряжением  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ , максимальным касательным напряжением  $T_{13} = (\sigma_1^r - \sigma_3^r)/2$  и промежуточным ранжированным главным напряжением  $\sigma_2^r$ :

$$\Sigma_I = \sqrt{3}\sigma, \quad \Sigma_{II} = \sqrt{2}T_{13}, \quad \Sigma_{III} = \sqrt{1,5}(\sigma_2^r - \sigma).$$

Здесь и далее индексами типа (13) обозначается номер площадки главного касательного напряжения.

Справедливы также соотношения

$$\Sigma_{III} = m_\sigma \Sigma_{II}, \quad m_\sigma = \mu_\sigma / \sqrt{3} = tg \varphi_\sigma, \quad ,$$

где  $\mu_\sigma$  – параметр Лоде ранжированных главных напряжений.

Аналогичные построения можно провести в пространстве главных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{\alpha=I}^{III} \vec{E}_\alpha = \vec{E}_I + \vec{E}_д, \quad \vec{E}_д = \vec{E}_{II} + \vec{E}_{III}, \\ E &= \sqrt{(\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_3)^2} = \sqrt{E_I^2 + E_{II}^2 + E_{III}^2} = \sqrt{E_I^2 + E_д^2}, \\ E_д &= 3^{-1} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \\ &= \sqrt{E_{II}^2 + E_{III}^2} = E_{II} \sqrt{1 + m_\varepsilon^2} = E_{II} \cos \varphi_\varepsilon, \\ E_I &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) / \sqrt{3} = \varepsilon \sqrt{3}, \quad E_{II} = (\varepsilon_1^r - \varepsilon_3^r) / \sqrt{2}, \quad E_{III} = \sqrt{1,5}(\varepsilon_2^r - \varepsilon), \\ E_{II} &= \Gamma_{13} \sqrt{2}, \quad m_\varepsilon = \mu_\varepsilon / \sqrt{3} = E_{III} / E_{II} = tg \varphi_\varepsilon, \quad -\pi/6 \leq \varphi_\varepsilon \leq \pi/6. \end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $\varepsilon_1^r \geq \varepsilon_2^r \geq \varepsilon_3^r$  – ранжированные главные деформации,  $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$  – средняя деформация,  $\Gamma_{13} = (\varepsilon_1^r - \varepsilon_3^r)/2$  – максимальная сдвиговая деформация,  $\mu_\varepsilon$  – параметр Лоде ранжированных главных деформаций,  $\varphi_\varepsilon$  – фазовый инвариант девиатора деформаций.

Закон Гука, записанный через инварианты (1.1) и (1.2), имеет вид

$$E_I = \mu_I \Sigma_I, \quad E_{II} = \mu_{II} \Sigma_{II}, \quad E_{III} = \mu_{III} \Sigma_{III}. \tag{1.3}$$

**2. Гибридное условие предельного состояния идеально связной среды.** Исторически сложилось так, что в теории малых упругопластических деформаций развивалось два направления: теория пластичности Генки-Ильюшина [1] и концепция пластичности Кармана-Хаара [3]. На сегодняшний день эти два направления трактуются как альтернативные [5]. Покажем, что формулировка гибридного условия предельного состояния позволяет получить соотношения, из которых эти концепции вытекают как частные случаи.

Рассмотрим класс материалов, объемное деформирование которых является упругим. Эта гипотеза используется как в концепции Генки-Ильюшина, так и Кармана-Хаара. Концепции Генки-Ильюшина и Кармана-Хаара отличаются предельными условиями перехода материала из упругого состояния в пластическое состояние. В концепции Генки-Ильюшина предполагается, что предел упругого деформирования определяется критерием Мизеса [6]

$$\Sigma_{II}^2 + \Sigma_{III}^2 = \Sigma_D^2 = (1 + m_\sigma^2)\Sigma_{II}^2 = 2(1 + m_\sigma^2)\mathbb{T}_{13}^2 = k_1^2, \quad (2.1)$$

где  $k_1$  – характеристика предела упругого деформирования. Из критерия (2.1) следует, что пределы упругого деформирования при одноосном растяжении  $\sigma_p$  и чистом сдвиге  $\tau_s$  связаны зависимостью  $\sigma_p/\tau_s = \sqrt{3}$ .

В концепции Кармана-Хаара предел упругого деформирования определяется критерием Треска [7]

$$\Sigma_{II}^2 = 2\mathbb{T}_{13}^2 = k_2^2, \quad (2.2)$$

где  $k_2$  – характеристика предела упругого деформирования. Из критерия (2.2) следует, что пределы упругого деформирования при одноосном растяжении  $\sigma_p$  и чистом сдвиге  $\tau_s$  связаны соотношением  $\sigma_p/\tau_s = 2$ .

Будем считать, что каждый из критериев Мизеса и Треска отражает свойства реальных материалов. Сформулируем гибридное условие предельного состояния материалов, у которых отношение предела упругого деформирования при одноосном растяжении к пределу упругого сопротивления при чистом сдвиге лежит в диапазоне  $\sqrt{3} \leq \sigma_p/\tau_s \leq 2$ .

В качестве условия предела упругого деформирования примем квадратичную функцию инвариантов  $\Sigma_{II}$  и  $\Sigma_{III}$  [2]

$$(\Sigma_{II}^2 + a\Sigma_{III}^2) = 2(1 + am_\sigma^2)\mathbb{T}_{13}^2 = k^2, \quad (2.3)$$

где  $a$  и  $k$  – характеристики предельных свойств материала.

Гибридное условие предельного состояния (2.3) объединяет концепции Генки-Ильюшина и Кармана-Хаара. Поскольку если выполняется равенство  $a = 1$ , то материал подчиняется критерию Мизеса, а если  $a = 0$ , то материал подчиняется критерию Треска.

Значения характеристик предельного состояния  $a$  и  $k$  можно найти из экспериментов на одноосное растяжение и чистый сдвиг. В эксперименте на чистый сдвиг имеем  $\sigma_1^r = -\sigma_3^r = \tau_s$ ,  $\sigma_2^r = 0$ ,  $m_\sigma = 0$ ,  $\mathbb{T}_{13} = \tau_s$ , и из (2.3) следует  $k = \sqrt{2}\tau_s$ . В эксперименте на одноосное растяжение  $\sigma_1^r = \sigma_p$ ,  $\sigma_2^r = \sigma_3^r = 0$ ,  $m_\sigma = -1/\sqrt{3}$ ,  $\mathbb{T}_{13} = \sigma_p/2$  и из (2.3) следует, что

$$a = 3(4\tau_s^2/\sigma_p^2 - 1).$$

Отсюда вытекает, что характеристика  $a$  изменится в пределах  $0 \leq a \leq 1$ . Таким образом, критерии Мизеса и Треска моделируют материалы, у которых параметр  $a$  соответствует крайним значениям диапазона изменения этого параметра.

Следовательно, если энергия формоизменения упругого деформирования достигает критического значения

$$2W_\Phi^* = \frac{k^2}{2G} \frac{1 + m_\sigma^2}{1 + am_\sigma^2}, \quad (2.4)$$

то на площадке максимального касательного напряжения создаются условия для пластического сдвига. Соотношение (2.4) является обобщением энергетического условия пластичности Мизеса.

Подчеркнем, что зависимость (2.3) определяет достижение максимальным касательным напряжением на площадке (13) предельного значения  $T_{13}^* = k/\sqrt{1 + am_\sigma^2}$ , при котором в теле возникают пластические деформации. Пусть  $\Gamma_{13}^p$  – деформация пластического сдвига на площадке (13). На двух других площадках главных касательных напряжений также возникают деформации пластического сдвига

$$\Gamma_{12}^p = \Gamma_{13}^p(1 - \mu_\varepsilon)/2, \quad \Gamma_{23}^p = \Gamma_{13}^p(1 + \mu_\varepsilon)/2. \quad (2.5)$$

Касательные напряжения на площадках (12) и (23) вычисляются по формулам

$$T_{12} = T_{13}^*(1 - \mu_\sigma)/2, \quad T_{23} = T_{13}^*(1 + \mu_\sigma)/2. \quad (2.6)$$

Из (2.6) видно, что касательные напряжения  $T_{12}$  и  $T_{23}$ , кроме режимов нагружения  $|\mu_\sigma| = 1$ , всегда меньше максимального касательного напряжения  $T_{13}$ . Именно поэтому Т. Карман и А. Хаар напряженные состояния при режимах нагружения  $|\mu_\sigma| < 1$  называют состоянием неполной пластичности. При режимах нагружения  $|\mu_\sigma| = 1$  возникает состояние полной пластичности, поскольку одно из касательных напряжений  $T_{12}$  или  $T_{23}$  равно предельному касательному напряжению  $T_{13}^*$ , а другое равно нулю. Формулы (2.5) и (2.6) являются геометрическими соотношениями теории деформаций и напряжений не требуют экспериментального обоснования.

**3. Упругопластическое деформирование.** Связь между напряжениями и деформациями при упругопластическом деформировании примем в квазилинейной форме

$$E_I = \mu_I \Sigma_I, \quad E_{II} = \lambda_{II} \Sigma_{II}, \quad E_{III} = \lambda_{III} \Sigma_{III}, \quad (3.1)$$

где  $\lambda_{II}$  и  $\lambda_{III}$  – коэффициенты податливости в направлении векторов  $\vec{\Sigma}_{II}$  и  $\vec{\Sigma}_{III}$  при упругопластическом деформировании.

Соотношения (3.1) позволяют установить связь между параметрами вида деформированного  $m_\varepsilon$  и напряженного состояния  $m_\sigma$

$$\lambda_{II} m_\varepsilon = \lambda_{III} m_\sigma. \quad (3.2)$$

Так же из уравнений (3.1) можно получить соотношения между ранжированными деформациями и напряжениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^r &= \mu_I \sigma + \left(\lambda_{II} + \frac{\lambda_{III}}{3}\right) \frac{\sigma_1^r}{2} - \lambda_{III} \frac{\sigma_2^r}{3} - \left(\lambda_{II} - \frac{\lambda_{III}}{3}\right) \frac{\sigma_3^r}{2}, \\ \varepsilon_2^r &= \mu_I \sigma + \frac{\lambda_{III}}{3} (2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r), \\ \varepsilon_3^r &= \lambda_{II} \sigma - \left(\lambda_{II} - \frac{\lambda_{III}}{3}\right) \frac{\sigma_1^r}{4} - \frac{\lambda_{III} \sigma_2^r}{6} + \left(\lambda_{II} + \frac{\lambda_{III}}{3}\right) \frac{\sigma_3^r}{4}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Введем предположение, что существует потенциал пластических деформаций  $W_p = F(f)$ , где  $f = \Sigma_{II}^2 + a \Sigma_{III}^2$  – поверхность нагружения. Тогда коэффициенты податливости в направлении вектора  $\vec{\Sigma}_{II}$  и  $\vec{\Sigma}_{III}$  можно представить в форме

$$II = \mu_{II}(1 + \omega), \quad III = \mu_{II}(1 + a\omega), \quad (3.4)$$

где  $\omega = \Gamma_{13}^p/\Gamma_{13}^y$  – параметр относительного сдвига,  $\Gamma_{13}^y$  – упругая сдвиговая деформация на площадке (13). Из (3.4) следует, что если  $a = 1$ , то выполняются равенства  $\lambda_{II} = \lambda_{III}$ ,  $m_\sigma = m_\varepsilon$  и соотношения (3.3) переходят в уравнения теории малых упругопластических деформаций Генки-Ильюшина [1]. Если же  $a = 0$ , то  $\lambda_{III} = \mu_{II}$  и соотношения (3.3) переходят в уравнения Кармана-Хаара [3].

Рассмотрим процесс простого нагружения в пространстве деформаций. В этом случае при упругом деформировании направление главных осей и функция вида деформированного состояния  $m_\varepsilon$  остаются неизменными. Покажем, что за пределом упругости процесс деформирования перестает быть простым, поскольку при неизменном параметре вида деформированного состояния происходит изменение параметра вида напряжений.

Так как  $m_\varepsilon = m_\varepsilon^* = const$ , то предельное максимальное касательное напряжение определяется соотношением

$$T_{13}^* = \frac{k}{\sqrt{1 + a(m_\varepsilon^*)^2}}.$$

Из (3.3) и (3.4) получим соотношение, связывающее параметры  $m_\varepsilon^*$  и  $m_\sigma$  при упругопластическом деформировании

$$|m_\sigma| = \frac{1 + \omega}{1 + a\omega} |m_\varepsilon^*|. \quad (3.5)$$

Если  $a < 1$ , то при росте главного пластического сдвига величина  $1 + \omega$  растет быстрее, чем  $1 + a\omega$ . Следовательно, зависимость (3.5) устанавливает дрейф параметра  $|m_\sigma|$  от значения  $|m_\varepsilon^*|$  до предельного значения  $|m_\sigma| = 1/\sqrt{3}$ , при котором материал переходит в состояние полной пластичности.

Из (3.5) можно найти значение предельного относительного сдвига, при котором материал переходит в состояние полной пластичности

$$\omega^* = \frac{1 - |m_\varepsilon^*| \sqrt{3}}{|m_\varepsilon^*| \sqrt{3} - a}. \quad (3.6)$$

Отсюда видно, что если режим нагружения и пластические свойства материала удовлетворяют неравенству  $|m_\varepsilon^*| > a/\sqrt{3}$ , то при развитом пластическом деформировании возможно достижение состояния полной пластичности. В противном случае реализуется только режим неполной пластичности.

Следовательно, если пластические свойства материала таковы, что  $a = 1$ , т.е.  $\sigma_t/\tau_s = \sqrt{3}$ , то его упругопластическое деформирование описывается соотношениями Генки-Ильюшина и во всех режимах нагружения  $|m_\varepsilon^*| < 1/\sqrt{3}$  реализуется состояние неполной пластичности. И только режимами нагружения  $|m_\varepsilon^*| = 1/\sqrt{3}$  задается состояние полной пластичности.

Если же пластические свойства материала таковы, что  $a = 0$ , т.е.  $\sigma_t/\tau_s = 2$ , то его упругопластическое деформирование описывается соотношениями Кармана-Хаара. В этом случае во всех режимах нагружения  $0 < |m_\varepsilon^*| \leq 1/\sqrt{3}$  выполняется равенство  $|m_\sigma| = (1 + \omega) |m_\varepsilon^*|$  и при развитой пластической деформации реализуется состояние полной пластичности. При этом относительный предельный сдвиг определяется из соотношения

$$\omega^* = \left( |m_\varepsilon^*| \sqrt{3} \right)^{-1} - 1.$$

Если рассматривать простое нагружение в пространстве напряжений, то в этом случае направление главных осей и параметр вида напряженного состояния  $m_\sigma$  в процессе нагружения остаются неизменными.

Так как  $m_\sigma = m_\sigma^* = const$ , то предельное максимальное касательное напряжение определяется соотношением

$$T_{13}^* = \frac{k}{\sqrt{1 + a(m_\sigma^*)^2}}. \quad (3.7)$$

Тогда параметры вида деформированного и напряженного состояния будут связаны соотношением

$$m_\varepsilon = \frac{(1 + a\omega)}{(1 + \omega)} m_\sigma^*. \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что при справедливости критерия Мизеса ( $a = 1$ ) параметры вида деформированного и напряженного состояний совпадают:  $m_\varepsilon = m_\sigma^*$ . Если же свойства материала таковы, что параметр  $a < 1$ , то при развитии пластических деформаций числитель соотношения (3.7) растет медленнее, чем знаменатель, и абсолютное значение параметра вида деформированного состояния  $|m_\varepsilon|$  дрейфует в сторону уменьшения.

**4. Режим полной пластичности.** Соотношения (3.2) справедливы для регулярных точек поверхности предельного состояния (2.3). На предельной поверхности имеются особые точки, которые соответствуют условию полной пластичности

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = k/\sqrt{1 + a/3} \quad \text{и} \quad \sigma_1^r = \sigma_2^r \quad \text{или} \quad \sigma_1^r = \sigma_3^r. \quad (4.1)$$

Для примера рассмотрим условие  $\sigma_1^r = \sigma_3^r$ . Предположим, что существует потенциальная функция  $F_*(f_*)$ , где  $f_* = (\sigma_1^r - \sigma_3^r)^2$  – поверхность нагружения.

Тогда будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^r &= \frac{1}{3K}\sigma + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3G} + \frac{1}{G_*^p} \right) (\sigma_1^r - \sigma_3^r) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{G_*^p} \right) \sigma_3^r + \lambda, \\ \varepsilon_2^r &= \frac{1}{3K}\sigma + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{G_*^p} \right) (\sigma_1^r - \sigma_3^r) - \lambda, \\ \varepsilon_3^r &= \frac{1}{3K}\sigma - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{3G_*^p} \right) (\sigma_1^r - \sigma_3^r), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\lambda$  – параметр, который определяется в процессе решения задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Ленинград [СПб.] : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [2] *Кузнецов, Е. Е.* Формулировка условия предельного состояния изотропных сред в инвариантах собственных упругих состояний / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 369–376.
- [3] *Хаар, А.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности : сб. переводов. – М., 1948. – С. 41–56.
- [4] *Шемякин, Е. И.* Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях сплошной среды / Е. И. Шемякин // Доклады РАН. – Т. 373, № 5. – С. 632–634.
- [5] *Шемякин, Е. И.* Вопросы прочности твердых тел и горных пород / Е. И. Шемякин // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 26–45.
- [6] *Mises, R.* Mechanic der plastischen Formagerung von Kristalen / R. Mises // Z. angew. Math. und Mech. – 1928. – Bd. 8, № 5. – S. 161–185.
- [7] *Tresca, H.* In Memoires presentes par divers / H. Tresca // Acad. Sci. – Paris, 1868. – № 18. – С. 733–799.

Y. Y. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko

## CONSTRUCTION OF THE THEORY OF SMALL ELASTIC PLASTIC DEFORMATIONS

*Tula State University*

**Abstract.** Linear invariants of the main ranged stress which allow to formulate a hybrid two-parametrical condition of plasticity on the basis of which relations of small elastic plastic deformations are entered. The concepts of the theory of small elastic plastic deformations by Genka-Ilyushin [1] and the Karman-Haar [3] come from the suggested as special cases. It is shown that generally at preservation during loading directions of the main axes elastic plastic deformation is complex.

**Keywords:** a square of the module of a vector of stress, own vectors, a hybrid condition of plasticity, incomplete and full plasticity, small elastic plastic deformations.

Кузнецов Евгений Евгеньевич

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

Матченко Илья Николаевич

доктор физико-математических наук, доцент кафедры городского строительства и архитектуры, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

Матченко Николай Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenievich

Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

Mattchenko, Ilya Nikolaevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, City Construction and Architecture, Tula State University, Tula

Mattchenko, Nikolay Mikhailovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Modeling, Tula State University, Tula



Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко

## ОБ УРАВНЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Для материалов, пластические свойства которых не чувствительны к воздействию гидростатического давления, приведено условие пластичности общего вида. Выписаны уравнения пространственной задачи при условии полной пластичности. Следуя Д.Д. Ивлеву [2], показано, что уравнения поля напряжений при соответствующих граничных условиях являются статически определяемыми, а дифференциальные уравнения поля напряжений и скоростей перемещений относятся к гиперболическому типу.

**Ключевые слова:** условие пластичности, полная пластичность, статическая определяемость, гиперболические дифференциальные уравнения.

УДК: 539.375

**1. Введение.** Рассматриваются материалы, пластические свойства которых не зависят от гидростатического давления. Для таких материалов в работе А.Хаара и Т. Кармана [12] было введено понятие полной пластичности. Особенность этого предельного состояния заключается в том, что одновременно на двух площадках главных касательных напряжений достигается предельное состояние. А.Ю. Ишлинский [6] предложил соотношения пространственного состояния идеальнопластического тела при условии предельного состояния, записанного в виде двух соотношений. А.Ю. Ишлинский отказался от ассоциированного закона пластического течения и использовал условия совпадения главных осей тензора напряжений и скоростей деформаций (условие изотропии). В работах Д.Д. Ивлева [1 – 5], посвященных уравнениям пространственной задачи теории идеальной пластичности, было показано фундаментальное значение условия полной пластичности и были выписаны основные уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности. Во всех работах, посвященных проблеме полной пластичности, состояние полной пластичности связывается с ребром призмы Кулона-Треска [2 – 5, 8, 11, 12, 14]. Ниже, опираясь на кривую пластичности общего вида и предположение о том, что во всей пластической области вид напряженного состояния соответствует крайним значениям параметра Лоде-Надаи [9], сформулированы условия предельного состояния в виде двух уравнений. Показано, что условие полной пластичности не зависит от вида кривой пластичности. Соотношения предельного состояния записаны как через главные напряжения, так и компоненты тензора напряжения. Записаны соотношения законов пластического течения, ассоциированных с этими предельными условиями. При условиях полной пластичности получены уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности для поля напряжений и поля скоростей перемещений. Поскольку уравнения являются гиперболическими, то они отражают сдвиговый характер пластического течения. Характеристики поля напряжений и скоростей совпадают. Обсуждается проблема определения статической неопределимости при условиях полной пластичности.

**2. Условия предельного состояния.** Напряженное состояние элемента сплошной среды характеризуется ранжированными главными нормальными напряжениями  $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \sigma_3^r$  и триэдром главных направлений относительно лабораторной системы декартовых координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Примем условие ранжирования главных напряжений  $\sigma_1^r \geq \sigma_2^r \geq \sigma_3^r$ . Растягивающее напряжение считается положительным.

Далее рассмотрим класс материалов, пластические свойства которых не зависят от действия гидростатического напряжения. Основываясь на простейших экспериментах, можно сформулировать различные условия пластичности. Для таких материалов наиболее часто используются условия пластичности Треска и Мизеса [7].

Пусть к сплошной среде применимо условие пластичности общего вида

$$\tau_{\max} = f(\mu_\sigma), \quad (2.1)$$

где  $\tau_{\max} = (\sigma_1^r - \sigma_3^r)/2$  – максимальное касательное напряжение,  $\mu_\sigma$  – параметр Лоде-Надаи [9]. Параметр Лоде-Надаи изменяется в диапазоне  $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$  и вычисляется по формуле

$$\mu_\sigma = (2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r)/(\sigma_1^r - \sigma_3^r). \quad (2.2)$$

Состояние полной пластичности соответствует крайним значениям параметра Лоде-Надаи.

Теорема 1. Если материал подчиняется условию пластичности (2.1), то условие полной пластичности проявляется в виде сингулярности и не зависит от вида функции  $f(\mu_\sigma)$ .

Доказательство. Пусть в пластической области вид напряженного состояния соответствует значению  $\mu_\sigma = 1$ . Тогда из условия предельного состояния (2.1) и выражения для параметра Лоде-Надаи (1.2) получим

$$\tau_{\max} = f(\mu_\sigma)|_{\mu_\sigma=1}, \quad 2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r = 2 f(\mu_\sigma)|_{\mu_\sigma=1}. \quad (2.3)$$

Из эксперимента на одноосное сжатие и (1.3) следует

$$\sigma_3^r = -\sigma_c, \quad f(\mu_\sigma)|_{\mu_\sigma=1} = \sigma_c/2, \quad (2.4)$$

где  $\sigma_c$  – предел пластического сопротивления при одноосном сжатии.

Соотношения (2.3) перепишем в виде

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \sigma_c, \quad 2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r = \sigma_c. \quad (2.5)$$

Если же в пластической области вид напряженного состояния соответствует значению  $\mu_\sigma = -1$ , то соотношения предельного состояния можно представить в виде

$$\tau_{\max} = f(\mu_\sigma)|_{\mu_\sigma=-1}, \quad 2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r = -2 f(\mu_\sigma)|_{\mu_\sigma=-1}. \quad (2.6)$$

Из эксперимента на одноосное растяжение следует

$$\sigma_1^r = \sigma_p, \quad f(\mu_\sigma)|_{\mu_\sigma=-1} = \sigma_p/2, \quad (2.7)$$

где  $\sigma_p$  – предел пластического сопротивления при одноосном растяжении.

Условие предельного состояния в случае  $\mu_\sigma = -1$  принимает вид

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \sigma_p, \quad 2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r = -\sigma_p. \quad (2.8)$$

Таким образом, если в пластической области вид напряженного состояния соответствует крайним значениям параметра Лоде-Надаи, то предельные условия имеют вид (2.5) или (2.8), т.е. являются сингулярными и не зависят от вида функции  $f(\mu_\sigma)$ .

Из предельных условий (2.5) и (2.8) можно получить условия совместности ранжированных главных напряжений: при значении  $\mu_\sigma = 1$  -  $\sigma_1^r = \sigma_2^r$ , а при значении  $\mu_\sigma = -1$  -  $\sigma_2^r = \sigma_3^r$ .

В пространстве Хейга применительно к случаям  $\mu_\sigma = 1$  и  $\mu_\sigma = -1$  соотношения обобщенного ассоциированного закона пластического течения можно представить следующим образом: через пересечение двух плоскостей (2.5) и (2.8) проходит пучок плоскостей

$$\lambda(\sigma_1^r - \sigma_3^r - \sigma_c) + \mu(2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r - \sigma_c) = 0 \quad (2.9)$$

или

$$\lambda(\sigma_1^r - \sigma_3^r - \sigma_p) + \mu(2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r + \sigma_p) = 0, \quad (2.10)$$

где  $\lambda \geq 0$  и  $\mu \geq 0$  – неопределенные коэффициенты Лагранжа.

Следовательно,

$$\varepsilon_1^r = \lambda - \mu, \quad \varepsilon_2^r = 2\mu, \quad \varepsilon_3^r = -\lambda - \mu. \quad (2.11)$$

Из (2.6) вытекает условие несжимаемости пластического течения

$$\varepsilon_1^r + \varepsilon_2^r + \varepsilon_3^r = 0. \quad (2.12)$$

Здесь  $\varepsilon_1^r \geq \varepsilon_2^r \geq \varepsilon_3^r$  – главные ранжированные скорости пластических деформаций.

Соотношения (2.5) и (2.8) можно представить в виде

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \sigma_c, \quad \sigma_2^r = \sigma_1^r \quad (2.13)$$

и

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \sigma_p, \quad \sigma_2^r = \sigma_3^r. \quad (2.14)$$

Тогда ассоциированный закон пластического течения записывается в форме

$$\varepsilon_1^r = \lambda_* + \mu_*, \quad \varepsilon_2^r = -\mu_*, \quad \varepsilon_3^r = -\lambda_* \quad (2.15)$$

где  $\lambda_*$  и  $\mu_*$  – неопределенные коэффициенты Лагранжа.

Сопоставляя (2.11) и (2.15) получим зависимости между неопределенными коэффициентами Лагранжа

$$\lambda_* = \lambda + \mu, \quad \mu_* = -2\mu, \quad \varepsilon_3^r = -\lambda_*. \quad (2.16)$$

### 3. Напряженное состояние.

**Теорема 2.** Если известны тройка главных ранжированных нормальных напряжений  $\sigma_i^r$  и три угла триэдра главных направлений, то компоненты тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) вычисляются однозначно.

**Доказательство.** Связь компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  в лабораторной системе координат  $x_i$  с компонентами главных ранжированных напряжений определяется соотношениями

$$\sigma_{ij} = \sum_{s=1}^3 \sigma_s^r n_{si} n_{sj}, \quad (3.1)$$

где  $n_{ij}$  – направляющие косинусы триэдра главных направлений. Девять направляющих косинусов связаны шестью уравнениями

$$n_{is} n_{js} = \delta_{ij}, \quad (3.2)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Вместо трех главных нормальных напряжений  $\sigma_i^r$  можно использовать их инварианты

$$\sigma = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^r, \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1^r - \sigma_3^r), \quad \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r}{\sigma_1^r - \sigma_3^r}, \quad (3.3)$$

где  $\sigma$  – среднее напряжение.

Главные ранжированные напряжения связаны с инвариантами (3.3) соотношениями

$$\sigma_1^r = \sigma + \left(1 - \frac{1}{3}\mu_\sigma\right)\tau_{\max}, \quad \sigma_2^r = \sigma + \frac{2}{3}\mu_\sigma\tau_{\max}, \quad \sigma_3^r = \sigma - \left(1 + \frac{1}{3}\mu_\sigma\right)\tau_{\max}. \quad (3.4)$$

Подставляя зависимости (3.4) в соотношения (3.1), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= q + q_1 n_{11}^2 - q_2 n_{31}^2, & \sigma_{12} &= q_1 n_{11} n_{12} - q_2 n_{31} n_{32}, \\ \sigma_{22} &= q + q_1 n_{12}^2 - q_2 n_{32}^2, & \sigma_{23} &= q_1 n_{12} n_{13} - q_2 n_{32} n_{33}, \\ \sigma_{33} &= q + q_1 n_{13}^2 - q_2 n_{33}^2, & \sigma_{13} &= q_1 n_{11} n_{13} - q_2 n_{31} n_{33}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $q = \sigma + 2\mu_\sigma\tau_{\max}/3$ ,  $q_1 = (1 - \mu_\sigma)\tau_{\max}$ ,  $q_2 = (1 + \mu_\sigma)\tau_{\max}$ .

Из (3.1) и (3.5) следует, что компоненты тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  однозначно определяются шестью параметрами: тремя главными напряжениями  $\sigma_i^r$  (или их инвариантами, например  $\sigma$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\mu_\sigma$ ) и тремя углами, характеризующими ориентацию главных напряжений  $\sigma_i^r$  относительно лабораторной системы координат.

**Теорема 3.** При условии полной пластичности, т.е. если вид напряженного состояния задается значением  $\mu_\sigma = 1$  (или  $\mu_\sigma = -1$ ), шесть компонент тензора напряжения вычисляются только через три параметра, подлежащих определению в результате решения пространственной задачи теории идеальной пластичности:  $\sigma$  – гидростатическое давление и два угла  $\alpha$  и  $\beta$  (или  $\alpha_*$  и  $\beta_*$ ), задающих направление напряжения  $\vec{\sigma}_3^r$  (или  $\vec{\sigma}_1^r$ ).

**Доказательство.** Пусть вид напряженного состояния в пластической области соответствует значению  $\mu_\sigma = 1$ . В этом случае имеем  $\sigma_1^r = \sigma_2^r$ ,  $\tau_{\max} = \sigma_c/2$ ,  $q = \sigma + \sigma_c/3$ ,  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = \sigma_c$  и из (3.5) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma + \sigma_c/3 - \sigma_c n_{31}^2, & \sigma_{12} &= -\sigma_c n_{31} n_{32}, \\ \sigma_{22} &= \sigma + \sigma_c/3 - \sigma_c n_{32}^2, & \sigma_{23} &= -\sigma_c n_{32} n_{33}, \\ \sigma_{33} &= \sigma + \sigma_c/3 - \sigma_c n_{33}^2, & \sigma_{13} &= -\sigma_c n_{31} n_{33}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В зависимостях (3.6) фигурируют направляющие косинусы  $n_{3i}$ , характеризующие направление главного напряжения  $\sigma_3^r$ . Пусть углами  $\alpha$  и  $\beta$  задается направление главного напряжения  $\vec{\sigma}_3^r$  относительно лабораторной системы координат. Следовательно, направляющие косинусы, фигурирующие в соотношениях (3.6), являются функциями двух параметров

$$n_{31} = n_{31}(\alpha, \beta), \quad n_{32} = n_{32}(\alpha, \beta), \quad n_{33} = n_{33}(\alpha, \beta) \quad (3.7)$$

и поэтому ориентацию кратных главных напряжений в плоскости, перпендикулярной вектору напряжения  $\vec{\sigma}_3^r$ , из соотношений (3.6) найти принципиально невозможно. Для примера зададим ориентацию главных ранжированных напряжений углами Эйлера [10]. Пусть  $\alpha = \psi$  является углом прецессии, а  $\beta = \vartheta$  – углом нутации. Угол собственного вращения  $\varphi$  характеризует поворот орта первого и второго главных напряжений вокруг направления третьего главного напряжения. В этом случае направляющие косинусы, характеризующие направление третьего главного напряжения, вычисляются по формулам

$$n_{31} = \sin \psi \sin v, \quad n_{32} = -\cos \psi \sin v, \quad n_{33} = \cos v. \quad (3.8)$$

Поскольку в выражения (3.8) не входит угол собственного вращения, то в соответствии с (3.6) компоненты тензора напряжения нечувствительны к значениям угла собственного вращения  $\varphi$ .

Рассмотрим вариант напряженного состояния при условии  $\mu_\sigma = -1$ . В этом случае  $\sigma_2^r = \sigma_3^r$ ,  $\tau_{\max} = \sigma_p/2$ ,  $q = \sigma - \sigma_p/3$ ,  $q_1 = \sigma_p$ ,  $q_2 = 0$  и из (3.5) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma - \sigma_p/3 + \sigma_p n_{11}^2, & \sigma_{12} &= \sigma_p n_{11} n_{12}, \\ \sigma_{22} &= \sigma - \sigma_p/3 + \sigma_p n_{12}^2, & \sigma_{23} &= \sigma_p n_{12} n_{13}, \\ \sigma_{33} &= \sigma - \sigma_p/3 + \sigma_p n_{13}^2, & \sigma_{13} &= \sigma_p n_{11} n_{13}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В зависимостях (3.9) фигурируют направляющие косинусы, характеризующие направление главного напряжения  $\sigma_1^r$ . Пусть углами  $\alpha_*$  и  $\beta_*$  задается направление главного напряжения  $\sigma_1^r$  относительно лабораторной системы координат. Следовательно, направляющие косинусы, фигурирующие в соотношениях (3.9), являются функциями двух параметров

$$n_{11} = n_{11}(\alpha_*, \beta_*), \quad n_{12} = n_{12}(\alpha_*, \beta_*), \quad n_{13} = n_{13}(\alpha_*, \beta_*) \quad (3.10)$$

и поэтому ориентацию кратных главных напряжений в плоскости, перпендикулярной вектору напряжения  $\vec{\sigma}_1^r$ , из соотношений (3.9) получить принципиально невозможно. Для примера ориентацию главных ранжированных напряжений зададим самолетными углами [10]. Пусть  $\alpha_* = \psi_*$  является углом рысканья, а  $\beta_* = \vartheta_*$  – углом тангажа характеризуют направление первого главного напряжения относительно лабораторной системы координат. Угол крена  $\varphi_*$  характеризует поворот орта второго и третьего главных напряжений вокруг направления первого главного напряжения. Направляющие косинусы, характеризующие направление первого главного напряжения, вычисляются по формулам

$$n_{11} = \cos \psi_* \cos \vartheta_*, \quad n_{13} = \sin \vartheta_*, \quad n_{23} = -\sin \psi_* \cos \vartheta_*. \quad (3.11)$$

Поскольку в соотношения (3.11) не входит угол крена, то в соответствии с (3.9) компоненты тензора напряжения нечувствительны к значениям угла крена  $\varphi$ .

Таким образом, теорема 3 доказана.

Если напряженное состояние задается тремя ранжированными главными напряжениями и триэдром главных направлений относительно лабораторной системы декартовых координат, то на главные напряжения, в случае соответствия напряженного состояния крайним значениям параметра Лоде-Надаи, накладывается только одно условие совместности: два главных напряжения  $\sigma_1^r$  и  $\sigma_2^r$  (или  $\sigma_2^r$  и  $\sigma_3^r$ ) равны между собой.

Формулировки предельных состояний при условии полной пластичности можно записать через компоненты тензора напряжения.

Воспользуемся зависимостью [14]

$$(3 + \mu_\sigma^2)^{1/2} \tau_{\max} = \sqrt{3I_2}, \quad (3.12)$$

где

$$I_2 = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}^2)]/6 \quad (3.13)$$

– второй инвариант тензора напряжений.

Отсюда следует запись условий предельного состояния:

для случая  $\mu_\sigma = 1$  –

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}^2) = 2\sigma_c^2; \quad (3.14)$$

для случая  $\mu_\sigma = -1$  –

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}^2) = 2\sigma_p^2. \quad (3.15)$$

Условие равенства двух главных напряжений записывается в виде условий совместности компонент тензора напряжения

$$\sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = \sigma_{22} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}} = \sigma_{33} - \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}. \quad (3.16)$$

Из (2.16) можно получить зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{22} &= \frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}}, \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} &= \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}} - \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}, \\ \sigma_{11} - \sigma_{33} &= \frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} - \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если исключить с помощью соотношений (3.17) из условий предельного состояния (2.14) и (3.15) нормальные компоненты тензора напряжения, то получим два предельных условия

$$\frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} + \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}} + \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}} = -\sigma_c \quad (3.18)$$

и

$$\frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} + \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}} + \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}} = \sigma_p. \quad (3.19)$$

Из условий совместности компонент тензора напряжений (3.16) можно получить соотношения

$$\begin{aligned} (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_c)^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2 &= 3\sigma_c^2, \\ (2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33} - \sigma_c)^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{23}^2 &= 3\sigma_c^2, \\ (\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_c)^2 + 3\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{23}^2 &= 3\sigma_c^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

или

$$\begin{aligned} (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33} + \sigma_p)^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2 &= 3\sigma_p^2, \\ (2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33} + \sigma_p)^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{23}^2 &= 3\sigma_p^2, \\ (2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22} + \sigma_p)^2 + 3\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{23}^2 &= 3\sigma_p^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Используя в качестве пластического потенциала условие пластичности (3.14) и зависимости (3.20), получим соотношения ассоциированного закона пластического течения при условии  $\mu_\sigma = 1$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 3(\lambda_1 + 2\lambda_2)(\sigma_{11} - \sigma) + 3\lambda_3(\sigma_{22} - \sigma) + 3\lambda_4(\sigma_{33} - \sigma) - (2\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)\sigma_c; \\ \varepsilon_{22} &= 3(\lambda_1 + 2\lambda_3)(\sigma_{22} - \sigma) - 3\lambda_2(\sigma_{11} - \sigma) - 3\lambda_4(\sigma_{33} - \sigma) - (2\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_4)\sigma_c; \\ \varepsilon_{33} &= 3(\lambda_1 + 2\lambda_4)(\sigma_{33} - \sigma) - 3\lambda_2(\sigma_{11} - \sigma) - 3\lambda_3(\sigma_{22} - \sigma) - (2\lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_3)\sigma_c; \\ \varepsilon_{12} &= 3(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = 3(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4)\sigma_{13}, \\ \varepsilon_{23} &= 3(2\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)\sigma_{23}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора скоростей пластических деформаций,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  – неопределенные множители.

Аналогично условия пластичности (3.15) и соотношения (3.21) позволяет записать ассоциированный закон пластического течения для напряженного состояния  $\mu_\sigma = -1$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 3(\lambda_1^* + 2\lambda_2^*)(\sigma_{11} - \sigma) + 3\lambda_3^*(\sigma_{22} - \sigma) + 3\lambda_4^*(\sigma_{33} - \sigma) + (2\lambda_2^* - \lambda_3^* - \lambda_4^*)\sigma_p; \\ \varepsilon_{22} &= 3(\lambda_1^* + 2\lambda_3^*)(\sigma_{22} - \sigma) - 3\lambda_2^*(\sigma_{11} - \sigma) - 3\lambda_4^*(\sigma_{33} - \sigma) + (2\lambda_3^* - \lambda_2^* - \lambda_4^*)\sigma_p; \\ \varepsilon_{33} &= 3(\lambda_1^* + 2\lambda_4^*)(\sigma_{33} - \sigma) - 3\lambda_2^*(\sigma_{11} - \sigma) - 3\lambda_3^*(\sigma_{22} - \sigma) + (2\lambda_4^* - \lambda_2^* - \lambda_3^*)\sigma_p; \\ \varepsilon_{12} &= 3(2\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*)\sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = 3(2\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_4^*)\sigma_{13}, \\ \varepsilon_{23} &= 3(2\lambda_1^* + \lambda_3^* + \lambda_4^*)\sigma_{23}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*$  – неопределенные множители.

#### 4. Уравнения поля напряжений.

**Теорема 4.** Если в пространственной задаче теории идеальной пластичности вид напряженного состояния соответствует крайним значениям параметра Лоде-Надаи, то для определения компонент тензора напряжения достаточно трех уравнений равновесия при соответствующих граничных условиях.

Доказательство. Компоненты тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0. \quad (4.1)$$

Рассмотрим случай  $\mu_\sigma = 1$ . Подставляя соотношения (3.6) в уравнения равновесия (4.1), получим систему трех уравнений

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} - \sigma_c \left( n_{3j} \frac{\partial n_{3i}}{\partial x_j} + n_{3i} \frac{\partial n_{3j}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.2)$$

В соответствии с (3.7) направляющие косинусы  $n_{3i}$  являются функциями двух углов  $\alpha$  и  $\beta$ , тогда три уравнения (4.2) при соответствующих граничных условиях позволяют определить три функции

$$\sigma = \sigma(x_i), \quad \alpha = \alpha(x_i), \quad \beta = \beta(x_i) \quad (4.3)$$

и, соответственно, по формулам (3.6) все компоненты тензора напряжения. Таким образом, для компонент тензора напряжения задача является внешне статически определимой. Однако, полученное поле напряжений не позволяет определить ориентацию орта кратных напряжений  $\sigma_1^r, \sigma_2^r$  в плоскости, перпендикулярной напряжению  $\sigma_3^r$ , и задача является внутренне один раз статически неопределимой.

Если направление вектора  $\vec{\sigma}_3^r$  задано углами Эйлера, то уравнения (4.2) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_c} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + (2n_{31}n_{32} - n_{31}^2) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + n_{32}^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + n_{33}n_{32} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + n_{31}n_{33} (\cos \psi - \\ - \sin \psi) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} - n_{32}n_{33} \sin \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + (n_{31} \sin v - n_{33}^2 \sin \psi) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{1}{\sigma_c} \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + (n_{32}^2 - n_{31}^2) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + 2n_{31}n_{32} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - n_{33}n_{31} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + n_{33} (n_{31} \cos \psi - \\ - n_{32} \sin \psi) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} - 2n_{31}n_{33} \sin \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + (n_{32} \sin v + n_{33}^2 \cos \psi) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{1}{\sigma_c} \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} + n_{33}n_{32} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - n_{33}n_{31} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + (n_{31} \sin v - n_{33}^2 \sin \psi) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \\ + (n_{32} \sin v + n_{33}^2 \cos \psi) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + 2n_{31} \sin v \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Направляющие косинусы вычисляются по формулам (3.8). Из (4.4) следует, что угол собственного вращения 1 из уравнений поля напряжений не определяется.

Следуя Д. Д. Ивлеву [5], можно установить, что системы уравнений (4.2) и (4.4) принадлежит к гиперболическому типу. Направление минимального главного ранжированного напряжения  $\vec{\sigma}_3^r$  является характеристическим. Характеристическими являются также направления, составляющие с  $\vec{\sigma}_3^r$  угол с раствором  $\pi/4$ .

Рассмотрим теперь случай  $\mu_\sigma = -1$ . Подставляя соотношения (3.9) в уравнения равновесия, получим систему трех уравнений

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} + \sigma_p \left( n_{1j} \frac{\partial n_{1i}}{\partial x_j} + n_{1i} \frac{\partial n_{1j}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.5)$$

В соответствии с (3.11) направляющие косинусы  $n_{1i}$  являются функциями двух углов  $\alpha_*$  и  $\beta_*$ , тогда три уравнения (4.2) при соответствующих граничных условиях позволяют определить три функции

$$\sigma = \sigma(x_i), \quad \alpha_* = \alpha_*(x_i), \quad \beta_* = \beta_*(x_i) \quad (4.6)$$

и, соответственно, по формулам (3.7) все компоненты тензора напряжения.

Для случая  $\mu_\sigma = -1$  для компонент тензора напряжения задача является внешне статически определимой и один раз внутренне статически неопределимой.

Если направление напряжения  $\sigma_1^r$  задано самолетными углами, то уравнения (4.5) принимают вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sigma_p} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} - 2n_{11}n_{13} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_1} - n_{12}n_{13} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_2} - (n_{13}^2 + n_{11}^2) \frac{\partial \psi_*}{\partial x_3} + 2n_{11}n_{12} \cos \psi_* \frac{\partial \vartheta_*}{\partial x_1} + \\
 & + (n_{12}^2 \cos \psi_* + n_{11} \cos v_*) \frac{\partial \vartheta_*}{\partial x_2} + n_{12}(n_{13} \cos \psi_* - n_{11} \sin \psi_*) \frac{\partial \vartheta_*}{\partial x_3} = 0, \\
 & \frac{1}{\sigma_p} \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} - n_{12}n_{13} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_1} - n_{12}n_{11} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_3} + (n_{12}^2 \cos \psi_* + n_{11} \cos v_*) \frac{\partial \vartheta_*}{\partial x_1} + \\
 & + 2n_{12} \cos v_* \frac{\partial \vartheta_*}{\partial x_2} + (n_{13} \cos v_* - n_{12}^2 \sin \psi_*) \frac{\partial \vartheta_*}{\partial x_3} = 0, \\
 & \frac{1}{\sigma_p} \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} - (n_{13}^2 - n_{11}^2) \frac{\partial \psi_*}{\partial x_1} + n_{12}n_{11} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_2} + 2n_{13}n_{11} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_3} + n_{12}(n_{13} \cos \psi_* + \\
 & + n_{11} \sin \psi_*) \frac{\partial \vartheta_*}{\partial x_1} + (n_{12}^2 \sin \psi_* + n_{13} \cos v_*) \frac{\partial \vartheta_*}{\partial x_2} + 2n_{13}n_{12} \sin \psi_* \frac{\partial \vartheta_*}{\partial x_3} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Направляющие косинусы  $n_{1i}$  вычисляются по формулам (3.11).

Поскольку в уравнения для поля напряжений (4.7) не входит угол крена  $\varphi_*$ , то при известных значениях компонент тензора напряжения из уравнений (3.9) невозможно найти его значения, и задача при внешней статической определенности внутренне остается один раз статически неопределимой.

Система уравнений (4.5) и (4.7) является гиперболической. В этом случае направление максимального главного ранжированного напряжения  $\sigma_1^r$  является характеристическим. Характеристическими являются также направления, составляющие с  $\bar{\sigma}_1^r$  угол с раствором  $\pi/4$ .

### 5. Уравнения поля скоростей.

При построении уравнений поля скоростей будем исходить из условий соосности главных осей тензора напряжений и скоростей пластических деформации [7]

$$\sigma_{im} \varepsilon_{mj} = \varepsilon_{im} \sigma_{mj}. \tag{5.1}$$

К уравнениям (5.1) следует добавить условие несжимаемости

$$\varepsilon_{ij} \delta_{ij} = 0, \tag{5.2}$$

где  $\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ ,  $u_i$  – компоненты вектора скорости перемещения.

Для случая  $\mu_\sigma = 1$  условия соосности тензора напряжения и тензора скоростей деформации (5.1) вырождаются в условие совпадения направления напряжения  $\sigma_3^r$  и скорости деформации  $\varepsilon_3^r$

$$\varepsilon_{1j} \frac{n_{3j}}{n_{31}} = \varepsilon_{2j} \frac{n_{3j}}{n_{32}} = \varepsilon_{3j} \frac{n_{3j}}{n_{33}}. \tag{5.3}$$

Если направление напряжения  $\sigma_3^r$  задается двумя углами Эйлера, то соотношения (5.3) принимают вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} \operatorname{ctg} \psi + \varepsilon_{13} \operatorname{ctg} v / \sin \psi &= -\varepsilon_{12} \operatorname{tg} \psi + \\
 + \varepsilon_{22} - \varepsilon_{23} \operatorname{ctg} v / \cos \psi &= \varepsilon_{13} \operatorname{tg} v \sin \psi - \varepsilon_{23} \operatorname{tg} v \cos \psi + \varepsilon_{33}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Переходя в (5.2) и (5.3) или (5.4) к компонентам вектора скорости перемещения получим систему дифференциальных уравнений для поля скоростей. Следуя Д. Д. Ивлеву, можно показать, что эти системы дифференциальных уравнений принадлежат к гиперболическому типу, а их характеристические многообразия совпадают с многообразиями для поля напряжений систем уравнений (4.2) и (4.4) соответственно.

Если напряженное состояние соответствует значению  $\mu_\sigma = -1$ , то условие соосности тензора напряжения и тензора скоростей деформации (5.1) вырождается в условие совпадения направления напряжения  $\sigma_1^r$  и скорости деформации  $\varepsilon_1^r$

$$\varepsilon_{1j} \frac{n_{1j}}{n_{11}} = \varepsilon_{2j} \frac{n_{1j}}{n_{12}} = \varepsilon_{3j} \frac{n_{1j}}{n_{13}}. \tag{5.5}$$

Если направление напряжения  $\bar{\sigma}_1^r$  задается двумя самолетными углами, то соотношения (5.5) принимают вид



$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} \operatorname{tg} v_* / \cos \psi_* - \varepsilon_{13} \operatorname{tg} \psi_* &= \varepsilon_{12} \cos \psi_* \operatorname{ctg} v_* + \\ + \varepsilon_{22} - \varepsilon_{23} \sin \psi_* \operatorname{ctg} v_* &= -\varepsilon_{13} \operatorname{ctg} \psi_* - \varepsilon_{23} \operatorname{tg} v_* / \sin \psi_* + \varepsilon_{33}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Системы уравнений (5.2) и (5.5) или (5.6), записанные через компоненты вектора скорости перемещения, принадлежат к гиперболическому типу, а их характеристические многообразия совпадают с многообразиями для поля напряжений систем уравнений (4.5) и (4.7) соответственно.

Процедура решения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности заключается в следующем:

1) при граничных условиях, заданных в напряжениях для напряженного состояния, соответствующего крайним значениям параметра Лодэ-Надаи, решается задача для поля напряжений, и находятся функции  $1$ ,  $\alpha = \alpha(x_i)$ ,  $\beta = \beta(x_i)$  (или  $\alpha_* = \alpha_*(x_i)$ ,  $\beta_* = \beta_*(x_i)$ );

2) по известным значениям  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\alpha_*$ ,  $\beta_*$  определяются функции направляющих косинусов  $n_{3i} = n_{3i}(x_i)$  (или  $n_{1i} = n_{1i}(x_i)$ );

3) при известных функциях направляющих косинусов  $n_{3i}$  (или  $n_{1i}$ ) и соответствующих кинематических граничных условиях определяются компоненты  $u_i$  поля скоростей;

4) известные компоненты поля скоростей  $u_i$  позволяют вычислить компоненты тензора скоростей пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}$ ;

5) поскольку ориентация  $\vec{\varepsilon}_3^r$  (или  $\vec{\varepsilon}_1^r$ ) известна, то по компонентам тензора скоростей пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}$  определяется ориентация орта  $\vec{\varepsilon}_1^r$ ,  $\vec{\varepsilon}_2^r$  (или  $\vec{\varepsilon}_2^r$ ,  $\vec{\varepsilon}_3^r$ ) в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{\varepsilon}_3^r$  (или  $\vec{\varepsilon}_1^r$ );

6) из условия изотропии ориентация орта  $\vec{\varepsilon}_1^r$ ,  $\vec{\varepsilon}_2^r$  (или  $\vec{\varepsilon}_2^r$ ,  $\vec{\varepsilon}_3^r$ ) определяет ориентацию орта  $\vec{\sigma}_1^r$ ,  $\vec{\sigma}_2^r$  (или  $\vec{\sigma}_2^r$ ,  $\vec{\sigma}_3^r$ ).

Таким образом, пространственная задача теории идеальной пластичности при условии, что вид напряженного состояния в пластической области соответствует крайним значениям параметра Лодэ-Надаи при соответствующих граничных условиях для поля напряжения, фактически является один раз статически неопределимой.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Аннин, Б. Д.* Двумерные подмодели идеальной пластичности при условии полной пластичности / Б. Д. Аннин // Проблемы механики : сб. ст. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М., 2003. – С. 94–99.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статике сыпучих сред / Д. Д. Ивлев // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д. Д. Ивлев // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 3. – С. 546–549.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях ассоциированного закона пластического течения в обобщенных переменных / Д. Д. Ивлев // ДАН РАН. – 1998. – Т. 363, № 6. – С. 775–776.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* Полная пластичность в теории идеально-пластического тела / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский // ДАН РАН. – 1999. – Т. 368, № 3. – С. 333–334.
- [6] *Ишлинский, А. Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А. Ю. Ишлинский // Ученые записки МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108.
- [7] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
- [8] *Ковалев, В. А.* Об одной форме определяющих соотношений математической теории пластичности (течение на ребре призмы Кулона-Треска) / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – № 6 (65). – 2008. – С. 260–280.
- [9] *Лоде, В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности : сб. пер. – М., 1948. – С. 168–205.
- [10] *Лурье, А. И.* Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : ФМ, 1961. – 824 с.
- [11] *Радаев, Ю. Н.* Пространственная задача математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев. – 2-е изд. – Самара : Изд-во. Самар. гос. ун-та, 2006. – 340 с.
- [12] *Хаар, А.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности : сб. пер. – М., 1948. – С. 41–56.
- [13] *Христианович, С. А.* К теории идеальной пластичности / С. А. Христианович, Е. И. Шемякин // МТТ : инж. журн. – 1967. – № 4. – С. 86–97.
- [14] *Шемякин, Е. И.* Синтетическая теория прочности. Ч. 1 / Е. И. Шемякин // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2, № 6. – С. 63–70.

Y. Y. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko

**THE EQUATIONS OF A SPATIAL TASK OF THE THEORY OF IDEAL  
PLASTICITY OF ISOTROPIC MATERIALS**

*Tula State University*

**Abstract.** For materials which plastic properties are not sensitive to the influence of hydrostatic pressure, the condition of plasticity of a general view is given. The equations of a spatial task under condition of full plasticity are written out. Following D. D. Ivlev [2], it is shown, that the equations of a field of stress under corresponding boundary conditions are statically definable. The differential equations of a field of stress and speeds of moving concern hyperbolic type.

**Keywords:** condition of the plasticity, full plasticity, static definability, hyperbolic differential equations.

*Кузнецов Евгений Евгеньевич*

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

*Матченко Илья Николаевич*

доктор физико-математических наук, доцент кафедры городского строительства и архитектуры, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

*Матченко Николай Михайлович*

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc\_05@mail.ru

*Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenievich*

Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

*Mattchenko, Ilya Nikolaevich*

Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Building, City Construction and Architecture, Tula State University, Tula

*Mattchenko, Nikolay Mikhailovich*

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Modeling, Tula State University, Tula

## РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО КЛИНА В СЛУЧАЕ ГЛАДКОГО КОНТАКТА

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова

**Аннотация.** В работе рассматривается третья основная задача теории упругости для составного клина. На стыке двух клиновидных областей из различных материалов задается условие гладкого контакта. Граничные условия задаются в виде степенных рядов, имеющих бесконечный радиус сходимости. Единственное решение также получено в виде степенных рядов. Рассмотрены примеры.

**Ключевые слова:** составной клин, гладкий контакт, уравнения Ляме, степенные ряды.

УДК: 539.3

**1. Постановка задачи.** Плоско – напряженный упругий клин (рис.1), составленный из двух однородно – изотропных областей  $0 \leq \theta \leq \alpha$  и  $-\beta \leq \theta \leq 0$ , ( $0 \leq r < \infty$ ) с модулями упругости  $E^{(1)}, E^{(2)}$  и коэффициентами Пуассона  $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}$  соответственно, находится в равновесии. В вершине клина смещение отсутствует.

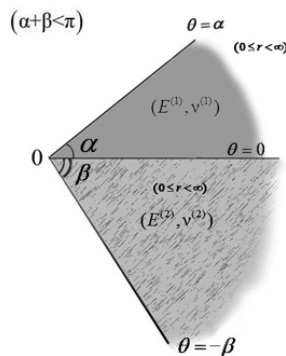


Рис. 1. Составной клин

На луче  $\theta = 0$  заданы условия гладкого контакта

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r, \theta) \Big|_{\theta=0} &= \sigma_r^{(2)}(r, \theta) \Big|_{\theta=0}, \quad \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \theta) \Big|_{\theta=0} = 0, \\ v^{(1)}(r, \theta) \Big|_{\theta=0} &= v^{(2)}(r, \theta) \Big|_{\theta=0}, \quad \tau_{r\theta}^{(2)}(r, \theta) \Big|_{\theta=0} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и ниже, верхний индекс (1) соответствует области с параметрами  $\nu^{(1)}, E^{(1)}$ , а (2) - области с параметрами  $\nu^{(2)}, E^{(2)}$ .

Поступила 13.09.2010

Предположим, что приложенные к составному клину внешние усилия и смещения заданы в виде степенных рядов с бесконечными радиусами сходимости

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(1)}(r, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(1)} r^n, \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(1)} r^n, \\ u^{(2)}(r, -\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(2)} r^n, v^{(2)}(r, -\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(2)} r^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение поставленной задачи также будем искать в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} u^{(j)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(j)}(\theta) r^n, v^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(j)}(\theta) r^n, \\ \sigma_r^{(j)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)}(\theta) r^n, \sigma_{\theta}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(j)}(\theta) r^n, \\ \tau_{r\theta}^{(j)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(j)}(\theta) r^n, \\ &(0 < r < \infty), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $A_n^{(j)}(\theta), B_n^{(j)}(\theta), C_n^{(j)}(\theta), D_n^{(j)}(\theta), F_n^{(j)}(\theta), j = 1, 2$  - неизвестные функции. Будем считать, что ряды (3) сходятся равномерно относительно  $\theta$  и имеют бесконечный радиус сходимости.

**2. Структура смещений и напряжений.** Краевые задачи теории упругости для клиновидной области естественно решать в полярных координатах  $(r, \theta)$ . Дифференциальные уравнения равновесия плоской теории упругости в смещениях (уравнения Ляме) запишутся в виде ([1], стр. 312):

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{d}{dr} u(r, \theta) + \frac{d}{rd\theta} v(r, \theta) + \frac{u(r, \theta)}{r} \right) - \\ - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{d}{dr} v(r, \theta) - \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} u(r, \theta) + \frac{v(r, \theta)}{r} \right) = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{d}{rd\theta} v(r, \theta) + \frac{u(r, \theta)}{r} \right) + \\ + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{d}{dr} v(r, \theta) - \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} u(r, \theta) + \frac{v(r, \theta)}{r} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$ .

Продифференцировав смещения (3), подставив их в уравнения (4) и приравняв к нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $r$ , получим систему, состоящую из следующих уравнений, при  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} (1 - \nu^{(j)}) \frac{d^2}{d\theta^2} A_n^{(j)}(\theta) + 2(n^2 - 1) A_n^{(j)}(\theta) + (\nu^{(j)} n + \nu^{(j)} + n - 3) \frac{d}{d\theta} B_n^{(j)}(\theta) = 0, \\ (\nu^{(j)} n - \nu^{(j)} + n + 3) \frac{d}{d\theta} A_n^{(j)}(\theta) + (n^2 - 1)(1 - \nu^{(j)}) B_n^{(j)}(\theta) + 2 \frac{d^2}{d\theta^2} B_n^{(j)}(\theta) = 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} A_n^{(j)}(\theta) &= -a_n^{(j)} \cos((n+1)\theta) + b_n^{(j)} \sin((n+1)\theta) - \\ &- c_n^{(j)} \frac{\nu^{(j)} n + n - 3 + \nu^{(j)}}{\nu^{(j)} n + n + 3 - \nu^{(j)}} \cos((n-1)\theta) + \\ &+ d_n^{(j)} \frac{\nu^{(j)} n + n - 3 + \nu^{(j)}}{\nu^{(j)} n + n + 3 - \nu^{(j)}} \sin((n-1)\theta), \\ B_n^{(j)}(\theta) &= a_n^{(j)} \sin((n+1)\theta) + b_n^{(j)} \cos((n+1)\theta) + \\ &+ c_n^{(j)} \sin((n-1)\theta) + d_n^{(j)} \cos((n-1)\theta), \end{aligned}$$

где  $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}, c_n^{(j)}, d_n^{(j)}$  - неизвестные действительные постоянные.

При  $n = 0$  система состоит из следующих уравнений

$$\begin{aligned} (1 - \nu^{(j)}) \frac{d^2}{d\theta^2} A_0^{(j)}(\theta) - 2 A_0^{(j)}(\theta) + (\nu^{(j)} - 3) \frac{d}{d\theta} B_0^{(j)}(\theta) = 0, \\ (3 - \nu^{(j)}) \frac{d}{d\theta} A_0^{(j)}(\theta) + (\nu^{(j)} - 1) B_0^{(j)}(\theta) + 2 \frac{d^2}{d\theta^2} B_0^{(j)}(\theta) = 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} A_0^{(j)}(\theta) &= -a_0^{(j)} \cos \theta + b_0^{(j)} \sin \theta + c_0^{(j)} \left( \frac{\nu^{(j)}+1}{\nu^{(j)}-3} \sin \theta - \theta \cos \theta \right) + \\ &\quad + d_0^{(j)} \left( \frac{\nu^{(j)}+1}{\nu^{(j)}-3} \cos \theta + \theta \sin \theta \right), \\ B_0^{(j)}(\theta) &= a_0^{(j)} \sin \theta + b_0^{(j)} \cos \theta + c_0^{(j)} \theta \sin \theta + d_0^{(j)} \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Выпишем структуру смещений

$$\begin{aligned} u^{(j)}(r, \theta) &= -a_0^{(j)} \cos \theta + b_0^{(j)} \sin \theta + c_0^{(j)} \left( \frac{\nu^{(j)}+1}{\nu^{(j)}-3} \sin \theta - \theta \cos \theta \right) + \\ &\quad + d_0^{(j)} \left( \frac{\nu^{(j)}+1}{\nu^{(j)}-3} \cos \theta + \theta \sin \theta \right) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n^{(j)} \cos((n+1)\theta) + b_n^{(j)} \sin((n+1)\theta) - \right. \\ &\quad \left. - c_n^{(j)} \frac{s_{n1}^{(j)}}{s_{n2}^{(j)}} \cos((n-1)\theta) + d_n^{(j)} \frac{s_{n1}^{(j)}}{s_{n2}^{(j)}} \sin((n-1)\theta) \right) r^n \\ v^{(j)}(r, \theta) &= a_0^{(j)} \sin \theta + b_0^{(j)} \cos \theta + c_0^{(j)} \theta \sin \theta + d_0^{(j)} \theta \cos \theta + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^{(j)} \sin((n+1)\theta) + b_n^{(j)} \cos((n+1)\theta) + \right. \\ &\quad \left. + c_n^{(j)} \sin((n-1)\theta) + d_n^{(j)} \cos((n-1)\theta) \right) r^n, \\ &\quad (0 < r < \infty), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $s_{n1}^{(j)} = \nu^{(j)}n + n - 3 + \nu^{(j)}$ ,  $s_{n2}^{(j)} = \nu^{(j)}n + n + 3 - \nu^{(j)}$ .

Далее учтем, что в вершине клина смещение отсутствует.

$$\lim_{r \rightarrow 0} u^{(j)}(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} v^{(j)}(r, \theta) = 0,$$

т.е.

$$\begin{aligned} -a_0^{(j)} \cos \theta + b_0^{(j)} \sin \theta + c_0^{(j)} \left( \frac{\nu^{(j)}+1}{\nu^{(j)}-3} \sin \theta - \theta \cos \theta \right) + \\ + d_0^{(j)} \left( \frac{\nu^{(j)}+1}{\nu^{(j)}-3} \cos \theta + \theta \sin \theta \right) = 0, \\ a_0^{(j)} \sin \theta + b_0^{(j)} \cos \theta + c_0^{(j)} \theta \sin \theta + d_0^{(j)} \theta \cos \theta = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\sin \theta, \cos \theta, \theta \sin \theta, \theta \cos \theta$  линейно независимые функции, то

$$a_0^{(j)} = b_0^{(j)} = c_0^{(j)} = d_0^{(j)} = 0, \quad (6)$$

тогда в краевых условиях (2)

$$f_0^{(2)} = g_0^{(2)} = 0. \quad (7)$$

Связь напряжений с компонентами смещений в полярной системе координат имеет следующий вид ([2], стр.76):

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, \theta) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) + \lambda \left( \frac{u(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v(r, \theta) \right), \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= \lambda \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{u(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v(r, \theta) \right), \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u(r, \theta) + \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta) - \frac{v(r, \theta)}{r} \right). \end{aligned}$$

Используя (5), с учетом (6), структура напряжений примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(j)}(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \cos((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} - b_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \sin((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} + \right. \\ &\quad \left. + c_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n+1) \cos((n-1)\theta)}{s_{n2}^{(j)}} - d_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n+1) \sin((n-1)\theta)}{s_{n2}^{(j)}} \right) r^{n-1}, \\ \sigma_r^{(j)}(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \cos((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} + b_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \sin((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} - \right. \\ &\quad \left. - c_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n-3) \cos((n-1)\theta)}{s_{n2}^{(j)}} + d_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n-3) \sin((n-1)\theta)}{s_{n2}^{(j)}} \right) r^{n-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(j)}(r, \theta) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \sin((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} + b_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \cos((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} + \right. \\ & \left. + c_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n-1) \sin((n-1)\theta)}{s_{n2}^{(j)}} + d_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n-1) \cos((n-1)\theta)}{s_{n2}^{(j)}} \right) r^{n-1}, \\ & (0 < r < \infty). \end{aligned}$$

### 3. Нахождение неизвестных коэффициентов $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}, c_n^{(j)}, d_n^{(j)}$ , $n \in \mathbb{N}, j = 1, 2$ .

Неизвестные коэффициенты в (5) и (8), определяются из систем линейных алгебраических уравнений, полученных из условий гладкого контакта (1) и граничных условий (2). Система состоит из следующих уравнений:

$$-a_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n}{1+\nu^{(1)}} - c_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n(n-3)}{s_{n2}^{(1)}} = -a_n^{(2)} \frac{E^{(2)} n}{1+\nu^{(2)}} - c_n^{(2)} \frac{E^{(2)} n(n-3)}{s_{n2}^{(2)}},$$

$$b_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n}{1+\nu^{(1)}} + d_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n(n-1)}{s_{n2}^{(1)}} = 0,$$

$$b_n^{(2)} \frac{E^{(2)} n}{1+\nu^{(2)}} + d_n^{(2)} \frac{E^{(2)} n(n-1)}{s_{n2}^{(2)}} = 0,$$

$$b_n^{(1)} + d_n^{(1)} = b_n^{(2)} + d_n^{(2)},$$

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n \cos((n+1)\alpha)}{1+\nu^{(1)}} - b_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n \sin((n+1)\alpha)}{1+\nu^{(1)}} + \\ + c_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n(n+1) \cos((n-1)\alpha)}{s_{n2}^{(1)}} - d_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n(n+1) \sin((n-1)\alpha)}{s_{n2}^{(1)}} = f_{n-1}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n \sin((n+1)\alpha)}{1+\nu^{(1)}} + b_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n \cos((n+1)\alpha)}{1+\nu^{(1)}} + \\ + c_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n(n-1) \sin((n-1)\alpha)}{s_{n2}^{(1)}} + d_n^{(1)} \frac{E^{(1)} n(n-1) \cos((n-1)\alpha)}{s_{n2}^{(1)}} = g_{n-1}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a_n^{(2)} \cos((n+1)\beta) - b_n^{(2)} \sin((n+1)\beta) - \\ - c_n^{(2)} \frac{s_{n1}^{(2)}}{s_{n2}^{(2)}} \cos((n-1)\beta) - d_n^{(2)} \frac{s_{n1}^{(2)}}{s_{n2}^{(2)}} \sin((n-1)\beta) = f_n^{(2)}, \end{aligned}$$

$$-a_n^{(2)} \sin((n+1)\beta) + b_n^{(2)} \cos((n+1)\beta) - c_n^{(2)} \sin((n-1)\beta) + d_n^{(2)} \cos((n-1)\beta) = g_n^{(2)},$$

где  $s_{n1}^{(j)} = \nu^{(j)}n + n - 3 + \nu^{(j)}$ ,  $s_{n2}^{(j)} = \nu^{(j)}n + n + 3 - \nu^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ .

Преобразуем их и запишем систему в матричной форме

$$A_n X_n = B_n, \quad (9)$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} R^{(1)} & R^{(2)} \\ L^{(1)} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & L^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+\nu^{(1)}} & 0 & -\frac{(n-3)}{s_{n2}^{(1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\nu^{(1)}} & 0 & \frac{(n-1)}{s_{n2}^{(1)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}(1+\nu^{(2)})} & 0 & \frac{E^{(2)}(n-3)}{E^{(1)}s_{n2}^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\nu^{(2)}} & 0 & \frac{(n-1)}{s_{n2}^{(2)}} \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\cos((n+1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & -\frac{\sin((n+1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & \frac{(n+1)\cos((n-1)\alpha)}{s_{n2}^{(1)}} & -\frac{(n+1)\sin((n-1)\alpha)}{s_{n2}^{(1)}} \\ \frac{\sin((n+1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & \frac{\cos((n+1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & \frac{(n-1)\sin((n-1)\alpha)}{s_{n2}^{(1)}} & \frac{(n-1)\cos((n-1)\alpha)}{s_{n2}^{(1)}} \end{pmatrix},$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} -\cos((n+1)\beta) & -\sin((n+1)\beta) & -\frac{s_{n1}^{(2)}}{s_{n2}^{(2)}}\cos((n-1)\beta) & -\frac{s_{n1}^{(2)}}{s_{n2}^{(2)}}\sin((n-1)\beta) \\ -\sin((n+1)\beta) & \cos((n+1)\beta) & -\sin((n-1)\beta) & \cos((n-1)\beta) \end{pmatrix},$$

$$0_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} \\ c_n^{(1)} \\ d_n^{(1)} \\ a_n^{(2)} \\ b_n^{(2)} \\ c_n^{(2)} \\ d_n^{(2)} \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{f_{n-1}^{(1)}}{E^{(1)}n} \\ \frac{g_{n-1}^{(1)}}{E^{(1)}n} \\ f_n^{(2)} \\ g_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Изучим поведение коэффициентов  $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}, c_n^{(j)}, d_n^{(j)}$  при больших  $n$ .

При  $n \rightarrow \infty, A_n \sim \overline{A}_n$ , где

$$\overline{A}_n = \begin{pmatrix} \overline{R^{(1)}} & \overline{R^{(2)}} \\ \overline{L^{(1)}} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & \overline{L^{(2)}} \end{pmatrix},$$

в которой

$$\overline{R^{(1)}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+\nu^{(1)}} & 0 & -\frac{1}{1+\nu^{(1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\nu^{(1)}} & 0 & \frac{1}{1+\nu^{(1)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{R^{(2)}} = \begin{pmatrix} \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}(1+\nu^{(2)})} & 0 & \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}(1+\nu^{(2)})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\nu^{(2)}} & 0 & \frac{1}{1+\nu^{(2)}} \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{L^{(1)}} = \begin{pmatrix} \frac{\cos((n+1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & -\frac{\sin((n+1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & \frac{\cos((n-1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & -\frac{\sin((n-1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} \\ \frac{\sin((n+1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & \frac{\cos((n+1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & \frac{\sin((n-1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} & \frac{\cos((n-1)\alpha)}{(1+\nu^{(1)})} \end{pmatrix},$$

$$\overline{L^{(2)}} = \begin{pmatrix} -\cos((n+1)\beta) & -\sin((n+1)\beta) & -\cos((n-1)\beta) & -\sin((n-1)\beta) \\ -\sin((n+1)\beta) & \cos((n+1)\beta) & -\sin((n-1)\beta) & \cos((n-1)\beta) \end{pmatrix}.$$



Решив систему  $\overline{A_n}X_n = B_n$ , получим, например,

$$a_n^{(2)} = \frac{\sin(n\beta)}{2\sin(\beta)}f_n^{(2)} - \frac{\cos(n\beta)}{2\sin(\beta)}g_n^{(2)},$$

структура остальных коэффициентов также имеет вид

$$\zeta_n f_{n-1}^{(1)} + \psi_n g_{n-1}^{(1)} + \eta_n f_n^{(2)} + \gamma_n g_n^{(2)},$$

где  $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  - ограниченные последовательности.

Из этой асимптотики видно, что ряды (5) и (8) сходятся абсолютно и равномерно относительно  $\theta$ , т.к. ряды для заданных функций (2) сходятся абсолютно.

**4. Исследование определителя системы.** В связи с тем, что в системе присутствуют неизвестные параметры  $\nu^{(1)}, E^{(1)}, \nu^{(2)}, E^{(2)}, \alpha, \beta$  исследовать определитель на нули для общего случая, вызывает трудности.

Рассмотрим клин, составленный из меди ( $\nu^{(1)} = 0.25, E^{(1)} = 1.37 \cdot 10^{11}$ ) и железа ( $\nu^{(2)} = 0.26, E^{(2)} = 1.68 \cdot 10^{11}$ ).

Исследуем определитель системы (9) при равных углах раствора, т.е. ( $\beta = \alpha$ ). При некоторых натуральных  $n$ , построим графики  $\Delta_n(\alpha)$ . На рис.2 построены графики определителей  $\Delta_n(\alpha)$  при  $n = 1, 6, 11, 16, 21, 26$ .

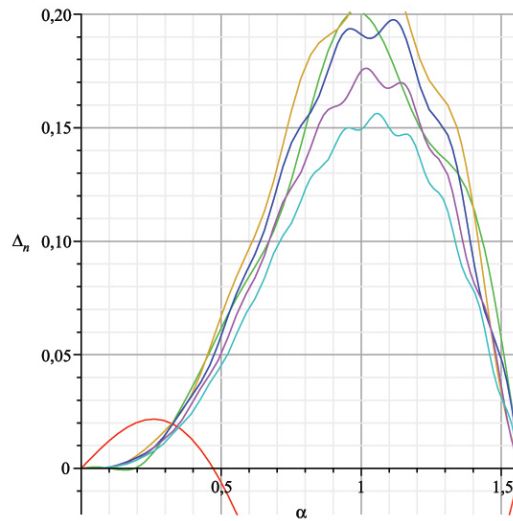


Рис. 2. Графики определителей  $\Delta_n(\alpha)$  ( $n = 1, 6, 11, 16, 21, 26$ ) в случае  $\beta = \alpha$

На рис. 3-4 приведены соответственно графики определителей  $\Delta_n(\alpha)$  ( $n = 1, 6, 11, 16, 21, 26$ ) при тех же физических постоянных, для  $\beta = k\alpha, k = 2, 6$ .

По графикам видно, что при каждом натуральном  $n$ , существует конечное число значений  $\alpha_k$ , при которых определитель системы (9) равен нулю.

**Теорема.** Если для фиксированных  $\alpha, \beta$  определитель системы (9) отличен от нуля при всех натуральных  $n$ , то задача с условием гладкого контакта (1) и граничным условием (2), в котором выполняется (7), имеет единственное решение. Компоненты смещения записываются формулами (5), где выполнено (6), а напряжения - формулами (8). Коэффициенты

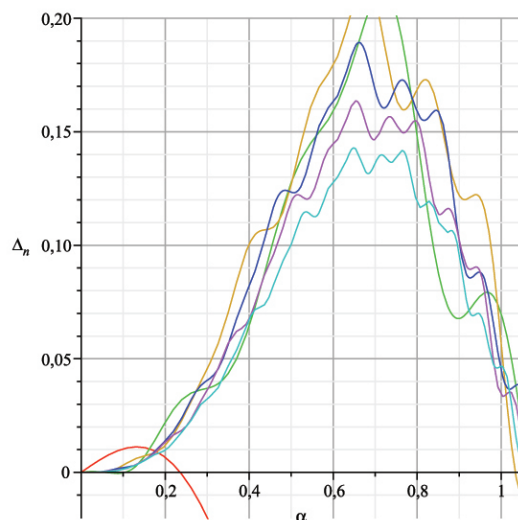


Рис. 3. Графики определителей  $\Delta_n(\alpha)$  ( $n = 1, 6, 11, 16, 21, 26$ ) в случае  $\beta = 2\alpha$

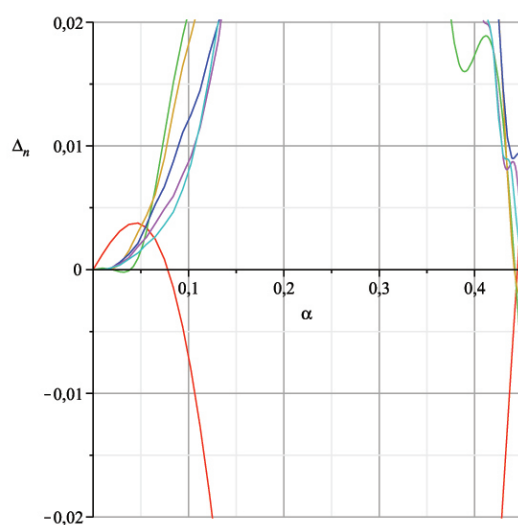


Рис. 4. Графики определителей  $\Delta_n(\alpha)$  ( $n = 1, 6, 11, 16, 21, 26$ ) в случае  $\beta = 6\alpha$

$a_n^{(j)}, b_n^{(j)}, c_n^{(j)}, d_n^{(j)}, j = 1, 2$  находятся из системы (9), по формулам Крамера. Ряды имеют бесконечный радиус сходимости и сходятся равномерно относительно  $0 \leq \theta \leq \alpha$  для области с параметрами  $\nu^{(1)}, E^{(1)}$  и  $-\beta \leq \theta \leq 0$  для области с параметрами  $\nu^{(2)}, E^{(2)}$ .

**Примеры.** При решении конкретных задач следует, прежде всего, убедиться, что при заданных углах  $\alpha, \beta$ , определитель системы (9) не обращается в нуль. Для этого необходимо записать определитель и приравнять его к нулю. Численным методом (например, методом Ньютона) решить полученное уравнение относительно  $n$ . Корни уравнения будут приближенными. Надо взять ближайшие к корням натуральные числа и подставить их в

полученное уравнение. Если при этом равенство не выполнено, то единственное решение можно найти по выше полученным формулам.

Рассмотрим равновесие составного клина из меди ( $\nu^{(1)} = 0.25, E^{(1)} = 1.37 \cdot 10^{11}$ ) и железа ( $\nu^{(2)} = 0.26, E^{(2)} = 1.68 \cdot 10^{11}$ ),  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{6}$ . Смещение в вершине клина отсутствует.

Требуется:

- выяснить, совместна ли система линейных алгебраических уравнений (9).
- решить задачу при следующих краевых условиях

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(1)}(r, \alpha) &= \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n} r^{n-1}, \quad \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \alpha) = \sum_{n=1}^3 (-1)^n \frac{1}{n^2} r, \\ u^{(2)}(r, -\beta) &= \sum_{n=1}^3 (-1)^n \frac{3}{n} r^n, \quad v^{(2)}(r, -\beta) = \sum_{n=1}^3 \frac{5}{n^3} r^n. \end{aligned}$$

- решить задачу при следующих краевых условиях

$$\sigma_{\theta}^{(1)}(r, \alpha) = e^r, \quad \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \alpha) = 0, \quad u^{(2)}(r, -\beta) = 0, \quad v^{(2)}(r, -\beta) = 0.$$

Решение:

- Вычислим значение определителя  $\Delta_n(n)$  и построим его график (см. рис.5).

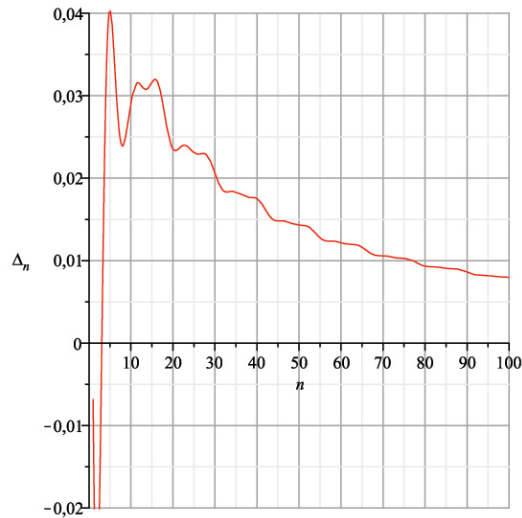


Рис. 5. График определителя  $\Delta_n(n)$

Решив уравнение  $\Delta_n(n) = 0$  численным методом Ньютона, получим что  $n \approx 3.0815$ . Считая, что решение получено с некоторой погрешностью, подставим и убедимся, что при  $n = 3$  и  $n = 4$  определитель системы (9) отличен от нуля. Вывод: при всех натуральных  $n$  система (9) совместна.

- Решив систему (9) для  $n = 1, 2, 3$ , получим

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1.824817518248175182481752 \times 10^{-11} \\ 0 \\ 3.988395339516609187631307 \times 10^{-11} \\ -24.75978205752656734308986 \\ -34.36363636387511710892734 \\ 0 \\ -54.54545454577718528233424 \\ -24.75978205752656734308986 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -0.4860192980407880887528447 \\ -1.180969217514539625853066 \\ 0.6168128324242959048850477 \\ 4.960070713561066428582875 \\ 0.8398462650927955880163230 \\ -1.190416971254655942859890 \\ 5.677765944331871726333421 \\ 4.969518467301182745589700 \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 7.224515623715122370905063 \\ 12.88321747983537244450041 \\ -8.013351736393807120302551 \\ -33.49636544757196835570108 \\ 5.938551842693830588883961 \\ 12.98628321967405542405642 \\ -33.04866002904840797940402 \\ -33.59943118741065133525709 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение для  $0 < r < \infty$  запишется так

$$\sigma_{\theta}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^3 \left( a_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \cos((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} - b_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \sin((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} + \right. \\ \left. + c_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n+1) \cos((n-1)\theta)}{\nu^{(j)} n+n-\nu^{(j)}+3} - d_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n+1) \sin((n-1)\theta)}{\nu^{(j)} n+n-\nu^{(j)}+3} \right) r^{n-1},$$

$$\sigma_r^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^3 \left( -a_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \cos((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} + b_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \sin((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} - \right. \\ \left. - c_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n-3) \cos((n-1)\theta)}{\nu^{(j)} n+n-\nu^{(j)}+3} + d_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n-3) \sin((n-1)\theta)}{\nu^{(j)} n+n-\nu^{(j)}+3} \right) r^{n-1},$$

$$\tau_{r\theta}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^3 \left( a_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \sin((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} + b_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n \cos((n+1)\theta)}{1+\nu^{(j)}} + \right. \\ \left. + c_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n-1) \sin((n-1)\theta)}{\nu^{(j)} n+n-\nu^{(j)}+3} + d_n^{(j)} \frac{E^{(j)} n(n-1) \cos((n-1)\theta)}{\nu^{(j)} n+n-\nu^{(j)}+3} \right) r^{n-1},$$

$$u^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^3 \left( -a_n^{(j)} \cos((n+1)\theta) + b_n^{(j)} \sin((n+1)\theta) - \right. \\ \left. - c_n^{(j)} \frac{\nu^{(j)} n+n-3+\nu^{(j)}}{\nu^{(j)} n+n+3-\nu^{(j)}} \cos((n-1)\theta) + d_n^{(j)} \frac{\nu^{(j)} n+n-3+\nu^{(j)}}{\nu^{(j)} n+n+3-\nu^{(j)}} \sin((n-1)\theta) \right) r^n,$$

$$v^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^3 \left( a_n^{(j)} \sin((n+1)\theta) + b_n^{(j)} \cos((n+1)\theta) + \right. \\ \left. + c_n^{(j)} \sin((n-1)\theta) + d_n^{(j)} \cos((n-1)\theta) \right) r^n.$$

Покажем, например, графики приближений найденного напряжения  $\sigma_{\theta}^{(1)}(r, \theta)$  при  $(\theta \rightarrow \frac{\pi}{12})$  и смещения  $u^{(2)}(r, \theta)$  при  $(\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6})$  к граничным условиям  $\sigma_{\theta}^{(1)}(r, \frac{\pi}{12})$ ,  $u^{(2)}(r, -\frac{\pi}{6})$ . Смотрите рис. 6-7.

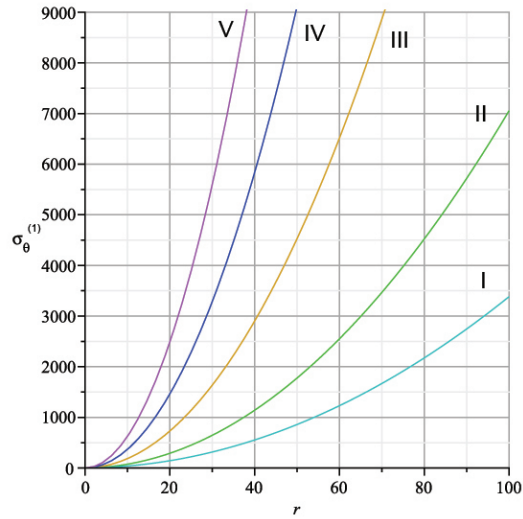


Рис. 6. Графики напряжений: I –  $\sigma_{\theta}^{(1)}\left(r, \frac{\pi}{12}\right)$ , II –  $\sigma_{\theta}^{(1)}\left(r, 0.83333283\pi\right)$ , III –  $\sigma_{\theta}^{(1)}\left(r, 0.83333233\pi\right)$ , IV –  $\sigma_{\theta}^{(1)}\left(r, 0.83333183\pi\right)$ , V –  $\sigma_{\theta}^{(1)}\left(r, 0.83333133\pi\right)$

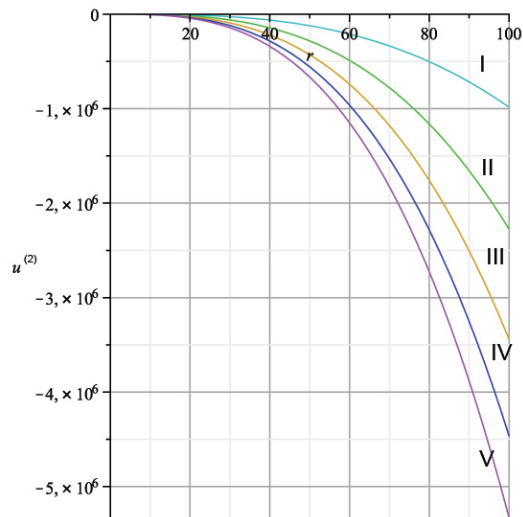


Рис. 7. Графики смещений: I –  $u^{(2)}\left(r, -\frac{\pi}{6}\right)$ , II –  $u^{(2)}\left(r, -0.15666667\pi\right)$ , III –  $u^{(2)}\left(r, -0.14666667\pi\right)$ , IV –  $u^{(2)}\left(r, -0.13666667\pi\right)$ , V –  $u^{(2)}\left(r, -0.12666667\pi\right)$

в) Принимая во внимание, что  $e^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} r^{n-1}$ , в системе (9) положим  $f_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{(n-1)!}$ . Решая систему (9) можно определить все неизвестные коэффициенты. После подстановки найденных коэффициентов в (5) и (8), найдем решение задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Партон, В. З.* Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.

[2] *Снеддон, И. Н.* Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Бери. – М., 1961. – 220 с.

*M. F. Kulagina, E. G. Ivanov*

**THE SOLUTION OF THE THIRD MAIN PROBLEM OF THE ELASTICITY  
THEORY FOR A COMPOSITE WEDGE IN THE CASE OF THE SMOOTH  
CONTACT**

*I. Ulyanov Chuvash State University*

**Abstract.** The paper examines the third main problem of the elasticity theory for a composite wedge. Smooth contact conditions are taken at the junction between different materials in the form of wedge-shaped regions. The boundary conditions are given as power series with infinite radius of convergence. The unique solution is also presented as power series. The examples and plots of the solution approaching to the boundary condition are given.

**Keywords:** composite wedge, smooth contact, power series.

*Кулагина Марина Фокеевна*

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

e-mail: kulagina\_mf@mail.ru

*Иванов Эдуард Георгиевич*

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры актуарной и финансовой математики, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

e-mail: iwashkaEd84@ya.ru

*Kulagina, Marina Fokeevna*

Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential equations, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary

*Ivanov, Eduard Georgievich*

Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential equations, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary

О. Н. Любимова, Е. А. Гридасова, К. Н. Пестов

## К ВОПРОСУ УПРОЧНЕНИЯ СТЕКЛА МЕТОДОМ ДИФфуЗИОННОЙ СВАРКИ С МЕТАЛЛОМ

*Дальневосточный государственный технический университет*

**Аннотация.** Проводится предварительное исследование возможности упрочнения стекла методом диффузионной сварки с металлом, описывается технологический режим сварки стекла с металлом и приводятся основные результаты исследования полученных образцов.

**Ключевые слова:** диффузионная сварка, стекло, упрочнение.

УДК: 621.791:519.63

**Введение.** Исследования теоретической прочности материалов показали, что стекло и керамика по показателям удельной прочности на сжатие намного превосходят такие конструкционные материалы как сталь, алюминиевые и титановые сплавы. В результате фундаментальных исследований, выполненных сотрудниками Физико-технического института им. А. Ф. Иоффе РАН, установлено, что неорганическому стеклу присуща высокая природная прочность независимо от размеров: в равной мере, как для стекловолокна, так и для листа или массива стекла [1]. Расчетный теоретический предел прочности стекла при растяжении составляет 12000 МПа, практически эта величина ниже в 200...300 раз, в зависимости от размера образца колеблется от 30 до 60 МПа (для закаленных стекол – от 100 до 500 МПа), прочность стекла при изгибе вообще составляет 5...35 МПа, в то же время при сжатии прочность стекла 700...1000 МПа и более. Это объясняется тем, что на поверхности и внутри в стекле имеются ослабленные участки (микронеоднородности, трещины, внутренние напряжения) и чем больше размер образцов, тем вероятнее наличие таких участков. Устранение поверхностных микродефектов повышает прочность стекла на порядок, изоляция от воды увеличивает прочность в два раза, ликвидация внутренних дефектов повышает прочность стекла на 30 %, поэтому повышение прочности стекла за счет устранения поверхностных микродефектов остается распространенным способом решения проблемы упрочнения стекол [2], [3]. Основное развитие получают пленочные покрытия, плазменное напыление и химические методы обработки поверхности стекол. В последнее время появились и альтернативные подходы, при которых наведение сжимающих остаточных напряжений в поверхностном слое стекла достигается путем нанесения на металлические оболочки из мягких металлов (алюминия, меди) расплава стекломассы при определенных температурных режимах, данные технологии в целом напоминают сварку стекла с металлом плавлением [4]. Перечисленные способы упрочняют лишь поверхностный слой стекла и имеют свои достоинства и недостатки. В данной работе предлагается исследовать одну из возможностей упрочнения стекол за счет наведения в стекле остаточных напряжений в процессе диффузионной сварки с металлом. Получаемый в результате композиционный материал может иметь массивные размеры и высокую прочность. Диффузионная сварка металлов со стеклом получила широкое распространение

в электротехнической промышленности [5], [6], она существенно отличается от сварки металлов и, несмотря на постоянные исследования механизма взаимодействия металла и стекла, до сих пор не разработана общая теория механизма соединения [7], [8]. Поэтому исследования возможности и режимов сварки различных металлов со стеклом остаются актуальными задачами.

**1. Постановка задачи.** В данной работе проводится предварительное исследование возможности упрочнения стекла методом диффузионной сварки без использования промежуточных прокладок из мягких металлов между основным металлом и стеклом. На рис. 1, а показаны стеклянный стержень 1, внешний металлический стакан 2, подвижная крышка 3, выполненная с возможностью поступательного перемещения вдоль продольной оси стакана 1, для обеспечения давления при сварке. Готовую сборку в вертикальном положении устанавливают в печь. Если процесс соединения протекает при наличии жидкой фазы, то потребность в давлении отпадает, поскольку происходит предварительное смачивание соединяемых поверхностей жидкой пленкой.

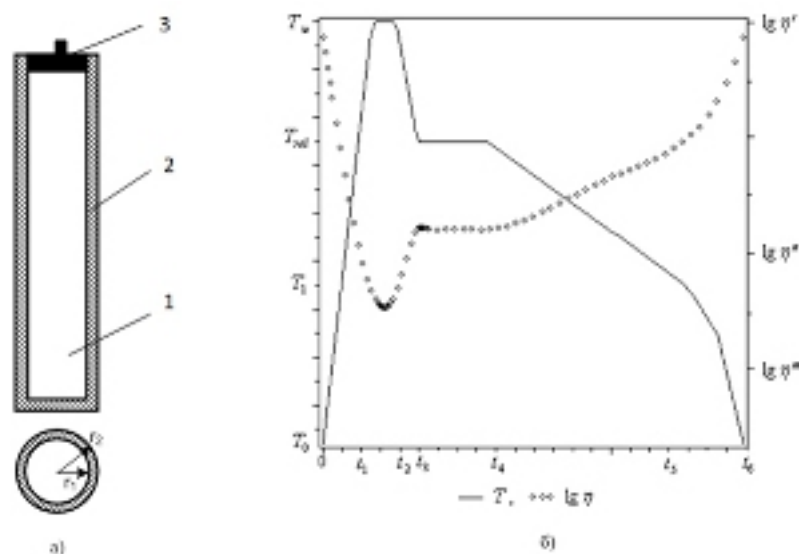


Рис. 1. а) схематическое изображение сборки: 1— стеклянный стержень, 2— внешний металлический стакан, 3— внутренний металлический стакан, 4— подвижная крышка; б) температурный режим сварки:  $T$ — температура сварки,  $\lg \eta$ — логарифм динамической вязкости стекла.

Технологический режим разбивается на шесть этапов (рис. 1, б). На первом этапе, соответствующем интервалу  $[0, t_1]$ , происходит нагрев от температуры  $T_0$  до температуры сварки  $T_w$ . Учитывая особенности аморфной структуры стекла, а также его ограниченную деформационную способность, для получения прочного соединения следует принять  $T_w = T_g$  и  $T_w = 0,4 \div 0,7T_m$ , здесь  $T_g$ — температура размягчения стекла (при которой стекло деформируется под действием собственного веса), а  $T_m$ — температура плавления металла, из которого выполнен стакан 2, при этом вязкость стекла  $\eta \rightarrow \eta''' \approx 10^4$  (Па·с).

На интервале  $[t_1, t_2]$  обеспечивается выдержка при  $T_w$ , размягченный материал стеклянно-го стержня продавливается под действием собственного веса, заполняя зазоры между стержнем и внутренним стаканом, в конце рассматриваемого интервала крышка 3, опускается в



полость внутреннего металлического стакана 2 и материал стержня плотно прилегает к внутренней поверхности внутреннего металлического стакана 2. Тем самым обеспечивается полное устранение поверхностных и внутренних дефектов стекла и надежное соединение стекла с металлом.

Затем производят охлаждение до температуры отжига  $T_{rel}$  на интервале  $[t_2, t_3]$ , вязкость стекла при этом значительно увеличивается: до  $\eta'' \approx 10^{11}(\text{Па}\cdot\text{с})$ . Начиная с момента начала стеклования при температуре  $T'_g$  поверхностей стеклянных слоев, металлический стакан 2 сокращается в большей мере, чем стеклянный стержень 1, вследствие различия их коэффициентов температурного расширения. Поскольку внешний слой стеклянного стержня 1 соединен с обращенной к нему поверхностью внутреннего стакана 2, то стекло оказывает сопротивление сокращению размеров контактирующей с ним металлической поверхностью, вызывая в ней растягивающие напряжения и стягивание своих поверхностей. В результате остывания стенки внутреннего стакана 2 оказываются растянутыми, а стеклянный стержень 1 сжат. Стягивание поверхности стеклянного стержня 1 при остывании не позволяет образовываться поверхностным микротрещинам, уплотняя ее.

Для уменьшения начальных напряжений производится отжиг изделия на интервале  $[t_3, t_4]$ , отжиг необходимо производить при таких температурах, когда вязкость еще достаточно низкая, например, при  $\eta'' = 10^{12}(\text{Па}\cdot\text{с})$  остаточные напряжения снимаются через 15 минут, а при  $\eta'' = 10^{13,5}(\text{Па}\cdot\text{с})$  – через 4 часа.

На интервале  $[t_4, t_5]$  производится ответственное охлаждение до температуры  $T_1$ , со скоростью 3 – 5 ( $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ ).

Далее остаточные напряжения в стекле практически не релаксируют, т.к. вязкость существенно возрастает до  $\eta' > 10^{13,5}(\text{Па}\cdot\text{с})$ , поэтому на последнем шестом этапе производят более быстрое охлаждение со скоростью 15 – 25 ( $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ ). Возникшие напряжения остаются в полученном изделии и после выравнивания температур. Остаточные напряжения и деформации для заданного температурного режима были предварительно оценены в результате приближенного математического моделирования.

Математическое моделирование необходимо для оценки временных и остаточных напряжений, возникающих в процессе сварки. В процессе сварки возникает переменное температурное поле и неравномерные тепловые расширения, в результате которых образуются сварочные деформации и напряжения. После отжига и охлаждения в материале сохраняются отличные от нуля деформации и напряжения (остаточные), которые не должны превышать определенных величин, чтобы не влиять на качество изделия и сварки. При моделировании использовались основные соотношения теории теплопроводности и линейной вязкоупругости. В качестве одного из вариантов приближенного моделирования может быть использована модель с предположениями, что составной цилиндр деформируется в условиях осевой симметрии и плоской деформации. Тогда из перемещений отличным от нуля будет только  $u_r = u(r, t)$ , а из уравнений равновесия невырожденным остается только одно

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (1)$$

Определяющие соотношения в линейной теории вязкоупругости обычно записываются в виде

$$s_{ij}(r, t) = 2\mu \int_0^t R(r, t, t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(r, t')}{\partial t'} dt', \quad (2)$$

$$\sigma(r, t) = 3K(e(r, t) - 3\alpha(T)T(r, t)), \quad (3)$$

здесь  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma\delta_{ij}$  – девиатор напряжений,  $\varepsilon_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}e\delta_{ij}$  – девиатор деформаций,  $\sigma = \sigma_{ii}$ ,  $e = e_{ii}$  – объемная деформация [9]. Модуль сдвига  $\mu$ , мгновенный модуль объемной деформации  $K$  и ядро релаксации  $R(r, t, t')$ , характеризующее реологические свойства

материалов, имеют вид

$$K, \mu = \begin{cases} K^m, \mu^m, & r \in [0, r_1), \\ K^g, \mu^g, & r \in (r_1, r_2], \end{cases} \quad (4)$$

$$R(r, t, t') = \begin{cases} 1, & r \in [0, r_1), \quad T_0 \leq T(r, t) < T'_g, \\ \exp \left\{ - \left( \frac{\xi(t)}{t_b} \right)^\beta \right\}, & r \in [0, r_1), \quad T'_g \leq T(r, t) \leq T_w, \\ 1, & r \in (r_1, r_2], \end{cases} \quad (5)$$

здесь  $\xi(t) = \int_{t'}^t \frac{\eta(T_b)}{\eta(T)} d\tau$  – приведенное время, значение  $\beta$  для большинства промышленных стекол колеблется в пределах  $0,6 \div 0,8$ ,  $\eta(T_b)$  – вязкость сравнения,  $t_b$  – постоянная при механической и структурной релаксации, прямо пропорциональная вязкости стекла  $t_b = \frac{\eta(T)}{K_g}$ , где  $K_g$  – коэффициент пропорциональности,  $\eta(T)$  – коэффициент динамической вязкости, который запишем согласно уравнению Фулчера–Таммана

$$\lg \eta = A + \frac{B}{T - T_0}, \quad (6)$$

где  $A, B$  и  $T_0$  – постоянные для стекол данного состава,  $T(r, t)$  – температура.

Уравнение (1) с соотношениями (2) – (6) замыкаем граничными условиями (7) – (8)

$$\sigma_{rr}|_{r_2} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r_2} = 0 \quad (7)$$

$$\sigma_{rr}|_{r_1-0} = \sigma_{rr}|_{r_1+0}, \quad u|_{r_1-0} = u|_{r_1+0}, \quad \int_0^{r_1} \sigma_{zz} r dr = 0, \quad \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz} r dr = 0. \quad (8)$$

Функция температуры  $T(r, t)$  удовлетворяет нестационарному уравнению теплопроводности, которое с учетом осевой симметрии и независимости от координаты принимает вид

$$\rho(T)c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (9)$$

$$\lambda(T), c(T), \rho(T) = \begin{cases} \lambda^m(T), c^m(T), \rho^m(T), & r \in [0, r_1), \\ \lambda^g(T), c^g(T), \rho^g(T), & r \in (r_1, r_2], \end{cases} \quad (10)$$

где  $\rho(T)$ ,  $c(T)$ ,  $\lambda(T)$  – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала. При моделировании предполагалось, что: 1) между граничными поверхностями стекла и металла осуществляется идеальный тепловой контакт; 2) теплообмен на внешней поверхности металла происходит по закону Ньютона; 3) температура в начальный момент времени постоянна, поэтому краевые и начальные условия имеют вид

$$T|_{t=0} = T_0, \quad \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1-0} = \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1+0}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_2} = -\vartheta (T|_{r=r_2} - T_e(t)), \quad (12)$$

$\vartheta$  – коэффициент теплоотдачи,  $T_e(t)$  – температура среды, которая зависит от задаваемого режима сварки. В работе [10] предложена методика определения температурных полей и зоны проплавления металла при сварке со стеклом.

**2. Результаты эксперимента.** Из химико-лабораторного стекла и стали *СтЗ* по описанному режиму были получены образцы со следующими размерами: внешний диаметр образца 12 мм, толщина металла 1,2 мм, длина образца 100 мм. На рис. 2, а приведен элемент, вырезанный из образца. После механической резки образцов внутри образцов стекло было без

видимых дефектов отдельные трещины явились результатом самой механической резки. После полировки и анализа приграничной зоны образцов также не было обнаружено видимых трещин и пустот в зоне соединения с металлом и внутри самого стекла. Анализ микрошлифов соединения показал наличие полного контакта без трещин и непроваров по зоне соединения. В сварной зоне при микроскопическом исследовании среза выявлена переходная зона, состоящая из двух фаз, которая свидетельствует о развитии взаимодействия на границе контакта. Средняя толщина переходной зоны составляет 12 мкм, темная фаза 5 мкм, светлая 7 мкм, кроме того, при спектральном анализе зон было обнаружено колебание концентрации кремния и железа, в частности, в светлой фазе концентрация  $Fe$  достигает 3 %, в то время как в темной зоне она составляет в среднем 0,3 %.

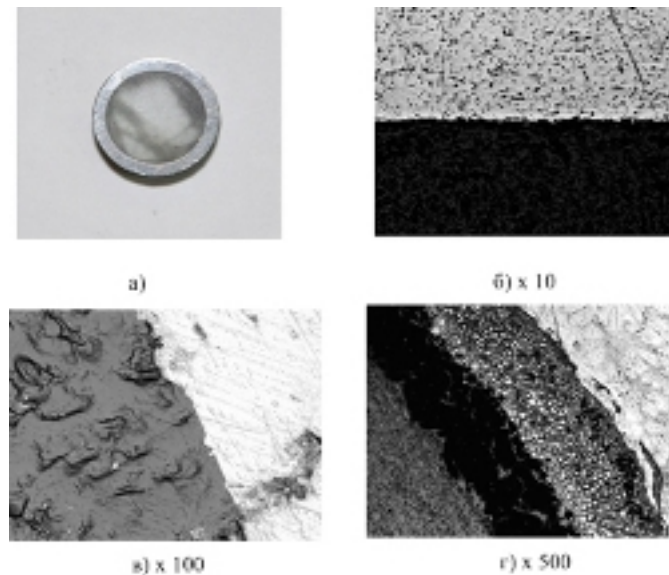


Рис. 2. Микроструктура сварного соединения стали со стеклом ( $T_w = 900\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_{rel} = 650\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 350\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_2 - t_1 = 0,3\text{ ч}$ ,  $t_4 - t_3 = 3\text{ ч}$ ).

Моделирование временных и остаточных напряжений показало, что в начале процесса сварки в стекле образуются растягивающие напряжения, которые при пластической деформации в интервале выдержки при температуре сварки уменьшаются и при охлаждении до температуры отжига сменяются достаточно высокими, порядка  $70 \div 150\text{ МПа}$ , сжимающими напряжениями. После отжига они уменьшаются, в результате дальнейшего охлаждения остаточные сжимающие напряжения в стекле составляют  $5 \div 50\text{ МПа}$ , что составляет  $0,7 \div 7\%$  от практических сжимающих напряжений в стекле.

Полученные образцы были испытаны на растяжение и изгиб, для сравнения аналогичные испытания были проведены для стального стержня и стальных трубок, выполненных из  $Ст3$ , толщина стенки которых составляла  $2,5\text{ мм}$  и  $1,2\text{ мм}$ . Результаты прочностных испытаний приведены на рис. 3,  $a$  – изгиб,  $b$  – растяжение и в таблице 1. Значками  $\times$  и  $\bullet$  отмечены пределы пропорциональности и максимального нагружения соответственно. В результате проведенных исследований было замечено, что полученные диффузионной сваркой образцы начинали разрушаться внутри по стеклу при нагрузках от  $F_y$  и при  $F_{max}$  внутри образца стекло было полностью разрушено, тем не менее  $\sigma_y$  почти в 5 раз превышает предел прочности

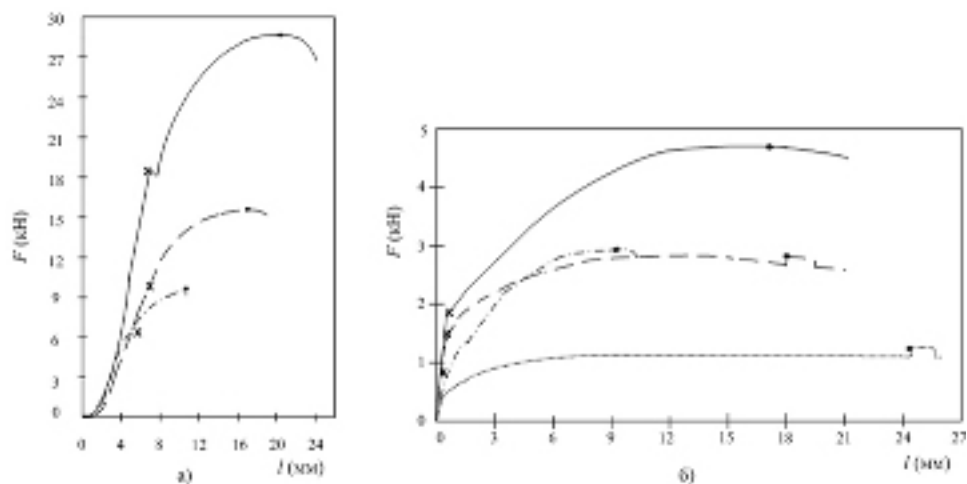


Рис. 3. Зависимость удлинения образца от приложенной нагрузки при испытании: а) на изгиб; б) на растяжение, здесь — — образец из стекла и металла, — стальной стержень, — — стальная трубка толщина стенки 2,5 мм, ··· стальная трубка толщина стенки 1,2 мм.

образец	изгиб, $F$ (кН), $\sigma$ (МПа)				растяжение, $F$ (кН), $\sigma$ (МПа)			
	$F_y$	$\sigma_y$	$F_{max}$	$\sigma_{max}$	$F_y$	$\sigma_y$	$F_{max}$	$\sigma_{max}$
стекло и сталь	0,76	136,4	2,9	517,1	6,6	84,3	9,49	120,85
трубка, 2,5 мм	1,5	298,6	2,8	581,2	9,84	125,3	15,5	197,35
трубка, 1,2 мм	-	-	1,2	372,1	-	-	-	-
стальной стержень	1,8	324	4,7	840,3	18,2	231,75	28,98	368,96

Таблица 1.

на растяжение незакаленного стекла и попадает в интервал пределов прочности для закаленных стекол различных составов. Кроме того, в результате проведенных исследований была получена сварка стекла с металлом, толщина которого превосходила рекомендованную толщину металла в технологии диффузионной сварки (рекомендуемая толщина металлической детали  $< 0,8$  мм, что объясняется желанием снизить остаточные напряжения в поверхностном слое стекла). Вероятно, при тщательной и упорной технологической отработке выше рассмотренного приема упрочнения стекла металлом удастся достигнуть успешного изготовления массивных изделий на базе стекла, которые могут быть использованы в конструкциях ответственного назначения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пух, В. П. Атомная структура и прочность неорганических стекол / В. П. Пух, Л. Г. Байкова, М. Ф. Киреенко, Л. В. Тихонова, Т. П. Казанникова, А. Б. Синани // Физика твердого тела. – 2005. – Т. 47, вып.5. – С. 850–855.
- [2] Мазурин, О. В. Современные представления о строении стекол и их свойствах / М. М. Шульц, О. В. Мазурин. – Ленинград [СПб.] : Наука, 1988. – 198 с.
- [3] Бартенев, Г. М. Сверхпрочные и высокопрочные неорганические стекла / Г. М. Бартенев. – М. : Стройиздат, 1974. – 240 с.
- [4] Патент РФ № 2337036. Способ изготовления цилиндрической оболочки прочного корпуса подводного аппарата / В. В. Пикуль // Бюллетень изобретений. – 2008. – № 30.
- [5] Казаков, Н. Ф. Диффузионная сварка материалов / Н. Ф. Казаков. – М. : Машиностроение, 1976. – 312 с.
- [6] Бачин, В. А. Теория, технология и оборудование диффузионной сварки / В. А. Бачин. – М. : Машиностроение, 1991. – 352 с.
- [7] Бачин, В. А. Диффузионная сварка стекла и керамики с металлами / В. А. Бачин. – М. : Машиностроение, 1986. – 184 с.
- [8] Мазурин, О. В. Отжиг спаев стекла с металлом / О. В. Мазурин. – Ленинград [СПб.] : Энергия, 1980. – 140 с.
- [9] Ильюшин, А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М. : Наука, 1970. – 280 с.
- [10] Любимова, О. Н. Численное решение задачи о проплавлении металлического слоя при сварке плавлением стекла и металла / О. Н. Любимова, К. Н. Пестов, Е. А. Гридасова // Вычислительная механика сплошных сред. – Пермь, 2010. – Т. 3, № 1. – С. 63–72.

*O. N. Lyubimova, E. A. Gridasova, K. N. Pestov*

**GLASS HARDENING BY A METHOD OF THE DIFFUSION WELDING WITH METAL**

*Far East State Technical University*

**Abstract.** The preliminary research of glass hardening possibility by the method of diffusion welding with metal is conducted, the technological mode of glass welding with metal is described and the main results of the research of the received samples are given.

**Keywords:** a diffusion welding, glass, hardening.

*Любимова Ольга Николаевна*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Дальневосточный государственный технический университет, г. Владивосток*

*e-mail: berms@mail.ru*

*Гридасова Екатерина Александровна*

*аспирант, Дальневосточный государственный технический университет, г. Владивосток*

*e-mail: olvin@list.ru*

*Пестов Константин Николаевич*

*аспирант, Дальневосточный государственный технический университет, г. Владивосток*

*e-mail: kopestov@rambler.ru*

*Lyubimova, Olga Nikolaevna*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Far East State Technical University, Vladivostok*

*Gridasova, Ekaterina Aleksandrovna*

*Postgraduate student, Far East State Technical University, Vladivostok*

*Pestov, Konstantin Nikolaevich*

*Postgraduate student, Far East State Technical University, Vladivostok*

Н. В. Макарова, М. В. Полоник

## К ПРОБЛЕМЕ УЧЕТА НЕОДНОРОДНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ИСТИРАНИЯ БЕТОНА

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН*

**Аннотация.** На основе специально проведенных экспериментов предпринята попытка математического моделирования процесса разрушения бетона при истирании. Вводятся критерии степени износа, даются рекомендации для составления износостойчивых композиций бетонов.

**Ключевые слова:** трибология, бетон, механика контактного взаимодействия, разрушение.

УДК: 539.421, 691.327

**Введение.** При проектировании гидротехнических и транспортных железобетонных конструкций достаточно часто возникает проблема изнашивания бетонной поверхности, подвергающейся истирающему воздействию, что, в свою очередь, приводит к уменьшению эффективной толщины и конструктивной схемы элементов. Однако сопротивление истиранию до настоящего времени остается наименее изученным свойством бетона. При моделировании процесса истирания возникают проблемы, в первую очередь связанные с существенной неоднородностью материала. Модели изнашивания бетона с учетом его структуры представлены в работах, где износ поверхности представлен как результат выпадения зерен заполнителя из цементно-песчаной матрицы при оголении их на определенную величину, сопоставимую с размером крупного заполнителя [1, 2]. В то же время, на протяжении достаточно длительного эксплуатационного периода конструкций, истирание поверхности происходит только за счет износа тонких приповерхностных слоев. В связи с этим достаточно сложно выбрать критерии разрушения при моделировании процесса изнашивания бетонной поверхности на различных структурных уровнях.

**1. Выбор структурных уровней. Экспериментальное обоснование.** Согласно [3], [4], процесс изнашивания может быть разделен на следующие стадии:

*Стадия I* – начальная стадия. Происходит процесс изнашивания цементного камня, сольватных оболочек и обнажение зерен крупного и мелкого заполнителей. Моделирование процесса истирания не представляется трудным; поверхность бетона может быть принята однородной.

*Стадия II* – нормальная эксплуатационная стадия. На этой стадии происходит процесс истирания зерен крупного заполнителя и цементно-песчаной матрицы, причем с разной скоростью, зависящей от их физических свойств. После обнажения поверхности зерен крупного заполнителя поверхность представлена совокупностью областей с различными трибологическими характеристиками.

*Стадия III* – стадия разрушения поверхности бетона, здесь возможны два случая:

---

Поступила 30.06.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия Отечественной науке и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-08-98502-р\_восток\_а).

*случай 1* – происходит усталостное разрушение матрицы (объемное микрорастрескивание) между зернами крупного заполнителя, приводящее к их выпадению, что характерно для бетона с малопрочной цементно-песчаной матрицей;

*случай 2* – прорастание усталостной макротрещины на границе между зернами крупного заполнителя и цементно-песчаной матрицей, что характерно для высокопрочных бетонов.

Для экспериментального исследования механизма истирания бетона с целью уточнения границ применения математических моделей был проведен ряд опытов с использованием истирающего круга ЛКИ-3 по стандартной методике (ГОСТ 13087) [5]. Полный путь бетонного образца на вращающемся круге – 600 м, состоит из 20 циклов по 30 м при вертикальном давлении на образец  $(60 \pm 1)$  кПа. Перед каждым из циклов поверхность очищалась, наносился новый абразивный материал, но, в отличие от стандартной методики, образцы не меняли своего положения. На боковую поверхность образцов, предварительно отшлифованную до обнажения зерен крупного заполнителя, наклеивались электротензорезисторы. В предварительных экспериментах использовались датчики с базой  $10 \div 15$  мм, которые наклеивались на различной высоте над истираемой гранью параллельно последней.

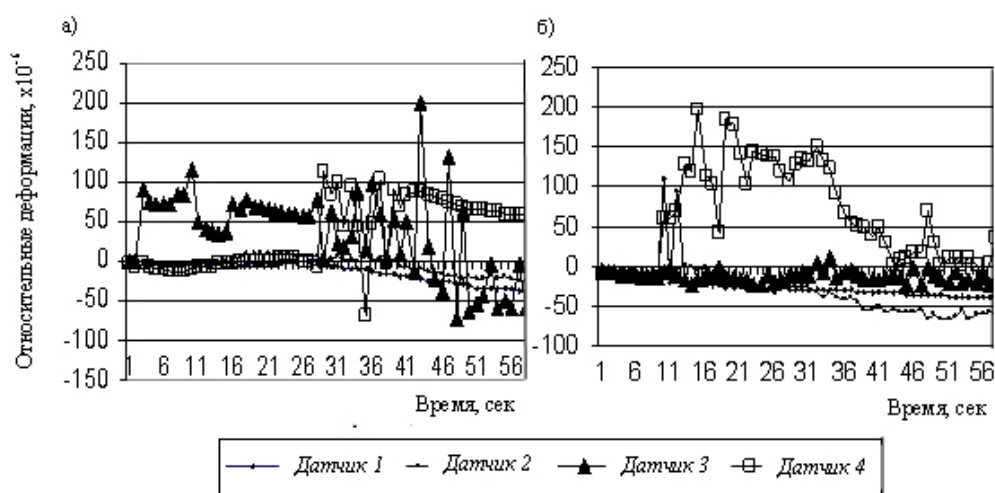


Рис. 1. Результаты экспериментального исследования процесса истирания в приповерхностном слое: *а* – цикл 6 (151 ÷ 180 метров пути); *б* – цикл 7 (181 ÷ 210 метров пути).

В результате установлено, что определенный, достаточно продолжительный период времени горизонтальные деформации материала незначительны и стабильны (*стадии I и II*). Затем происходило скачкообразное увеличение величины и амплитуды деформаций (переход в *стадию III*), причем наибольшие горизонтальные деформации наблюдались на высоте  $0,7 \div 1,5$  максимального размера крупного заполнителя, а не в непосредственной близости от истираемой грани, что можно объяснить так называемым “эффектом обоймы”, обуславливаемым работой сил трения. В датчиках, проходящих через одну или две контактные зоны, деформации были больше, чем в датчиках, нанесенных на цементно-песчаную матрицу между зернами, что можно объяснить концентрацией напряжений вокруг жестких включений.

Для исследования развития усталостной трещины в приповерхностной зоне был отобран образец с удобно расположенным зерном. Датчики с базой 1 мм наклеивались параллельно истираемой грани на контактную зону “матрица – зерно заполнителя”. Результаты эксперимента [4] показали, что причиной прорастания трещины на контакте является достижение относительными деформациями предельных для бетона значений ( $150 \div 200 \times 10^{-6}$ ), трещина прорастает постепенно с определенной скоростью, зависящей от пути (рис. 1).



Подводя итоги выполненных экспериментальных исследований, можно сделать вывод, что процесс износа поверхности бетона на начальных этапах (*стадия I, II*) происходит в достаточно тонких ( $< 1$  мм) слоях и не приводит к изменению структуры материала в приповерхностной зоне. Скорость истирания здесь зависит от трибологических характеристик поверхности. Это дает возможность более гибкого использования математического аппарата механики контактного взаимодействия.

**2. Моделирование процесса.** В начальной стадии (*стадия I*) моделирование не представляется сложным; бетон может рассматриваться как однородное тело. Степень изнашивания может быть представлена как  $\partial\omega_*/\partial t$ , которая зависит от скорости  $V$ , давления на контакте поверхности  $p$ , твердости материала  $H$ , а также от параметров, имеющих определенное значение для каждого механизма процесса изнашивания и используемых для его моделирования.

При дальнейшем процессе истирания (*стадия II*) происходит неравномерное изнашивание материала с неоднородной структурой. Более мягкая структура мелкого заполнителя цементной матрицы разрушается, в результате чего достаточно ровная поверхность становится волнообразной – зерна крупного заполнителя обнажаются на поверхности. Применение предыдущей модели становится затруднительно. В этой стадии процесс изнашивания должен рассматриваться одновременно на микро- и мезоуровнях: на мезоуровне – истирание поверхности заполнителя, на микроуровне – разрушение цементной матрицы, которое и приводит к изменению формы поверхности.

Приняв давление  $p$  и скорость  $V$  постоянными, для исследования процесса изнашивания бетона с учетом его неоднородности возможно использовать математические инструменты механики контактного взаимодействия [6].

Поверхность бетона может быть представлена как упругое полупространство с областью  $\Omega$ , усиленной в круговых областях  $w_{ij}$  радиуса  $a$ , в узлах квадратной решетки с шагом  $l$ . Примем  $w = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} w_{ij}$  ( $40 \div 60\%$  для бетона) – общая площадь упрочненных областей,  $K_{w_1}$ ,  $K_{w_2}$  – параметры, характеризующие степень износа неупрочненных и упрочненных областей соответственно, при этом  $K_{w_1} > K_{w_2}$ . Параметр  $m = K_{w_2}/K_{w_1}$  ( $0,3 \div 0,9$  для бетона) характеризует степень упрочнения поверхности. Параметр  $\bar{a} = a/l$  характеризует геометрические параметры поверхности.

Функция истирания изношенной поверхности полупространства бетона ( $\Omega$ ) на данной стадии деформирования может быть представлена в виде [6]:

$$f(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left( \iint_w p_1 \varphi(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1 + \iint_{\Omega/w} p_2 \varphi(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1 \right),$$

$$\varphi(x, y, x_1, y_1) = ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{-1/2}.$$

В (1)  $p_1, p_2$  – установившиеся в процессе истирания давления, вне  $(x, y) \in \Omega/w$  и внутри  $(x, y) \in w$  упрочненных зон бетона соответственно. Тогда для данной неоднородно упрочненной поверхности в зависимости от точки приложения нагрузки

$$p_1 = \frac{P_{\infty}}{(l^2 + m_2 \pi a^2)}, \quad p_2 = \left( \frac{K_{w_1}}{K_{w_2}} \right)^{1/\alpha} \frac{P_{\infty}}{(l^2 + m_2 \pi a^2)},$$

где  $P_{\infty}$  – значение установившейся нагрузки на периоде  $l$ .

Форма поверхности  $f(x, y)$  в установившемся режиме изнашивания с учетом  $m_2 = m^{-1/\alpha} - 1$ , может быть выписана в виде:

$$f(x, y) = \frac{(1-\nu^2)}{(l^2 + m_2\pi a^2)} \frac{P_\infty}{\pi E} \left( m^{-1/\alpha} \iint_w \varphi(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1 + \iint_{\Omega/w} \varphi(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1 \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{(1 + m_2\pi a^2)} \left( m_2 \iint_w \varphi(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1 + \iint_{\Omega} \varphi(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1 \right).$$

Определяя перепад значений функции  $f(x, y)$  в точках экстремума на одном периоде  $l$ , можно определить зависимость амплитуды  $L$  волны от параметров  $\bar{a}$  и  $m$ . Графики функции  $L/\lambda$  (сплошные линии) при различных значениях параметра  $m$  представлены на рис. 2.

Другой важнейшей характеристикой на изношенной поверхности является площадь диагонального сечения  $S$ . Зависимости безразмерной площади  $S/\lambda$  от параметра  $\bar{a}$  при различных значениях  $m$  приведены на рис. 2 (штриховые линии).

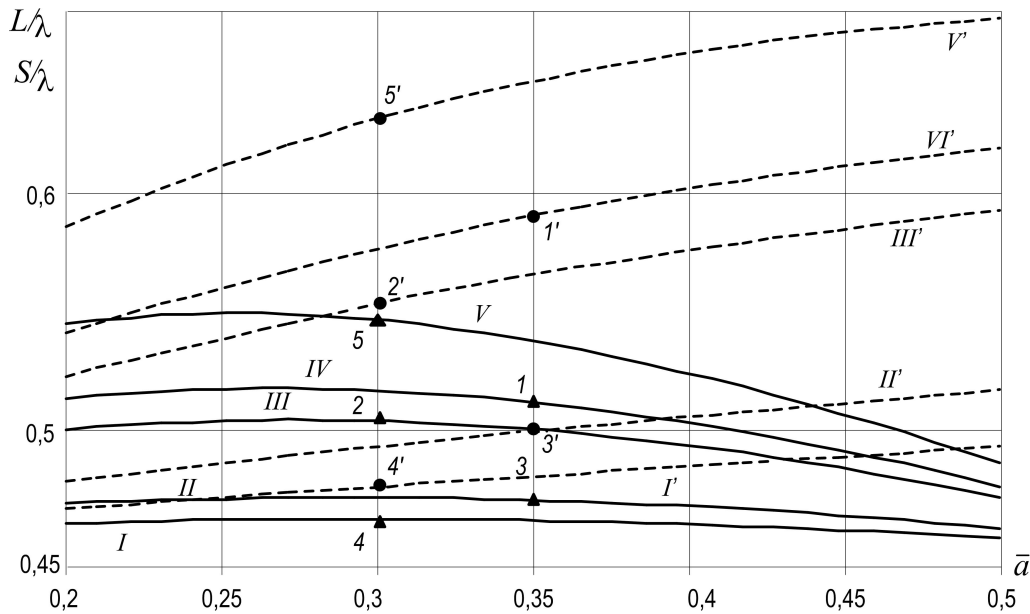


Рис. 2. Зависимости амплитуды  $L$  волны (сплошные линии) и площади  $S$  впадин (штриховые линии) от параметра  $\bar{a}$  при  $m = 0,9$  (I, I'),  $m = 0,85$  (II, II'),  $m = 0,7$  (III, III'),  $m = 0,65$  (IV, IV'),  $m = 0,55$  (V, V').

Варьируя значениями  $\bar{a}$  и  $m$ , можно получить оптимальные соотношения данных параметров упрочнения поверхности (рис. 2).

Это позволило сформулировать конкретные рекомендации для подбора состава и технологических параметров бетонов с высокой стойкостью к истиранию. Так, для составов с прочной матрицей ( $m = 0,9$ ) изменение геометрических параметров незначительно влияет на степень износа, тогда как износостойкость бетонов со слабой матрицей в значительной степени зависит от крупности зерен и их количества.

**3. Согласование с экспериментальными данными.** Было изготовлено пять серий образцов бетона различного состава (составы 1–5). Составы различались расходом крупного

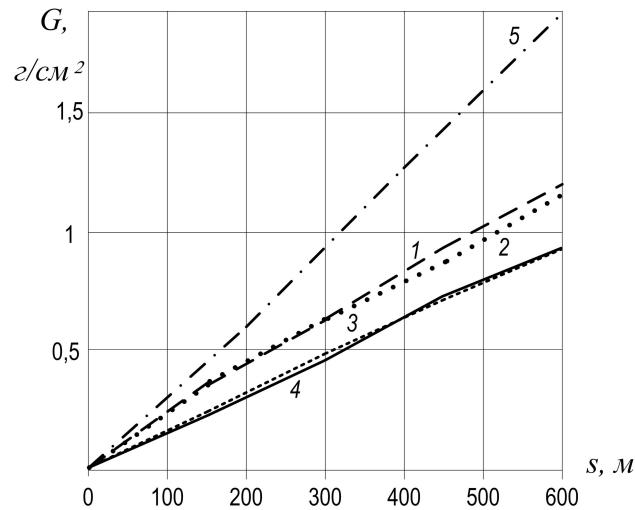


Рис. 3. Результаты экспериментального определения истираемости образцов бетона составов 1–5.

заполнителя на  $1 \text{ м}^3$  бетонной смеси, а также введением различных модификаторов, влияющих на свойства цементной матрицы. После твердения образцов в течение 28 дней образцы были испытаны на истирание по стандартной методике [5]. По результатам эксперимента получены зависимости истираемости поверхности бетона  $G, \text{ г/см}^3$  от пройденного образцом пути  $s, \text{ м}$  (рис. 3).

Трибологические характеристики поверхности получены после испытаний. Параметр  $\bar{a}$  определен путем измерения диаметров обнаженной поверхности зерен крупного заполнителя и расстояний между их центрами. Параметр упрочнения поверхности был определен с использованием прибора Польди, как  $m = K_{w2}/K_{w1} = d_2/d_1$ , где  $d_2, d_1$  – диаметры отпечатков на стандартном металлическом стержне, получаемые при ударе, соответственно, о поверхности цементной матрицы и заполнителя, при  $K_{w2} = \text{const}$ .

Трибологические характеристики поверхности бетона, полученные после испытаний, приведены в таблице 1.

Состав бетона	$m$	$\bar{a}$
1	0,65	0,35
2	0,70	0,30
3	0,85	0,35
4	0,90	0,30
5	0,55	0,35

Таблица 1.

Полученные экспериментальные данные согласуются с результатами численной реализации предложенной модели. На рис. 2 для сравнения приведены точки  $(1,1')$ ,  $(2,2')$ ,  $(3,3')$ ,  $(4,4')$ ,  $(5,5')$ , соответствующие трибологическим характеристикам образцов бетона составов

1–5, представленным в таблице 1. Так, наиболее износостойкий бетон (состав 4) имеет, в соответствии с моделью, наименьшие  $L$  и  $S$ ; наоборот, меньшую износостойкость показал бетон состава 5, для которого из представленных образцов полученные  $L$  и  $S$  максимальны.

Накопление экспериментальных данных по исследованию процесса деградации приповерхностного слоя бетона при истирании с учетом его структуры позволит уточнить расчетные модели, используемые как для проектирования оптимальных бетонных композиций, так и для оценки ресурса конструкций.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Itoh, Y.* An experimental study on abrasion of concrete due to sea ice / Y. Itoh, A. Yoshida, M. Tsuchiya, K. Katoh // Proc. of offshore technology conference. – 1988. – ОТС 5687.
- [2] *Saeki, H.* Study of the abrasion of concrete due to sea ice / H. Saeki, Y. Asai, K. Izumi, T. Takeuchi // The 20th Marine Development Symposium, Japan, 1988.
- [3] *Makarova, N. V.* Experimental and theoretical investigation on abrasion strength of concrete / N. V. Makarova // Assessment of reliability of materials and structures: problems and solutions : proceedings of the intern. conf. – SPb., 2008. – P. 219–224.
- [4] *Макарова, Н. В.* Об учете неоднородности при моделировании процесса истирания бетона / Н. В. Макарова // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – № 3. – С. 137–139.
- [5] ГОСТ 13087-81. Бетоны. Методы определения истираемости.
- [6] *Горячева, И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.

N. V. Makarova, M. V. Polonik

**PROBLEM OF HETEROGENEITY ACCOUNT DURING MODELING THE  
PROCESS OF CONCRETE ABRASION**

*Institute of Automatics and Managerial Processes, FEB, RAS*

**Abstract.** On the basis of specially carried out experiments the attempt of mathematical modeling of the concrete deterioration process during abrasion is undertaken. The criteria of deterioration degree are entered and recommendations for drawing up wear-resistant concrete compositions are made.

**Keywords:** tribology, concrete, mechanics of contact interaction, destruction.

*Макарова Наталья Валентиновна*

*кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

*e-mail: maknat@bk.ru*

*Полоник Марина Васильевна*

*кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

*e-mail: polonic@iacp.dvo.ru*

*Makarova, Natalya Valentinovna*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Institute of Automatics and Managerial Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

*Polonik, Marina Vasilyevna*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Institute of Automatics and Managerial Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

## О КОНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЯХ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического  
 университета в г. Чебоксары

**Аннотация.** В сферической системе координат рассматриваются конические напряженно-деформированные состояния пластических сред. Задача сводится к определению решений дифференциальных уравнений в переменных  $\theta, \varphi$ . Рассмотрена задача о конической трубе.

**Ключевые слова:** напряжения, деформации, полная пластичность, сферические координаты, коническая труба.

УДК: 539

1. Рассмотрим уравнения равновесия напряжений в сферической системе координат  $\rho \theta \varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [2 \sigma_\rho - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [3 \tau_{\rho\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [3 \tau_{\rho\varphi} + 2 \tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta] &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_\rho, \tau_{\rho\theta}, \sigma_\theta, \tau_{\theta\varphi}, \sigma_\varphi, \tau_{\rho\varphi}$  - компоненты напряженного состояния.

Положим

$$\sigma_{ij} = \rho^n \sigma_{ij}^*(\vartheta, \varphi) \quad (2)$$

Из (1), (2) получим

$$\begin{aligned} n \sigma_\rho^* + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}^*}{\partial \varphi} + [2 \sigma_\rho^* - (\sigma_\theta^* + \sigma_\varphi^*) + \tau_{\rho\theta}^* \operatorname{ctg} \theta] &= 0 \\ n \tau_{\rho\theta}^* + \frac{\partial \sigma_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}^*}{\partial \varphi} + [3 \tau_{\rho\theta}^* - (\sigma_\theta^* - \sigma_\varphi^*) \operatorname{ctg} \theta] &= 0 \\ n \tau_{\rho\varphi}^* + \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}^*}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi^*}{\partial \varphi} + [3 \tau_{\rho\varphi}^* + 2 \tau_{\theta\varphi}^* \operatorname{ctg} \theta] &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Условие полной пластичности можно написать в виде [1]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma - 2/3 k + 2kn_1^2 & \tau_{\rho\theta} &= 2kn_1n_2 \\ \sigma_\theta &= \sigma - 2/3 k + 2kn_2^2 & \tau_{\theta\varphi} &= 2kn_2n_3 \\ \sigma_\varphi &= \sigma - 2/3 k + 2kn_3^2 & \tau_{\rho\varphi} &= 2kn_1n_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $k$  – предел текучести,

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad \sigma = 1/3 (\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_\varphi). \quad (5)$$

Предположим, что тело является неоднородным

$$k = \rho^n \cdot k^*, \quad k^* - const \quad (6)$$

Из (4), (5), (6) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^* &= \sigma^* - 2/3 k^* + 2k^* n_1^2, & \tau_{\rho\theta}^* &= 2k^* n_1 n_2 \\ \sigma_\theta^* &= \sigma^* - 2/3 k^* + 2k^* n_2^2, & \tau_{\theta\varphi}^* &= 2k^* n_2 n_3 \\ \sigma_\varphi^* &= \sigma^* - 2/3 k^* + 2k^* n_3^2, & \tau_{\rho\varphi}^* &= 2k^* n_1 n_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad \sigma^* = 1/3 (\sigma_\rho^* + \sigma_\theta^* + \sigma_\varphi^*), \quad k^* - const. \quad (8)$$

Условие пластичности Мизеса имеет вид

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_\rho)^2 + 6 (\tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2 + \tau_{\rho\varphi}^2) = 6k^2. \quad (9)$$

Из (2), (6), (9) получим

$$(\sigma_\rho^* - \sigma_\theta^*)^2 + (\sigma_\theta^* - \sigma_\varphi^*)^2 + (\sigma_\varphi^* - \sigma_\rho^*)^2 + 6 (\tau_{\rho\theta}^{*2} + \tau_{\theta\varphi}^{*2} + \tau_{\rho\varphi}^{*2}) = 6k^{*2}. \quad (10)$$

Выражения для компонент скорости деформации  $\varepsilon_{ij}$  в сферической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, & \varepsilon_{\rho\theta} &= \frac{1}{2} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{u_\theta}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \right], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, & \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{u_\theta}{\rho} \operatorname{ctg} \theta, & \varepsilon_{\rho\varphi} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $u_\rho, u_\theta, u_\varphi$  - компоненты скорости перемещения.

Положим

$$u_i = \rho^{n+1} u_i^*, \quad \varepsilon_{ij} = \rho^n \cdot \varepsilon_{ij}^*. \quad (12)$$

Из (11), (12) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho^* &= (n+1) u_\rho^*, & \varepsilon_{\rho\theta}^* &= \frac{1}{2} \left[ n u_\theta^* + \frac{\partial u_\rho^*}{\partial \theta} \right], \\ \varepsilon_\theta^* &= \frac{\partial u_\theta^*}{\partial \theta} + u_\rho^*, & \varepsilon_{\theta\varphi}^* &= \frac{1}{2} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\varphi^*}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta^*}{\partial \varphi} \right], \\ \varepsilon_\varphi^* &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi} + u_\rho^* + u_\theta^* \cdot \operatorname{ctg} \theta, & \varepsilon_{\rho\varphi}^* &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\rho^*}{\partial \varphi} + n u_\varphi^* \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношения связи между компонентами напряженного и деформированного состояния  $\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*$  определяются ассоциированным законом течения, которые для условий пластичности (7), (10) сохраняют свой вид.

**2.** Рассмотрим коническую трубу, находящуюся под действием внутреннего давления (рис. 1).

Воспользуемся условием пластичности Мизеса (10), решение будем искать при условиях

$$\sigma_\rho^*(\theta), \quad \sigma_\theta^*(\theta), \quad \sigma_\varphi^*(\theta), \quad \tau_{\rho\theta}^* = \tau_{\theta\varphi}^* = \tau_{\rho\varphi}^* = 0. \quad (14)$$

В дальнейшем индекс “звездочка наверху” опустим.

Условие пластичности (10) согласно (14) примет вид

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_\rho)^2 = 6. \quad (15)$$

Уравнения равновесия (3) при условиях (14) примут вид

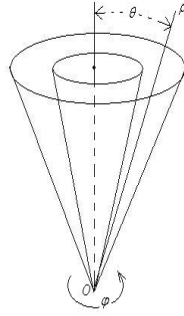


Рис. 1.

$$\sigma_\rho = \frac{1}{2 + \tau} \cdot (\sigma_\theta + \sigma_\varphi), \tag{16}$$

$$\frac{d\sigma_\theta}{dt} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg}\theta = 0. \tag{17}$$

Из (15), (16) получим

$$\sigma_\varphi^2 + \sigma_\theta^2 - 2A\sigma_\theta\sigma_\varphi - B = 0, \tag{18}$$

где

$$A = \frac{n^2 + 6n + 6}{2(n^2 + 3n + 3)}, \quad B = \frac{3(n + 2)^2}{n^2 + 3n + 3}. \tag{19}$$

из (18) получим

$$\sigma_\varphi = A\sigma_\theta \pm \sqrt{(A^2 - 1)\sigma_\theta^2 + B}. \tag{20}$$

Из (17) следует

$$\int \frac{d\sigma_\theta}{\sigma_\theta - \sigma_\varphi} = -\ln \sin \theta + C, \quad C - \text{const}. \tag{21}$$

Из (20), (21) определяется  $\sigma_\theta(\theta)$ , далее, согласно (20) -  $\sigma_\varphi(\theta)$ , согласно (16) -  $\sigma_\rho(\theta)$ .

В случае конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления  $\sigma_\varphi > \sigma_\theta$ , в выражениях (20) следует взять верхний знак.

**3.** При определении деформированного состояния примем

$$u_\rho^*(\theta), u_\theta^*(\theta), u_\varphi^*(\theta) = 0, \quad \varepsilon_\rho^*(\theta), \varepsilon_\theta^*(\theta), \varepsilon_\varphi^*(\theta), \varepsilon_{\rho\theta}^* = \varepsilon_{\theta\varphi}^* = \varepsilon_{\rho\varphi}^* = 0. \tag{22}$$

В дальнейшем индекс “звездочка наверху” опустим. Согласно (13), (22) из условия несжимаемости получим

$$(n + 3)u_\rho + u_\theta \operatorname{ctg}\theta + \frac{du_\theta}{d\theta} = 0. \tag{23}$$

Из (13), (22) найдем

$$\varepsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left[ nu_\theta + \frac{du_\rho}{d\theta} \right] \tag{24}$$



Из (23), (24) получим уравнения для определения компонент  $u_\rho, u_\theta$

$$\frac{d^2 u_\rho}{d\theta^2} + \frac{du_\rho}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta - n(n+3)u_\rho = 0, \quad (25)$$

$$\frac{d^2 u_\theta}{d\theta^2} + \frac{du_\theta}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta - \left[ n(n+3) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] u_\theta = 0. \quad (26)$$

Случай  $n = 0$  рассмотрен в [1].

4. Рассмотрим кручение конического тела. Положим

$$\tau_{\rho\theta}^*(\theta), \tau_{\rho\varphi}^*(\theta), \tau_{\theta\varphi}^* = \sigma_\rho^* = \sigma_\theta^* = \sigma_\varphi^* = 0. \quad (27)$$

Из (3), (27) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{\rho\theta}^*}{d\theta} + \tau_{\rho\varphi}^* \operatorname{ctg} \theta &= 0, \\ n\tau_{\rho\theta}^* + 3\tau_{\rho\theta}^* &= 0, \\ n\tau_{\rho\varphi}^* + 3\tau_{\rho\varphi}^* &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Два последних уравнения (28) могут быть удовлетворены при

$$n = -3. \quad (29)$$

Условие пластичности запишем в виде

$$\tau_{\rho\theta}^{*2} + \tau_{\rho\varphi}^{*2} = 1. \quad (30)$$

Из (30) найдем

$$\tau_{\rho\varphi}^* = \sqrt{1 - \tau_{\rho\theta}^{*2}}. \quad (31)$$

Согласно первому уравнению (28), (31) получим

$$\tau_{\rho\theta}^* = \sin \ln \frac{C}{\sin \theta}, \quad \tau_{\rho\varphi}^* = \cos \ln \frac{C}{\sin \theta}, \quad C - \text{const}. \quad (32)$$

Положим, что при  $\theta = \theta_0$  боковая поверхность конуса свободна от напряжений

$$\tau_{\rho\theta}^* = 0 \text{ при } \theta = \theta_0. \quad (33)$$

Из (32), (33) будем иметь

$$\tau_{\rho\theta}^* = \sin \ln \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta}, \quad \tau_{\rho\varphi}^* = \cos \ln \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta}. \quad (34)$$

Согласно (2), (6), (29), (34) окончательно будем иметь

$$\tau_{\rho\theta} = k^* \cdot \rho^{-3} \ln \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta}, \quad \tau_{\rho\varphi} = k^* \cos \ln \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta}, \quad k = \rho^{-3} \cdot k^*. \quad (35)$$

Отметим, что при линейном законе Гука соотношения связи  $\sigma_{ij}^* - \varepsilon_{ij}^*$  имеют место для однородного материала.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.  
[2] *Максимова, Л. А.* Некоторые вопросы идеальнопластического тела / Л. А. Максимова. – Чебоксары : ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2004. – 173 с.

*L. A. Maksimova*

THE CONIC INTENSE-DEFORMED CONDITIONS  
OF PLASTIC CONTINUUMS

*Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch, Cheboksary*

**Abstract.** The conic intense-deformed conditions of plastic continuums in the spherical coordinates are considered. The problem concerns the solutions of differential equations in the variables  $\theta$ ,  $\varphi$ . The problem of the conical tube is considered.

**Keywords:** strain, deformation, complete plasticity, spherical coordinates, conical tube.

*Максимова Людмила Анатольевна*

*доктор физико-математических наук, филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары*

*e-mail: maximova\_ng@mail.ru*

*Maksimova, Ludmila Anatolievna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch, Cheboksary*

А. А. Манцыбора

## ПЛОСКАЯ АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О КОСОМ УДАРЕ ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ ПО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

*Институт автоматизи и процессов управления ДВО РАН*

**Аннотация.** Решена плоская автомодельная задача об ударе жестким телом с плоской границей по упругопластическому полупространству. Получено, что в случае плоского автомодельного движения (при ударном деформировании) возмущения в среде распространяются посредством упругих ударных волн и пластических центрированных волн Римана.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, высокоскоростное соударение.

УДК: 539.3+539.214

**Введение.** Теоретическое рассмотрение волн в упругопластической среде было начато еще в середине прошлого века, по-видимому, с работы Х. А. Рахматулина [9]. Д. Манделем было получено [8], что скоростей распространения пластических волн не превышают скорости распространения упругих волн. Первыми публикациями, посвященными постановке и исследованию решений плоских автомодельных задач динамики упругопластической среды, являются работы Г. Г. Блейха [2], [3]. В любом случае несомненно, что именно данная работа инициировала целый ряд последующих публикаций на данную тему. В этом ряду заметны результаты исследований Г. И. Быковцева и его учеников (В. А. Баскаков, П. Н. Сыгуров, Н. М. Зиновьев, А. В. Колокольчиков и др.) [1], [4], [5], [6], [7].

В данной работе решается плоская автомодельная задача об ударном деформировании упругопластического тела с плоской границей, на примере которой рассматриваются процессы распространения возмущений в упругопластической среде. Следует отметить, что задачи упругопластического деформирования рассматривались и ранее, но в основном в рамках моделей, обуславливающих пластическую несжимаемость материала. Отличительной особенностью настоящей публикации является пластическая сжимаемость материала, что обеспечивается выбором поверхности нагружения в форме пирамиды Кулона–Мора, основанием которой в плоскости, параллельной девиаторной, является шестиугольник Ишлинского–Ивлева.

**1. Исходные соотношения модели.** Пусть деформации упругопластической среды будут малыми, т. е.:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad (1)$$

где  $u_i$  – компоненты вектора перемещений точек среды,  $e_{ij}$  – тензор полных деформаций,  $e_{ij}^e$ ,  $e_{ij}^p$  – обратимая (упругая) и необратимая (пластическая) составляющие полных деформаций соответственно.

---

Поступила 30.06.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00001-а).

Напряжения  $\sigma_{ij}$  в изотропной среде связаны с упругими деформациями  $e_{ij}^e$  посредством закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e. \quad (2)$$

При достижении напряженными состояниями поверхности нагружения

$$f^{(s)}(\sigma_{ij}) = k, \quad k = \text{const}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3)$$

в деформируемой среде начинают накапливаться пластические деформации  $e_{ij}^p$ . Постоянная  $k$  – это предел текучести. Принимая принцип максимума Мизеса (при этом соотношения (3) становятся пластическим потенциалом), для скорости пластического деформирования, согласно ассоциированному закону пластического течения, можем записать:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p = \sum_{s=1}^n \psi_s \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4)$$

где  $\psi_s > 0$  при  $\frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$ ,  $\psi_s = 0$  при  $\frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0$ .

В качестве поверхности нагружения будем использовать соотношение:

$$\max|\sigma_i - \sigma| + q\sigma = \frac{2}{3}k, \quad (5)$$

где  $\sigma_i$  – главные значения тензора напряжений,  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ ;  $k, q$  – постоянные упругопластической среды.

Поверхность нагружения (5) – это пирамида в пространстве главных напряжений, ее основанием является шестиугольник максимального приведенного касательного напряжения. Условия максимального приведенного касательного напряжения сформулированы впервые, по-видимому, А. Ю. Ишлинским. Свойства получаемых в этих условиях модельных систем уравнений изучались Д. Д. Ивлевым и его учениками. Поэтому используемое здесь условие пластичности (5) будем называть пирамидой Ишлинского–Ивлева. На гранях и ребрах поверхности нагружения (5) соотношения (1) – (5) совместно с уравнениями движения упруго-пластической среды

$$\sigma_{ij,j} + \rho\chi_i = \rho v_i \quad (6)$$

составляют замкнутые системы уравнений. В соотношениях (6)  $\chi_i$  – плотности распределения массовых сил;  $v_i$  – компоненты скорости перемещений точек среды ( $v_i = \dot{u}_i$ ).

**2. Применение условия пластичности Ишлинского–Ивлева в плоской автомодельной задаче соударения двух тел.** Далее рассматривается автомодельная задача об ударе жестким телом по упругопластическому полупространству, когда точка контакта движется со сверхсейсмической скоростью по границе материала. Выберем систему координат таким образом, что ось  $x_2$  будет направлена по границе полупространства, а ось  $x_1$  направим в глубь тела по направлению нормали к границе. Среда предполагается изначально недеформированной при  $x_1 > 0$ . Тело, движущееся навстречу упругопластической среде, считается абсолютно твердым и имеющим плоскую границу. Считаем, что ударник движется с некоторой скоростью  $v(v_1, v_2)$  и граничная плоскость ударника с плоскостью упругопластического полупространства образуют малый угол  $\varphi_0$  (рис. 1).

В результате соударения тел образуется общая граница, причем точка О – точка соприкосновения тел движется вдоль границы первого тела с некоторой скоростью  $s$  (рис. 2). Для автомодельности задачи необходимо, чтобы скорость движения точки О была больше скорости распространения возмущений в среде.

Для получения решения автомодельной упругопластической задачи отдельно решаются упругая и пластическая автомодельные задачи, а потом полученные решения срачиваются.

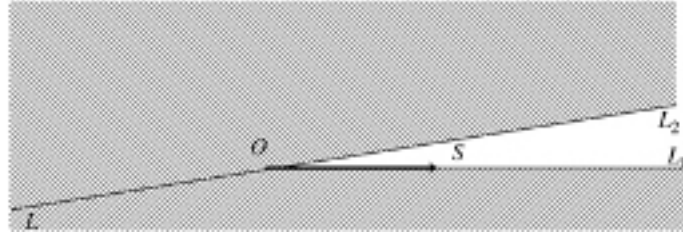


Рис. 1.

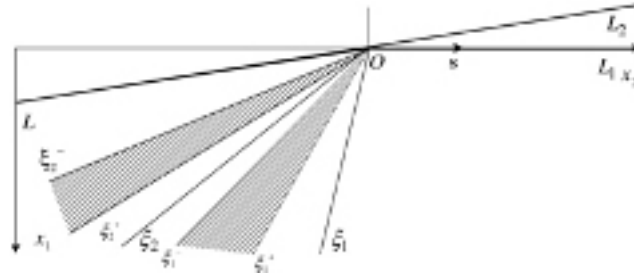


Рис. 2.

Введем автомодельную переменную:

$$\xi = \frac{x_1}{st - x_2} \quad (7)$$

и представим компоненты вектора перемещения в виде:

$$u_1 = (st - x_2) f(\xi), \quad u_2 = (st - x_2) g(\xi). \quad (8)$$

Подставляя соотношения (8) в систему уравнений, описывающую динамическое деформирование (6), получим систему из двух однородных квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$Af'' + Bg'' = 0, \quad Cf'' + Dg'' = 0, \quad (9)$$

где  $A, B, C, D$  – функции от  $f', g', \xi$  и упругих постоянных материала.

Система (9) допускает тривиальное решение:

$$f(\xi) = a\xi - b, \quad g(\xi) = c\xi - d, \quad (10)$$

где  $a, b, c, d$  – постоянные.

Компоненты тензора напряжений выражаются через постоянные  $a, b, c, d$  по закону Гука (2). Таким образом, соотношения (10) определяют решение задачи в областях, где  $\sigma_{ij}, e_{ij}^e, u_i$  постоянны. Эти области разделены ударными волнами, при переходе через которые эти величины изменяются скачком. На ударных волнах выполняются динамические и кинематические условия совместности разрывов:

$$[\sigma_{ij}] \nu_j = -\rho G [v_i], \quad [u_i] = 0, \quad (11)$$

где  $\nu_j$  – компоненты единичной нормали к ударной волне. Вектор единичной нормали к плоскости волны  $\bar{\nu}$  имеет компоненты:

$$\nu_1^{(m)} = \cos(\theta_m), \quad \nu_2^{(m)} = \sin(\theta_m), \quad m = 1, 2. \quad (12)$$

В случае автомодельности задачи для сохранения конфигурации на рис. 2 в любой момент времени скорость распространения волны  $\bar{G}^{(m)}$  и скорость движения нагрузки на границе полупространства  $\bar{s}$  необходимо связать соотношениями:

$$G^{(m)} = s \cdot \sin(\theta_m), \quad s = \text{const}. \quad (13)$$

Подставляя соотношения (7)–(13), а также учитывая, что  $\xi_m = tg(\theta_m)$ , окончательно получим соотношения для скоростей распространения ударных волн:

$$G_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad G_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{14}$$

Рассмотрим пластическую часть задачи. При численном решении данной задачи в силу выбранных значений начальных условий и параметров материала рассматривается одна из граней пирамиды Ишлинского–Ивлева:

$$\sigma_1 + (q - 1) \sigma = \frac{2}{3}k. \tag{15}$$

Для плоской задачи главные напряжения выражаются через компоненты тензора напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, & \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{33}. \end{aligned} \tag{16}$$

Условию (15) можно удовлетворить тождественно (при соблюдении условия (16)), положив:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2}r \cdot \cos(\theta) + \frac{2k}{2q + 1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r + p}{2q + 1}, \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{2}r \cdot \cos(\theta) + \frac{2k}{2q + 1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r + p}{2q + 1}, \\ \sigma_{33} &= \frac{3}{2(q + 1)}p. \end{aligned} \tag{17}$$

Из соотношений (4) и (17) получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^p &= \psi \left( \frac{2q + 1}{4} + \frac{3}{4} \cos(\theta) \right), \\ \varepsilon_{22}^p &= \psi \left( \frac{2q + 1}{4} - \frac{3}{4} \cos(\theta) \right), \\ \varepsilon_{33}^p &= \psi \frac{q - 1}{2}, \\ \varepsilon_{12}^p &= \psi \frac{3}{2} \sin(\theta). \end{aligned} \tag{18}$$

Из соотношений (1), (2), (6) получим следующую систему уравнений:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} (v_{k,k} - \varepsilon_{kk}^p) + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) - 2\mu \varepsilon_{ij}^p, \quad \sigma_{ij,j} - \rho \dot{v}_i = 0. \tag{19}$$

Введем автомодельную переменную (7), при этом выполняются следующие соотношения:

$$\dot{\Phi} = -\Phi' \frac{s\xi}{st - x_2}, \quad \Phi_{,1} = \Phi' \frac{1}{st - x_2}, \quad \Phi_{,2} = \Phi' \frac{\xi}{st - x_2}, \tag{20}$$

где  $\Phi$  – произвольная функция от  $\xi$ .

Из соотношений (17), (18), (19) окончательно запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} A_{11}p' + A_{12}r' + A_{13}\theta' + A_{14}v' + A_{15}v_2' &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ A_{51}p' + A_{52}r' + A_{53}\theta' + A_{54}v' + A_{55}v_2' &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Величины  $A_{ij}$  являются функциями от  $r, p, \theta, v_1, v_2$  и констант материала.

Система (21) является однородной. Таким образом, пластическое течение связано с нетривиальным решением данной системы. Равенство нулю определителя этой системы на отрезке  $[\xi^-, \xi^+]$  означает, что необратимые деформации приобретаются материалом в простой центрированной волне Римана, передний фронт которой определяется значением  $\xi^+$ , а задний –  $\xi^-$ . Согласно проводимым численным экспериментам возможны две центрированные волны, первая из них располагается между безвихревой ( $\xi = \xi_1$  на рис. 2) и эквиволюмиальной

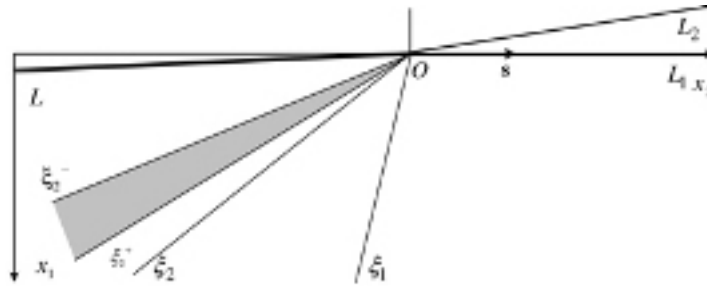


Рис. 3.

( $\xi = \xi_2$  на рис. 2) упругими волнами, вторая – в области между эквиволумиальной волной и деформированной границей  $OL$  (рис. 2) среды. Возможен так же случай, когда одна из центрированных волн отсутствует. Так, на рис. 3 иллюстрируется случай, когда центрированная волна присутствует только между  $\xi_2$  и  $OL$  и задается параметрами  $\xi_2^+$  (передний фронт) и  $\xi_2^-$  (задний фронт центрированной волны). Данная ситуация возникла при следующих значениях для параметров задачи:

$$\lambda = 1,155 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu = 7,7 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad k = 285 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \\ q = 0,05, \quad v_1 = 11 \text{ м/с}, \quad v_2 = 13 \text{ м/с}, \quad \varphi_0 \approx 3^\circ.$$

Полученная при этом волновая картина представлена на рис. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баскаков, В. А. Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде / В. А. Баскаков, Г. И. Быковцев // ПММ. – М.: Мир, 1971. – Т. 35, № 1. – С. 71–72.
- [2] Блейх, Г. Г. Движение со сверхсейсмической скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства / Г. Г. Блейх, А. Т. Мэтьюз // Механика: сб. пер. – 1968. – № 1 (107). – С. 123–155.
- [3] Блейх, Г. Г. Плоские волны в упругопластическом полупространстве, вызванные совместным действием нормальной и касательной поверхностных нагрузок / Г. Г. Блейх, Дж. Нельсон // ПММ. – М., 1966. – № 1. – С. 145–156.
- [4] Буренин, А. А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, В. А. Рычков // Проблемы механики сплошной среды: (к 60-летию акад. В. П. Мясникова): сб. науч. тр. / ДВО РАН Институт автоматизации и процессов управления. – Владивосток, 1996. – С. 116–127.
- [5] Быковцев, Г. И. Отражение сдвиговой волны граничной плоскостью, свободной от напряжений / Г. И. Быковцев, Н. Д. Вержейко // IV Всесоюз. симпозиум по распространению упругих и упругопластических волн: тезисы докладов. – Киченев, 1968. – С. 18–19.
- [6] Быковцев, Г. И. Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска / Г. И. Быковцев, А. В. Колокольчиков, П. Н. Сыгуров // ЖПМТФ. – 1984. – № 6.
- [7] Быковцев, Г. И. О распространении ударных волн в упругопластических средах / Г. И. Быковцев, Л. Д. Кретова // ПММ. – М., 1972. – Т. 36, вып. 1. – С. 106–116.
- [8] Мандель, Д. Пластические волны в неограниченной трехмерной среде / Д. Мандель // Механика: сб. пер. – 1963. – № 5 (81). – С. 151–179.
- [9] Рахматуллин, Х. А. О распространении волны разгрузки / Х. А. Рахматуллин // ПММ. – М., 1945. – Т. 9, № 1. – С. 91–100.

A. A. Mantsybora

**A FLAT AUTOMODELLING PROBLEM ABOUT SLANTING BLOW BY  
A RIGID BODY ON ELASTO-PLASTIC SEMISPACE**

*Institute of Automatics and Managerial Processes, FEB, RAS*

**Abstract.** The flat automodelling problem about blow by a rigid body with flat boundary on elastoplastic semispace is solved. It is found out that in case of flat automodelling movement (at shock deformation) the indignations extend by means of the elastic shock waves and the plastic aligned Riman waves.

**Keywords:** elasticity, plasticity, a high-speed impact.

*Манцыбора Александр Анатольевич*

*научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Институт автоматике и процес-  
сов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

**e-mail:** manzubor@iacp.dvo.ru

*Mantsybora, Alexander Anatolevich*

*Researcher, Candidate of Phys. & Math., Institute of Automatics and Managerial Processes, Far  
Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*



## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ, ЗАДАННЫХ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ НА ГРАНИЦЕ ТЕЛА В ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

*Воронежская государственная технологическая академия*

**Аннотация.** Методом малого параметра находятся координаты точек, ограничивающих границу тела в деформированном состоянии. Рассмотрен частный случай, когда эта граница в ненагруженном состоянии является прямой линией. Проведена линеаризация граничных условий, заданных в интегральной форме на границе тела в деформированном состоянии.

**Ключевые слова:** нелокальные граничные условия, малый параметр, линеаризация.

УДК: 539.6

При линеаризации граничных условий, проводимой, например, и исследованиях напряженно-деформированного состояния тела методом малого параметра [2], [7], [8] и в задачах устойчивости [1]–[6], встречается проблема разложения в ряд функции, описывающей границу тела. Рассмотрим эту проблему для неидеального тела в деформированном состоянии.

Пусть границы тела (рис. 1) в ненагруженном состоянии описываются функциями

$$\begin{aligned}y &= f_1^{(0)}(x) + \varepsilon_1 f_1^{(1)}(x); & y &= f_2^{(0)}(x) + \varepsilon_2 f_2^{(1)}(x); \\x &= f_3^{(0)}(y) + \varepsilon_3 f_3^{(1)}(y).\end{aligned}$$

Координаты точек А и В будут находиться из решений следующих систем уравнений соответственно

$$\begin{cases} y = f_1^{(0)}(x) + \varepsilon_1 f_1^{(1)}(x), \\ x = f_3^{(0)}(y) + \varepsilon_3 f_3^{(1)}(y); \end{cases} \quad \begin{cases} y = f_2^{(0)}(x) + \varepsilon_2 f_2^{(1)}(x), \\ x = f_3^{(0)}(y) + \varepsilon_3 f_3^{(1)}(y). \end{cases} \quad (1)$$

Как следует из (1), ординаты точек А и В будут находиться из

$$\begin{aligned}\eta_1 &= f_1^{(0)}\left(f_3^{(0)}(\eta_1) + \varepsilon_3 f_3^{(1)}(\eta_1)\right) + \varepsilon_1 f_1^{(1)}\left(f_3^{(0)}(\eta_1) + \varepsilon_3 f_3^{(1)}(\eta_1)\right), \\ \eta_2 &= f_2^{(0)}\left(f_3^{(0)}(\eta_2) + \varepsilon_3 f_3^{(1)}(\eta_2)\right) + \varepsilon_2 f_2^{(1)}\left(f_3^{(0)}(\eta_2) + \varepsilon_3 f_3^{(1)}(\eta_2)\right).\end{aligned} \quad (2)$$

Решения уравнений (2) будем искать в виде степенных рядов

$$\xi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_i^m \varepsilon_3^n \xi_i^{mn}; \quad \eta_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_i^m \varepsilon_3^n \eta_i^{mn} \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Разложим функции  $f_3^{(0)}$  и  $f_3^{(1)}$  в окрестности точки  $y = \eta_i^{(0)}$  также в степенные ряды [2]

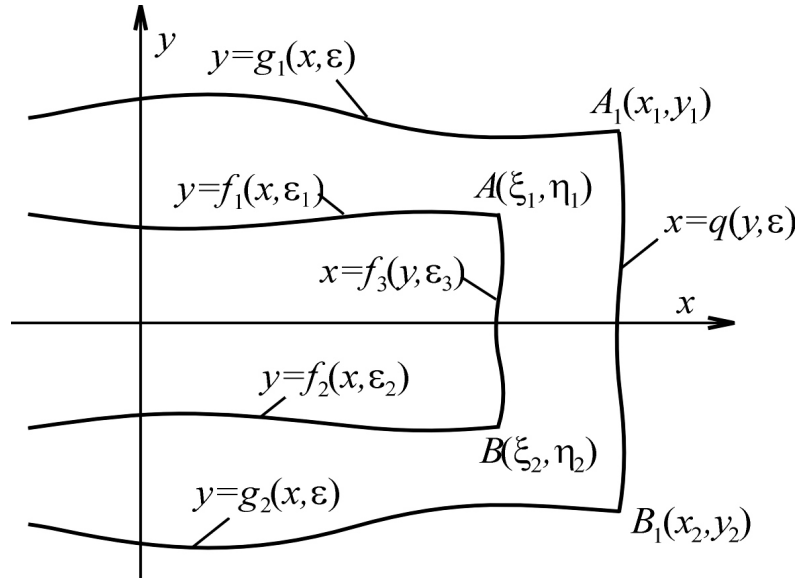


Рис. 1.

$$\begin{aligned} f_3^{(0)} \left( \eta_i^{(0)} + \varepsilon_i \bar{\eta}_i + \varepsilon_3 \bar{\bar{\eta}}_i \right) &= f_3^{(0)} \left( \eta_i^{(0)} \right) + \varepsilon_i \bar{f}_3^{(0)} + \varepsilon_3 \bar{\bar{f}}_3^{(0)}, \\ f_3^{(1)} \left( \eta_i^{(0)} + \varepsilon_i \bar{\eta}_i + \varepsilon_3 \bar{\bar{\eta}}_i \right) &= f_3^{(1)} \left( \eta_i^{(0)} \right) + \varepsilon_i \bar{f}_3^{(1)} + \varepsilon_3 \bar{\bar{f}}_3^{(1)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где, например,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_i &= \eta_i^{10} + \varepsilon_i \eta_i^{20} + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \eta_i^{11} + \varepsilon_i^2 \eta_i^{30} + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \eta_i^{12} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \varepsilon_3 \eta_i^{21} + \dots, \\ \bar{\bar{\eta}}_i &= \eta_i^{01} + \varepsilon_3 \eta_i^{02} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \eta_i^{11} + \varepsilon_3^2 \eta_i^{03} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \eta_i^{21} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \varepsilon_3 \eta_i^{12} + \dots, \\ \bar{f}_3^{(0)} &= \frac{df_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy} \bar{\eta}_i + \varepsilon_i \frac{d^2 f_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy^2} \frac{(\bar{\eta}_i)^2}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \frac{d^2 f_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy^2} \bar{\eta}_i \bar{\bar{\eta}}_i + \dots, \\ \bar{\bar{f}}_3^{(0)} &= \frac{df_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy} \bar{\bar{\eta}}_i + \varepsilon_3 \frac{d^2 f_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy^2} \frac{(\bar{\bar{\eta}}_i)^2}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \frac{d^2 f_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy^2} \bar{\eta}_i \bar{\bar{\eta}}_i + \dots, \\ \bar{f}_3^{(1)} &= \frac{df_3^{(1)}(\eta_i^{(0)})}{dy} \bar{\eta}_i + \varepsilon_i \frac{d^2 f_3^{(1)}(\eta_i^{(0)})}{dy^2} \frac{(\bar{\eta}_i)^2}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \frac{d^2 f_3^{(1)}(\eta_i^{(0)})}{dy^2} \bar{\eta}_i \bar{\bar{\eta}}_i + \dots, \\ \bar{\bar{f}}_3^{(1)} &= \frac{df_3^{(1)}(\eta_i^{(0)})}{dy} \bar{\bar{\eta}}_i + \varepsilon_3 \frac{d^2 f_3^{(1)}(\eta_i^{(0)})}{dy^2} \frac{(\bar{\bar{\eta}}_i)^2}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \frac{d^2 f_3^{(1)}(\eta_i^{(0)})}{dy^2} \bar{\eta}_i \bar{\bar{\eta}}_i + \dots. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (2) с учетом соотношений (3), (1) примут вид

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_i^m \varepsilon_3^n \eta_i^{(mn)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{d^{m+n} \left( f_i^{(0)} + \varepsilon_i f_i^{(1)} \right)}{dx^{m+n}} \Big|_{x=\xi_i^{(0)}} \frac{(\bar{f}_3)^m (\bar{\bar{f}}_3)^n}{m!n!} \varepsilon_i^m \varepsilon_3^n, \quad (6)$$

где  $\bar{f}_3 = \bar{f}_3^{(0)} + \varepsilon_3 \bar{f}_3^{(1)}$ ;  $\bar{\bar{f}}_3 = \bar{\bar{f}}_3^{(0)} + f_3^{(1)} + \varepsilon_3 \bar{\bar{f}}_3^{(1)}$ ;  $\xi_i^{(0)} = f_3^{(0)} \left( \eta_i^{(0)} \right)$  ( $i = 1, 2$ ).

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ , из (5), (6) получаем, например, следующие уравнения

$$\begin{aligned}
\eta_i^{(0)} &= f_i^{(0)} \left( f_3^{(0)} \left( \eta_i^{(0)} \right) \right); \\
\eta_i^{(10)} &= \frac{df_i^{(0)}(\xi_i^{(0)})}{dx} \left( f_3^{(1)} \left( \eta_i^{(0)} \right) + \frac{df_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy} \eta_i^{(10)} \right) + f_i^{(1)} \left( \xi_i^{(0)} \right); \\
\eta_i^{(01)} &= \frac{df_i^{(0)}(\xi_i^{(0)})}{dx} \left( f_3^{(1)} \left( \eta_i^{(0)} \right) + \frac{df_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy} \eta_i^{(01)} \right) + f_i^{(1)} \left( \xi_i^{(0)} \right); \\
\xi_i^{(0)} &= f_3^{(0)} \left( \eta_i^{(0)} \right); \quad \xi_i^{(10)} = f_3^{(1)} \left( \eta_i^{(0)} \right) + \frac{df_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy} \eta_i^{(10)}; \\
\xi_i^{(01)} &= f_3^{(1)} \left( \eta_i^{(0)} \right) + \frac{df_3^{(0)}(\eta_i^{(0)})}{dy} \eta_i^{(01)}; \quad (i = 1, 2).
\end{aligned} \tag{7}$$

В частности, если  $f_3^{(0)}(y) \equiv \ell$ , то из (7) получаем, например,

$$\begin{aligned}
\eta_i^{(0)} &= f_i^{(0)}(\ell); \quad \xi_i^{(0)} = \ell; \quad \xi_i^{(10)} = \xi_i^{(01)} = f_3^{(1)} \left( \eta_i^{(0)} \right); \\
\eta_i^{(10)} &= \eta_i^{(01)} = \frac{df_i^{(0)}(\ell)}{dx} f_3^{(1)} \left( \eta_i^{(0)} \right) + f_i^{(1)}(\ell).
\end{aligned} \tag{8}$$

Как следует из [9], ординаты точек А и В в деформированном состоянии, т.е. ординаты точек  $A_1$  и  $B_1$  (рис. 1), определяются следующими соотношениями

$$y_i = \eta_i^{(0)} + \varepsilon_i \bar{\eta}_i + \varepsilon_3 \bar{\bar{\eta}}_i + \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^l \varepsilon_3^m v^{klm} \left( \xi_i^{(0)} + \varepsilon_i \bar{\xi}_i + \varepsilon_3 \bar{\bar{\xi}}_i, \eta_i^{(0)} + \varepsilon_i \bar{\eta}_i + \varepsilon_3 \bar{\bar{\eta}}_i \right), \tag{9}$$

где [2,7]

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_i &= \xi_i^{10} + \varepsilon_i \xi_i^{20} + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \xi_i^{11} + \varepsilon_i^2 \xi_i^{30} + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \xi_i^{12} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \varepsilon_3 \xi_i^{21} + \dots, \\
\bar{\bar{\xi}}_i &= \xi_i^{01} + \varepsilon_3 \xi_i^{02} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \xi_i^{11} + \varepsilon_3^2 \xi_i^{03} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \xi_i^{21} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \varepsilon_3 \xi_i^{12} + \dots.
\end{aligned}$$

Разложив правые части соотношений (9) в степенные ряды по  $\varepsilon$ , получим, что

$$y_i = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^l \varepsilon_3^m \psi_i^{klm} \left( \xi_i^{(0)}, \eta_i^{(0)} \right), \tag{10}$$

где, например,

$$\begin{aligned}
\psi_i^{000} &= \eta_i^{(0)} + v^{(0)} \left( \xi_i^{(0)}, \eta_i^{(0)} \right), \\
\psi_i^{001} &= \frac{\partial v^{(0)}(\xi_i^{(0)}, \eta_i^{(0)})}{\partial y} \eta_i^{01} + v^{(001)} \left( \xi_i^{(0)}, \eta_i^{(0)} \right), \\
\psi_1^{100} &= \left( 1 + \frac{\partial v^{(0)}(\xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)})}{\partial y} \right) \eta_1^{10} + v^{(100)} \left( \xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)} \right), \\
\psi_1^{010} &= v^{(010)} \left( \xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)} \right), \\
\psi_2^{010} &= \left( 1 + \frac{\partial v^{(0)}(\xi_2^{(0)}, \eta_2^{(0)})}{\partial y} \right) \eta_2^{01} + v^{(010)} \left( \xi_2^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right), \\
\psi_2^{100} &= v^{(100)} \left( \xi_2^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right), \quad (i = 1, 2).
\end{aligned}$$

Пусть граница тела в деформированном состоянии, проходящая через точки  $A_1$  и  $B_1$ , описывается функцией

$$x = q(y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = q^{(0)}(y) + \varepsilon_1 \bar{q} + \varepsilon_2 \bar{\bar{q}} + \varepsilon_1 \bar{\bar{\bar{q}}} \quad . \tag{11}$$

Рассмотрим линеаризацию граничных условий, заданных в интегральной форме на границе тела, описываемой функцией (11), например, в таком виде

$$\int_{y_1^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_1 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_1 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_1}^{y_2^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_2 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_2 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_2} \left[ \varphi^{(0)}(y) + \varepsilon_1 \varphi^{(100)}(y) + \varepsilon_2 \varphi^{(010)}(y) + \varepsilon_3 \varphi^{(001)}(y) \right] dy = a^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{a} + \varepsilon_2 \bar{\bar{a}} + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{a}}}. \quad (12)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \Phi^{(0)} \left( y_2^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_2 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_2 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_2 \right) - \Phi^{(0)} \left( y_1^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_1 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_1 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_1 \right) + \\ & + \varepsilon_1 \left[ \Phi^{(100)} \left( y_2^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_2 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_2 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_2 \right) - \Phi^{(100)} \left( y_1^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_1 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_1 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_1 \right) \right] + \\ & + \varepsilon_2 \left[ \Phi^{(010)} \left( y_2^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_2 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_2 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_2 \right) - \Phi^{(010)} \left( y_1^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_1 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_1 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_1 \right) \right] + \\ & + \varepsilon_3 \left[ \Phi^{(001)} \left( y_2^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_2 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_2 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_2 \right) - \Phi^{(001)} \left( y_1^{(0)} + \varepsilon_1 \bar{y}_1 + \varepsilon_2 \bar{\bar{y}}_1 + \varepsilon_3 \bar{\bar{\bar{y}}}_1 \right) \right] = \\ & = \int_{y_1^{(0)}}^{y_2^{(0)}} \varphi^{(0)}(y) dy + \varepsilon_1 \left( \int_{y_1^{(0)}}^{y_2^{(0)}} \varphi^{(100)}(y) dy + \varphi^{(0)}(y_1^{(0)}) \bar{y}_1 - \varphi^{(0)}(y_2^{(0)}) \bar{y}_2 \right) + \\ & + \varepsilon_2 \left( \int_{y_1^{(0)}}^{y_2^{(0)}} \varphi^{(010)}(y) dy + \varphi^{(0)}(y_1^{(0)}) \bar{\bar{y}}_1 - \varphi^{(0)}(y_2^{(0)}) \bar{\bar{y}}_2 \right) + \\ & + \varepsilon_3 \left( \int_{y_1^{(0)}}^{y_2^{(0)}} \varphi^{(001)}(y) dy + \varphi^{(0)}(y_1^{(0)}) \bar{\bar{\bar{y}}}_1 - \varphi^{(0)}(y_2^{(0)}) \bar{\bar{\bar{y}}}_2 \right) + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

то из (12) и (13) получаем линеаризованные граничные условия

$$\begin{aligned} & \int_{y_1^{(0)}}^{y_2^{(0)}} \varphi^{(0)}(y) dy = a^{(0)}; \\ & \int_{y_1^{(0)}}^{y_2^{(0)}} \varphi^{(001)}(y) dy + \varphi^{(0)}(y_1^{(0)}) \bar{y}_1 - \varphi^{(0)}(y_2^{(0)}) \bar{y}_2 = \bar{a}; \\ & \int_{y_1^{(0)}}^{y_2^{(0)}} \varphi^{(010)}(y) dy + \varphi^{(0)}(y_1^{(0)}) \bar{\bar{y}}_1 - \varphi^{(0)}(y_2^{(0)}) \bar{\bar{y}}_2 = \bar{\bar{a}}; \\ & \int_{y_1^{(0)}}^{y_2^{(0)}} \varphi^{(001)}(y) dy + \varphi^{(0)}(y_1^{(0)}) \bar{\bar{\bar{y}}}_1 - \varphi^{(0)}(y_2^{(0)}) \bar{\bar{\bar{y}}}_2 = \bar{\bar{\bar{a}}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $y_i^{(0)}$ ,  $\bar{y}_i$ ,  $\bar{\bar{y}}_i$ ,  $\bar{\bar{\bar{y}}}_i$ , ( $i = 1, 2$ ) определяются соотношениями (10), (14).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред. Т. 1, 2 / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 848 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластических деформаций / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [3] *Ершов, Л. В.* Об устойчивости полосы при сжатии / Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев // ДАН СССР. – 1961. – Т. 138, № 5. – С. 1047–1049.
- [4] *Лейбензон, Л. С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек : собрание трудов. Т. 1. / Л. С. Лейбензон. – М. : Изд-во АН СССР, 1951. – 468 с.

[5] *Ишлинский, А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости / А. Ю. Ишлинский // Украинский математический журнал. – 1954. – Т. 6, № 2. – С. 140–146.

[6] *Гузь, А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел / А. Н. Гузь. – Киев : Наукова думка, 1971. – 275 с.

[7] *Гузь, А. Н.* Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – Киев : Выща школа, 1982. – 352 с.

[8] *Гузь, А. Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – Киев : Выща школа, 1989. – 352 с.

[9] *Минаева, Н. В.* Метод возмущений в механике деформируемых тел / Н. В. Минаева. – М. : Науч. кн., 2002. – 156 с.

*N. V. Minaeva*

**THE LINEARIZATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS SET IN THE INTEGRATED FORM ON A BODY'S BOUNDARY IN THE DEFORMED CONDITION**

*Voronezh State Technological Academy*

**Abstract.** The coordinates of the points limiting a body's boundary in the deformed condition are found by a small parametre method. The special case is considered when this boundary is a straight line in the no-load state. The linearization of the boundary conditions set in the integrated form on a body's boundary in the deformed condition is made.

**Keywords:** non-local boundary conditions, small parametre, linearization.

*Минаева Надежда Витальевна*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежская государственная технологическая академия, г. Воронеж*

*e-mail: nminaeva@yandex.ru*

*Minaeva, Nadezhda Vitalevna*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State Technological Academy, Voronezh*

Б. Г. Миронов, Л. С. Козлова, Т. И. Рыбакова

**О КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ,  
НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ, ЛИНЕЙНО  
МЕНЯЮЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В работах [1]–[4] рассмотрено кручение цилиндрических и призматических стержней из идеального жесткопластического изотропного и анизотропного материалов в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от нагрузок. В настоящей работе исследуются предельные статически определимые состояния анизотропных тел в случае антиплоской деформации. Исследована также задача о кручении призматических стержней из идеального жесткопластического анизотропного материала. Предполагается, что боковая поверхность стержня находится под давлением, линейно меняющимся вдоль его образующей.

**Ключевые слова:** кручение, стержень, давление, анизотропия, характеристики.

УДК: 539.374

1. Пусть напряженное состояние анизотропного тела определяется условиями

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z, \tau_{xy} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \quad (2)$$

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda = \text{const}$ .

Уравнения равновесия согласно (1) и (2) примут вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda. \quad (4)$$

Введем замену переменных

$$\tau_{xz} = k \cos \psi, \tau_{yz} = k \sin \psi, \quad (5)$$

$$k^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2, \frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = \text{tg} \psi. \quad (6)$$

С учетом соотношений (5) условие (3) запишется в виде

$$k = k(\psi). \quad (7)$$

В случае изотропного тела  $k = \text{const}$ .

Предположим, что условие пластичности (3) для анизотропного тела имеет вид

$$E\tau_{xz}^2 + F\tau_{yz}^2 = k_0, \quad (8)$$

где  $k_0 = const$ ,  $E$  и  $F$  – константы анизотропии.

Согласно (5) из (8) следует

$$k(\psi) = \frac{k_0}{\sqrt{E \cos^2 \psi + F \sin^2 \psi}}. \quad (9)$$

В этом случае условие пластичности (8), согласно (5), можно записать в виде

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2(\psi), \quad (10)$$

где величина  $k(\psi)$  определяется соотношением (9) и зависит от угла  $\psi$  наклона вектора касательного напряжения  $\tau$  к оси  $OX$ .

Соотношение (9) запишем в виде

$$k(\psi) = \frac{\sqrt{\frac{2}{E+F}} k_0}{\sqrt{1 + \frac{E-F}{E+F} \cos 2\psi}}. \quad (11)$$

На рис. 1 показана зависимость  $k = k(\psi)$  от угла  $\psi$  согласно соотношению (11).

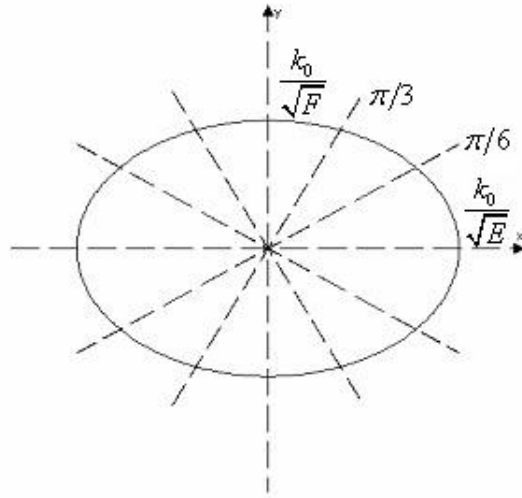


Рис. 1.

С учетом (5) и (9) уравнение равновесия (4) примет вид

$$(k' \cos \psi - k \sin \psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (k' \sin \psi + k \cos \psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} = \lambda, \quad (12)$$

где  $k' = \frac{dk}{d\psi}$ .

Система уравнений для определения характеристик соотношения (12) имеет вид

$$\frac{dx}{(k' \cos \psi - k \sin \psi)} = \frac{dy}{(k' \sin \psi + k \cos \psi)} = \frac{d\psi}{\lambda}. \quad (13)$$

Из системы (13) следует

$$\lambda x = k \cos \psi + c_1, \quad \lambda y = k \sin \psi + c_2, \quad (14)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k' \sin \psi + k \cos \psi}{k' \cos \psi - k \sin \psi}. \quad (15)$$

Исключая из (14)  $\psi$ , учитывая (9), получим уравнения характеристик соотношения (13)

$$\frac{E\lambda^2}{k_0^2} \left(x - \frac{c_1}{\lambda}\right)^2 + \frac{F\lambda^2}{k_0^2} \left(y - \frac{c_2}{\lambda}\right)^2 = 1. \quad (16)$$

Отсюда следует, что характеристики уравнения (13) в плоскости  $xy$  есть эллипсы, полуоси которого равны  $\frac{k_0}{\lambda\sqrt{E}}$ ,  $\frac{k_0}{\lambda\sqrt{F}}$ , причем центры этих эллипсов расположены на касательных к контуру тела.

Соотношение (15) представим в виде

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\psi + \alpha), \quad (17)$$

где  $\cos \alpha = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + k^2}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{k}{\sqrt{k'^2 + k^2}}$ .

Согласно (6), (7) и (17)  $\alpha$  является углом между вектором касательного напряжения  $\tau = \tau_{xz}\mathbf{i} + \tau_{yz}\mathbf{j}$  и характеристикой, который определяется ориентацией вектора  $\tau$  в плоскости  $xy$ .

Предположим, анизотропное тело ориентировано вдоль оси  $z$ , и его боковая поверхность свободна от касательных усилий.

Тогда вектор касательного напряжения  $\tau$  направлен по касательной к контуру, получаемому сечением тела плоскостью, параллельной плоскости  $xy$ . В тех точках контура, в которых угол наклона вектора  $\tau$  к оси  $OX$  не изменен, характеристики пересекают контур поперечного сечения под одним и тем же углом  $\alpha$ . В частности, это имеет место, когда контур содержит прямолинейный участок.

2. Рассмотрим анизотропный призматический стержень, ориентированный в декартовой системе координат  $xyz$ , причем образующие стержня направлены параллельно оси  $z$ . Предположим, что стержень закручивается вокруг своей оси.

Пусть напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется условием пластичности

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + D\tau_{xy}^2 + E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2 = 1, \quad (18)$$

где  $A, B, C, D, E, F$  – const,  $\sigma_{ij}$  – компоненты напряжения в декартовой системе координат  $xyz$ .

К соотношению (18) присоединим три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система соотношений (18), (19) является статически неопределимой. Предположим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + c, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \quad (20)$$

где  $\lambda = \text{const}$ ,  $c = \text{const}$ .

С учетом (20), из (18) и (19) получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda, \quad E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2 = 1. \quad (21)$$

Второму уравнению (21) удовлетворим, полагая



$$\tau_{xz} = a \cos \varphi, \quad \tau_{yz} = b \sin \varphi, \quad (22)$$

где  $a = \frac{1}{\sqrt{F}}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{E}}$ .

Подставляя выражения (22) в первое уравнение (21), имеем

$$-a \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lambda. \quad (23)$$

Система уравнений для определения характеристик соотношения (23) имеет вид

$$-\frac{dx}{a \sin \varphi} = \frac{dy}{b \cos \varphi} = \frac{d\varphi}{\lambda}. \quad (24)$$

Из системы (24) следует

$$\lambda x = a \cos \varphi + c_1, \quad \lambda y = b \sin \varphi + c_2. \quad (25)$$

Исключая из (25)  $\varphi$ , получим уравнения характеристик соотношения (23)

$$\frac{\lambda^2}{a^2} \left(x - \frac{c_1}{\lambda}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{b^2} \left(y - \frac{c_2}{\lambda}\right)^2 = 1. \quad (26)$$

Обозначим через  $L$  контур поперечного сечения стержня в плоскости  $z = const$ .

Пусть  $(x_0, y_0) \in L$  и  $\varphi(x_0, y_0) = \varphi_0$ . Тогда из (25) следует

$$\lambda x_0 = a \cos \varphi_0 + c_1, \quad \lambda y_0 = b \sin \varphi_0 + c_2. \quad (27)$$

С учетом (27) из (26) получим

$$\frac{\lambda^2}{a^2} (x - x')^2 + \frac{\lambda^2}{b^2} (y - y')^2 = 1, \quad (28)$$

где  $x' = x_0 - \frac{a \cos \varphi_0}{\lambda}$ ,  $y' = y_0 - \frac{b \sin \varphi_0}{\lambda}$ .

Согласно (22)

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi, \quad (29)$$

где  $\psi$  – угол, который образует вектор касательного напряжения  $\tau$  с осью  $OX$ .

Тогда

$$\beta = \varphi - \psi, \quad (30)$$

где  $\operatorname{tg} \beta = \frac{(b-a) \operatorname{tg} \varphi}{b+a \operatorname{tg}^2 \varphi}$ ,  $\beta$  – угол анизотропии. В изотропном случае  $b = a = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\varphi = \psi$ .

Из (24) следует, что вдоль характеристик (28)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (31)$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \psi + b^2}{(a^2 - b^2) \operatorname{tg} \psi}, \quad (32)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором касательного напряжения  $\tau$  и характеристикой.

Предположим, что боковая поверхность стержня свободна от касательных усилий. Следовательно, вектор касательного напряжения  $\tau$  во всех точках контура  $L$  направлен по касательной к ней. Отсюда следует, что характеристики уравнения (23) в плоскости  $xu$  есть эллипсы, полуоси которого равны  $\frac{a}{\lambda}$ ,  $\frac{b}{\lambda}$ , причем центры этих эллипсов расположены на касательных к контуру стержня (рис. 2). В изотропном случае эллипс переходит в окружность, а  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

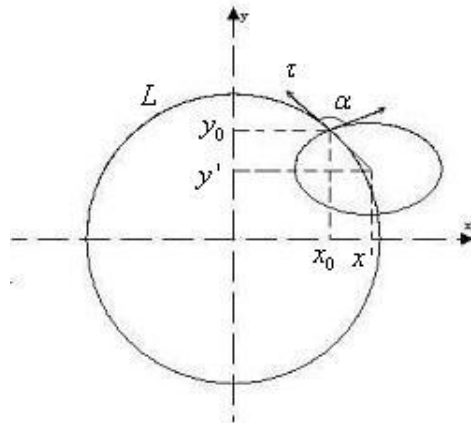


Рис. 2.

Рассмотрим случай, когда контур поперечного сечения стержня образует прямой угол, который совпадает со вторым координатным углом. Для определения напряженного состояния необходимо найти линию разрыва напряжений. В этом случае линия разрыва напряжений *OC* (рис. 3) определяется соотношением

$$\begin{aligned} & \left[ xb\sqrt{\frac{b^4}{\lambda^2} + (a^2 - b^2)y^2} - b^2\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^4}{\lambda^2} + (b^2 - a^2)x^2} \right] dy + \\ & + \left[ ay\sqrt{\frac{a^4}{\lambda^2} + (b^2 - a^2)x^2} - a^2\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{b^4}{\lambda^2} + (a^2 - b^2)y^2} \right] dx = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

На рис. 3 построено поле характеристик для рассматриваемого угла.

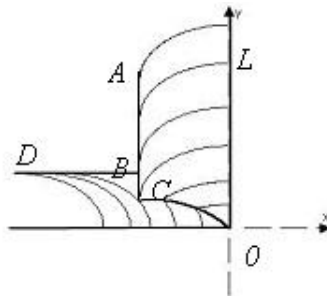


Рис. 3.

На отрезке *BC* касательное напряжение не сопрягается. Следовательно, вдоль отрезка *BC* необходимо предположить наличие щели. Вектор касательного напряжения  $\tau$  направлен ортогонально к правому берегу щели по образующей стержня. Аналогично нормальная составляющая вектора касательного напряжения  $\tau$  направлена ортогонально к левому берегу щели по образующей стержня вглубь щели. Решение не может быть продолжено за огибающие характеристики *ABD*, вдоль этих линий действуют касательные напряжения, направленные вдоль оси *z*, уравнивающие перепад давления  $\sigma_z$ .

Рассмотрим случай, когда контур поперечного сечения  $L$  стержня есть квадрат, сторона которого равна  $2t$ .

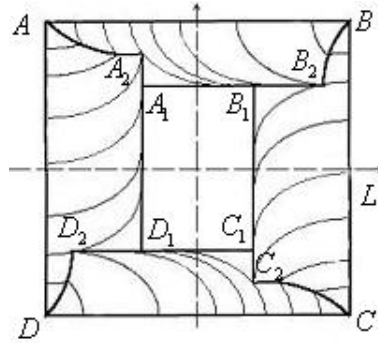


Рис. 4.

На рис. 4 построено поле характеристик в случае, когда большая полуось характеристического эллипса  $a < t$ .

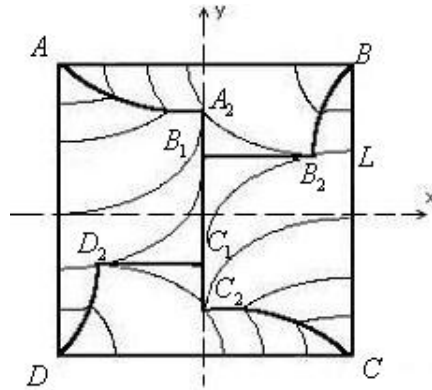


Рис. 5.

На рис. 5 построено поле характеристик в случае, когда большая полуось характеристического эллипса  $a = t$ .

Деформированное состояние стержня определим из соотношений ассоциированного закона пластического течения. Из условия экстремума функционала

$$A = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + 2(\varepsilon_{xy} \tau_{xy} + \varepsilon_{yz} \tau_{yz} + \varepsilon_{xz} \tau_{xz}) - \mu \left( A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + D\tau_{xy}^2 + E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2 - 1 \right) \quad (34)$$

имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2\mu((A+C)\sigma_x - A\sigma_y - C\sigma_z), \quad \varepsilon_{xy} = 2\mu D\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= 2\mu(-A\sigma_x + (A+B)\sigma_y - B\sigma_z), \quad \varepsilon_{yz} = 2\mu E\tau_{yz}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\varepsilon_z = 2\mu(-C\sigma_x - B\sigma_y + (C + B)\sigma_z), \quad \varepsilon_{xz} = 2\mu F\tau_{xz}.$$

Согласно (20) из (34) и (35) получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad F\varepsilon_{yz}\tau_{xz} = E\varepsilon_{xz}\tau_{yz}. \quad (36)$$

Считая деформации настолько малыми, что изменениями геометрии тела можно пренебречь, имеем, что при кручении напряжения в данной точке тела остаются постоянными по величине и направлению. В этом случае соотношения ассоциированного закона течения интегрируются, и так как в начальный момент закручивания все компоненты деформации равны нулю, то из (36) получим

$$e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \quad Fe_{yz}\tau_{xz} = Ee_{xz}\tau_{yz}, \quad (37)$$

где  $e_{ij}$  – компоненты тензора деформаций.

В соотношениях (37) перейдем к компонентам перемещений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (38)$$

Согласно (22) имеем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) b \cos \varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) a \sin \varphi. \quad (39)$$

Удовлетворим соотношениям (39), полагая

$$u = \rho yz, \quad v = -\rho xz, \quad w = w(x, y), \quad (40)$$

где  $\rho = const.$

С учетом (40) из (39) следует

$$-\frac{\partial w}{\partial x} a \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} b \cos \varphi = \rho (ya \sin \varphi + xb \cos \varphi). \quad (41)$$

Система уравнений для определения характеристик соотношения (41) имеет вид

$$-\frac{dx}{a \sin \varphi} = \frac{dy}{b \cos \varphi} = \frac{dw}{\rho (ya \sin \varphi + xb \cos \varphi)}. \quad (42)$$

Из (42) вытекает, что характеристики уравнений (6) и (42) совпадают.

Согласно (25) из (42) получим

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{\rho}{\lambda^2} (ab + c_1 b \cos \varphi + c_2 a \sin \varphi). \quad (43)$$

Отсюда следует

$$w = \frac{\rho}{\lambda^2} (ab\varphi + c_1 b \sin \varphi - c_2 a \cos \varphi) + c, \quad (44)$$

где  $c$  – постоянная, своя вдоль каждой характеристики.

Учитывая (8) и (10), из (44) вдоль характеристики имеем

$$w = \frac{\rho}{\lambda} \left( \frac{ab}{\lambda} \varphi_0 + x_0 b \sin \varphi_0 - y_0 a \cos \varphi_0 \right) + c. \quad (45)$$

Постоянная  $c$  определяется из граничных условий для перемещения  $w$ . Рассматривая линию разрыва напряжений  $l$  как предельное положение жесткого слоя, положим деформацию сдвига на этих линиях равной нулю. Тогда получим

$$2e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \rho y = 0, \quad 2e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \rho x = 0. \quad (46)$$

Согласно (46), вдоль линии разрыва напряжений имеем

$$dw = \rho(-ydx + xdy). \quad (47)$$

Так как  $w$  определяется с точностью до жесткого перемещения, то, принимая в какой-нибудь точке линии разрыва напряжений  $w=0$  и интегрируя (47) вдоль линии разрыва напряжений, находим значение  $w$  во всех точках линии разрыва напряжений, а следовательно, сможем определить константу  $c$  для каждой характеристики.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Быковцев, Г. И.* Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред : сб. ст. / Г. И. Быковцев. – Владивосток : Дальнаука, 2002. – 566 с.  
 [2] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.  
 [3] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.  
 [4] *Соколовский, В. В.* Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М. : ГИТТЛ, 1954. – 276 с.

*B. G. Mironov, L. S. Kozlova, T. I. Ribakova*

### TORSION OF THE ANISOTROPIC PRISMATIC RODS WHICH ARE UNDER THE INFLUENCE OF PRESSURE, LINEARLY CHANGING ALONG THE GENERATOR

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In the works [1]–[4] a torsion of the cylindrical and prismatic rods of ideal stiff-plastic isotropic and anisotropic materials in case when the lateral surface of rods is free from the loadings is considered. In the present work the limiting statically definable conditions of anisotropic bodies in case of antifat deformation are investigated. The problem about torsion of the prismatic rods of an ideal stiff-plastic anisotropic material is also investigated. It is supposed that the lateral surface of a rod is under the pressure linearly changing along its generator.

**Keywords:** torsion, rod, pressure, anisotropy, characteristics.

Миронов Борис Гурьевич

доктор физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

Козлова Людмила Святославовна

кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: l\_s\_kozlova@mail.ru

Рыбакова Татьяна Ивановна

кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: rti2112@mail.ru

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Kozlova, Ljudmila Svjatoslavovna

Candidate of Phys. & Math., I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Ribakova, Tatyana Ivanovna

Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

В. М. Мирсалимов, Б. Э. Рустамов

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИНОВИДНЫХ ПОЛОСТЕЙ В ГОРЯЩЕМ ТВЕРДОМ ТОПЛИВЕ, НА ГРАНИЦЕ КОТОРОГО ЗАДАНЫ СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

*Азербайджанский технический университет*

**Аннотация.** Рассматривается плоская стационарная задача механики разрушения для горящего деформируемого топлива, ослабленного произвольно размещенной системой трещиновидных полостей, поверхности которых горят. Считается, что трещиновидные полости имеют концевые области со связями между берегами, а на границе топливного заряда заданы смешанные граничные условия. Задача о равновесии топливного заряда, ослабленного трещиновидными полостями, сводится к решению системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Из решения этой системы находятся нормальные и касательные усилия в концевых зонах трещиновидных полостей. Получены локальные условия, определяющие устойчивость (безопасность) режима “горение–разрушение”.

**Ключевые слова:** горящее твердое топливо, трещиновидная полость, силы сцепления, зоны предразрушения со связями между берегами.

УДК: 539.375

1. Твердое топливо находит широкое применение в самых различных отраслях техники. При работе двигателя на твердом топливе иногда происходит выход на нерасчетный режим, который приводит к взрыву. Наиболее распространенная причина этого явления заключается в том, что в топливе имелись недопустимо большие трещиноподобные полости, возникшие, как правило, при технологическом процессе. При подходе фронта горения к краю такой полости из-за высокого давления в камере сгорания горение быстро охватывает всю трещиновидную полость. Из-за затрудненного газоотвода (продуктов сгорания) локальное давление может резко возрасти, в особенности, в концевой части трещиновидной полости. К этой причине порой еще добавляется возникновение объемного горения из-за специфичности структуры топлива, что в сочетании с аэроупругостью в концевой части полости может привести к прогарам или даже взрыву [1], [2]. Поэтому на стадии проектирования таких изделий необходимо учитывать, что в топливе могут возникнуть трещины, и проводить предельный анализ горящего твердого топлива, чтобы установить, что предполагаемые исходные трещины, расположенные наиболее неблагоприятным образом, не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы. Размер исходной минимальной трещины следует рассматривать как проектную характеристику материала твердого топлива.

Рассматривается плоская стационарная задача механики разрушения для горящего деформируемого топлива, ослабленного трещиновидными полостями, поверхности которых горят. Принято, что трещиновидные полости имеют концевые зоны со связями между берегами.

Считается, что все реагенты топлива равномерно распределены в твердой фазе, а продукты реакции сгорания газообразны. Рассматриваются времена, малые по сравнению с характерным временем релаксации напряжений в топливе и с характерным временем нагревания топлива вследствие теплопроводности. Исследуется квазистатический процесс деформирования топлива, поперечное сечение которого в плоскости  $x + iy$  занимает круг радиуса  $R$ . Используется модель трещины со связями между берегами, получившая экспериментальное подтверждение [3], [4] для композиционных материалов с полимерным связующим, когда адгезионная прочность меньше прочности полимеров. Смесевое ракетное топливо обычно состоит из кристаллических частиц, расположенных в полимерном связующем. Рассмотрим задачу механики разрушения для горящего твердого деформируемого топлива для случая, когда на контуре топлива заданы смешанные граничные условия. Отнесем сечение топлива к полярной системе координат  $r\theta$ , выбрав начало координат в центре окружности  $L_0$  с радиусом  $R$ . Пусть на обводе твердого топлива заданы только нормальное перемещение  $u_r(\theta)$  и касательная составляющая поверхностной силы  $N_\theta(\theta)$ . Пусть в топливе имеется  $N$  трещиновидных полостей длиной  $2\ell_{0k}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). В центрах трещиновидных полостей поместим начала локальных систем координат  $x_k O_k y_k$ , оси  $x_k$  которых совпадают с линиями трещин и образуют углы  $\alpha_k$  с осью  $x$  (рис. 1). Рассматривается модель трещины с силами сцепления (связями), непрерывно распределенными в узких концевых зонах трещин (области  $D_k$ ) и имеющими заданную диаграмму деформирования. Силы сцепления (связи) будут сосредоточены в некоторых узких областях  $D_k$ , размеры этих областей заранее неизвестны и должны быть определены из решения задачи. Всюду в дальнейшем граничные условия с поверхности полостей и областей  $D_k$  сносим на прямые  $y_k = 0$  (относительно локальных систем координат  $x_k O_k y_k$ ) точно так же, как это делается, например, в теории тонкого крыла в аэродинамике.

Принято, что процесс разрушения для каждой полости локализован в концевой зоне, которая рассматривается как часть трещиновидной полости и может быть сравнима с размером полости, а связи образованы частицами в композиционном материале топлива. В исследуемом случае зону процесса разрушения можно рассматривать как некоторый слой (концевую область) примыкающей трещиноподобной полости, и содержащей материал с частично нарушенными связями между его отдельными структурными элементами. По мере нагружения топлива в связях, соединяющих берега трещиновидных полостей в концевых зонах, будут возникать нормальные  $q_{y_k}(x_k)$  и касательные  $q_{x_k y_k}(x_k)$  усилия ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Величины этих напряжений и размеры  $d_{1k}$  и  $d_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) концевых зон заранее неизвестны и подлежат определению. Из-за того, что концевые зоны малы по сравнению с остальной частью топлива, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Таким образом, к берегам трещиновидной полости в концевых зонах будут приложены нормальные и касательные напряжения, численно равные  $q_{y_k}(x_k)$  и  $q_{x_k y_k}(x_k)$  соответственно.

Обозначим через  $L' = \sum_{k=1}^N L'_k$  совокупность берегов трещиновидных полостей, поверхности которых горят, а через  $L'' = \sum_{k=1}^N L''_k$  – совокупность концевых зон предразрушения, в которых берега взаимодействуют со связями.

Краевые условия на берегах трещиновидных полостей с концевыми зонами имеют вид

$$\sigma_{y_k} = -p_k, \quad \tau_{x_k y_k} = 0 \quad \text{на } L'_k \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

$$\sigma_{y_k} = q_{y_k}, \quad \tau_{x_k y_k} = q_{x_k y_k} \quad \text{на } L''_k,$$

где  $p_k(x)$  – интенсивность давления газа в  $k$ -той полости.



Для замкнутости основные соотношения задачи должны быть дополнены уравнениями газовой динамики и уравнениями, связывающими перемещения раскрытия берегов концевых зон и усилия в связях.

Уравнения течения газа в  $k$ -ой полости для плоского стационарного случая имеют [5] вид

$$p_k = C_{0k} \rho_k^\chi, \quad \frac{V_{xk}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_k}{\rho_k} = C_{1k} \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

$$\frac{d}{dx} (h_k \rho_k V_{xk}) = \rho_s f(p_k), \quad h_k = h_{0k}(x) + \int f(p_k) dp_k + v_k, \quad (1)$$

$$C_{0k} = p_{0k} \rho_{0k}^{-\chi}, \quad C_{1k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_s}{\rho_{0k}} \right)^2 f^2(p_{1k}) + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_{1k}}{\rho_{1k}},$$

где  $p_{0k}$ ,  $\rho_{0k}$  и  $p_{1k}$ ,  $\rho_{1k}$  – давление и плотность газа в камере сгорания при  $x_k = 0$  и в конце полости при  $x_k = \ell_{0k}$  соответственно (величины с индексом  $1k$  подлежат определению);  $h_{0k}(x)$  – заданная толщина начальной трещиновидной полости;  $V_{xk}$  – скорость газа;  $\chi$  – показатель адиабаты;  $\rho_s$  – плотность твердой фазы;  $f(p)$  – некоторая функция.

Уравнения, связывающие перемещения раскрытия берегов концевых зон и усилия в связях, можно представить [6], [7] в виде

$$(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-) = C(x_k, \sigma_k) [q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k)] \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

где функции  $C(x_k, \sigma_k)$  можно рассматривать как эффективные податливости соответствующих связей, зависящие от натяжения связей;  $\sigma_k = \sqrt{q_{y_k}^2 + q_{x_k y_k}^2}$  – модуль вектора усилий в соответствующих связях.

Обозначим рассматриваемую область, заключенную между  $L_0$  радиуса  $R$  и системой прямолинейных разрезов  $L_k = [-\ell_k, \ell_k]$  через  $S^+$ , область, дополняемую до полной комплексной плоскости, –  $S^-$ . При этих предположениях задача сводится к определению двух функций комплексного переменного  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , аналитических в области  $S^+$  и удовлетворяющих на основании [8] следующим граничным условиям:

$$Re \left\{ k_0 \Phi(\tau) - \overline{\Phi(\tau)} + \frac{R^2}{\tau^2} \left[ \tau \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} \right] \right\} = 2\mu u_r'(\tau) \quad \text{на } L_0, \quad (3)$$

$$Im \left\{ \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - \frac{\tau^2}{R^2} \left[ \overline{\tau \Phi'(\tau)} + \Psi(\tau) \right] \right\} = -N_\theta(\tau) \quad \text{на } L_0, \quad (4)$$

$$\Phi(t_k) + \overline{\Phi(t_k)} + t_k \overline{\Phi'(t_k)} + \overline{\Psi(t_k)} = F_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

$$F_k = \left\{ \begin{array}{ll} -p_k & \text{на } L_k', \\ q_{y_k} - iq_{x_k y_k} & \text{на } L_k'' \end{array} \right\}$$

где  $\tau = Re^{i\theta}$ ;  $t_k$  – аффикс точек берегов  $k$ -той трещиновидной полости с концевыми зонами;  $k_0 = 3 - 4\nu$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала топлива;  $\mu$  – модуль сдвига.

На окружности  $L_0$  функции  $u_r(\tau)$  и  $N_\theta(\tau)$  в общем случае возьмем в виде рядов Фурье.

**2.** Переходя в соотношениях (3) и (4) к сопряженным значениям, после некоторых преобразований на контуре  $L_0$  получим соотношение

$$(k_0 - 1) \left[ \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} \right] + \frac{2R^2}{\tau^2} \left[ \frac{R^2}{\tau} \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} \right] = 2[2\mu u_r'(\tau) + iN_\theta(\tau)] \quad (6)$$

На  $L_0$  введем новую неизвестную вспомогательную функцию  $\omega(t) \in H$  в виде:

$$2\omega(\tau) = (k_0 - 1) \left[ \Phi(\tau) - \overline{\Phi(\tau)} \right] - \frac{2\tau^2}{R^2} \left[ \frac{R^2}{\tau} \Phi'(\tau) + \Psi(\tau) \right] \quad \text{на } L_0 \quad (7)$$

Складывая (6) и (7), находим

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{k_0 - 1} [\omega(\tau) + 2\mu u'_r(\tau) + iN_\theta(\tau)]. \quad (8)$$

Теперь, подставив (8) в (7), получим

$$\Psi(\tau) = Q(\tau) + R_1(\tau) + R_2(\tau) \quad \text{на } L_0. \quad (9)$$

Ввиду некоторой громоздкости функции  $Q(\tau)$ ,  $R_1(\tau)$  и  $R_2(\tau)$  на  $L_0$  не приводятся в явном виде.

Из соотношений (8) и (9) на основании теоремы об аналитическом продолжении и свойств интеграла типа Коши с учетом разложения функций  $u_r(t)$  и  $iN_\theta(t)$  в ряды Фурье будем иметь

$$\Phi_*(z) = \begin{cases} \Phi(z) - \frac{1}{k_0 - 1} \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega(t)dt}{t-z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{2\mu(k+1)}{R} V_{k+1} + T_k \right] \left( \frac{z}{R} \right)^k \right\rangle, & z \in S^+ \\ -\frac{1}{k_0 - 1} \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega(t)dt}{t-z} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ T_{-k} - \frac{2\mu(k-1)}{R} V_{-k+1} \right] \left( \frac{R}{z} \right)^k \right\rangle, & z \in S^- \end{cases} \quad (10)$$

$$\Psi_*(z) = \begin{cases} \Psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{Q(t)dt}{t-z} - R_1(z), & z \in S^+ \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{Q(t)dt}{t-z} + R_2(z), & z \in S^- \end{cases} \quad (11)$$

В соотношениях (10) – (11) функции  $\Phi_*(z)$  и  $\Psi_*(z)$  являются аналитическими в разрезанной вдоль отрезков  $L_k = [-\ell_k, \ell_k]$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) полной комплексной плоскости и исчезают на бесконечности.

Вспомогательную неизвестную функцию  $\omega(t) \in H$  на  $L_0$  будем искать в виде ряда Фурье

$$\omega(\tau) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \alpha_k \left( \frac{\tau}{R} \right)^k + \alpha_{-k} \left( \frac{R}{\tau} \right)^k \right], \quad (12)$$

где  $\alpha_k$  – неизвестные комплексные коэффициенты.

Подставим соотношение (12) в первые формулы (10) и (11) и, используя интегральную теорему Коши, получим общие формулы для искомых функций:

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \Phi_0(z), \quad \Psi(z) = \Psi_*(z) + \Psi_0(z), \quad z \in S^+ \quad (13)$$

$$\text{Здесь } \Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} J_k \left( \frac{z}{R} \right)^k, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \left( \frac{z}{R} \right)^k,$$

$$J_k = \frac{1}{k_0 - 1} \left[ \alpha_k + T_k + \frac{2\mu(k+1)}{R} V_{k+1} \right],$$

$$W_k = -\left( \frac{1}{2} + \frac{k+2}{k_0 - 1} \right) \alpha_{k+2} - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{-k-2} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k+2}{k_0 - 1} \right) T_{k+2} - \\ - \frac{1}{2} \bar{T}_{-k-2} + \frac{\mu(k+3)}{R} \left( 1 - \frac{k+2}{k_0 - 1} \right) V_{k+3} + \frac{\mu(k+1)}{R} \bar{V}_{-k-1}.$$

Функции  $\Phi_*(z)$  и  $\Psi_*(z)$  ищем в виде

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \frac{g_k(t)dt}{t - z_k},$$

$$\Psi_*(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{-2i\alpha_k} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[ \frac{\overline{g_k(t)}}{t - z_k} - \frac{\bar{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k(t) \right] dt, \quad (14)$$

$$T_k = t e^{i\alpha_k} + z_k^0, \quad z_k^0 = x_k^0 + i y_k^0, \quad z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0),$$

$$\frac{i(k_0 + 1)}{2\mu} g_k(x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k^+ - u_k^- + i(v_k^+ - v_k^-)] \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Для определения неизвестных функций  $g_k(x_k)$  используются краевые условия на отрезках  $y_k = 0$ ,  $-\ell_k \leq x_k \leq \ell_k$ . В дальнейшем все линейные размеры отнесем к радиусу  $R$ .

Удовлетворяя функциями (13) – (14) граничным условиям (5) на берегах трещиновидных полостей с концевыми зонами, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $g_k(x_k)$ . К системе сингулярных интегральных уравнений следует добавить для внутренних трещиновидных полостей с концевыми зонами дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-\ell_k}^{\ell_k} g_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (15)$$

Для алгебраизации системы интегральных уравнений сначала с помощью замены переменных в системе и в условиях (15) все интервалы интегрирования приведем к одному интервалу  $[-1, 1]$ .

Используя процедуру алгебраизации [9, 10], найдем, что системе интегральных уравнений при условиях (15) соответствует следующая система  $N \times M$  алгебраических уравнений для определения  $N \times M$  неизвестных  $g_n^0(t_m)$ :

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \ell_k \left[ g_k^0(t_m) K_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_r) + \overline{g_k^0(t_m)} L_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_r) \right] = F_n(x_r) + F(x_r), \quad (16)$$

$$\sum_{m=1}^M g_n^0(t_m) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N; \quad r = 1, 2, \dots, M - 1),$$

где функции  $K_{nk}(t, x)$ ,  $L_{nk}(t, x)$  определяются по известным соотношениям (формулы (II.8)), а значения  $t_m$  и  $x_r$  – по формулам (II.64) и (II.66) книги [9];

$$F = - \left[ \Phi_0(x_n) + \overline{\Phi_0(x_n)} + x_n \overline{\Phi_0'(x_n)} + \overline{\Psi_0(x_n)} \right].$$

Если в (16) перейти к сопряженным значениям, получаем еще  $N \times M$  алгебраических уравнений.

Для левой части соотношения (2) имеем

$$(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-) = -\frac{1 + k_0}{2\mu} \int_{-\ell_k}^{x_k} g_k(x_k) dx_k \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (17)$$

С учетом (17) соотношение (2) принимает вид

$$-\frac{1 + k_0}{2\mu} \int_{-\ell_k}^{x_k} g_k(x_k) dx_k = C(x_k, \sigma_k) (q_{y_k}(x_k) - i q_{x_k y_k}(x_k)). \quad (18)$$

Отделяя в (18) действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned}
 -\frac{1+k_0}{2\mu} \int_{-\ell_k}^{x_k} v_k(x_k) dx_k &= C(x_k, \sigma_k) q_{y_k}(x_k) \quad (k=1, 2, \dots, N), \\
 -\frac{1+k_0}{2\mu} \int_{-\ell_k}^{x_k} u_k(x_k) dx_k &= C(x_k, \sigma_k) q_{x_k y_k}(x_k)
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

В правые части алгебраических систем (16) входят неизвестные значения напряжений  $q_{y_k}(t_{m,k})$  и  $q_{x_k y_k}(t_{m,k})$  в узловых точках  $t_{m,k} (m=1, 2, \dots, M_{1,k}; k=1, 2, \dots, N)$ , входящих в концевые зоны. Для построения недостающих уравнений потребуем выполнения условий (19) в узловых точках  $t_{m,k}$ , содержащихся в концевых зонах предразрушения. В результате получим еще  $2 \times N$  системы из  $M_{1,k}$  уравнений каждая для определения приближенных значений  $q_{y_k}(t_{m,k})$  и  $q_{x_k y_k}(t_{m,k}) (k=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots, M_{1,k})$ :

$$\begin{aligned}
 Dv_k^0(t_{1,k}) &= C(t_{1,k}, \sigma_k(t_{1,k})) q_{y_k}(t_{1,k}), \quad (k=1, 2, \dots, N) \\
 D(v_k^0(t_{1,k}) + v_k^0(t_{2,k})) &= C(t_{2,k}, \sigma_k(t_{2,k})) q_{y_k}(t_{2,k}), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 D \sum_{m=1}^{M_{1,k}} v_k^0(t_{m,k}) &= C(t_{M_{1,k,k}}, \sigma_k(t_{M_{1,k,k}})) q_{y_k}(t_{M_{1,k,k}}) \\
 Du_k^0(t_{1,k}) &= C(t_{1,k}, \sigma_k(t_{1,k})) q_{x_k y_k}(t_{1,k}), \quad (k=1, 2, \dots, N) \\
 D(u_k^0(t_{1,k}) + u_k^0(t_{2,k})) &= C(t_{2,k}, \sigma_k(t_{2,k})) q_{x_k y_k}(t_{2,k}), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$$D \sum_{m=1}^{M_{1,k}} u_k^0(t_{m,k}) = C(t_{M_{1,k,k}}, \sigma_k(t_{M_{1,k,k}})) q_{x_k y_k}(t_{M_{1,k,k}}), \text{ где } D = -\frac{1+k_0}{2\mu} \frac{\pi \ell_k}{M}.$$

Полученные системы (16), (20), (21) оказались связанными и должны решаться совместно. Так как напряжения в топливе ограничены, то решение интегральных уравнений ищется в классе всюду ограниченных функций. Такое решение существует при выполнении условий разрешимости интегральных уравнений. Поэтому полученные алгебраические системы не являются пока замкнутыми. Для замкнутости полученных алгебраических уравнений не хватает  $2 \times N$  уравнений, выражающих условия разрешимости интегральных уравнений (условия конечности напряжений в окрестности вершин трещиновидных полостей с концевыми зонами). Записывая условия конечности напряжений у вершин трещиновидных полостей с концевыми зонами, находим еще  $2 \times N$  комплексных уравнений

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^M (-1)^m g_n^0(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g_n^0(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0 \\
 (n=1, 2, \dots, N)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Полученные соотношения (1), (16), (20), (21), (22) позволяют получить окончательное решение задачи, если будут определены коэффициенты  $\alpha_k (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ . Для составления бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\alpha_k$  подставим (13) с учетом (14) в условие (6). После некоторых преобразований условие (6) сводится к виду

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{\tau}{R}\right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \left(\frac{R}{\tau}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} U_m \left(\frac{\tau}{R}\right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} U_m^* \left(\frac{R}{\tau}\right)^m. \quad (23)$$

Ввиду некоторой громоздкости выражений для  $A_m$ ,  $A_m^*$ ,  $U_m$ ,  $U_m^*$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) они не приводятся.

Сравнивая в обеих частях полученного соотношения (23) коэффициенты с одинаковыми степенями  $\tau/R$  и  $R/\tau$ , находим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$A_0 + A_0^* = U_0 + U_0^*, \quad A_m = U_m, \quad A_m^* = U_m^* \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (24)$$

Как известно [1], одной из вероятных причин выхода двигателя на твердом топливе на нерасчетный режим является наличие в топливе больших трещинообразных дефектов, которые могут привести к неустойчивому горению. Механизм неустойчивости заключается в следующем. При определенных условиях скорость изменения линейных размеров полости в плане может оказаться больше скорости изменения толщины полости. Это происходит из-за локального разрушения топлива в концевой части полости по причине концентрации напряжений и резкого увеличения скорости горения в конце полости вследствие локального разрыхления материала и увеличения поверхности горения. Последнее обусловлено местной концентрацией деформаций. Оба физических механизма неустойчивости связаны с локальной концентрацией деформации. Это позволяет для формулировки критерия предельного равновесия использовать критерий критического раскрытия трещины. Раскрытие берегов трещиновидной полости в пределах концевых зон можно определять по соотношениям

$$v_k^+(x_k, 0) - v_k^-(x_k, 0) = C(x_k, \sigma_k) q_{y_k}(x_k) \quad \text{на } L_k'',$$

$$u_k^+(x_k, 0) - u_k^-(x_k, 0) = C(x_k, \sigma_k) q_{x_k y_k}(x_k).$$

Условие критического раскрытия трещиновидной полости у края концевой зоны будет

$$C(\ell_{0k}, \sigma_k(\ell_{0k})) \sigma_k(\ell_{0k}) = \delta_c \quad \text{при } x_k = \ell_{0k} \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (25)$$

$$C(-\ell_{0k}, \sigma_k(-\ell_{0k})) \sigma_k(-\ell_{0k}) = \delta_c \quad \text{при } x_k = -\ell_{0k},$$

где  $\delta_c$  – характеристика трещиностойкости топлива, определяемая опытным путем.

Достаточным условием локальной устойчивости режима горения твердого топлива будет

$$C(x_k, \sigma_k(x_k)) \sigma_k(x_k) < \delta_c \quad \text{при } L_k'' \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (26)$$

Как только неравенство (26) будет нарушено в малой окрестности соответствующей точки трещиновидной полости, начнется локально неустойчивый процесс “горение – разрушение”.

Для численной реализации полученного решения необходимо совместное решение системы уравнений (1), (16), (20), (21), (22) и (25). Эти уравнения служат для отыскания  $\ell_k$ ,  $p_k(x_k)$ ,  $q_{y_k}(x_k)$ ,  $q_{x_k y_k}(x_k)$ ,  $V_{x_k}(x_k)$ ,  $v_k(x_k)$ ,  $u_k(x_k)$ ,  $h_k(x_k)$ ,  $\rho_k(x_k)$ . Нетрудно свести их к определению относительно  $q_{y_k}(x_k)$ ,  $q_{x_k y_k}(x_k)$ ,  $\ell_k$ ,  $v_k(x_k)$ ,  $u_k(x_k)$  (система (16), (20), (21), (22)) и  $p_k(x_k)$ . Для численного решения этих уравнений наиболее целесообразно применять следующий способ: функции  $p_k(x_k)$  ищутся в виде многочленов с неизвестными коэффициентами, а уравнения для  $p_k(x_k)$  удовлетворяются приближенно в смысле наибольшей близости к нулю среднеквадратичной невязки. При этом неизвестные коэффициенты определяются из условия минимума получившихся функций. Из-за неизвестных размеров концевых зон предразрушения даже при линейно-упругих связях системы алгебраических уравнений оказались нелинейными.

В связи с этим для решения полученных систем в случае линейных связей использовался метод последовательных приближений [10]. В каждом приближении алгебраическая система решалась численно методом Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей для нахождения усилий в концевых зонах использовался алгоритм, подобный методу упругих решений [11]. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [12]. Процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия вдоль каждой концевой зоны, полученные на двух последовательных итерациях, мало отличаются друг от друга. Был рассмотрен приближенный расчет в предположении, что

$$h_{0k}(x_k) = h_0 = const, \quad h_{0k} \gg v_k, \quad h_{0k} \gg h_c, \quad f(p) = A + Bp,$$

$$\int_0^{\ell_{0k}} p_k(x_k) dx_k = \frac{1}{2} \ell_{0k} (p_{1k} + p_{0k}).$$

Здесь А и В – эмпирические постоянные, для упрощения считалось, что на стенки каждой полости действует постоянное давление  $(p_{1k} + p_{0k})/2$ .

Для числовых расчетов полагалось  $M = 30$ , что отвечает разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Значение интенсивности давления газа  $p_{*k}$ , вызывающей рост  $k$ -той трещиновидной полости, определяется из соотношения

$$-\frac{1+k_0}{2\mu} \int_{\ell_{0k}}^{\ell_k} g_k(x_k) dx_k = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

Критическим значением интенсивности давления газа для горящего твердого топлива будет минимальное среди  $p_{*k}$   $(k = 1, 2, \dots, N)$

$$p_* = \min \{p_{*k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

На рис. 2 представлены графики зависимости безразмерной длины концевой зоны для левого конца полости от безразмерного параметра  $p/N_0$  для следующих значений свободных параметров:  $\varepsilon = \ell_{01}/R = 0, 10; 0, 20; \alpha_1 = \pi/4; z_1^0 = 0, 1Re^{i\frac{\pi}{18}\theta}, N_0$  – силовой фактор.

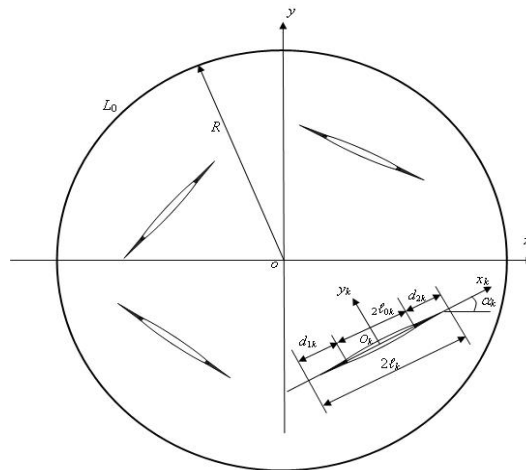


Рис. 1.

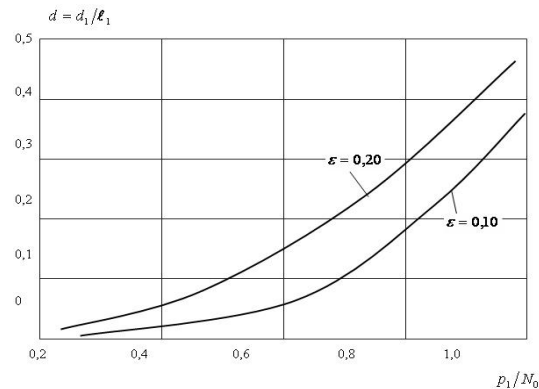


Рис. 2.

**Заключение.** Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая путем численного расчета для каждого конкретного вида топлива прогнозировать предельный допустимый размер трещиновидной полости (технологического дефекта).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соркин, Р. Е. Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе / Р. Е. Соркин. – М. : Наука, 1967. – 319 с.
- [2] Черепанов, Г. П. О горении в узких полостях / Г. П. Черепанов // ПМТФ. – 1970. – 11, № 2. – С. 145–158.
- [3] Needleman, A. An analysis of decohesion an imperfect interface / A. Needleman // Int. J. Fracture. – 1990. – 42, № 1. – P. 21–40.
- [4] Cox, B. N. Concepts for bridged cracks fracture and fatigue / B. N. Cox, D. V. Marshall // Acta Metallurgica et Materialia. – 1994. – 42, № 2. – P. 341–363.
- [5] Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [6] Гаджиев, В. Д. Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами / В. Д. Гаджиев, В. М. Мирсалимов // Оптимальное проектирование механических систем. – Баку, 1999. – С. 50–63.
- [7] Гольдштейн, Р. В. Рост трещин по границе соединения материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Проблемы механики : сб. ст. к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М., 2003. – С. 221–238.
- [8] Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [9] Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев : Наук. думка, 1976. – 443 с.
- [10] Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [11] Ильюшин, А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. [СПб.] : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [12] Биргер, И. А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М., 1975. – С. 51–73.

V. M. Mirsalimov, B. E. Rustamov

**THE INTERACTION OF THE CRACK-VISIBLE CAVITIES IN BURNING  
SOLID FUEL ON A BORDER OF WHICH THE MIXED BOUNDARY  
CONDITIONS ARE SET**

*Azerbaijan Technical University*

**Abstract.** The fracture mechanics' flat stationary problem for the burning deformable fuel weakened by an arbitrarily based system of the crack-visible cavities which surfaces can burn is considered. It is considered that crack-visible cavities have end cavities with bondings between margins and on a border of a fuel charge the mixed boundary conditions are set. The problem about balance of the fuel charge weakened by crack-visible cavities is reduced to the decision of nonlinear singular integrated combined equations. According to the solution of this system normal and effort tangents are found in end zones of crack-visible cavities. The local conditions defining stability (safety) of a mode "burning-destruction" mode are received.

**Keywords:** burning solid fuel, a crack-visible cavity, adhesion power, predestruction zones with bondings between margins.

*Мирсалимов Вагиф Мирахмедович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку*

**e-mail:** mir-vagif@mail.ru

*Рустамов Бахтияр Эйюб оглы*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Азербайджанский технический университет, г. Баку*

**e-mail:** brrustam@mail.ru

*Mirsalimov Vagif Mirahmedovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Azerbaijan Technical University, Baku*

*Rustamov Bakhtiyar Eyyub oglu*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Azerbaijan Technical University, Baku*



В. М. Мирсалимов, Б. Э. Рустамов

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНОВИДНОЙ ПОЛОСТИ В ГОРЯЩЕМ ТВЕРДОМ ТОПЛИВЕ, СКРЕПЛЕННОМ С ВНЕШНИМ ЦИЛИНДРОМ

*Азербайджанский технический университет*

**Аннотация.** Решена плоская стационарная задача о локальном разрушении горящего топлива, ослабленного прямолинейной трещиновидной полостью, поверхность которой горит. Топливо усилено защитным цилиндром из другого упругого материала. Дается математическое описание расчетной модели о развитии трещиновидной полости в топливе. Определение неизвестных параметров, характеризующих раскрытие и рост трещиновидной полости, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Условие роста трещиновидной полости формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала. Установлено локальное условие устойчивости (безопасности) режима “горение – разрушение”.

**Ключевые слова:** горящее твердое топливо, трещиновидная полость со связями между берегами в концевых зонах, силы сцепления, течение газа в полости.

УДК: 539.375

Потребности современной оборонной техники, в частности установок на твердом топливе и ствольных артиллерийских систем, с постоянно возрастающими и усложняющимися требованиями к прочности, надежности и эффективности проектируемых систем приводят к совершенствованию способов моделирования и разработки новых методов расчета, наиболее полно и адекватно учитывающих механические свойства реальных материалов. При работе двигателей на твердом топливе иногда происходит выход на нерасчетный режим [1], [2], который приводит к взрыву. Наиболее распространенная причина этого явления заключается в том, что в топливе имелись недопустимо большие трещиноподобные полости, возникшие, как правило, при технологическом процессе. При подходе фронта горения к краю такой полости, из-за высокого давления в камере сгорания горение быстро охватывает всю трещиновидную полость. Для повышения безопасности работы двигателя на траектории твердое топливо (заряд) усиливают защитным покрытием из другого материала. Несмотря на большое значение покрытия на прочность твердого заряда при работе двигателя на траектории, до настоящего времени эти вопросы не нашли должного внимания в методах расчета. Разработка расчетных моделей исследования влияния покрытия на развитие повреждений в горящем твердом топливе представляет актуальную проблему. Значительный интерес в связи с этим представляют дефекты типа трещин. Пусть горящее деформируемое твердое тело имеет трещиновидную полость, поверхность которой горит. Считается, что все реагенты топлива равномерно распределены в твердой фазе, а продукты реакции сгорания газообразны. Рассматриваются времена, малые по сравнению с характерным временем релаксации напряжений в топливе и с характерным временем нагревания топлива вследствие теплопроводности. На основании этого предположения топливо можно считать хрупким, а его температуру – постоянной.

Исследуется квазистатический процесс деформирования топлива. Используется модель трещины со связями между берегами в концевой зоне, получившая хорошее экспериментальное подтверждение [3 – 6] для композиционных материалов с полимерным связующим, когда адгезионная прочность меньше прочности полимеров. В этом случае в узкой области будут сконцентрированы силы сцепления (связи). Смесевое ракетное топливо обычно состоит из кристаллических частиц, расположенных в полимерном связующем.

Пусть окружающее топливо цилиндр (ее поперечное сечение) занимает в плоскости  $z = x + iy$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) многосвязную область  $S_0$ , ограниченную извне окружностью  $L_0$  радиуса  $R$  с центром в начале координат, а изнутри – окружностью  $L_1$  радиуса  $R_1$ , центр которой совпадает с центром окружности  $L_0$ . Считаем, что в отверстие защитной оболочки вставлена путем запрессовки с заданным натягом круглая пашка. В центре трещиновидной полости поместим начало локальной системы координат  $x_1 O_1 y_1$ , ось  $x_1$  которой совпадает с линией трещины и образует угол  $\alpha_1$  с осью  $x$  (рис. 1).

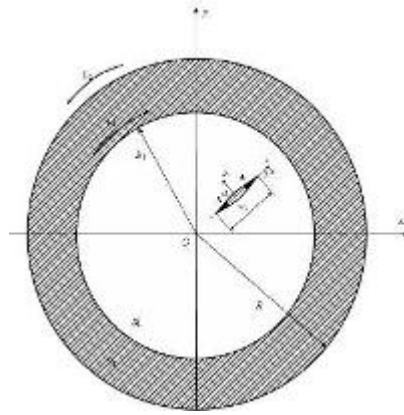


Рис. 1. Расчетная схема задачи о локальном разгерметизации твердого горящего топлива

Область твердого топлива, ограниченную окружностью  $L_1$ , обозначим через  $S_1$ . Обозначим через  $2h$  неизвестную заранее толщину полости, через  $2v$  – взаимное смещение противоположных стенок трещиновидной полости, а через  $h_c$  – толщину сгоревшего слоя на одной стенке. Все эти величины представляют собой некоторые искомые функции  $x$  и  $t$ . Они связаны между собой следующим образом:  $h = h_c + v$ . Принято, что трещиновидная полость имеет концевые зоны, в которых берега трещины взаимодействуют. Полагается, что эти зоны примыкают к вершинам трещины и их размеры могут быть сравнимы с длиной трещиновидной полости. Выделим части трещины  $d_1$  и  $d_2$  (концевые области), примыкающие к ее вершинам. Взаимодействие берегов трещины в концевых зонах моделируется путем введения между берегами трещины связей (сил сцепления) с заданной диаграммой деформирования. Концевые зоны малы по сравнению с остальной частью топлива. Поэтому их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала.

По мере нагружения топлива в процессе работы двигателя в связях, соединяющих берега концевых зон трещиновидной полости, будут возникать в общем случае нормальные  $q_{y_1}(x_1)$  и касательные  $q_{x_1 y_1}(x_1)$  усилия. Таким образом, к берегам концевых зон трещиновидной полости будут приложены нормальные  $q_{y_1}(x_1)$  и касательные  $q_{x_1 y_1}(x_1)$  напряжения. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\sigma_r^0 - i\tau_{r\theta}^0 = 0 \quad \text{на } L_0, \quad (1)$$

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \sigma_r^0 - i\tau_{r\theta}^0, \quad v_r - iv_\theta = v_r^0 - iv_\theta^0 + g_0(\theta) \quad \text{на } L_1, \quad (2)$$

$$\sigma_{y_1} - i\tau_{x_1y_1} = -p(x) \quad \text{при } y_1 = 0, \quad \lambda_1 < x < \lambda_2, \quad (3)$$

$$\sigma_{y_1} - i\tau_{x_1y_1} = q_{y_1}(x) - iq_{x_1y_1}(x) \quad \text{при } y_1 = 0, \quad -\ell_1 \leq x_1 \leq \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 \leq x_1 \leq \ell_1,$$

где  $p(x)$  – давление газа в полости;  $\sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$  – компоненты тензора напряжений в покрытии,  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – в топливе.

Для замкнутости основные соотношения задачи должны быть дополнены уравнениями газовой динамики и уравнениями, связывающими раскрытия берегов конечных зон полости и усилия в связях.

Уравнения течения газа в трещиновидной полости для плоского стационарного случая имеют вид [7]

$$p = C_0 \rho^\chi; \quad \frac{V_{x_1}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi-1} \frac{p}{\rho} = C_1; \quad \frac{d}{dx_1} (h\rho V_{x_1}) = \rho_s f(p); \quad (4)$$

$$h = h_0(x) + \int f(p) dp + v; \quad C_0 = p_0 \rho_0^{-\chi}; \quad C_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_s}{\rho_1} \right)^2 f^2(p_1) + \frac{\chi}{\chi-1} \frac{p_1}{\rho_1}.$$

Здесь  $p_0, \rho_0$  и  $p_1, \rho_1$  – давление и плотность газа в камере сгорания при  $x_1 = 0$  и в конце полости;  $h_0(x)$  – заданная толщина начальной полости;  $V_{x_1}$  – скорость газа,  $\chi$  – показатель адиабаты;  $\rho_s$  – плотность твердой фазы;  $f(p)$  – некоторая функция.

Уравнение, связывающее раскрытие берегов конечных зон полости и усилия в связях, можно представить в виде [8], [9]

$$(v_1^+(x_1, 0) - v_1^-(x_1, 0)) - i(u_1^+(x_1, 0) - u_1^-(x_1, 0)) = C(x_1, \sigma) [q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1y_1}(x_1)], \quad (5)$$

где функцию  $C(x_1, \sigma_1)$  можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящих от натяжения связей;  $\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + q_{x_1y_1}^2}$  – модуль вектора усилий в связях.

Используя комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили [10], рассматриваемая задача сводится к отысканию двух пар функций  $\Phi_j(z)$  и  $\Psi_j(z)$  ( $j = 0, 1$ ) комплексного переменного  $z = x + iy$ , регулярных в области  $S_j$  ( $j = 0, 1$ ) и удовлетворяющих граничным условиям:

$$\Phi_0(\tau_0) + \overline{\Phi_0(\tau_0)} - \frac{\tau_0^2}{R_0^2} \left[ \frac{R_0^2}{\tau_0} \Phi_0'(\tau_0) + \Psi_0(\tau_0) \right] = 0 \quad \text{на } L_0, \quad (6)$$

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - \frac{\tau^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{\tau} \Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau) \right] = \Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - \frac{\tau^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau) \right] \quad \text{на } L_1, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & k_0 \overline{\Phi_0(\tau)} - \Phi_0(\tau) + \frac{\tau^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{\tau} \Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau) \right] = \\ & = \frac{\mu_0}{\mu_1} \left\{ k_1 \overline{\Phi_1(\tau)} - \Phi_1(\tau) + \frac{\tau^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau) \right] \right\} + 2\mu_0 g_0'(\tau) \quad \text{на } L_1, \end{aligned}$$

$$\Phi_1(x_1) + \overline{\Phi_1(x_1)} + x_1 \overline{\Phi_1'(x_1)} + \overline{\Psi_1(x_1)} = \begin{cases} -p & \lambda_1 < x_1 < \lambda_2 \\ q_{y_1} - iq_{x_1y_1} & -\ell_1 \leq x_1 \leq \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 \leq x_1 \leq \ell_1 \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $k_0, \mu_0, k_1, \mu_1$  – упругие постоянные;  $\tau_0 = Re^{i\theta}$ ;  $\tau = R_1 e^{i\theta}$ ;  $x_1$  – аффикс точек берегов трещины;  $g_0(t)$  – заданная функция перемещений точек на линии контакта. Функцию  $g_0(t)$  в общем случае можно взять в виде ряда Фурье.

Условие (6) выражает характер нагруженности на внешнем обводе цилиндра, который принят свободным от внешних нагрузок. Условие (7) выражает, что усилия, действующие с обеих сторон на элементы линий контакта, равны. Второе условие (7) выражает, что заданы скачки перемещений на линии контакта. Наконец, условие (8) выражает характер нагруженности на берегах трещиновидной полости и концевых зонах предразрушения.

**Решение краевой задачи.** Для решения краевой задачи (6) – (8) используем способ, указанный Д.И. Шерманом [11]. На контуре  $L_1$  введем новую неизвестную функцию  $\omega(t)$ , принадлежащую к классу Гельдера, следующим образом

$$\omega(t) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} + \frac{t^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{t} \Phi_0'(t) + \Psi_0(t) \right] - \Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} - \frac{t^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{t} \Phi_1'(t) + \Psi_1(t) \right] \right\} \quad (9)$$

на  $L_1$

На основании (7) и (9) на контуре  $L_1$  получим

$$\Phi_0(t) = \Phi_1(t) + \omega(t) \quad \text{на } L_1, \quad (10)$$

$$\Psi_0(t) = \Psi_1(t) + I(t) \quad \text{на } L_1. \quad (11)$$

Здесь

$$I(t) = \frac{R_1^2}{t^2} \left[ \omega(t) + \overline{\omega(t)} \right] - \frac{R_1^2}{t} \omega'(t). \quad (12)$$

Согласно формулам Сохоцкого-Племеля [12] равенства (10) и (12) можно записать следующим образом

$$\Phi_0(t) - \lim_{z_0 \rightarrow t} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z_0} dt_1 = \Phi_1(t) - \lim_{z_1 \rightarrow t} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z_1} dt_1, \quad (13)$$

$$\Psi_0(t) - \lim_{z_0 \rightarrow t} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{I(t_1)}{t_1 - z_0} dt_1 = \Psi_1(t) - \lim_{z_1 \rightarrow t} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{I(t_1)}{t_1 - z_1} dt_1. \quad (14)$$

Здесь точки  $z_0$  и  $z_1$  принадлежат соответственно областям  $S_0$  и  $S_1$ , обход контура  $L_1$  происходит в отрицательном направлении относительно  $S_1$ . На основании последних соотношений (11), (12) аналитические в области  $S_0$  функции

$$\Phi_0(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z_0} dt_1; \quad \Psi_0(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{I(t_1)}{t_1 - z_0} dt_1$$

аналитически продолжимы также в область  $S_1$ . В области  $S_0$  введем новые функции:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t - z} dt, \quad z \in S_0,$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{I(t)}{t - z} dt, \quad z \in S_0.$$

Нетрудно убедиться, что функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  аналитичны в области  $S_0$  и на границе  $L_1$  значения этих функций совпадают со значениями функций, аналитических в области  $S_1$ , т.е. эти функции являются аналитическими во всей области  $S = S_0 + S_1$ .

На основании теоремы аналитического продолжения будем иметь

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_0(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-z} dt, & z \in S_0, \\ \Phi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-z} dt, & z \in S_1, \end{cases} \quad (15)$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi_0(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{I(t)}{t-z} dt, & z \in S_0, \\ \Psi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{I(t)}{t-z} dt, & z \in S_1. \end{cases} \quad (16)$$

Из соотношений (15) и (16) будем иметь в области  $S_0$

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-z} dt, \quad z \in S_0, \quad (17)$$

$$\Psi_0(z) = \Psi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{I(t)}{t-z} dt, \quad z \in S_0,$$

и в области  $S_1$

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-z} dt, \quad z \in S_1, \quad (18)$$

$$\Psi_1(z) = \Psi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{I(t)}{t-z} dt, \quad z \in S_1.$$

На контуре  $L_1$  неизвестную вспомогательную функцию  $\omega(t) \in H$  будем искать в виде ряда Фурье

$$\omega(t) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \beta_k \left( \frac{t}{R_1} \right)^k + \beta_{-k} \left( \frac{R_1}{t} \right)^k \right], \quad (19)$$

где  $\beta_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) – неизвестные коэффициенты.

Положив разложение (19) в соотношения (17), (18), найдем в области  $S_0$ :

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + I_0(z), \quad z \in S_0, \quad (20)$$

$$\Psi_0(z) = \Psi(z) + I_0^*(z), \quad z \in S_0,$$

а в области  $S_1$ :

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + I_1(z), \quad z \in S_1, \quad (21)$$

$$\Psi_1(z) = \Psi(z) + I_1^*(z), \quad z \in S_1.$$

Здесь

$$I_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{-k} \left( \frac{R_1}{z} \right)^k, \quad (22)$$

$$I_0^*(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} [(k-3)\beta_{-k+2} - \bar{\beta}_{k-2}] \left( \frac{R_1}{z} \right)^k,$$

$$I_1(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left( \frac{z}{R_1} \right)^k,$$

$$I_1^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)\beta_{k+2} - \bar{\beta}_{-k-2}] \left( \frac{z}{R_1} \right)^k.$$

Подставляя в краевое условие (6) вместо потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  их выражения, определяемые соотношениями (20), получим

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - \frac{t^2}{R^2} \left[ \frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right] = f_0(t) \quad \text{на } L_0. \quad (23)$$

Здесь  $f_0(t) = - \left[ I_0(t) + \overline{I_0(t)} - tI_0'(t) - \frac{t^2}{R^2} I_0^*(t) \right]$ .

Таким образом, нахождение функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  сводится к решению первой основной задачи теории упругости для круглой области радиуса  $R$  с трещиновидной полостью с концевыми зонами предразрушения, когда на контуре  $L_0$  прибавляется фиктивная нагрузка. Если ввести обозначения

$$N_0 = \left( \frac{R_1}{R} \right)^2 (\beta_0 + \bar{\beta}_0); \quad N_1 = \left( \frac{R_1}{R} - \frac{R}{R_1} \right) \bar{\beta}_{-1} + 2 \left( \frac{R_1}{R} \right) \beta_1; \quad (24)$$

$$N_k = - \left( \frac{R_1}{R} \right)^{-k} \beta_{-k}, \quad k \geq 2;$$

$$N_{-k} = - \left( \frac{R_1}{R} \right)^k \left[ (k+1) + \left( \frac{R_1}{R} \right)^2 (k-1) \right] \beta_{-k} + \left( \frac{R_1}{R} \right)^{k+2} \bar{\beta}_k, \quad k \geq 1,$$

то краевое условие (23) принимает следующий вид

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - \frac{t^2}{R^2} \left[ \frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right] = f_0(t) = N_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ N_k \left( \frac{t}{R} \right)^k + N_{-k} \left( \frac{R}{t} \right)^k \right] \quad \text{на } L_0 \quad (25)$$

Подставляя теперь в (8) вместо функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  их выражения через  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , согласно (21) будем иметь при  $y_1 = 0, |x_1| \leq \ell_1$ ,

$$\Phi(x_1) + \overline{\Phi(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'(x_1)} + \overline{\Psi(x_1)} = f_1(x_1) + f(x_1), \quad (26)$$

где  $f_1(x_1) = - \left[ I_1(x_1) + \overline{I_1(x_1)} + x_1 \overline{I_1'(x_1)} + \overline{I_1^*(x_1)} \right]$ ,

$$f(x_1) = \begin{cases} -p(x) & \lambda_1 < x_1 < \lambda_2 \\ q_{y_1} - iq_{x_1 y_1} & -\ell_1 \leq x_1 \leq \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 \leq x_1 \leq \ell_1 \end{cases}$$

Решение краевой задачи (25), (26) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \Phi_{**}(z); \quad \Psi(z) = \Psi_*(z) + \Psi_{**}(z), \quad (27)$$

где

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t)}{t-z_1} dt, \quad (28)$$

$$\Psi_*(z) = \frac{e^{-2i\alpha_1}}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ \frac{\overline{g_1(t)}}{t - z_1} - \frac{T_1 g_1(t) e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} \right] dt;$$

Здесь

$$\frac{i(1+k_1)}{2\mu_1} g_1(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} [u_1^+ - u_1^- + i(v_1^+ - v_1^-)]; \quad T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0; \quad z_1 = e^{-i\alpha_1} (z - z_1^0). \quad (29)$$

Искомая функция  $g_1(x_1)$  должна удовлетворять дополнительному условию, вытекающему из физического смысла задачи

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1(x_1) dx_1 = 0. \quad (30)$$

Потенциалы  $\Phi_{**}(z)$  и  $\Psi_{**}(z)$  должны быть определены из решения задачи для сплошного круга радиуса  $R$  согласно граничным условиям (25), (26).

Для решения краевой задачи (25) относительно комплексных потенциалов  $\Phi_{**}(z)$  и  $\Psi_{**}(z)$  используем метод Н.И. Мухелишвили [10]. Опуская промежуточные выкладки, приведем полученные формулы для потенциалов  $\Phi_{**}(z)$  и  $\Psi_{**}(z)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{**}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left\{ \left( \frac{1}{zT_1 - 1} + \frac{1}{2} \right) T_1 e^{i\alpha_1} g(t) + \left[ \frac{T_1}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_1 - 2z + T_1}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \right\} dt + \Phi^*(z), \\ \Psi_{**}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ \frac{e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^3}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} g_1(t) + (z^2 \bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + zT_1 \bar{T}_1^2 - 3T_1 \bar{T}_1) \times \frac{e^{-i\alpha_1} \bar{T}_1}{(z\bar{T}_1 - 1)^3} \overline{g_1(t)} \right] dt + \\ &+ \frac{1}{z^2} \Phi^*(z) + \frac{1}{z^2} \bar{\Phi}^* \left( \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi^{*'}(z); \\ \Phi^*(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} f_0(\tau) \left( \frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь, удовлетворяя функциями (27), (28), (31) граничным условиям (26) на берегах трещины со связями между берегами в концевых зонах, после некоторых преобразований получим комплексное интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $g_1(x_1)$ :

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} [R_{11}(t, x_1) g_1(t) + S_{11}(t, x_1) \overline{g(t)}] dt = \pi [f_1(x_1) + f(x_1) + f_2(x_1)], \quad |x_1| \leq \ell_1 \quad (32)$$

Здесь

$$f_2(x_1) = - \left[ \Phi^*(x_1) + \overline{\Phi^*(x_1)} + x_1 \overline{\Phi^{*'}(x_1)} + \overline{\Psi^*(x_1)} \right],$$

$$\Psi^*(z) = \frac{1}{z^2} \Phi^*(z) + \frac{1}{z^2} \bar{\Phi}^* \left( \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi^{*'}(z).$$

Переменные  $x_1, t, \ell_1$  – безразмерные величины, отнесенные к  $R_1$ ;  $R_{nk}, S_{nk}$  определяются по известным соотношениям ([13], формулы (VI. 61)).

Сингулярное интегральное уравнение (32) при условии (30) с помощью процедуры алгебраизации (см. [14], приложение) сводится к системе  $M$  алгебраических уравнений для определения  $M$  неизвестных  $g_1(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ).

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \ell_1 \left[ g_1(t_m) R_{11}(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) + \overline{g_1(t_m)} S_{11}(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) \right] = f_1(x_r) + f(x_r) + f_r(x_r), \quad (33)$$

$$\sum_{m=1}^M g_1(t_m) = 0,$$

где  $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$ ,  $r = 1, 2, \dots, M - 1$ .

Если в системе (33) перейти к комплексно-сопряженным величинам, получим еще  $M$  алгебраических уравнений. В правые части системы (33) входят неизвестные значения давления газа  $p(x_r)$  в узловых точках полости, нормальных  $q_{y_1}(x_r)$  и касательных  $q_{x_1 y_1}(x_r)$  усилий в узловых точках концевых зон полости.

Условием, определяющим неизвестные напряжения в связях между берегами концевых зон трещиновидной полости, является дополнительное соотношение (4). В рассматриваемой задаче это условие удобнее записать для производной раскрытия перемещений берегов полости в концевых зонах.

Используя полученное решение, можно записать

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu_1}{1+k_1} \frac{\partial}{\partial x_1} [C(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1))], \quad (34)$$

где  $x_1$  – аффикс точек берегов трещины в концевых зонах.

Это комплексное уравнение служит для определения усилий  $q_{y_1}$  и  $q_{x_1 y_1}$  в связях между берегами концевых зон.

Для построения недостающих алгебраических уравнений для нахождения приближенных значений усилий  $q_{y_1}(t_{m_1})$  и  $q_{x_1 y_1}(t_{m_1})$  в узловых точках, принадлежащих концевым зонам, потребуем выполнения условий (34) в узловых точках  $t_{m_1}$  ( $m_1 = 1, 2, \dots, M_1$ ), содержащихся в концевых зонах. При этом используется метод конечных разностей. В результате получаем комплексную алгебраическую систему из  $M_1$  уравнений для определения приближенных значений  $q_{y_1}(t_{m_1})$  и  $q_{x_1 y_1}(t_{m_1})$  ( $m_1 = 1, 2, \dots, M_1$ ) в узловых точках концевых зон полости. При этом учитывались граничные условия

$$\text{при } x_0 = \pm 1: q_{y_1}(\ell_1 x_0) = 0, q_{x_1 y_1}(\ell_1 x_0) = 0,$$

соответствующие условиям

$$v_1^+(\pm \ell_1, 0) - v_1^-(\pm \ell_1, 0) = 0, \quad u_1^+(\pm \ell_1, 0) - u_1^-(\pm \ell_1, 0) = 0.$$

Осталось определить коэффициенты  $\beta_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Для их определения вместо  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  используем выражения (20), а вместо  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  – формулы (21) с учетом полученных соотношений для функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , т.е. с учетом соотношений (27) – (28).

Разлагаем искомые функции на  $L_1$  в ряды Фурье

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (d_k + a_k^*) \left(\frac{z}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{-k} \left(\frac{R_1}{z}\right)^k; \quad (35)$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k^* - kd_k) \left(\frac{z}{R}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} [(k-3)\beta_{-k+2} - \beta_{k-2}] \left(\frac{R_1}{z}\right)^k;$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (d_k + a_k^*) \left(\frac{z}{R}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{z}{R_1}\right)^k; \quad (36)$$



$$\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k^* - kd_k) \left(\frac{z}{R}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)\beta_{k+2} - \beta_{-k-2}] \left(\frac{z}{R_1}\right)^k.$$

$$\text{Здесь } d_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t)e^{i\alpha_1}}{T_1^{k+1}} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$a_0^* = \frac{B_0 + N_0^*}{2}; \quad a_k^* = \frac{B_{-k}}{\lambda_*^k} + N_{-k}; \quad \lambda_* = \frac{R_1}{R};$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} g(t) e^{i\alpha_1} f_k(t) dt; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$f_0(t) = -\frac{1}{2T_1}; \quad f_k(t) = \frac{(k-1)\lambda_*^k}{2T_1^{k+1}} + \frac{(1-k)\lambda_*^{k+1}}{T_1^{k-1}}; \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$f_{-k}(t) = \frac{k+1}{2} \lambda_*^{-k} T_1^{k-1} - (k+1) \lambda_*^{-(k+2)} T_1^{k+1} - \frac{\lambda_*^k}{2T_1^{k+1}};$$

$$c_k^* = (k+1) \frac{B_{-k+1}}{\lambda_*^k} - \frac{B_{k+1}}{\lambda_*^k} - (2k+1) N_{-k+2} - N_{k+2}.$$

Подставляя соотношения (35) и (36) в граничное условие (9) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(i\theta)$ , получим бесконечную алгебраическую систему относительно неизвестных коэффициентов  $\beta_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

$$(1 - k_0)(d_0 + a_0^*) - 2\beta_0 = \frac{\mu_0}{\mu_1} \{(1 - k_1)[(d_0 + a_0^*) - \beta_0]\}; \quad (37)$$

$$A_k^* + \beta_{-k} = \frac{\mu_0}{\mu_1} A_k; \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$-k_0 A_{-k}^* + (2k - 1 - k_0) \beta_{-k} - \beta_k = -\frac{k_1 \mu_0}{\mu_1} A_{-k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$\text{Здесь } A_{-k}^* = (d_k + a_k^*) \lambda_*^k; \quad A_k^* = -(c_k^* - kd_k) \lambda_*^{k-1} - (k+1)(d_k + a_k^*) \lambda_*^k;$$

$$A_{-k} = (d_k + a_k^*) \lambda_*^k - \beta_k;$$

$$A_k = -\{(c_{k-2}^* - (k-1)d_{k-1}) \lambda_*^{k-1} + (k-1)\beta_k - \beta_{-k-2}\} - (k+1)[(d_k + a_k^*) \lambda_*^k - \beta_k].$$

Полученные алгебраические системы уравнений не являются пока замкнутыми. Для замкнутости полученных алгебраических уравнений не хватает двух комплексных уравнений, выражающих условия разрешимости интегрального уравнения. Записывая эти условия

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g_1(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0; \quad \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad (38)$$

получим две замкнутые конечные алгебраические системы.

Из-за неизвестных размеров концевых зон трещины даже при линейно-упругих связях системы алгебраических уравнений оказались нелинейными. Для решения нелинейных алгебраических систем использовали метод последовательных приближений [15].

Считается, что разрыв связей на берегах концевых зон трещины ( $x_1 = x_{01}$ ) происходит при выполнении условия

$$\sqrt{[u_1^+(x_0, 0) - u_1^-(x_0, 0)]^2 + [v_1^+(x_0, 0) - v_1^-(x_0, 0)]^2} = \delta_c, \quad (39)$$

где  $\delta_c$  – предельная вытяжка связи.

После некоторых преобразований условие, определяющее критическое значение давления в трещиновидной полости, при которой происходит рост трещины, примет следующий вид:

$$\frac{1 + k_1}{2\mu_1} \cdot \frac{\pi \ell_1}{M} \sqrt{A^2 + B^2} = \delta_c, \quad (40)$$

где  $A = \sum_{m_1=1}^{M_1} v_0(t_{m_1})$ ,  $B = \sum_{m_1=1}^{M_1} u_0(t_{m_1})$ ,  $v_0 = v_1^+ - v_1^-$ ,  $u_0 = u_1^+ - u_1^-$ .

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в концевых зонах трещиновидной полости использовался также алгоритм, подобный методу упругих решений [16]. Считается, что закон деформирования межчастичных связей является линейным при  $V = |(u^+ - u^-) - i(v^+ - v^-)| \leq V_*$ . Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении объединенной системы для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только в случае, если в концевых зонах имеет место  $V > V_*$ . Для таких итераций решается система разрешающих уравнений в каждом приближении для квазихрупких связей с эффективной податливостью, переменной вдоль концевой зоны и зависящей от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению текущего модуля в методе переменных параметров упругости [17].

Принято, что процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия вдоль концевых зон, полученные на двух последовательных итерациях, мало отличаются друг от друга.

Расчеты показывают, что при линейном законе деформирования связей усилия в связях имеют всегда максимальные значения на краю концевой зоны. Аналогичная картина наблюдается и для величин раскрытия трещин. Раскрытие трещиновидной полости на краю концевой зоны имеет максимум при линейном и нелинейном законах деформирования, причем с увеличением относительной податливости связей возрастает раскрытие трещиновидной полости.

Совместное решение уравнения (40) с полученными нелинейными конечными алгебраическими системами и уравнениями течения газа в трещиновидной полости позволяет при заданных характеристиках материалов определить критическую зависимость давления газа в полости от длины трещины, усилия в связях и размеры концевых зон для состояния предельного равновесия.

Для численного решения этих уравнений наиболее целесообразно применять следующий способ: функция  $p(x_1)$  ищется в виде многочлена с неизвестными коэффициентами, а уравнение для  $p(x_1)$  удовлетворяется приближенно в смысле наибольшей близости к нулю среднеквадратичной невязки. Причем неизвестные коэффициенты определяются из условия минимума полученной функции.

Физические механизмы локальной неустойчивости, играющие неодинаковую роль в различных материалах, имеют общую природу: они связаны с локальной концентрацией деформации. Согласно (39) при  $V < \delta_c$  процесс локально устойчив и размеры полости в плане не изменяются. Как только хотя бы в одной точке контура будет достигнуто равенство  $V = \delta_c$ , в малой окрестности этой точки начинается неустойчивый процесс “горение-разрушение”. Заметим, что в некоторых случаях система в целом может еще оставаться устойчивой, т.е. форма контура трещиновидной полости меняется в точках, где  $V = \delta_c$ , “не катастрофически быстро”. Реализация такого случая вполне реальна [1].

Локальным условием, определяющим устойчивость режима для левого конца трещиновидной полости, будет

$$C(\lambda_1, \sigma_1(\lambda_1)) \sigma_1(\lambda_1) \leq \delta_c. \quad (41)$$

Аналогично, условием, определяющим устойчивость режима для правого конца полости, будет

$$C(\lambda_2, \sigma_1(\lambda_2)) \sigma_1(\lambda_2) \leq \delta_c. \quad (42)$$

Локальное условие устойчивости режима позволяет путем численного расчета для каждого конкретного вида топлива прогнозировать предельно допустимый размер трещиновидной полости (технологического дефекта). Ниже рассмотрен приближенный расчет в предположении, что

$$h_0(x) = \text{const}, \quad h_0 \gg v, \quad h_0 \gg h_c,$$

$$f(p) = A + Bp, \quad \int_0^\lambda p(x) dx = \frac{1}{2} \lambda (p_1 + p_0).$$

Здесь  $A$  и  $B$  – эмпирические постоянные.

При вычислении смещений, усилий в связях и размеров концевых зон считалось, что на стенки полости действует постоянное давление  $(p_1 + p_0)/2$ . На основании этих упрощений из уравнений системы (4) находим

$$\frac{p_1}{\rho_1^\chi} = \frac{p_0}{\rho_0^\chi}; \quad \rho_1 V_{x_1} - \rho_0 V_{x_0} = \frac{\rho_s}{h_0} \left[ A\lambda + \frac{1}{2} B\lambda (p_1 + p_0) \right];$$

$$V_{x_1} = \frac{\rho_s}{\rho_0^2} (A + Bp); \quad \frac{V_{x_1}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_{x_0}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Из этих соотношений определяются  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $V_{x_1}$ ,  $V_{x_0}$ .

При выполнении расчетов системы (33), (34), (37), (38) в каждом приближении решались методом Гаусса с выбором главного элемента при разных значениях  $M$  и  $n$ .

На основании численного расчета найдена зависимость параметра длины концевых зон от величины интенсивности давления газа в полости  $p/\sigma_s$  для различных значений длин трещиновидной полости  $\varepsilon = (\lambda_2 - \lambda_1)/R$  и параметра  $R_1/R$ .

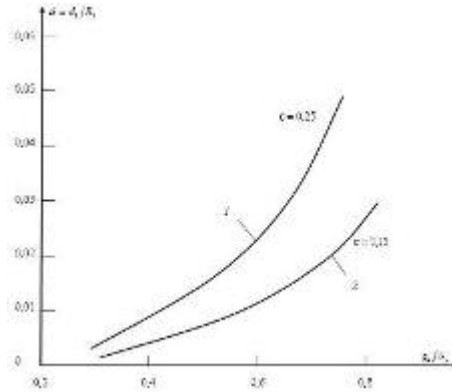


Рис. 2. Зависимости безразмерной длины концевой зоны для левого конца полости от параметра  $p/\sigma_s$  для различных размеров полости  $\varepsilon = (\lambda_2 - \lambda_1)/R = 0,15; 0,25$

На рис. 2 представлены графики зависимости безразмерной длины концевой зоны для левого конца полости от безразмерного параметра  $p/\sigma_s$  для следующих значений свободных параметров

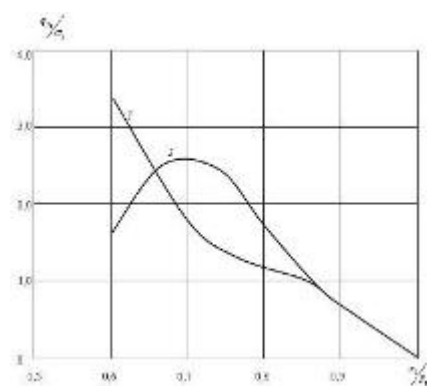


Рис. 3. Зависимости распределения нормальных усилий  $q_{y_1}$  в связях для правой концевой зоны трещиновидной полости (кривая 1 – для линейных связей, кривая 2 – билинейного закона деформирования связей)

$$k_0/k_1 = 1,5; \quad \mu_0/\mu_1 = 0,5; \quad R_1/R = 0,8; \quad \varepsilon = 0,15; 0,25.$$

На рис. 3 построены графики распределения нормальных усилий  $q_{y_1}$  в связях для правой концевой зоны трещиновидной полости (кривая 1 – для линейных связей, кривая 2 – билинейного закона деформирования связей).

На рис. 4 построены графики распределения максимального значения модуля вектора усилий в зависимости от относительного размера концевой зоны (сплошная линия соответствует правой концевой зоне, а штриховая линия – левой концевой области трещиновидной полости).

Расчеты показывают, что подкрепляющий цилиндр существенно снижает раскрытие трещиновидной полости, или другими словами, позволяет горящему твердому топливу выдерживать гораздо большие нагрузки по сравнению со случаем отсутствия подкрепления с натягом.

Меняя значения параметров  $\alpha_1$  и  $z_1^0$ , характеризующих расположение трещиновидной полости в сечении топлива, можно исследовать различные случаи расположения полости в материале твердого топлива.

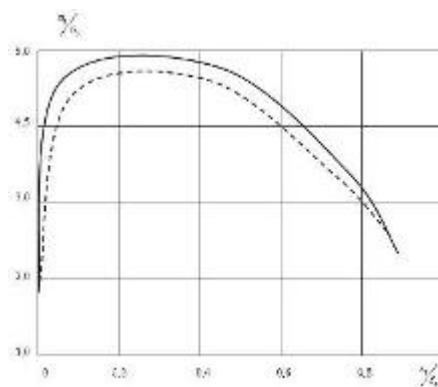


Рис. 4. Распределение максимального значения модуля вектора усилий в зависимости от относительного размера концевой зоны (сплошная линия соответствует правой концевой зоне, а штриховая линия – левой концевой области трещиновидной полости)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Соркин, Р. Е.* Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе / Р. Е. Соркин. – М. : Наука, 1967. – 319 с.
- [2] *Шапиро, Я. М.* Основы проектирования ракет на твердом топливе / Я. М. Шапиро, Г. Ю. Мазинг, Н. Е. Прудников. – М. : Военное изд-во, 1978. – 621 с.
- [3] *Budiansky, B.* Fiber-matrix de bonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites / B. Budiansky, A. G. Evans, J. W. Hutchinson // Int. J. Solid Structures. – 1995. – Vol. 32, № 3–4. – P. 315–328.
- [4] *Ji, H.* Adhesion via Connector Molecules: the many-stitch problem / H. Ji, P. G. de Gennes // Macromolecules. – 1993. – Vol. 26. – P. 520–525.
- [5] *Cox, B. N.* Concepts for bridged cracks fracture and fatigue / B. N. Cox, D. B. Marshall // Acta Met. Mater. – 1994. – Vol. 42, № 2. – P.341–363.
- [6] *Goldstein, R. V.* Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints / R. V. Goldstein, V. F. Bakirov, M. N. Perelmuter // Proc. Inst. Technol. Russian Ac. of Sci. – 1997. – Vol. 13. – P. 115–125.
- [7] *Черепанов, Е. П.* Механика хрупкого разрушения / Е. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [8] *Гаджиев, В. Д.* Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами / В. Д. Гаджиев, В. М. Мирсалимов // Оптимальное проектирование механических систем. – Баку, 1999. – С. 50–63.
- [9] *Гольдштейн, Р. В.* Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Известия РАН. МТТ. – 2001. – № 1. – С. 94–112.
- [10] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [11] *Sherman, D. J.* On the problem of plane strain in non-homogeneous media / D. J. Sherman // Proc. Symposium held in Warsaw. – 1958. – P. 3–20.
- [12] *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
- [13] *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинках оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наук. думка, 1976. – 443 с.
- [14] *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [15] *Мирсалимов, В. М.* К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // ПММ. – 2007. – Т. 71, вып. 1. – С. 132–151.
- [16] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Упругопластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. [СПб.] : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [17] *Биргер, И. А.* Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М., 1975. – С. 51–73.

V. M. Mirsalimov, M. E. Rustamov

**MODELLING OF DEVELOPMENT OF CRACK-VISIBLE CAVITY IN THE  
BURNING SOLID FUEL FASTENED TO THE EXTERNAL CYLINDER**

*Azerbaijan Technical University*

**Abstract.** The flat stationary problem about local destruction of the burning fuel weakened by a rectilinear crack-visible cavity the surface of which burns is solved. The fuel is strengthened with the protective cylinder of other elastic material. The mathematical description of settlement model about the development of crack-visible cavity in the fuel is given. The definition of the unknown parameters characterising the disclosing and growth of a crack-visible cavity, comes to the solution of the singular integrated equation. The growth condition of crack-visible cavities is formulated with consideration of the criterion of a limiting extract of the material bondings. The local condition of stability (safety) of a mode “burning-destruction” is established.

**Keywords:** burning firm fuel, a crack-visible cavity with bondings between margins in the end zones, cohesive forces, a gas current in a cavity.

*Мирсалимов Вагиф Мирахмедович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку*

**e-mail:** mir-vagif@mail.ru

*Рустамов Бахтияр Эйюб оглы*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Азербайджанский технический университет, г. Баку*

**e-mail:** brrustam@mail.ru

*Mirsalimov Vagif Mirahmedovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Azerbaijan Technical University, Baku*

*Rustamov Bakhtiyar Eyyub oglu*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Azerbaijan Technical University, Baku*

Ю. В. Немировский

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН*

**Аннотация.** Рассматривается динамическое деформирование жесткопластических армированных пластин применительно к процессам гашения динамических нагрузок взрывного тока.

**Ключевые слова:** деформирование пластины, пластичность, динамика, армированные.

УДК: 539

Защита многих ответственных промышленных и гражданских объектов обеспечивается путем создания стационарных преград, основное назначение которых заключается в максимальном гашении энергии динамических нагрузок взрывного типа. Для оценки эффективности таких преград обычно исследуют зависимости параметров их остаточной повреждаемости от амплитуды и формы импульса ударной волны. Применительно к однородным изотропным пластинам решения часто получаются на основе модели идеального жесткопластического тела, показывают достаточную эффективность результатов и вполне удовлетворительное совпадение с экспериментами. Решения многих задач и обзоры полученных к настоящему времени результатов можно найти в [1]–[3].

Во многих областях современной техники (особенно в авиации и машиностроении) специалисты пришли к выводу, что однородные материалы и конструкции давно исчерпали свои возможности по созданию конструктивных элементов, отвечающих современным требованиям, и возлагают большие надежды на композитные конструкции. Ясно, что на этом пути можно создать эффективные конструкции защитных преград.

В настоящее время существует большое количество технологий, позволяющих создавать слоистые и слоисто-волоконистые конструкции из практически любых наборов материалов. К таким технологическим методам можно отнести сварку взрывом и диффузионную сварку под давлением, склеивание, горячую пропитку и прокатку под давлением с последующими процедурами управляемого охлаждения и отвердевания, вакуумно-химическое осаждение из газовой среды, плазменное и холодное газодинамическое напыление, ударно-барабанное упрочнение поверхностных слоев, магнитно-ультразвуковую штамповку, локальные методы местного глубокого пластического деформирования и многие другие. Для конструкций, создаваемых из различных наборов металлов и предназначенных к восприятию взрывных нагрузок, технологию сварки взрывом следует, по-видимому, считать наиболее простой, дешевой, обеспечивающей прочное соединение практически любых металлов на больших площадях. К настоящему времени разработаны достаточно надежные технологии создания слоистых и слоисто-волоконистых полиметаллических конструкций методами сварки взрывом [4]–[6]. Проблема анализа поведения и оценки эффективности таких конструкций с точки зрения их

---

Поступила 15.06.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (интеграционный проект № 72 от 15.01.2009).

повреждаемости при воздействии нагрузок взрывного типа остается пока открытой и будет изучена в данной работе.

Рассмотрим гибридные слоисто-волоконистые плиты из набора армированных и неармированных слоев, расположенных симметрично относительно отсчетной (срединой) поверхности. Будем предполагать, что матричные материалы слоев являются идеальными жесткопластическими (физически изотропными или ортотропными), подчиняющимися условию пластичности Мизеса-Хилла

$$f_k(\bar{\sigma}_{1k}, \bar{\sigma}_{2k}, \bar{\sigma}_{3k}) = a_{11k}\bar{\sigma}_{1k}^2 + a_{12k}\bar{\sigma}_{1k}\bar{\sigma}_{2k} + a_{22k}\bar{\sigma}_{2k}^2 + a_{13k}\bar{\sigma}_{3k}^2 = \bar{\sigma}_{0k}^2 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1)$$

и закону пластического течения

$$\dot{\epsilon}_{1k} = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \bar{\sigma}_{1k}}, \quad \dot{\epsilon}_{2k} = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \bar{\sigma}_{2k}}, \quad \dot{\epsilon}_{3k} = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \bar{\sigma}_{3k}}. \quad (\lambda_k > 0) \quad (2)$$

Здесь  $\bar{\sigma}_{1k}, \bar{\sigma}_{2k}, \bar{\sigma}_{3k}$  – нормальные и касательные напряжения в связующем материале  $k$ -го слоя;  $\dot{\epsilon}_{1k}, \dot{\epsilon}_{2k}, \dot{\epsilon}_{3k}$  – скорости деформаций,  $\bar{\sigma}_{0k}$  – предел текучести связующего материала  $k$ -го слоя;  $a_{12k}, a_{22k}, a_{13k}$  – коэффициенты ортотропии матричного материала в  $k$ -м слое.

Если  $k$ -й слой будет армированным, то для него будет использована структурная модель армированного слоя, изложенная в [7], и соответствующие ей структурный критерий пластичности армированного слоя и закон пластического деформирования. Если гибридный слоисто-волоконистый пакет собран из металлов, то для него правомерно использовать гипотезы деформирования Кирхгофа-Лява, в соответствии с которыми

$$\dot{\epsilon}_{1k} = -z\dot{\kappa}_1, \quad \dot{\epsilon}_{2k} = -z\dot{\kappa}_2, \quad \dot{\epsilon}_{3k} = -z\dot{\kappa}_3, \quad (3)$$

где  $z$  – координата вдоль нормали к срединной поверхности,  $\dot{\kappa}_1, \dot{\kappa}_2, \dot{\kappa}_3$  – компоненты скоростей изгиба и кручения плиты, точка обозначает частную производную по времени  $t$ .

На основе принципа виртуальных мощностей для рассматриваемых плит имеем

$$\iiint_V (\sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3) dv = \iint_S P \dot{w} ds - \iiint_V \rho \dot{w} \dot{w} dv, \quad (4)$$

где  $\dot{w}$  – скорость прогиба.

Так же, как и в случае неармированных слоистых плит [8], на основе соотношений структурной модели армированного слоя и зависимостей (1) – (3) можно получить выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_{1k} \dot{\epsilon}_1 + \sigma_{2k} \dot{\epsilon}_2 + 2\sigma_{3k} \dot{\epsilon}_3 = |z| \{ 2 \sigma_{0k} \Psi_k^{1/2} (1 - \Omega_k) + \sum_{j=1}^4 |\omega_{jk} \sigma_{jk}^* l_{jk}^2 \dot{\kappa}_1 + \\ + (1 - l_{jk}^2) \dot{\kappa}_2 + l_{jk} (1 - l_{jk}) \dot{\kappa}_3 \} = |z| R_k, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Psi_k = b_{11k} \dot{\kappa}_1^2 - b_{12k} \dot{\kappa}_1 \dot{\kappa}_2 + b_{22k} \dot{\kappa}_2^2 + b_{13k} \dot{\kappa}_3^2,$$

$$b_{11k} = \frac{a_{22k}}{\Delta_k}, \quad b_{22k} = \frac{a_{11k}}{\Delta_k}, \quad b_{12k} = \frac{a_{12k}}{\Delta_k}, \quad b_{13k} = \frac{1}{a_{13k}},$$

$$\Delta_k = 4a_{11k}a_{22k} - a_{12k}^2, \quad l_{jk} = \cos \alpha_{jk}, \quad (-\pi/2 \leq \alpha_{jk} \leq \pi/2), \quad \Omega_k = \sum_{j=1}^4 \omega_{jk},$$

$\sigma_{0k}$  – предел текучести матричного материала,  $\sigma_{jk}^*$  – предел текучести  $j$ -го семейства волокон в  $k$ -м армированном слое,  $\omega_{jk}$  – коэффициенты удельной интенсивности волокон  $j$ -го семейства в  $k$ -м слое.

Тогда уравнение (4) можно записать в виде



$$2 \iint_S \sum_{k=1}^n R_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) ds = \iint_S [P - 2\ddot{w} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1})] \dot{w} ds, \quad (6)$$

$$\rho_k = (1 - \Omega_k) \rho_{0k} + \sum_{j=1}^4 \omega_{jk} \rho_{jk}, \quad (7)$$

$\rho_{0k}$ ,  $\rho_{jk}$  – удельные массы материалов связующего и волокон, составляющих  $k$ -й армированный слой,  $h_k$  – координаты границ раздела слоев.

Будем считать теперь приближенно, что скорость прогиба пластины может быть представлена в форме

$$\dot{w}(x, y, t) = \dot{A}(t) \chi(x, y), \quad (8)$$

где  $\chi(x, y)$  – заданная функция координат, удовлетворяющая условиям закрепления на контуре. Например, для шарнирно опертой прямоугольной пластины со сторонами  $a$  и  $b$  можно принять

$$\chi = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (9)$$

для защемленной прямоугольной пластины

$$\chi = (1 - \cos \frac{\pi x}{a})(1 - \cos \frac{\pi y}{b}). \quad (10)$$

В случае двусвязной эллиптической защемленной пластины

$$\chi = (1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2})(1 - \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2}), \quad (11)$$

где  $a_m, b_m$  ( $m = 1, 2$ ) – полуоси контурных эллипсов.

При подстановке выражений (8) с учетом зависимостей (9) – (11) в уравнение (6) после выполнения интегрирования по поверхности пластинки будем иметь уравнение вида:

$$\ddot{A} = P(t) d_1 - d_2, \quad (12)$$

где в коэффициентах  $d_1, d_2$  отображена информация о размерах и свойствах слоев, структуре армирования, геометрической форме пластины и условиях ее закрепления. В общем случае предполагается, что все слои могут быть армированными различными структурами прямолинейных и криволинейных волокон или некоторые из слоев могут быть однородными (неармированными). Из (12), принимая  $\ddot{A} = 0$ , получим выражение для предельной амплитуды давления

$$P^* = d_1/d_2. \quad (13)$$

Начальные условия для уравнения (13) имеют вид

$$A(0) = \dot{A}(0) = 0,$$

и тогда решение задачи можно записать в виде

$$A(t) = d_1 J(t) - \frac{1}{2} d_2 t^2, \quad \dot{A}(t) = d_1 I(t) - d_2 t, \\ J(t) = \int_0^t \left( \int_0^\tau P(\gamma) d\gamma \right) d\tau, \quad I(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau.$$

Время остановки  $t_f$  определяется из условия  $\dot{A}(t) = 0$ , и тогда амплитуда остаточного прогиба будет равна

$$A^* = A(t_f) = d_1 J(t_f) - \frac{d_2}{2} t_f^2. \quad (14)$$

Полученное аналитическое решение позволяет решать задачу о создании наиболее эффективных преград при воздействии нагрузок взрывного типа. Для этого необходимо подобрать материалы слоев конструкции и структуры армирования из условия обеспечения максимального значения предельной нагрузки  $P^*$ , минимального значения амплитуды  $A^*$  остаточной повреждаемости или минимального уровня остаточного объема вмятины

$$V^* = A^* \iint_S \chi(x, y) dx dy.$$

В случае армирования волокнами постоянного поперечного сечения интенсивности армирования  $\omega_{jk}$  и углы траекторий армирования  $\alpha_{jk}$  связаны соотношениями ([9])

$$\frac{\partial}{\partial x}(\omega_{jk} \cos \alpha_{jk}) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega_{jk} \sin \alpha_{jk}) = 0$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мазалов, В. Н.* Динамика тонкостенных пластических конструкций / В. Н. Мазалов, Ю. В. Немировский // Проблемы динамики упругопластических сред. Новое в зарубежной науке. Механика. – М. : Мир, 1975. – Вып. 5. – С. 155–247.
- [2] *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 1984. – 234 с.
- [3] *Немировский, Ю. В.* Динамическое сопротивление плоских пластических преград / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова. – Новосибирск : ГЕО, 2009. – 311 с.
- [4] *Дерибас, А. А.* Физика упрочнения и сварки взрывом / А. А. Дерибас. – Новосибирск : Наука, 1972. – 188 с.
- [5] *Яковлев, И. В.* Сварка взрывом армированных композитных материалов / И. В. Яковлев, Л. Д. Сиротенко, А. М. Ханов. – Новосибирск : Наука, 1991. – 119 с.
- [6] *Fleck, J.* Explosive welding of composite materials / J. Fleck, A. Laber, R. Leonard // J. Compos. Mater. – 1969. – Vol. 3, № 4. – P. 669–701.
- [7] *Немировский, Ю. В.* Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя / Ю. В. Немировский // ПМТФ. – 1969. – № 5. – С. 81–88.
- [8] *Немировский, Ю. В.* Рациональное проектирование плоских слоистых преград при воздействии взрывных нагрузок / Ю. В. Немировский // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф : тр. VII Всеросс. науч. конф. (Красноярск, 13–17 окт. 2003 г.). – Красноярск. – 2003. – Т. 1. – С. 191–194.
- [9] *Бушманов, С. Б.* Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения / С. Б. Бушманов, Ю. В. Немировский // Механика композиционных материалов. – 1983. – № 2. – С. 278–284.

Yu. V. Nemirovsky

## DYNAMIC DEFORMATION OF THE STIFF-PLASTIC REINFORCED PLATES

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences*

**Abstract.** The dynamic deformation of the stiff-plastic reinforced plates is analyzed relating to the clearing processes of the dynamic explosive current sink.

**Keywords:** deformation of the plate, plasticity, dynamics, reinforced.

*Немировский Юрий Владимирович*

*доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск*

**e-mail:** nemirov@itam.nsc.ru

*Nemirovsky, Yury Vladimirovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

В. И. Одиноков, А. Н. Прокудин

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ВЗРЫВОМ ГАЗОВОЗДУШНОЙ СМЕСИ

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН*

**Аннотация.** В работе решается осесимметричная задача о воздействии взрыва газозвдушной смеси на ледяную пластину конечной толщины. Математическая модель процесса строится с использованием уравнений теории упругости для малых деформаций и уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Сформулированная система уравнений решается апробированным численным методом. В результате численных расчетов получены зависимости максимальной толщины разрушаемого льда от объема газозвдушной смеси.

**Ключевые слова:** разрушение ледяного покрова, математическое моделирование, взрыв газозвдушной смеси, напряженно-деформированное состояние.

УДК: 539.3

**Введение.** Одним из возможных путей решения энергетических проблем человечества является добыча нефти и газа на месторождениях арктического шельфа, освоение которых существенно осложняется ледяным покровом. Лёд затрудняет или даже делает невозможной навигацию, а также представляет серьезную опасность для морских нефте- и газодобывающих платформ. В связи с этим возникает необходимость разрушения морского ледяного покрова для создания судоходных каналов и обеспечения безопасности морских платформ. Традиционные способы разрушения обладают определенными недостатками: использование ледоколов связано с высокими энергетическими затратами, подрыв зарядов конденсированных взрывчатых веществ обладает негативным влиянием на экологию акватории. Определенными преимуществами по сравнению с конденсированными взрывчатыми веществами обладают газозвдушные взрывчатые смеси: они значительно дешевле, а их взрыв не оказывает губительного влияния на фауну водоёма.

В работе рассматривается процесс разрушения ледяной пластины конечной толщины с помощью взрыва газозвдушной смеси. При этом принимается, что газозвдушная смесь занимает полость цилиндрической формы в сплошном ледяном покрове (рис. 1). Так как температура льда в нижней части близка к нулю, то выемку цилиндрической формы несложно выполнить либо специальным подводным устройством, либо винтом, установленным на подводной лодке. Инициирование подводного взрыва может осуществляться одним из следующих способов [1], [2]: детонирующие шнуры, огневые шнуры, зажигательные трубки, электропровода.

**1. Математическая модель процесса.** Расчетная схема процесса с учетом осевой симметрии представлена на рис. 2, где I – ледяная пластина, II – вода, III – газозвдушная смесь.

---

Поступила 09.06.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ДВО РАН (код проекта 09-II-УО-03-002).

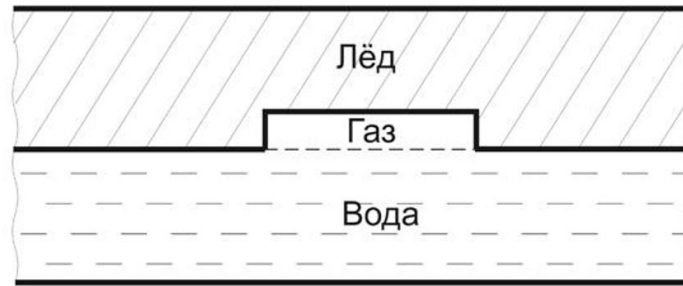


Рис. 1. Расположение газовой смеси в ледяном покрове

На ледяную пластину сверху действует атмосферное давление  $p_1$ . Периферийная область находится на значительном расстоянии от смеси III:  $R_2 \gg R_1$ . В области III задается давление  $p_2$ , которое зависит от состава смеси. Таким образом, получаем систему: «ледяная пластина – вода», которая подвергается воздействию взрыва газовой смеси.

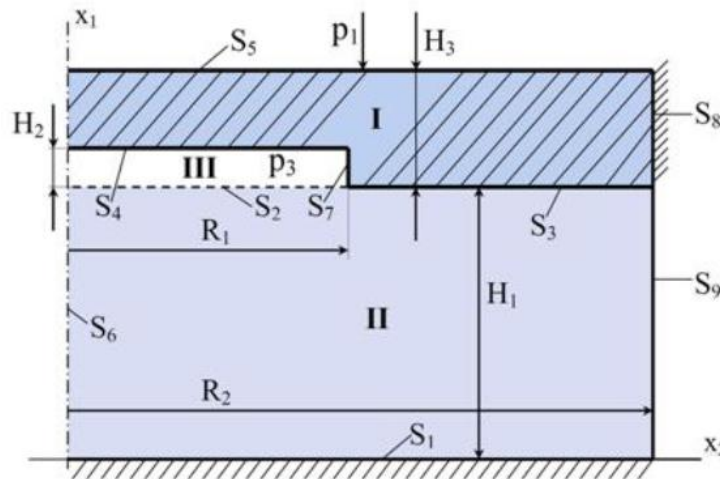


Рис. 2. Расчетная схема процесса

Далее запишем систему определяющих уравнений для областей I и II.

Длительность рассматриваемого процесса невелика и примерно равна времени сгорания газовой смеси, которое по данным [3] составляет 0.1 с. В этом случае можно принять [4], что лед (область I) ведет себя как упругое тело, подчиняющееся закону Гука, и разрушается без возникновения существенных пластических деформаций. Кроме того, примем, что ледяная пластина является однородной, несжимаемой и изотропной. Таким образом, система уравнений в области I в декартовой системе координат выглядит следующим образом:

уравнения движения:

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = \rho_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \right); i, j, k = 1, 2, 3; t = I; \quad (1)$$

закон Гука для малых деформаций:

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2(G)_t\epsilon_{ij}; i = 1, 2, 3; t = I; \quad (2)$$

уравнение несжимаемости:

$$v_{i,i} = 0; i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

в которых  $t$  – идентификатор области;  $[\sigma_{ij}]$  – тензор тензор напряжений;  $F_i^t$  – проекция удельной объемной силы на координатные оси  $x_i (i = 1, 2, 3)$ ;  $\rho_t$  – плотность материала;  $v_i$  – проекция скоростей перемещений на координатные оси  $x_i (i = 1, 2, 3)$ ;  $\tau$  – время;  $\sigma$  – гидростатическое напряжение;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $G_t$  – модуль сдвига в области  $t$ ;  $[\epsilon_{ij}]$  – тензор деформаций: в уравнениях имеет место суммирование по повторяющимся индексам.

Для малых деформаций справедливо равенство  $\xi_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau}$ , где  $\xi_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций сдвига  $\xi_{ij} = 0.5(v_{i,j} + v_{j,i})$ . Отсюда  $\xi_{ij} = \int \xi_{ij} d\tau \cong \sum_m \xi_{ij} d\tau_m$ , где  $m$  – номер временного шага.

Вода (область II) принималась вязкой, несжимаемой жидкостью. Система уравнений для области II:

уравнения Навье–Стокса:

$$F_i^t - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i = \rho_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \right); i, k = 1, 2, 3; t = II; \quad (4)$$

уравнения несжимаемости:

$$v_{i,i} = 0; i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Здесь  $p$  – давление;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Взрыв газовой подушки моделировался с помощью задания давления  $p_2$  на поверхностях  $S_2, S_4, S_7$  области III. Продолжительность процесса определялась толщиной газовой подушки и скоростью горения смеси  $v_r$ :

$$\tau_r = \frac{H_2}{v_r}$$

В ходе процесса давление изменялось от 0 до конечного  $p_r$  давления по линейному закону. В качестве газовой смеси принимался природный газ, а давление  $p_r$  и скорость горения  $v_r$  задавались с помощью экспериментальных данных [3].

Для построения численной схемы решения задачи системы уравнений (1–3) и (4–5) приводились к единому виду в эйлеровой системе координат для областей I и II:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + F_i^t &= \rho_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \right); i, j, k = 1, 2, 3; t = I, II, \\ \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} &= 2\lambda_t C_{ij}^t; \begin{cases} \lambda_t = G_t; C_{ij}^t = \epsilon_{ij}; t = I, \\ \lambda_t = \mu; C_{ij}^t = \xi_{ij}; t = II, \end{cases} \\ v_{i,i} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что при подстановке уравнений  $\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2\mu\xi_{ij}$  в уравнение движения при условии несжимаемости жидкости (5) получим уравнение (4).

Граничные условия с учетом осевой симметрии (рис. 2):

$$v_3 = 0; \xi_{13} = 0; \xi_{23} = 0; \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (7)$$

Давление на ледяную пластину

$$\sigma_{11} \Big|_{S_5} = 0. \quad (8)$$

Условие непротекания на дне водоёма:

$$v_1 \Big|_{S_1} = 0. \quad (9)$$

Давление взрыва газозвушной смеси:

$$\sigma_{22} \Big|_{S_7} = -p_3; \sigma_{11} \Big|_{S_i} = -p_3; i = 2, 4. \quad (10)$$

Условие на оси симметрии:

$$v_2 \Big|_{S_6} = 0. \quad (11)$$

Условие на внешней границе расчетной области:

$$\sigma_{22} \Big|_{S_9} = -p_1 - \gamma_1 H_2 - \gamma_2 h; (0 \leq h \leq H_1). \quad (12)$$

Для закрепления ледяной пластины с основой на поверхности задавался закон трения в виде:

$$\sigma_{21} \Big|_{S_8} = -\omega \sigma_s \frac{v_{ск}}{|v_u|}, \quad (13)$$

где  $v_{ск}$  – скорость скольжения области I относительно основы:  $v_{ск} = v_1 \Big|_{S_8} - v_1^*$ ,  $v_1^*$  – скорость основы,  $v_1^* = 0$ ,  $|v_u|$  – нормирующая скорость,  $\sigma_s$  – условный предел текучести льда;  $\omega$  – коэффициент трения (принималось  $\omega = 1000$ ). При этом скорость на поверхности  $S_8$ :

$$v_1 \Big|_{S_8} = 0. \quad (14)$$

Трение на поверхностях контакта разных областей I, II, III принималось равным нулю:

$$\sigma_{21} \Big|_{S_i} = 0, (i = 6, 7, 9); \sigma_{12} \Big|_{S_i} = 0, (i = 1, \dots, 5). \quad (15)$$

Начальные значения скоростей перемещений и деформаций по всем областям I, II, III принимались нулевыми:

$$v_1 = 0; v_2 = 0; \epsilon_{ij} = 0, i, j = 1, 2, 3. \quad (16)$$

**2. Методика проведения численных расчетов.** Для решения сформулированной системы уравнений (6) с учетом граничных (7–15) и начальных условий (16) использовался апробированный численный метод [5], [6]. Численная схема решения системы уравнений (6) и алгоритм расчета приведены в работах [7] и [8] соответственно.

Задача решалась по шагам времени  $\Delta_m$ ,  $\tau = \sum_m \Delta \tau_m$ .

При анализе напряжений в ледяной пластине использовались следующие прочностные характеристики льда:

- Предел прочности льда при растяжении [9]:  $\sigma_p = 2$ МПа.
- Предел прочности льда при сжатии [9]:  $\sigma_c = 3$ МПа.
- Предел прочности льда на изгиб [10]:  $\sigma_{и} = 0.8$ МПа.

Возникновение в ледяном покрове напряжений, превышающих вышеуказанные предельные значения  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_{и}$ , свидетельствует лишь о начале трещинообразования, которое, вообще говоря, может и не привести к требуемому пролому ледяного покрова. Результаты натурных экспериментов по разрушению льда [11] показали, что ледяной покров, разделенный магистральными трещинами, способен выдержать дополнительную нагрузку, а энергия, требуемая для пролома льда, значительно выше энергии, требуемой для образования трещин. Поэтому

для более полного моделирования процесса разрушения ледяного покрова необходимо учитывать образование и развитие трещин в нем. Для решения этой проблемы авторы использовали следующий подход.

После каждого временного шага отыскивались и отмечались грани расчетной сетки, на которых напряжения превысили какие-либо из предельных значений:  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_n$ . Далее на отмеченных гранях переназначались граничные условия, а именно обнулялись касательные напряжения  $\sigma_{ij} (i \neq j, j = 1, 2)$  и деформации  $\epsilon_{ij} (i \neq j, j = 1, 2)$ . После чего следовал следующий шаг по времени.

**Результаты расчетов.** При проведении численных расчетов использовались следующие значения физико-механических параметров льда:  $G_1 = 29.2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ , плотность  $\rho_1 = 920 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$  [9]. Коэффициент вязкости воды по данным [12]  $\mu = 0.017608 \frac{(\text{г} \cdot \text{сек})}{\text{см}^2}$ , плотность воды:  $\rho_1 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Давление  $p_r$  и скорость горения  $v_r$  задавались по экспериментальным данным [3]:  $p_r = 7$  атм,  $v_r = 1$  м/с.

Основные геометрические параметры задачи варьировались следующим образом: радиус газовоздушной подушки  $R_1$ : 2, 3, 4, 5, 6, 7 м, толщина газовоздушной подушки  $H_2$ : 2, 3, 4, 5 см, толщина льда  $H_3$ : 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4 м. Глубина акватории  $H_1 = 6$  м. Радиус расчетной области  $R_2 = 100$  м.

Результаты расчетов показали, что в ходе процесса в области  $R < R_1$  нижние слои ледяного покрова сжимаются, а верхние – растягиваются (см. рис. 3 и 4).

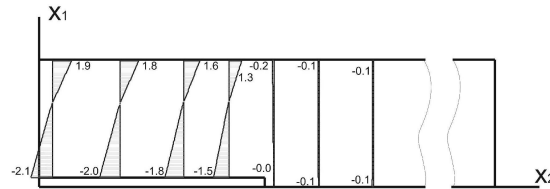


Рис. 3. Эпюры напряжений  $\sigma_{22}$  при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=1$  м,  $\tau = 0.010$  с

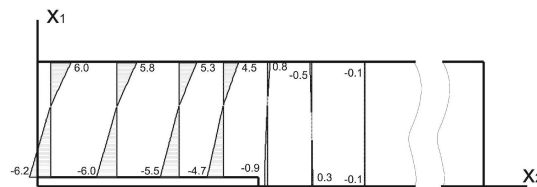


Рис. 4. Эпюры напряжений  $\sigma_{22}$  при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=1$  м,  $\tau = 0.015$  с

Рассмотрим процесс разрушения ледяной пластины при следующих геометрических параметрах газовоздушной подушки (см. рис. 2):  $R_1 = 3$  м,  $H_2 = 3$  см. Эпюры напряжений  $\sigma_{22}$  на шагах времени 0.01 с. и 0.015 с. при толщине льда  $H_3 = 1$  м. приведены на рисунках 3 и 4 соответственно. Распространение трещин во льду на временных шагах 0.015 с, 0.02 с и 0.025 с показано на рисунках 5, 6 и 7. Видим (см. рис. 4 и 5), что на временном шаге 0.015 с в области  $R < R_1$  от возникающих напряжений образуются концентрические трещины. В



дальнейшем (см. рис. 6 и 7) происходит рост концентрических трещин в области  $R < R_1$ , а также появление новых в периферийной области  $R > R_1$ . К моменту времени 0.025 с (см. рис. 7) в центральной области появляются многочисленные сквозные нарушения сплошности, что можно рассматривать как потерю несущей способности ледяного покрова. При этом скорость выброса льда  $v_1$  значительна и превышает 14 м/с.

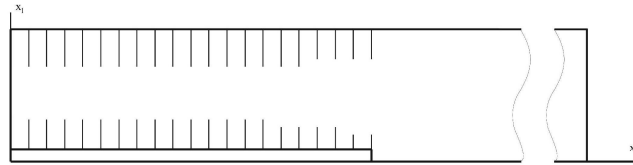


Рис. 5. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=1$  м,  $\tau =0.015$  с

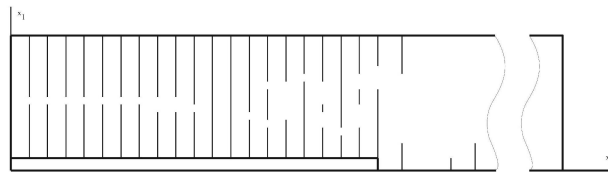


Рис. 6. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=1$  м,  $\tau =0.020$  с

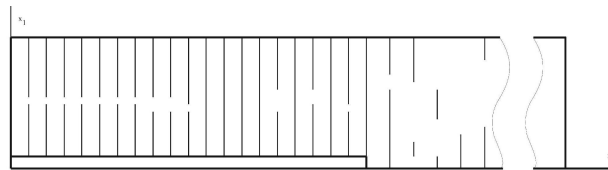


Рис. 7. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=1$  м,  $\tau =0.025$  с

При толщине льда  $H_3 = 2$  м наблюдается в целом аналогичная картина (см. рис. 8–11) за исключением того, что сквозные нарушения сплошности в ледяном покрове возникают в конце процесса, на последнем временном шаге  $\tau =0.03$  с, а скорость выброса льда существенно меньше и составляет 2 м/с.

Распространение трещин при  $H_3 = 3$  м приведено на рисунках 12–14. Видим, что в трехметровом льду трещины возникают позже и при этом не успевают в ходе процесса распространиться на всю толщу ледяного покрова. Поэтому можно предположить, что, несмотря на значительные разрушения, лед по-прежнему будет оказывать серьезное сопротивление движению судов.

Требуемый пролом льда толщиной  $H_3 = 3$  м может быть достигнут с помощью увеличения радиуса газозадушной подушки  $R_1$  до 4-х метров. Распространение трещин при таких параметрах приведено на рисунках 15–17.

Напряжения  $\sigma_{33}$  в ходе процесса практически не отличаются от напряжений  $\sigma_{22}$ , поэтому можно предположить, что разрушение ледяного покрова будет сопровождаться появлением не только концентрических, но и радиальных трещин.

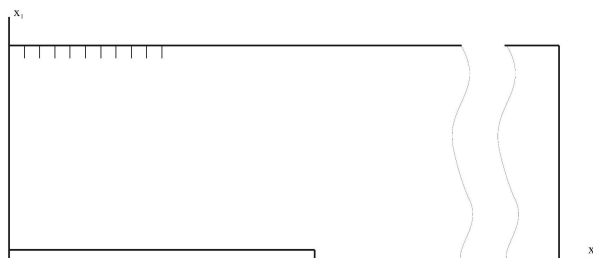


Рис. 8. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=2$  м,  $\tau =0.015$  с

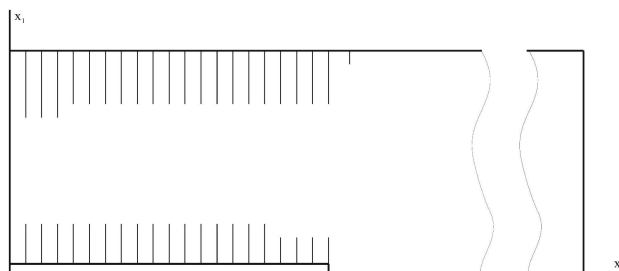


Рис. 9. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=2$  м,  $\tau =0.020$  с

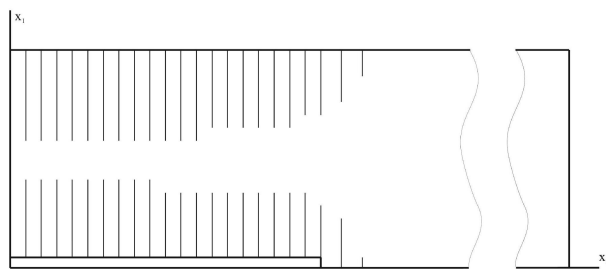


Рис. 10. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=2$  м,  $\tau =0.025$  с

Результаты проведенных расчетов обобщены в таблице 1, 2, где  $H_{max}$  - максимальная толщина разрушаемого льда при заданном радиусе  $R_1$  и толщине  $H_2$  газовой подушки. Под разрушением здесь подразумевается пролом ледяного покрова. Радиус разрушения при этом приблизительно равен радиусу газовой подушки  $R_1$ .

Кроме этого, следует отметить, что увеличение глубины водоёма  $H_1$  и радиуса расчетной области  $R_2$  (см. рис. 2) на характере разрушения ледяного покрова практически не сказывается.

**Выводы.** В результате проведенных численных расчетов получена зависимость максимальной толщины разрушаемого льда от радиуса  $R_1$  и толщины  $H_2$  газовой подушки. Разрушение сопровождается возникновением многочисленных радиальных и концентрических трещин. Радиус разрушения примерно равен радиусу  $R_1$ . Увеличение глубины акватории

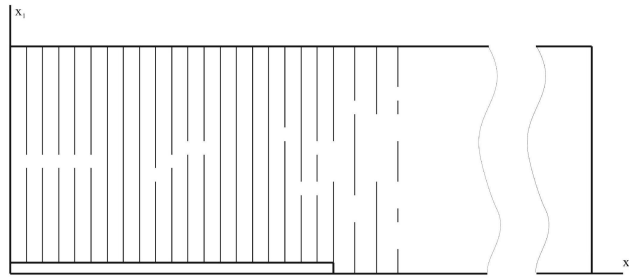


Рис. 11. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=2$  м,  $\tau=0.030$  с

$R_1$	$H_2$	$H_{max}$
2 м.	2 см.	2 м.
2 м.	3 см.	2 м.
2 м.	4 см.	2 м.
2 м.	5 см.	2.5 м.
3 м.	2 см.	2.5 м.
3 м.	3 см.	2.5 м.
3 м.	4 см.	2.5 м.
3 м.	5 см.	2.5 м.
4 м.	2 см.	2.5 м.
4 м.	3 см.	3 м.
4 м.	4 см.	3 м.
4 м.	5 см.	3 м.
5 м.	2 см.	3 м.
5 м.	3 см.	3 м.
5 м.	4 см.	3.5 м.
5 м.	5 см.	3.5 м.
6 м.	2 см.	3 м.
6 м.	3 см.	3.5 м.
6 м.	4 см.	3.5 м.
6 м.	5 см.	4 м.
7 м.	2 см.	3.5 м.
7 м.	3 см.	3.5 м.
7 м.	4 см.	4 м.
7 м.	5 см.	4 м.

Таблица 1. Зависимость максимальной толщины разрушаемого льда от  $R_1$  и  $H_2$

$H_1$  и радиуса расчетной области  $R_2$  на характере разрушения ледяного покрова практически не сказывается.

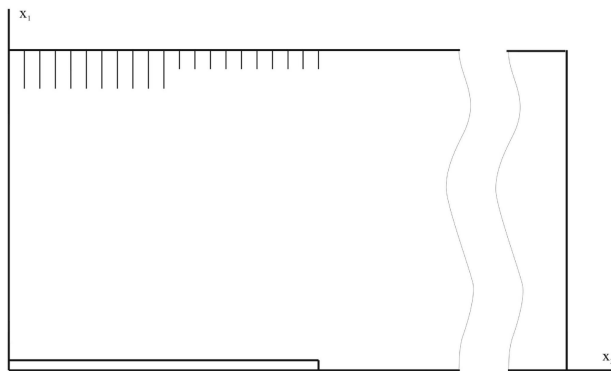


Рис. 12. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=3$  м,  $\tau =0.020$  с

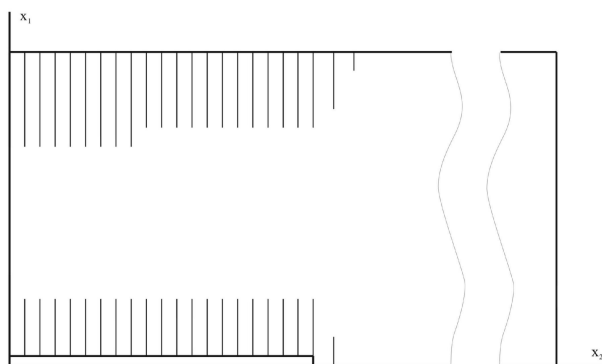


Рис. 13. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=3$  м,  $\tau =0.025$  с

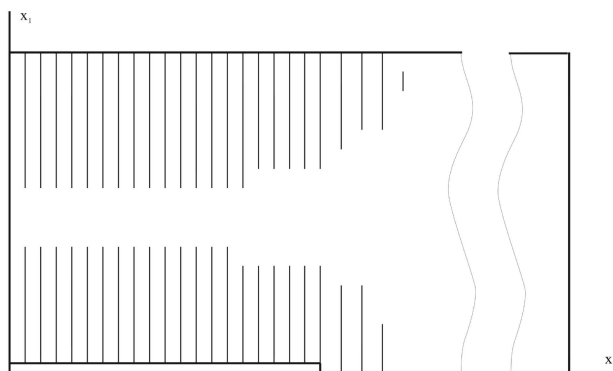


Рис. 14. Распространение трещин при  $R_1=3$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=3$  м,  $\tau =0.030$  с

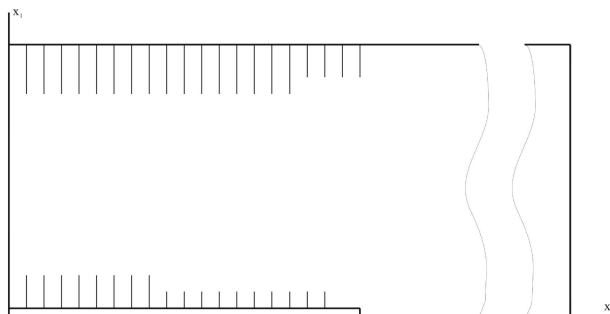


Рис. 15. Распространение трещин при  $R_1=4$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=3$  м,  $\tau=0.020$  с

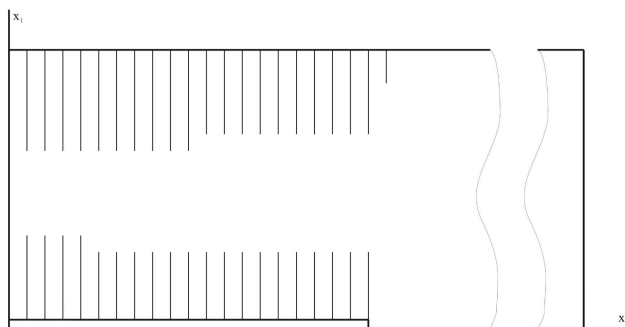


Рис. 16. Распространение трещин при  $R_1=4$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=3$  м,  $\tau=0.025$  с

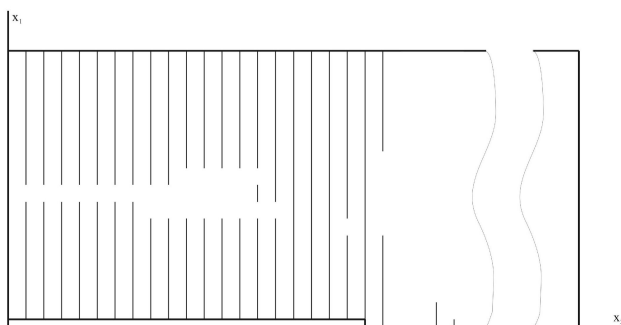


Рис. 17. Распространение трещин при  $R_1=4$  м,  $H_2=3$  см,  $H_3=3$  м,  $\tau=0.030$  с

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Матвейчук, В. В. Взрывные работы : учеб. пособие / В. В. Матвейчук, В. П. Чурсалов. – М. : Акад. проспект, 2002. – 384 с.
- [2] Поздняков, З. Г. Справочник по промышленным взрывчатым веществам и средствам взрывания / З. Г. Поздняков, Б. Д. Росси. – М. : Недра, 1977. – 253 с.

- [3] *Равич, М. Б.* Беспламенное поверхностное горение / М. Б. Равич. – М. ; Л. [СПб.] : Изд-во акад. наук, 1949. – 354 с.
- [4] *Песчанский, И. С.* Ледоведение и ледотехника / И. С. Песчанский. – Л. [СПб.] : Морской транспорт, 1963. – 343 с.
- [5] *Одинок, В. И.* Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом / В. И. Одинок. – Владивосток : Дальнаука, 1995. – 168 с.
- [6] *Одинок, В. И.* Математическое моделирование сложных технологических процессов / В. И. Одинок, Б. Г. Каплунов Б. Г., А. В. Песков А. В., А. А. Баков. – М. : Наука, 2008. – 176 с.
- [7] *Сергеева, А. М.* Определение напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при движении под ним ледакольной приставки / А. М. Сергеева, В. И. Одинок, О. В. Марченко // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 10. – С. 47–57.
- [8] *Одинок, В. И.* Моделирование процесса разрушения ледяных затворов / В. И. Одинок, А. Н. Прокудин // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 1. – С. 110–116
- [9] *Богородский, В. В.* Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии / В. В. Богородский, В. В. Гаврило. – Ленинград [СПб.] : Гидрометеиздат, 1980. – 384 с.
- [10] *Ионов, Б. П.* Ледовая ходкость судов / Б. П. Ионов, Е. М. Грамузов. – СПб. : Судостроение, 2001. – 510 с.
- [11] *Зуев, В. А.* Разрушение ледяного покрова. Материалы по обмену опытом / В. А. Зуев, Е. М. Грамузов, Ю. А. Двойченко. – Горький [Н. Новгород]. – 1989. – Вып. № 2. – 86 с.
- [12] *Kingham, D. J.* Viscosity measurements of water in region of its maximum density / D. James Kingham, W. A. Adams, M. J. McGuire // Journal of Chemical and Engineering Data. – 1974. – Vol 19, № 1. – P. 1–3.

*V. I. Odinokov, A. N. Prokudin*

## NUMERICAL INVESTIGATION OF ICE DESTRUCTION PROCESS BY MEANS OF AIR-GAS MIXTURE EXPLOSION

*Institute of machine science and metallurgy of FEB RAS*

**Abstract.** The axisymmetric problem about the air-gas mixture explosion influence on the ice plate of end thickness is solved. The mathematical modelling of the process is constructed using equations of the elasticity theory for small deformations and Navier-Stokes equations for viscous incompressible liquid. The formulated set of equations is solved by the approved numerical method. As a result of numerical calculations, dependences of the maximum thickness of destroyed ice and air-gas mixture volume are received.

**Keywords:** ice cover breaking, mathematical modeling, air-gas mixture explosion, stress-strain state.

*Одинокое Валерий Иванович*

*доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации, директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре*

*e-mail: mail@imim.ru*

*Прокудин Александр Николаевич*

*аспирант, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре*

*e-mail: sunbeam\_85@mail.ru*

*Odinokov, Valery Ivanovich*

*Doctor of Sciences, Professor, Honoured science worker of Russian Federation, Director, Institute of machine science and metallurgy of FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur*

*Prokudin, Aleksandr Nikolaevich*

*Postgraduate student, Institute of machine science and metallurgy of FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur*

В. Н. Орлов

## ТОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

*Филиал Российского государственного социального университета в г. Чебоксары*

**Аннотация.** Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение Абеля, в общем случае не разрешимое в квадратурах. Предлагается метод его приближенного решения, завершающий этап исследования приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки в комплексной области. Полученные результаты иллюстрируются расчетами.

**Ключевые слова:** подвижная особая точка, точные границы, приближенное решение, дифференциальное уравнение Абеля, комплексная область.

УДК: 519.87

К уравнению Абеля приводят задачи нелинейной оптики при описании сверхизлучательной лавины [1–3], теории упругости [4], нелинейной диффузии [5], задачи оптимизации стержня реактора [6], в нелинейной задаче теплопроводности установившегося режима [7–9], в нелинейной волновой теории [10].

В связи с тем, что дифференциальное уравнение Абеля в общем случае не разрешимо в квадратурах, а наличие подвижных особых точек (критические полюса) не позволяет применять к этому уравнению существующие приближенные методы, задача приближенного решения указанного уравнения является актуальной. Она состоит из:

- 1) приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в области аналитичности;
- 2) нахождения подвижных особых точек решения рассматриваемого уравнения с заданной точностью;
- 3) приближенного решения указанного выше уравнения в окрестности подвижной особой точки.

Первая и третья задачи решены соответственно в работах [11], [12], а вторая – в [13]. В работе [12] автором построено приближенное решение уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки в комплексной области, для которого получены априорные оценки. Проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. Как показывают полученные результаты, используемый аппарат в исследовании влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение существенно сужает область его применения. В данной работе предлагается иной подход в решении отмеченной выше задачи, в результате чего существенно расширена область применения приближенного решения в окрестности подвижной особой точки. Предлагаемые результаты и опубликованные ранее



[12] являются дополняющими друг друга, имеющими как общие области, так и взаимоисключающие, а приведенные расчеты характеризуют их согласованность.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Абеля в нормальной форме

$$w'(z) = w^3(z) + \Phi(z), \quad (1)$$

$$w(z_0) = w_0, \quad (2)$$

к которому приводится с помощью определенной замены переменных дифференциальное уравнение Абеля 1-го рода

$$w'(z) = f_0(z) + f_1(z)w(z) + f_2(z)w^2(z) + f_3(z)w^3(z).$$

В свою очередь к уравнению Абеля 1-го рода с помощью некоторой замены переменных приводится уравнение Абеля 2-го рода [14]

$$[g_0(z) + g_1(z)w(z)]w'(z) = f_0(z) + f_1(z)w(z) + f_2(z)w^2(z) + f_3(z)w^3(z).$$

**Теорема.** Пусть

1)  $\Phi(z) \in C^\infty$  в области

$$|\tilde{z}^* - z| < \rho; \quad (3)$$

2)  $\left| \frac{\Phi^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq M_1$  в области (3),  $M_1 = \text{const}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;

3)  $|\tilde{z}^*| \leq |z^*|$ ;

4) известна оценка погрешности значения  $\tilde{z}^*$ :  $|\tilde{z}^* - z^*| \leq \Delta\tilde{z}^*$ ;

5)  $\Delta\tilde{z}^* < \frac{1}{\sqrt[3]{16(1+M+\Delta M)^2}}$ .

Тогда для приближенного решения

$$\tilde{w}_N(z) = (\tilde{z}^* - z)^{-1/2} \cdot \sum_0^N \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0, \quad (4)$$

в области

$$F = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \quad (5)$$

справедлива оценка

$$\Delta\tilde{w}_N(z) \leq \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\tilde{z}^*}{2\sqrt{2}|\tilde{z}_1^* - z|^{3/2}},$$

$$\Delta_1 \leq \frac{2^{2n-4}(1+M)^n|\tilde{z}^* - z|^{(3n-3)/2}}{1 - 2^2(1+M)|\tilde{z}^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{3n+2} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{1/2}}{3n+3} + \frac{|\tilde{z}^* - z|}{3n+4} \right)$$

в случае  $N+1 = 3n$ ,

$$\Delta_1 \leq \frac{2^{2n-4}(1+M)^n|\tilde{z}^* - z|^{(3n-3)/2}}{1 - 2^2(1+M)|\tilde{z}^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{3n+3} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{1/2}}{3n+4} + \frac{4(1+M)|\tilde{z}^* - z|}{3n+5} \right)$$

для  $N+1 = 3n+1$  и

$$\Delta_1 \leq \frac{2^{2n-4}(1+M)^n|\tilde{z}^* - z|^{(3n-1)/2}}{1 - 2^2(1+M)|\tilde{z}^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{3n+4} + \frac{4(1+M)|\tilde{z}^* - z|^{1/2}}{3n+5} + \frac{4(1+M)|\tilde{z}^* - z|}{3n+6} \right)$$

в случае  $N+1 = 3n+2$ ,

$$\Delta_2 \leq \frac{\Delta\tilde{z}^*2^{-2}(1+M+\Delta M)}{1 - 2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{5} + \frac{|\tilde{z}_2^* - z|^{1/2}}{6} + \frac{|\tilde{z}_2^* - z|}{7} \right),$$

$$\Delta_3 \leq \frac{2^{-2}\Delta M|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}}{1 - 2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{6} + \frac{12}{35}|\tilde{z}_2^* - z|^{1/2} \right),$$

при этом

$$M = \sup_n \left| \frac{\Phi^{(n)}(z)}{n!} \right| \quad \forall z \text{ из области (3),}$$

$$\Delta M = \left( \sup_{n,G} \left| \frac{\Phi^{(n+1)}(z)}{n!} \right| \right) \Delta \tilde{z}^*, \quad G = \{z: |\tilde{z}^* - z| \leq \Delta \tilde{z}^*\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$|\tilde{z}_1^*| = |\tilde{z}^*| - \Delta \tilde{z}^*, \quad |\tilde{z}_2^*| = |\tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*, \quad \arg \tilde{z}_1^* = \arg \tilde{z}_2^* = \arg \tilde{z}^*,$$

$$F_1 = \{z: |z| \leq |\tilde{z}_1^*|\}, \quad F_2 = \left\{ z: |\tilde{z}^* - z| < \frac{1}{\sqrt[3]{16(1+M)^2}} \right\},$$

$$F_3 = \left\{ z: |\tilde{z}_2^* - z| < \frac{1}{\sqrt[3]{16(1+M+\Delta M)^2}} \right\}.$$

**Доказательство.** Для погрешности приближенного решения (4) имеем

$$\Delta \tilde{w}_N(z) = |w(z) - \tilde{w}_N(z)| \leq |w_3(z) - \tilde{w}(z)| + |\tilde{w}(z) - \tilde{w}_N(z)|.$$

Для оценки выражения  $|w(z) - \tilde{w}(z)|$ , в отличие от варианта, предложенного в работе [12], воспользуемся дифференциальным исчислением [15]:

$$|w(z) - \tilde{w}(z)| \leq \sup_G \left| \frac{\partial \tilde{w}(z)}{\partial \tilde{z}^*} \right| \Delta \tilde{z}^* + \sum_0^\infty \sup_G \left| \frac{\partial \tilde{w}(z)}{\partial \tilde{C}_n} \right| \Delta \tilde{C}_n,$$

где  $G = \{z: |\tilde{z}^* - z| \leq \Delta \tilde{z}^*\}$ . Заметим, что в силу пункта 2 теоремы существует

$$M = \sup_n \left| \frac{\Phi^{(n)}(z)}{n!} \right| \tag{6}$$

для любого  $z$  из области (3), а согласно [15]

$$\Delta M = \left( \sup_{n,G} \left| \frac{\Phi^{(n+1)}(z)}{n!} \right| \right) \Delta \tilde{z}^*. \tag{7}$$

Далее

$$\sup_G \left| \frac{\partial \tilde{w}(z)}{\partial \tilde{z}^*} \right| = \sup_G \left| \sum_0^\infty \tilde{C}_n \left( \frac{n-1}{2} \right) (\tilde{z}^* - z)^{\frac{n-3}{2}} \right| \leq \sum_0^\infty \left| \frac{n-1}{2} \right| \sup_G |\tilde{C}_n| \sup_G |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-3}{2}},$$

при этом

$$\sup_G |\tilde{z}^* - z|^{(n-3)/2} = \begin{cases} |\tilde{z}_1^* - z|^{(n-3)/2}, & n = 0, 1, 2; \\ |\tilde{z}_2^* - z|^{(n-3)/2}, & n = 3, 4, \dots \end{cases}$$

и

$$\sup_G \left| \frac{\partial \tilde{w}(z)}{\partial \tilde{C}_n} \right| = \sup_G |\tilde{z}^* - z|^{(n-1)/2} = \begin{cases} |\tilde{z}_1^* - z|^{(n-1)/2}, & n = 0; \\ |\tilde{z}_2^* - z|^{(n-1)/2}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где

$$|\tilde{z}_1^*| = |\tilde{z}^*| - \Delta \tilde{z}^*, \quad |\tilde{z}_2^*| = |\tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*, \quad \arg \tilde{z}_1^* = \arg \tilde{z}_2^* = \arg \tilde{z}^*.$$

Принимая во внимание (6), (7) и оценки для  $C_n$ , полученные в работе [12],

$$|C_{3n}| \leq \frac{2^{2n-4}}{3n+2} (1+M)^n = \vartheta_{3n}, \tag{8}$$

$$|C_{3n+1}| \leq \frac{2^{2n-4}}{3n+3} (1+M)^n = \vartheta_{3n+1}, \tag{9}$$

$$|C_{3n+2}| \leq \frac{2^{2n-4}}{3n+2} (1+M)^n = \vartheta_{3n+2}, \tag{10}$$

из рекуррентного соотношения  $-C_n \left( \frac{n}{2} + \rho \right) = D_n$ , где

$$D_n = C_n^{**} \text{ для } n = 2k, k = 0, 1, 2, \dots; \quad D_n = C_n^{**} \text{ для } n = 1;$$

$$D_n = C_n^{**} + A_{n_1} \text{ для } n = 2k + 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n_1 = 0, 1, \dots;$$

$$C_n^{**} = \sum_0^n C_i C_{n-i}^*, \quad C_n^* = \sum_0^n C_i C_{n-i}, \quad \rho = -\frac{1}{2},$$

полученного из (1) при подстановке в него

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty A_n (\tilde{z}^* - z)^n, \quad \tilde{w}(z) = (\tilde{z}^* - z)^{-1/2} \sum_0^\infty \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{n/2}$$

и выполнения соответствующих преобразований, имеем [12]

$$\sup_G |\tilde{C}_n| \leq \tilde{C}_n (|A_0 + \Delta \tilde{A}_0|, |A_1 + \Delta \tilde{A}_1|, \dots) \leq \tilde{C}_n (1 + M + \Delta M) = \tilde{\vartheta}_n.$$

Таким образом:

$$|w(z) - \tilde{w}(z)| \leq \Delta \tilde{z}^* \sum_0^\infty \left| \frac{n-1}{2} \right| \tilde{\vartheta}_n \sup_G |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-3}{2}} + \sum_0^\infty \Delta \tilde{C}_n \sup_G |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-1}{2}}.$$

А так как

$$C_0 = \tilde{C}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_1 = \tilde{C}_1 = C_2 = \tilde{C}_2 = 0,$$

то следует

$$|w(z) - \tilde{w}(z)| \leq \frac{\Delta \tilde{z}^*}{2\sqrt{2}|\tilde{z}_1^* - z|^{3/2}} + \Delta \tilde{z}^* \sum_3^\infty \tilde{\vartheta}_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-3}{2}} + \sum_3^\infty \Delta \tilde{C}_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}}.$$

Тогда для  $\Delta \tilde{w}_N(z)$  получаем выражение

$$\Delta \tilde{w}_N(z) = |w(z) - \tilde{w}_N(z)| \leq \frac{\Delta \tilde{z}^*}{2\sqrt{2}|\tilde{z}_1^* - z|^{3/2}} + \sum_{N+1}^\infty |\tilde{C}_n| \cdot |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-1}{2}} +$$

$$+ \Delta \tilde{z}^* \sum_3^\infty \tilde{\vartheta}_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-3}{2}} + \sum_3^\infty \Delta \tilde{C}_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Итак, для  $\Delta_0$  имеем

$$\Delta_0 = \frac{\Delta \tilde{z}^*}{2\sqrt{2}|\tilde{z}_1^* - z|^{3/2}}.$$

Согласно результатам работы [12] для  $\Delta_1$  справедлива оценка

$$\Delta_1 \leq \frac{2^{2n-4}(1+M)^n |\tilde{z}^* - z|^{(3n-3)/2}}{1 - 2^2(1+M)|\tilde{z}^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{3n+2} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{1/2}}{3n+3} + \frac{|\tilde{z}^* - z|}{3n+4} \right)$$

в случае  $N+1 = 3n$ ,

$$\Delta_1 \leq \frac{2^{2n-4}(1+M)^n |\tilde{z}^* - z|^{(3n-2)/2}}{1 - 2^2(1+M)|\tilde{z}^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{3n+3} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{1/2}}{3n+4} + \frac{4(1+M)|\tilde{z}^* - z|}{3n+5} \right)$$

для  $N+1 = 3n+1$  и

$$\Delta_1 \leq \frac{2^{2n-4}(1+M)^n |\tilde{z}^* - z|^{(3n-1)/2}}{1 - 2^2(1+M)|\tilde{z}^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{3n+4} + \frac{4(1+M)|\tilde{z}^* - z|^{1/2}}{3n+5} + \frac{4(1+M)|\tilde{z}^* - z|}{3n+6} \right)$$

в случае  $N+1 = 3n+2$ .

Оценим  $\Delta_2$ . Учитывая структуру оценок для  $\tilde{\vartheta}_n$  (8)–(10), получаем

$$\Delta_2 = \Delta \tilde{z}^* \sum_3^\infty \tilde{\vartheta}_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-3}{2}} = \Delta \tilde{z}^* \sum_1^\infty \tilde{\vartheta}_{3n} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n-3}{2}} +$$

$$+ \Delta \tilde{z}^* \sum_1^\infty \tilde{\vartheta}_{3n+1} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n-2}{2}} + \Delta \tilde{z}^* \sum_1^\infty \tilde{\vartheta}_{3n+2} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n-1}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \Delta \tilde{z}^* \sum_1^\infty \frac{2^{2n-4}(1+M+\Delta M)^n}{3n+2} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n-3}{2}} + \\
 &+ \Delta \tilde{z}^* \sum_1^\infty \frac{2^{2n-4}(1+M+\Delta M)^n}{3n+3} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n-2}{2}} + \\
 &+ \Delta \tilde{z}^* \sum_1^\infty \frac{2^{2n-4}(1+M+\Delta M)^n}{3n+4} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n-1}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{\Delta \tilde{z}^* 2^{-2}(1+M+\Delta M)}{5(1-2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2})} + \frac{\Delta \tilde{z}^* 2^{-2}(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{1/2}}{6(1-2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2})} + \\
 &\quad + \frac{\Delta \tilde{z}^* 2^{-2}(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|}{7(1-2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2})} = \\
 &= \frac{\Delta \tilde{z}^* 2^{-2}(1+M+\Delta M)}{1-2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{5} + \frac{|\tilde{z}_2^* - z|^{1/2}}{6} + \frac{|\tilde{z}_2^* - z|}{7} \right).
 \end{aligned}$$

Переходим к оценке  $\Delta_3$ . Воспользуемся оценками для  $\Delta \tilde{C}_n$ , полученными в работе [12]:

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{C}_{3n} &\leq \frac{2^{2n-4}\Delta M}{3n+2}(1+M+\Delta M)^{n-1}, \quad \Delta \tilde{C}_{3n+1} \leq \frac{2^{2n-4}\Delta M}{3n+3}(1+M+\Delta M)^{n-1}, \\
 \Delta \tilde{C}_{3n+2} &\leq \frac{2^{2n-4}\Delta M}{3n+4}(1+M+\Delta M)^{n-1},
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta M = \sup_{n,G} \left| \frac{\Phi^{(n+1)}(z)}{n!} \right| \Delta \tilde{z}^*.$$

Следовательно, с учетом последних оценок имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta_3 &= \sum_3^\infty \Delta \tilde{C}_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}} = \sum_1^\infty \Delta \tilde{C}_{3n} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n-1}{2}} + \sum_1^\infty \Delta \tilde{C}_{3n+1} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n}{2}} + \\
 &+ \sum_1^\infty \Delta \tilde{C}_{3n+2} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n+1}{2}} \leq \sum_1^\infty \frac{2^{2n-4}\Delta M(1+M+\Delta M)^{n-1} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n-1}{2}}}{3n+2} + \\
 &\quad + \sum_1^\infty \frac{2^{2n-4}\Delta M(1+M+\Delta M)^{n-1} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n}{2}}}{3n+3} + \\
 &\quad + \sum_1^\infty \frac{2^{2n-4}\Delta M(1+M+\Delta M)^{n-1} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3n+1}{2}}}{3n+4} \leq \\
 &\leq \frac{2^{-2}\Delta M |\tilde{z}_2^* - z|^2}{5(1-2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2})} + \frac{2^{-2}\Delta M |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}}{6(1-2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2})} + \\
 &\quad + \frac{2^{-2}\Delta M |\tilde{z}_2^* - z|^2}{7(1-2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2})} = \\
 &= \frac{2^{-2}\Delta M |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}}{1-2^2(1+M+\Delta M)|\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}} \left( \frac{1}{6} + \frac{12}{35} |\tilde{z}_2^* - z|^{1/2} \right).
 \end{aligned}$$

Оценка для  $\Delta_0$  справедлива в области

$$F_1 = \{z: |z| \leq |\tilde{z}_1^*|\},$$

для  $\Delta_1$  — в области

$$F_2 = \left\{ z: |\tilde{z}^* - z| < \frac{1}{\sqrt[3]{16(1+M)^2}} \right\},$$

для  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  — в области

$$F_3 = \left\{ z: |\tilde{z}_2^* - z| < \frac{1}{\sqrt[3]{16(1+M+\Delta M)^2}} \right\}.$$

Тогда оценка для  $\Delta\tilde{w}_N(z)$  будет верна в области (5), что и доказывает теорему.

**Замечание.** Теорема справедлива в области (5), где

$$F_1 = \{z: |z| \geq |\tilde{z}_1^*|\}, \quad |\tilde{z}_1^*| = |\tilde{z}^*| + \Delta\tilde{z}^*, \quad |\tilde{z}_2^*| = |\tilde{z}^*| - \Delta\tilde{z}^*, \quad \arg \tilde{z}_1^* = \arg \tilde{z}_2^* = \arg \tilde{z}^*,$$

если вместо пункта 3 теоремы выполняется условие  $|\tilde{z}^*| \geq |z^*|$ .

**Пример.** Рассмотрим задачу Коши (1)–(2)

$$\Phi(z) = 0, \quad w_3(i) = 1 + i;$$

точное решение

$$w(z) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{0,75i - z}};$$

$z^* = -0,75i$  — точное значение подвижной особой точки (критический полюс);  $\tilde{z}^* = (0,001 - 0,749i)$  — приближенное значение подвижной особой точки;  $\Delta\tilde{z}^* = |z^* - \tilde{z}^*| = 0,0014142$ ;  $z_1 = 0,001 - 0,65i$  попадает в область действия теоремы. Значение точного решения

$$w(z_1) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{-0,001 + 1,4i}} = \pm(0,4998214 - 0,5001786i).$$

Точка  $z_1$  попадает в область действия теоремы настоящей работы и [12]. Результаты расчетов представлены ниже в таблице:

$z_1$	$w(z_1)$	$\tilde{w}_3(z_1)$	$ w - \tilde{w}_3 $	$(\Delta\tilde{w}_3(z_1))_I$	$(\Delta\tilde{w}_3(z_1))_{II}$
$0,001 - 0,65i$	$\pm(0,49982 - 0,50018i)$	$\pm(0,49964 - 0,50036i)$	0,00025	0,05286	0,09105

где  $w(z_1)$  — значение точного решения;  $\tilde{w}_3(z_1)$  — значение приближенного решения;  $|w - \tilde{w}_3|$  — абсолютная величина погрешности;  $(\Delta\tilde{w}_3(z_1))_I$  — величина погрешности, полученная на основании теоремы данной работы;  $(\Delta\tilde{w}_3(z_1))_{II}$  — величина погрешности, полученная на основании теоремы работы [12].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чудновский, В. М. Теория сверхизлучательных лавин радиоволнового диапазона / В. М. Чудновский, Е. Д. Холодкевич // ФТТ. — 1982. — Т. 24, № 4. — С. 1118–1123.
- [2] Чудновский, В. М. Лавинный распад инвертированного состояния квантовой системы : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. М. Чудновский. — Минск, 1983. — 16 с.
- [3] Самодуров, А. А. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины / А. А. Самодуров, В. М. Чудновский // Докл. АН БССР. — 1985. — Т. 29, № 1. — С. 910.
- [4] Hill, J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings / J. M. Hill // Internat. J. Solids Structures. — 1977. — 13. — P. 93–104.
- [5] Ockendon, J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / J. R. Ockendon // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. — New York, 1978. — P. 129–145.
- [6] Axford, R. A. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization / R. A. Axford // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. — Tennessee, 1974. — P. 1–14.
- [7] Axford, R. A. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion / R. A. Axford // Los Alamos Report. — 1970. (LA-4517, UC-34).

[8] *Axford, R. A.* Group invariance properties of the Poisson–Boltzmann and other non-linear field equations / R. A. Axford // Los Alamos Report. – 1972. (LA-4864. UC-34).

[9] *Axford, R. A.* Non-linear thermal instability phenomena in plates and rods / R. A. Axford // A.S.M.E. Nuclear Eng. Div., Winter Annual Meeting. – Michigan, 1973. – P. 1–12.

[10] *Hill, J. M.* Abel’s Differential Equation / J. M. Hill // J. Math. Scientist. – 1982. – Vol. 7, № 2. – S. 115–125.

[11] *Орлов, В. Н.* Об одном приближенном методе решения уравнения Абеля / В. Н. Орлов // XX Международная науч. конф. “Математические методы в технике и технологиях ММТТ-20”. – Ярославль, 2007. – Т. 1, секция 1. – С. 64–65.

[12] *Орлов, В. Н.* Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, С. А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. – 2010. – № 4 (18). – С. 2–6.

[13] *Редкозубов, С. А.* Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля / С. А. Редкозубов, В. Н. Орлов // Известия института инженерной физики. – 2009. – № 3 (12). – С. 2–3.

[14] *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.

[15] *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1970. – 632 с.

V. N. Orlov

**EXACT BORDERS FOR ABEL DIFFERENTIAL EQUATION APPROXIMATE SOLUTION IN THE AREA OF THE MOVABLE SPECIAL POINT APPROXIMATE VALUE IN THE COMPLEX AREA**

*Russian State Social University, Cheboksary Branch*

**Abstract.** Nonlinear Abel differential equation is analyzed which is not solved in quadrature in general. The method of its approximate solution is offered which completes the research of the approximate solution of Abel differential equation in the area of the movable special point in the complex area. The received results are illustrated by calculations.

**Keywords:** a movable special point, exact borders, approximate solution, Abel differential equation, complex area.

*Орлов Виктор Николаевич*

*кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, филиал Российского государственного социального университета в г. Чебоксары, г. Чебоксары*

*e-mail: orlowvn@rambler.ru*

*Orlov, Viktor Nikolaevich*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Head of Department, Russian State Social University, Cheboksary Branch, Cheboksary*

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.

**Варданыан Седрак Ваникович (vardanyan\_s@yahoo.com)** – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

**Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – Академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@nw.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары, г. Чебоксары.

**Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Матченко Николай Михайлович (екс\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Миронов Борис Гурьевич (prorektor@chdpu.edu.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

**Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

**Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

**Непершин Ростислав Иванович (rostislav\_n@mtu-net.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет “СТАНКИН”, г. Москва.

**Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

**Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.



**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния» издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Климов Д. М., Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А.</i> Колебания полюса деформируемой Земли.....	197
<i>Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.</i> Распространение связанных гармонических GNIII-термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе.....	207
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М.</i> О возможности аффинного моделирования анизотропных идеальнопластических сред.....	256
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М.</i> Гибридное условие пластичности изотропных материалов.....	265
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М.</i> О границах применимости квадратичного условия пластичности мизеса к описанию пластических свойств анизотропии листовых прокатных металлов.....	275
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М.</i> Сжатие идеальнопластического ортотропного слоя.....	280
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М.</i> К построению теории малых упругопластических деформаций.....	288
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М.</i> Об уравнениях пространственной задачи теории идеальной пластичности изотропных материалов .	296
<i>Кулагина М. Ф., Иванов Э. Г.</i> Решение третьей основной задачи теории упругости для составного клина в случае гладкого контакта.....	307
<i>Любимова О. Н., Гридасова Е. А., Пестов К. Н.</i> К вопросу упрочнения стекла методом диффузионной сварки с металлом.....	318
<i>Макарова Н. В., Полоник М. В.</i> К проблеме учета неоднородности при моделировании процесса истирания бетона.....	326
<i>Максимова Л. А.</i> О конических напряженно-деформированных состояниях пластических сред.....	333
<i>Манцыбора А. А.</i> Плоская автотомельная задача о косом ударе жестким телом по упругопластическому полупространству.....	338
<i>Минаева Н. В.</i> Линеаризация граничных условий, заданных в интегральной форме на границе тела в деформированном состоянии.....	344
<i>Мионов Б. Г., Козлова Л. С., Рыбакова Т. И.</i> О кручении анизотропных призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей.....	349

<i>Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э.</i> Взаимодействие трещиновидных полостей в горящем твердом топливе, на границе которого заданы смешанные граничные условия.....	358
<i>Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э.</i> Моделирование развития трещиновидной полости в горящем твердом топливе, скрепленном с внешним цилиндром...	368
<i>Немировский Ю. В.</i> Динамическое деформирование жесткопластических армированных пластин.....	382
<i>Одинокое В. И., Прокудин А. Н.</i> Численное исследование процесса разрушения ледяного покрова взрывом газозадушной смеси.....	387
<i>Орлов В. Н.</i> Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области.....	399
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	406
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	409
СОДЕРЖАНИЕ.....	411

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2010. № 2(8). Ч. 2**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** Л. Н. Улюкова, И. А. Федянина

**Компьютерная верстка:** Т. В. Митрофанова, С. О. Фоминых

**Макет:** Т. В. Митрофанова, С. О. Фоминых

---

Подписано в печать 26.11.2010. Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.  
Усл. печ. л. 27,4. Тираж 400 экз. Цена свободная. Заказ №2183

---

Отпечатано в отделе полиграфии ГОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38