

ББК 95.4; 22.251  
Ч-823

Подписной индекс в каталоге Роспечать: 33285  
ISSN: 2073-5499

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2010. № 2(8). Ч. 3**

**Учредитель:** ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**Главный редактор:** Г. Н. Григорьев

**ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ И  
НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

**к восьмидесятилетию профессора Д. Д. Ивлева**

**Главный редактор выпуска:** Д. М. Климов

**Заместитель главного редактора выпуска:** Ю. Н. Радаев

**Ответственный секретарь выпуска:** В. А. Ковалев

**Редакционная коллегия:** Амензаде Р. Ю., Баженов В. Г., Буренин А. А., Варданян С. В., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Ивлев Д. Д., Каюмов Р. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Максимова Л. А., Маркин А. А., Матченко Н. М., Манжиров А. В., Миронов Б. Г., Мирсалимов В. М., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Тамуж В. П., Тихонов С. В., Трещев А. А., Хромов А. И., Чигарев А. В., Шашкин А. И., Шуканов А. А.

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19

**Email:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2010

И. В. Плаксина

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ ЗАДАННОЙ ТЕПЛОТДАЧЕ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Дальневосточный государственный технический университет*

**Аннотация.** Рассматривается задача свободноконвективного течения на вертикальной поверхности в пористой среде при тепловых граничных условиях третьего рода. Построены координатные разложения для функции тока и температуры при малых и больших значениях продольной координаты, которые объединены затем посредством численного решения полных уравнений в приближении пограничного слоя. Записаны критериальные зависимости для характеристик процесса при различных значениях определяющих параметров.

**Ключевые слова:** свободная конвекция, пористая среда, пограничный слой, вертикальная поверхность.

УДК: 536.252

**Введение.** Исследованию свободноконвективного пограничного слоя на вертикальной поверхности в пористой среде посвящено значительное число научных работ. Широкий обзор полученных решений для различных граничных условий и геометрических конфигураций представлен в работах Ingham, Pop (1998) [1] и Nield, Bejan (1999) [2]. Типичными граничными условиями являются условия заданной температуры или заданного теплового потока на поверхности. С точки зрения инженерных приложений наиболее практически значимым является случай граничных условий третьего рода, когда тепловой поток на поверхности пропорционален локальной температуре поверхности. В работе Merkin [3] рассмотрена свободная конвекция вязкой жидкости на вертикальной поверхности при граничных условиях третьего рода, в которой построено решение уравнений пограничного слоя в виде разложений для функции тока и температуры для малых и больших значений продольной координаты. Для пористой среды исследование свободной конвекции на вертикальной поверхности при граничных условиях третьего рода, т. е. при заданной теплоотдаче с поверхности, проведено в работе Lesnic [4] на основе использования модели Дарси–Буссинеска, в которой построены разложения для функции тока и температуры около передней кромки пластины, а также условию постоянства теплового потока и далеко вниз по потоку, удовлетворяющие заданным тепловым граничным условиям.

Закон Дарси является простейшей моделью пористой среды, который не позволяет получить решение, удовлетворяющее условию прилипания на поверхности в пограничном слое. Поэтому предлагается исследовать свободную конвекцию на вертикальной поверхности в пористой среде при заданной теплоотдаче с поверхности, когда тепловой поток пропорционален локальной температуре поверхности на основе полных уравнений сохранения количества движения и энергии.

**1. Основные уравнения.** Рассматривается задача свободной конвекции около полубесконечной вертикальной пластины, помещенной в заполненную жидкостью пористую среду, имеющую температуру  $T_\infty$ . Предполагается, что тепловой поток на поверхности пропорционален локальной температуре поверхности, жидкость и пористая матрица находятся в термодинамическом равновесии и свойства жидкости и матрицы изотропны и постоянны. Пренебрегая эффектом вязкой диссипации, имеем следующую систему уравнений сохранения массы, количества движения и энергии [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\nabla^2 \bar{\psi}) - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\nabla^2 \bar{\psi}) \right) &= \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} - \frac{\mu_f}{K} \nabla^2 \bar{\psi} + \frac{\mu_f}{\varepsilon} \nabla^4 \bar{\psi}, \\ \rho_f c_f \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \right) &= \lambda_m \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = -h_s T, \quad \text{при } \bar{y} = 0, \bar{x} > 0, \\ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} &\rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty \quad \text{при } \bar{y} \rightarrow \infty, \bar{x} > 0, \\ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad T = T_\infty \quad \text{при } \bar{x} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь:  $\rho_f$  – плотность жидкости,  $\varepsilon$  – пористость,  $\bar{\psi}$  – функция тока,  $\mu_f$  – динамическая вязкость жидкости,  $K$  – проницаемость пористой среды,  $c_f$  – удельная теплоемкость,  $\lambda_m$  – коэффициент теплопроводности пористой среды,  $T$  – температура,  $h_s$  – постоянный коэффициент теплоотдачи с поверхности,  $(\bar{x}, \bar{y})$  – декартовы координаты, определяющие расстояние вдоль и по нормали к поверхности.

Вид граничных условий (2) определяет выбор безразмерных переменных

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad y = \frac{\bar{y}}{l}, \quad \psi = \psi_0 \bar{\psi}, \quad U_0 = ah_s^2 l, \quad \psi_0 = U_0 l, \quad l = \frac{gK\beta T_\infty}{h_s^2 \nu_f a}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty}, \quad (3)$$

где  $a = \frac{\lambda_m}{\rho_f c_f}$ .

С учетом (3) система уравнений (1) и граничные условия (2) приводятся к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi) &= \frac{\varepsilon Pr^*}{Da} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} - \nabla^2 \psi \right) + \frac{Pr^*}{Ra^2} \nabla^4 \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Ra^2} \nabla^2 \theta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -Ra(\theta + 1) \quad \text{при } y = 0, \quad x > 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &\rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad x > 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } x = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $Pr^* = \frac{\varepsilon \nu_f}{a}$ ,  $Da = Kh_s^2$ ,  $Ra = h_s l$  – безразмерные параметры, определяющие процесс свободноконвективного течения в пористой среде при граничных условиях третьего рода.

Из асимптотического анализа системы уравнений (4) при  $Ra \rightarrow \infty$  получены разложения для функции тока и температуры по степеням  $Ra$  [6]:

$$\psi(x, Y, Ra) = Ra^{-1} \Phi_0(x, Y) + \dots, \quad \theta(x, Y, Ra) = \theta_0(x, Y) + \dots,$$

где  $y = Ra^{-1} Y$ . Тогда система уравнений (4) и граничные условия (5) будут записаны в приближении пограничного слоя:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial Y} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x \partial Y^2} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial Y^3} = \frac{\varepsilon Pr^*}{Da} \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial Y^2} \right) + Pr^* \frac{\partial^4 \Phi_0}{\partial Y^4}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial Y} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial \theta_0}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial Y} = -(1 + \theta_0) \text{ при } Y = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial Y} \rightarrow 0, \quad \theta_0 \rightarrow 0 \text{ при } Y \rightarrow \infty. \quad (7)$$

В левой части уравнения сохранения количества движения – слагаемые, описывающие конвективный перенос завихренности, в правой – первое слагаемое соответствует приближению Дарси–Буссинеска, второе учитывает вязкое взаимодействие.

**2. Решение для малых значений продольной координаты.** В окрестности передней кромки пластины свободноконвективное течение в нулевом приближении определяется постоянным тепловым потоком на поверхности. Применяем к уравнениям (6), (7) преобразование подобия, соответствующее решению для постоянного потока на поверхности, верное в окрестности передней кромки [3]:

$$\Phi_0(x, Y) = x^{4/5} F_0(\zeta) + \dots, \quad \theta_0(x, Y) = x^{1/5} H_0(\zeta) + \dots, \quad \zeta = \frac{Y}{x^{1/5}}. \quad (8)$$

Система уравнений, определяющая пару функций  $F_0(\zeta)$ ,  $H_0(\zeta)$ , и соответствующие ей граничные условия имеют вид:

$$F_0''' + \frac{1}{\text{Pr}^*} \left( \frac{4}{5} F_0 F_0'' - \frac{3}{5} (F_0')^2 \right) + \frac{\varepsilon}{\text{Da}} H_0 = 0,$$

$$H_0'' + \frac{4}{5} F_0 H_0' - \frac{1}{5} F_0' H_0 = 0, \quad (9)$$

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0, \quad H_0'(0) = -1, \quad F_0'(\infty) = H_0(\infty) = 0.$$

Зависимость температуры на стенке и касательного напряжения в нулевом приближении имеют вид:

$$\theta_s = x^{1/5} H_0(0) + \dots, \quad \tau_w = x^{2/5} F_0''(0) + \dots, \quad (10)$$

где  $\tau_w = \frac{\partial u}{\partial y}$  при  $y = 0$ .

**3. Решение для больших значений продольной координаты.** При больших значениях продольной координаты течение определяется граничными условиями третьего рода. Для описания такого режима воспользуемся преобразованием [3]:

$$\Phi_0(x, Y) = x f_0(Y) + \dots, \quad \theta_0(x, Y) = x h_0(Y) + \dots, \quad (11)$$

при котором координата  $Y$  не преобразовывается.

Вид граничных условий (5) приводит к тому, что разложение (11) строится по целым отрицательным степеням  $x$  и, следовательно, в первом приближении возникают логарифмические члены при собственных решениях. Константа при собственных решениях не определена в рамках данного исследования [6]. Таким образом, при решении поставленной задачи возникает неопределенность уже в первом приближении и основные характеристики процесса свободноконвективного течения рассматриваются только в нулевом приближении. Система уравнений и граничные условия для пары функций  $f_0(Y)$ ,  $h_0(Y)$  :

$$f_0''' + \frac{1}{\text{Pr}^*} (f_0 f_0'' - (f_0')^2) + \frac{\varepsilon}{\text{Da}} (h_0 - f_0') = 0,$$

$$h_0'' + f_0 h_0' - f_0' h_0 = 0, \quad (12)$$

$$f_0(0) = f_0'(0) = 0, \quad h_0'(0) + h_0(0) = 0, \quad f_0'(\infty) = h_0(\infty).$$

Температура на стенке и касательное напряжение можно представить в виде:

$$\theta_s = xh_0(0) + \dots, \quad \tau_w = xf_0''(0) + \dots \quad (13)$$

**4. Решение полной системы уравнений.** Для получения решения, верного для всех значений продольной координаты от  $x = 0$  до  $x \rightarrow \infty$ , используется метод непрерывных преобразований [3]. Этот метод предлагает использование составных преобразований переменных, которые отражают особенности решения при малых и больших значениях продольной координаты. Используем следующее преобразование переменных:

$$\Phi_0(x, Y) = x^{4/5}(1+x)^{1/5}\bar{f}(x, \bar{\eta}), \quad \theta_0(x, Y) = x^{1/5}(1+x)^{4/5}\bar{h}(x, \bar{\eta}), \quad \bar{\eta} = \frac{Y(1+x)^{1/5}}{x^{1/5}}, \quad (14)$$

которые при  $x \rightarrow \infty$  соответствуют разложению (11), а при  $x \rightarrow 0$  – преобразованию для малых значений продольной координаты (8).

Тогда уравнения пограничного слоя примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \bar{f}}{\partial \bar{\eta}^3} + \frac{1}{\text{Pr}^*} \left( \left( \frac{4}{5} + \frac{1}{5}x(1+x)^{-1} \right) \bar{f} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{\eta}^2} - \left( \frac{3}{5} + \frac{2}{5}x(1+x)^{-1} \right) \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \right)^2 \right) + \\ + \frac{\varepsilon}{\text{Da}} \left( \bar{h} - x^{2/5}(1+x)^{-2/5} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \right) = x \left( \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{\eta}^2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{\eta}^2} + \left( \frac{4}{5} + \frac{1}{5}x(1+x)^{-1} \right) \bar{f} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\eta}} - \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x(1+x)^{-1} \bar{h} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \right) = x(1+x) \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\eta}} \right)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned} \bar{f} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\eta}} = -(1+x) - x^{1/5}(1+x)^{-1/5}\bar{h} \quad \text{при} \quad \bar{\eta} = 0, \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} \rightarrow 0, \quad \bar{h} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \bar{\eta} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Разложение (5) показывает, что решение имеет особенность в производных по переменной  $x$ , при  $x \rightarrow 0$ . Использование преобразования  $x = \xi^{1/5}$  [4] убирает возникающую особенность и численное решение тогда рассматривается с шагом по переменной  $\xi$ . Численная схема, примененная для решений уравнений (15) основана на том, что: понижается порядок уравнения до второго; двумерная область  $(\xi, \bar{\eta})$  разбивается сеткой с равномерным шагом по переменной  $\xi$  и другим равномерным шагом по переменной  $\bar{\eta}$ . Частные производные, относящиеся к переменной  $\bar{\eta}$  аппроксимируются центральными разностями, а производные, относящиеся к переменной  $\xi$  – разностями назад. Система тогда переписывается в виде четырехточечной краевой задачи. Из-за неавтономности уравнений используются два итерационных процесса, основанные на последовательной замене вычисленных значений. В каждом внутреннем итерационном процессе (по переменной  $\bar{\eta}$ ) переменная  $\xi$  фиксируется. Полученная система линейных дифференциальных уравнений решается методом прогонки. Внутренние итерации проводятся до тех пор, пока критерий сходимости вычислений превышает  $10^{-4}$  для каждого фиксированного значения  $\xi$ , во внешнем итерационном процессе значения  $\xi$  меняются от 0 до 5. С каждым последующим итерационным шагом значения, зависящие от этой переменной, обновляются.

**5. Обсуждение результатов.** В результате численного счета были получены решения системы уравнений (9), соответствующей области передней кромки пластины, и системы уравнений, описывающей развитое течение (12), для функции тока и температуры в зависимости от параметров  $\text{Pr}$  и  $\text{Da}$ . Получены критериальные зависимости для касательного напряжения

и температуры на стенке для малых и больших значений продольной координаты (табл. 1, табл. 2).

Pr* = 1			
	Da = 10 <sup>-1</sup>	Da = 10 <sup>-2</sup>	Da = 10 <sup>-3</sup>
$\theta_s$	1,18x1/5 + ...	0,75x <sup>1/5</sup> + ...	0,47x <sup>1/5</sup> + ...
$\tau_w$	4,89x <sup>2/5</sup> + ...	18,11x <sup>2/5</sup> + ...	63,93x <sup>2/5</sup> + ...
Da = 10 <sup>-3</sup>			
	Pr* = 0,1	Pr* = 0,72	Pr* = 10
$\theta_s$	0,60x <sup>1/5</sup> + ...	0,48x <sup>1/5</sup> + ...	0,42x <sup>1/5</sup> + ...
$\tau_w$	48,52x <sup>2/5</sup> + ...	62,17x <sup>2/5</sup> + ...	74,39x <sup>2/5</sup> + ...

Таблица 1. Зависимость температуры на стенке и касательного напряжения от числа Da и числа Pr для малых x

Pr* = 1			
	Da = 10 <sup>-1</sup>	Da = 10 <sup>-2</sup>	Da = 10 <sup>-3</sup>
$\theta_s$	3,38x + ...	1,53x + ...	1,17x + ...
$\tau_w$	5,45x + ...	11,35x + ...	22,72x + ...
Da = 10 <sup>-3</sup>			
	Pr* = 0,1	Pr* = 0,72	Pr* = 10
$\theta_s$	1,19x + ...	1,17x + ...	1,16x + ...
$\tau_w$	22,02x + ...	22,82x + ...	22,79x + ...

Таблица 2. Зависимость температуры на стенке и касательного напряжения от числа Da и числа Pr для больших x

На рис. 1, 2 представлены результаты численного решения системы уравнений (9), (10) при различных значениях числа Da. Полученные результаты хорошо согласуются с предыдущими работами. На рис. 1 показано, что при Da → 0 решение соответствует температурному профилю, полученному в работе Lesnic [4], при увеличении числа Da теплоотдача на поверхности растет (табл. 1, табл. 2). Зависимость характеристик процесса от числа Pr незначительна.

На рис. 3 представлены графики функций  $f_{\bar{\eta}\bar{\eta}}(\xi, 0)$  и  $\bar{h}(\xi, 0)$  в зависимости от продольной координаты  $\xi$ , полученные из численного решения полной системы уравнений (15) при значениях параметров Pr = 1 и Da = 10<sup>-2</sup>. Представленные решения гладко переходят от значений, соответствующих передней кромки пластины (8) к асимптотической форме решений далеко вниз по потоку (11). На рис. 4 представлено поведение функции  $\theta_0(x, 0)$  в зависимости от числа Da. Показан быстрый переход функции  $\theta_0(x, 0)$  от степенной зависимости (8), соответствующей малым значениям продольной координаты, к линейной (11) согласно разложению (15).

Получена существенная зависимость температуры и теплоотдачи на вертикальной поверхности в пограничном слое от числа Da (табл. 1, табл. 2, рис. 4).

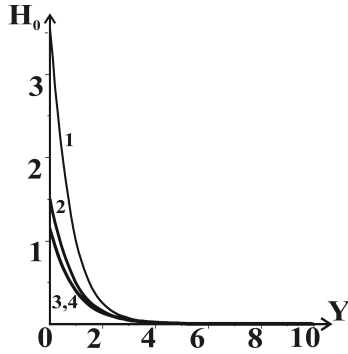


Рис. 1. Графики функции  $H_0(Y)$ , полученные из численного решения системы уравнений (9), (10) при  $Pr^* = 1$  и различных значениях  $Da$ : 1 –  $10^{-1}$ ; 2 –  $10^{-2}$ ; 3 –  $10^{-3}$ ; 4 – 0

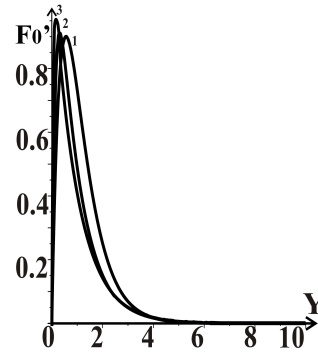


Рис. 2. Графики функции  $F_0'(Y)$ , полученные из численного решения системы уравнений (9), (10) при  $Pr^* = 1$  и различных значениях  $Da$ : 1 –  $10^{-1}$ ; 2 –  $10^{-2}$ ; 3 –  $10^{-3}$

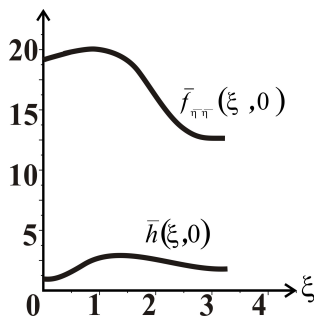


Рис. 3. Графики функций  $\bar{f}_{\bar{\nu}}(\xi, 0)$  и  $\bar{h}(\xi, 0)$ , полученные из численного решения системы уравнений (12) при  $Pr = 1$  и  $Da = 10^{-2}$

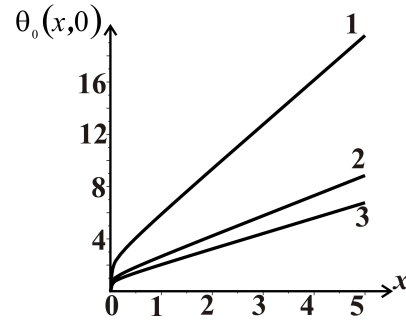


Рис. 4. Графики функции  $\theta_0(x, 0)$ , полученные из численного решения системы уравнений (12) при  $Pr = 1$  и  $1 - Da = 10^{-1}$ ,  $2 - Da = 10^{-2}$ ,  $3 - Da = 10^{-3}$

**Заключение.** Рассмотрена задача свободной конвекции на вертикальной поверхности в пористой среде при граничных условиях третьего рода, задающих теплоотдачу с поверхности, когда поток пропорционален локальной температуре поверхности. В приближении пограничного слоя построены разложения для функции тока и температуры для малых и больших значений продольной координаты. Для температуры на стенке и касательного напряжения получены зависимости от чисел  $Pr$  и  $Da$ . Построены численные решения, объединяющие непрерывным образом автомодельные решения около передней кромки пластины и далеко по потоку.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ingham, D. B.* Transport phenomena in Porous media / D. B. Ingham, I. Pop. – Oxford : Pergamon, 1998. – 448 p.
- [2] *Nield, D. A.* Convection in Porous Media / Donald A. Nield, Adrian Bejan. – New York : Springer, 1999. – 640 p.
- [3] *Merkin, J. H.* Natural-convection boundary-layer flow on a vertical surface with Newtonian heating / J. H. Merkin // Int. J. Heat and Fluid Flow. – 1994. – Vol. 15 (5). – P. 392–398.
- [4] *Lesnic, D.* Free convection boundary-layer flow along a vertical surface in a porous medium with Newtonian heating / D. Lesnic, D. B. Ingham, I. Pop // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1999. – Vol. 42. – P. 2621–2627.
- [5] *Kim, S. J.* Analysis of natural convection about a vertical plate embedded in a porous medium / S. J. Kim, K. Vafai // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1988. – Vol. 32 (4). – P. 665–677.
- [6] *Ван-Дайк, М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М. : Мир, 1967. – 310 с.
- [7] *Бочарова, А. А.* Свободная конвекция в пористой среде при тепловых граничных условиях третьего рода на вертикальной поверхности / А. А. Бочарова, И. В. Плаксина // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 28–38.



*I. V. Plaksina*

**NUMERICAL MODELLING OF A FREE-CONVECTIVE INTERFACE IN THE  
POROUS ENVIRONMENT AT SET HEAT EMISSION ON A VERTICAL  
SURFACE**

*Far East State Technical University*

**Abstract.** The problem of a free-convective current on a vertical surface in the porous environment is considered under thermal boundary conditions of the third sort. The coordinate decomposition for current and temperature function are constructed at small and great values of longitudinal coordinate which are united then by means of the numerical decision of the full equations in interface approach. The criteria dependences for process characteristics at various values of defining parametres are written down.

**Keywords:** free convection, porous environment, interface, vertical surface.

*Плаксина Ирина Владимировна*

*аспирант, Дальневосточный государственный технический университет (ДВПИ имени В. В. Куйбышева), г. Владивосток*

*e-mail: irinaplak@rambler.ru*

*Plaksina, Irina Vladimirovna*

*Portgraduate student, Far East State Technical University, Vladivostok*

Д. А. Потянихин

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УДАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН*

**Аннотация.** Рассматривается алгоритм решения плоских автомодельных задач динамического деформирования нелинейно упругой среды на примере задачи о косом отражении продольной ударной волны от жесткой преграды. В качестве критериев выбора единственного реализуемого варианта распространения деформаций из числа математически возможных приняты термодинамическое условие совместности и условие эволюционности ударных волн. Предлагаемый алгоритм включает проверку критериев в процессе численных расчетов на примере серии вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** теория упругости, ударные волны, вычислительный эксперимент.

УДК: 539.3

**Введение.** В реальных процессах деформирование твердых тел сопровождается их нагреванием. Поэтому при моделировании процессов упругого деформирования необходимо пользоваться моделью термоупругой среды. В то же время известно, что скорость распространения тепловых явлений существенно меньше скорости распространения динамических возмущений. Поэтому в динамических задачах процессом теплопередачи часто пренебрегают, полагая коэффициенты теплопроводности равными нулю. Следовательно, из модельных соотношений термоупругой среды исключаются уравнение баланса энтропии и уравнение связи между энтропией и абсолютной температурой. Это приводит к неединственности решения даже простейших краевых задач, допускающих автомодельную постановку. Оказывается, можно найти несколько комбинаций поверхностей разрывов, распространяющихся в упругих телах, которые удовлетворяют одним и тем же заданным граничным условиям. При этом с математической точки зрения все они равноправны, ни одному из них нельзя отдать предпочтение.

Рассмотрим алгоритм, позволяющий определять единственное решение плоских автомодельных задач динамики деформирования нелинейной упругой среды при помощи дополнительных критериев — термодинамического условия совместности и условия эволюционности сильных разрывов.

**1. Определяющие соотношения.** Система модельных уравнений динамического деформирования нелинейной упругой среды в прямоугольной декартовой системе координат в переменных Эйлера представляется соотношениями

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, & w_i &= \dot{v}_i + v_j v_{i,j}, & \alpha_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}), \\ \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), & \sigma_{ij,j} &= \rho w_i, \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \sqrt{1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1 I_2 - \frac{8}{3}I_3}, \\ W &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \varkappa I_1 I_2 + \chi I_1^3 + \eta I_3 + \dots, \\ I_1 &= \alpha_{ii}, & I_2 &= \alpha_{ij} \alpha_{ji}, & I_3 &= \alpha_{ij} \alpha_{jk} \alpha_{ki}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношениях (1)  $u_i, v_i, w_i$  — компоненты векторов перемещений, скоростей и ускорений точек среды;  $\alpha_{ij}, \sigma_{ij}$  — компоненты тензора деформаций Альманси и тензора деформаций Эйлера–Коши;  $\rho_0, \rho$  — плотность материала в начальном и текущем состоянии соответственно;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. При адиабатическом деформировании изотропной среды упругий потенциал  $W$  зависит от инвариантов тензора деформаций  $I_1, I_2, I_3$ ;  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе,  $\varkappa, \chi, \eta$  — упругие модули третьего порядка. Латинский индекс после запятой обозначает частное дифференцирование по пространственной координате ( $f_{,j} = \partial f / \partial x_j$ ), точкой обозначена частная производная по времени ( $\dot{f} = \partial f / \partial t$ ). Здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам.

Система (1) может иметь решения, не являющиеся непрерывными на некоторых особых движущихся поверхностях. На таких поверхностях необходимо потребовать выполнения условий совместности разрывов. Если при непрерывных перемещениях  $u_i$  терпят разрыв их первые производные, то в среде распространяется со скоростью  $G$  поверхность сильных разрывов — ударная волна, на которой параметры напряженно-деформированного состояния и движения точек среды связаны динамическими и кинематическими условиями совместности первого порядка [1]:

$$[\sigma_{ij}] n_j = \rho^+ (v_j^+ n_j - G) [v_i], \quad [\dot{u}] = -G [u_{,j}] n_j \quad \text{при } [u_i] = 0. \quad (2)$$

Если же на движущейся поверхности непрерывны не только перемещения, но и их первые производные, а скачком изменяются вторые производные, то на ней необходимо потребовать выполнения условий совместности второго порядка [1]:

$$[\sigma_{ij,j}] n_j = \rho^+ [\dot{v}_i], \quad [\ddot{u}_i] n_j = G^2 [u_{i,jk}] n_j n_k \quad \text{при } [u_i] = 0, [u_{i,j}] = 0. \quad (3)$$

В этом случае  $G$  — скорость распространения поверхности слабых разрывов.

В условиях (2), (3) квадратными скобками обозначен скачок функции на поверхности:  $[m] = m^+ - m^-$ ,  $m^+$  — значение функции перед поверхностью,  $m^-$  — сразу за ней;  $n_j$  — компоненты единичной нормали к поверхности волны.

Анализируя модельные соотношения (1) совместно с условиями (2), (3), можно показать, что в нелинейной упругой среде с принятым выше потенциалом  $W$  в условиях плоского деформированного состояния возможно существование двух типов плоских ударных волн — квазипродольных, на которых преобладает изменение объемных деформаций, и квазипоперечных, вызывающих преимущественно сдвиговые деформации, а также простых волн Римана, передним и задним фронтами которых являются плоские волны разрывов ускорений. При этом скорость распространения объемных деформаций всегда больше, чем скорость распространения дополнительного сдвига [2].

При отсутствии теплопроводности единственным необратимым процессом в среде остается ударная волна. Условие неубывания энтропии на поверхности сильных разрывов приводит к

термодинамическому условию совместности [2]:

$$\sigma_{ij}^+ [v_i] n_j - \rho^+ (v_j^+ n_j - G) \left( \frac{[v_i][v_i]}{2} + \frac{W}{\rho_0} \right) \geq 0. \quad (4)$$

Аналогом соотношения (4) в газовой динамике является теорема Цемплена, запрещающая существование ударных волн разрежения.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим последовательность решения плоских автомодельных краевых задач на примере задачи о косом отражении продольной ударной волны от жесткой преграды [3]. Пусть плоская ударная волна  $\Sigma_1$  постоянной интенсивности  $\tau_1 = [u_{i,j}] n_i^{(1)} n_j^{(1)} (n_i^{(1)} - \text{компоненты единичной нормали к } \Sigma_1)$ , распространяясь в недеформированной среде с постоянной скоростью  $G_1$ , падает под некоторым углом  $\beta_1 < 90^\circ$  на плоскую жестко закрепленную границу  $L$  нелинейно упругого полупространства (рис. 1).

Прямоугольная декартова система координат выбирается таким образом, чтобы вектор нормали  $\mathbf{n}^{(1)}$  к плоскости волны имел только две ненулевые компоненты:  $n_1^{(1)} \neq 0$ ,  $n_2^{(1)} \neq 0$ ,  $n_3^{(1)} = 0$ . В этом случае вектор перемещений точек среды с компонентами  $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$ ,  $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$ ,  $u_3 = 0$  будет параллелен координатной плоскости  $Ox_1x_2$ . Если описывать распространение ударной волны в подвижной системе координат, движущейся поступательно с постоянной скоростью  $S = G_1 / \sin \beta_1$  параллельно оси  $Ox_2$ , то в предположении постоянства интенсивности разрывов на волне  $\Sigma_1$  движение упругой среды автомодельно.

Представим ненулевые компоненты вектора перемещений  $\mathbf{u}$  в виде  $u_1 = x_1 \cdot F(\xi)$ ,  $u_2 = x_1 \cdot \Phi(\xi)$ , где  $\xi = (x_2 - St)/x_1$  — автомодельная переменная,  $F(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  — первая и вторая компоненты безразмерного вектора перемещений в координатном пространстве  $\xi$ . Тогда в системе определяющих соотношений можно перейти от дифференциальных уравнений в частных производных к однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $F(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$ :

$$\begin{cases} A \cdot F''(\xi) + B \cdot \Phi''(\xi) = 0, \\ C \cdot F''(\xi) + D \cdot \Phi''(\xi) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $A, B, C, D$  — функции от  $\xi$ ,  $F, F', \Phi, \Phi'$  и упругих модулей среды.

Условие существования нетривиального решения системы (5)

$$AD - BC = 0 \quad (6)$$

может выполняться либо при некотором значении  $\xi = \xi^*$  (что соответствует ударной волне), либо в целом интервале  $\xi \in [\xi^+, \xi^-]$  ( $\xi^+$  и  $\xi^-$  определяют положение двух слабых волн разрывов ускорений, которые являются передним и задним фронтами волны Римана). В областях тривиального решения ненулевые параметры могут быть выражены через произвольные константы интегрирования  $a, b, e, f$  системы (5):

$$\begin{aligned} F(\xi) &= a\xi + b, & \Phi(\xi) &= e\xi + f, \\ u_{1,1} &= b, & u_{1,2} &= a, & u_{2,1} &= f, & u_{2,2} &= e, \\ v_1 &= \frac{-Sa}{(1-b)(1-e)-af}, & v_2 &= \frac{-S(e-be+af)}{(1-b)(1-e)-af}, & \frac{\rho}{\rho_0} &= (1-b)(1-e)-af, \\ \alpha_{11} &= b - \frac{1}{2}(b^2 + f^2), & \alpha_{12} &= \frac{1}{2}(a + f - ab - ef), & \alpha_{22} &= e - \frac{1}{2}(a^2 + e^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left( (1-b)(1-e)-af \right) \left( (\lambda + 2\mu)\alpha_{11} + \lambda\alpha_{22} + (-2\lambda - 4\mu + 3(\varkappa + \chi + \eta))\alpha_{11}^2 + \right. \\ &+ (-8\mu + 2\varkappa + 3\eta)\alpha_{12}^2 + (\varkappa + 3\chi)\alpha_{22}^2 - 2(\lambda - \varkappa - 3\chi)\alpha_{11}\alpha_{22} - 6(\varkappa + \chi + \eta)\alpha_{11}^3 - \\ &\left. - 4(\varkappa + 3\chi)\alpha_{11}^2\alpha_{22} - 2(\varkappa + 3\chi)\alpha_{11}\alpha_{12}^2 - 6(2\varkappa + 3\eta)\alpha_{11}\alpha_{12}^2 - 4(2\varkappa + 3\eta)\alpha_{22}\alpha_{12}^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & \left( (1-b)(1-e) - af \right) \left( 4\mu\alpha_{12} - 2(\lambda + 4\mu - 2\kappa - 3\eta)\alpha_{12}\alpha_{22} - \right. \\ & - 2(\lambda + 2\mu - 2\kappa - 3\eta)\alpha_{11}\alpha_{12} - 6(\kappa + \chi + \eta)\alpha_{11}^2\alpha_{12} - 12(\kappa + \chi + \eta)\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{22} - \\ & \left. - 2(5\kappa + 3\chi + 6\eta)\alpha_{12}\alpha_{22}^2 - 2(2\kappa + 3\eta)\alpha_{12}^3 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \left( (1-b)(1-e) - af \right) \left( \lambda\alpha_{11} + (\lambda + 2\mu)\alpha_{22} + (\kappa + 3\chi)\alpha_{11}^2 - (8\mu - 2\kappa - 3\eta)\alpha_{12}^2 - \right. \\ & - (2\lambda + 4\mu + 3(\kappa + \chi + \eta))\alpha_{22}^2 - 2(\lambda - \kappa - 3\chi)\alpha_{11}\alpha_{22} - 6(\kappa + \chi + \eta)\alpha_{22}^3 - \\ & \left. - 4(\kappa + 3\chi)\alpha_{22}^2\alpha_{11} - 2(\kappa + 3\chi)\alpha_{22}\alpha_{11}^2 - 6(2\kappa + 3\eta)\alpha_{22}\alpha_{12}^2 - 4(2\kappa + 3\eta)\alpha_{11}\alpha_{12}^2 \right), \end{aligned}$$

$$\sigma_{33} = \left( (1-b)(1-e) - af \right) \left( \lambda(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \kappa(\alpha_{11}^2 + 2\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2) + 3\chi(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 \right).$$

Условия совместности разрывов, записанные с использованием введенных автомодельных параметров процесса ударного деформирования, допускают существование в рамках поставленной задачи плоских ударных волн (квазипродольных и квазипоперечных) и простых волн (передним и задним фронтами которых являются плоские волны разрывов ускорений), а также областей постоянства параметров напряженно-деформированного состояния, каждой из которых соответствуют свои значения констант интегрирования  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $f$ .

Таким образом, волновая картина, возникающая в области, ограниченной плоскостями  $L$  и  $\Sigma_1$ , с математической точки зрения может состоять из различных комбинаций плоских ударных волн и волн Римана. Характер возникающей волновой картины определяется задаваемыми значениями интенсивности  $\tau_1$  и угла падения  $\beta_1$  волны  $\Sigma_1$ .

**3. Решение краевой задачи.** В зоне 1 между волной  $\Sigma_1$  и первой из отраженных поверхностей (рис. 1, а-г) параметры напряженно-деформированного состояния и движения точек среды определяются из условий совместности разрывов (2) на  $\Sigma_1$ :

$$a_1 = f_1 = \tau_1 \sin \beta_1 \cos \beta_1, \quad b_1 = -\tau_1 \cos^2 \beta_1, \quad e_1 = -\tau_1 \sin^2 \beta_1. \quad (8)$$

Здесь и далее нижний индекс у констант интегрирования  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $f$  соответствует нумерации областей их постоянства на рис. 1. Согласно выводам п. 1, передним отраженным фронтом оказывается либо квазипродольная ударная волна  $\Sigma_2$ , положение которой определяется значением  $\xi_2 = -\text{ctg} \beta_2$  (рис. 1, а, б), либо простая волна Римана  $\xi \in [\xi_2^+, \xi_2^-]$  (рис. 1, в, г), вносящие основной вклад в изменение объемных деформаций. Следом может распространяться либо квазипоперечная ударная волна  $\Sigma_3$ , соответствующая значению  $\xi_3 = -\text{ctg} \beta_3$  (рис. 1, а, в), либо центрированная простая волна  $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$  (рис. 1, б, г), влияющие в основном на производимый сдвиг.

**3а. Постановка с двумя отраженными ударными волнами (рис. 1, а).** Решение краевой задачи в случае отражения двух ударных волновых фронтов  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$  заключается в определении соответствующих значений  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  и констант интегрирования  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $f$  в областях 2 и 3 из замкнутой системы алгебраических уравнений, включающей условия совместности разрывов и непрерывности перемещений (2) с учетом отсутствия движения точек среды на жестко закрепленной границе  $L$ :

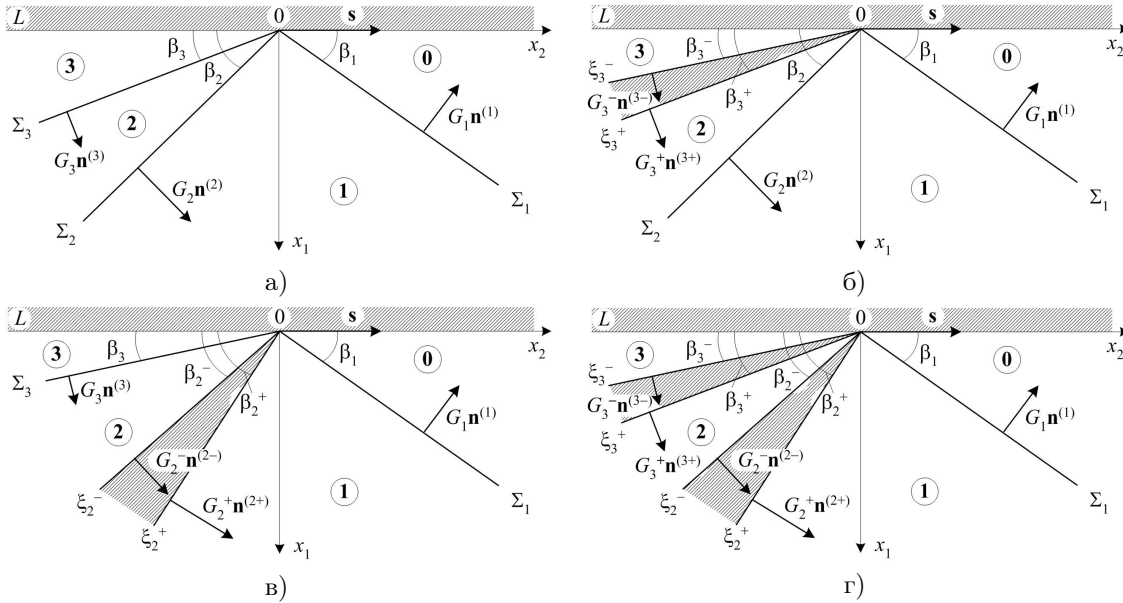


Рис. 1. Математически возможные волновые картины взаимодействия плоской волны постоянной интенсивности с жестко закрепленной границей упругого полупространства

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1 - a_2)\xi_2 + (b_1 - b_2) = 0, \\ (e_1 - e_2)\xi_2 + (f_1 - f_2) = 0, \\ (\tilde{\sigma}_{11}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{11}^{(2)})\xi_2 + (\tilde{\sigma}_{12}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{12}^{(2)}) = M^2 d^{(1)} (1 - \tilde{v}_1^{(1)}\xi_2 - \tilde{v}_2^{(1)}) (\tilde{v}_1^{(1)} - \tilde{v}_1^{(2)}), \\ (\tilde{\sigma}_{21}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{21}^{(2)})\xi_2 + (\tilde{\sigma}_{22}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(2)}) = M^2 d^{(1)} (1 - \tilde{v}_1^{(1)}\xi_2 - \tilde{v}_2^{(1)}) (\tilde{v}_2^{(1)} - \tilde{v}_2^{(2)}), \\ (a_2 - a_3)\xi_3 + (b_2 - b_3) = 0, \\ (e_2 - e_3)\xi_3 + (f_2 - f_3) = 0, \\ (\tilde{\sigma}_{11}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{11}^{(3)})\xi_3 + (\tilde{\sigma}_{12}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{12}^{(3)}) = M^2 d^{(2)} (1 - \tilde{v}_1^{(2)}\xi_3 - \tilde{v}_2^{(2)}) (\tilde{v}_1^{(2)} - \tilde{v}_1^{(3)}), \\ (\tilde{\sigma}_{21}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{21}^{(3)})\xi_3 + (\tilde{\sigma}_{22}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(3)}) = M^2 d^{(2)} (1 - \tilde{v}_1^{(2)}\xi_3 - \tilde{v}_2^{(2)}) (\tilde{v}_2^{(2)} - \tilde{v}_2^{(3)}), \\ \tilde{v}_1^{(3)} = \tilde{v}_2^{(3)} = 0, \end{array} \right. \quad (9)$$

$$M^2 = \frac{\rho S^2}{\lambda + 2\mu} = \frac{S^2}{c_1^2}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu}, \quad \tilde{v}_i^{(k)} = \frac{v_i^{(k)}}{S},$$

$$d^{(k)} = \frac{\rho^{(k)}}{\rho_0} = (1 - a_k)(1 - f_k) - b_k e_k, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}.$$

В соотношениях (9) и далее верхним индексом в скобках при  $\sigma_{ij}$  и  $v_i$  обозначена соответствующая область постоянства параметров напряженно-деформированного состояния.

**3б. Постановка с отраженной квазипродольной ударной волной и волной Римана (рис. 1, б).** Решение краевой задачи в случае отражения ударной волны  $\Sigma_2$  и простой волны  $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$  состоит в определении положения ударного фронта  $\xi_2$ , переднего и заднего фронтов  $\xi_3^+$  и  $\xi_3^-$ , констант интегрирования  $a, b, e, f$  в областях 2 и 3, а также функций  $F(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  в области волны Римана. Выполним вычисления в следующей последовательности.

**Шаг 1.** Следуя условиям совместности (2) на  $\Sigma_2$ , приходим к системе четырех нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\xi_2, a_2, b_2, e_2, f_2$ :

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)\xi_2 + (b_1 - b_2) = 0, \\ (e_1 - e_2)\xi_2 + (f_1 - f_2) = 0, \\ (\tilde{\sigma}_{11}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{11}^{(2)})\xi_2 + (\tilde{\sigma}_{12}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{12}^{(2)}) = M^2 d^{(1)} (1 - \tilde{v}_1^{(1)}\xi_2 - \tilde{v}_2^{(1)}) (\tilde{v}_1^{(1)} - \tilde{v}_1^{(2)}), \\ (\tilde{\sigma}_{21}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{21}^{(2)})\xi_2 + (\tilde{\sigma}_{22}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(2)}) = M^2 d^{(1)} (1 - \tilde{v}_1^{(1)}\xi_2 - \tilde{v}_2^{(1)}) (\tilde{v}_2^{(1)} - \tilde{v}_2^{(2)}). \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, в зоне 2 все параметры, определяющие движение среды, выражаются через один неизвестный параметр  $\xi_2$ . Решив систему (9), получаем первое приближенное значение  $\xi_2$ , которое далее будет уточняться.

**Шаг 2.** Теперь, зная параметры движения в зоне 2 ( $a_2, b_2, e_2, f_2$ ), из условия (6) находим  $\xi_3^+$ .

**Шаг 3.** Решение в области простой волны строится путем интегрирования по автомодельному параметру  $\xi$  системы обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящей из условия (6) и одного из равенств (5):

$$\begin{cases} A(\xi, F, \Phi, F', \Phi') \cdot F''(\xi) + B(\xi, F, \Phi, F', \Phi') \cdot \Phi''(\xi) = 0, \\ A(\xi, F, \Phi, F', \Phi') \cdot D(\xi, F, \Phi, F', \Phi') - B(\xi, F, \Phi, F', \Phi') \cdot C(\xi, F, \Phi, F', \Phi') = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Систему (11) относительно неизвестных функций  $F(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  не удастся привести к нормальной форме. Для ее численного интегрирования предлагается использовать неявную конечно-разностную схему с трехточечным шаблоном  $\{\xi_{(i-1)}, \xi_{(i)}, \xi_{(i+1)}\}$  с постоянным шагом  $h$ . Разобьем отрезок  $[\xi_3^+, \xi_3^-]$  на  $n$  равных частей точками  $\xi_3^+ = \xi_{(0)} > \xi_{(1)} > \xi_{(2)} > \dots > \xi_{(n)} = \xi_3^-$  так, что  $\xi_{(i)} - \xi_{(i-1)} = (\xi_3^- - \xi_3^+)/n = h$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Тогда  $F_{(i)} = F(\xi_{(i)})$  и  $\Phi_{(i)} = \Phi(\xi_{(i)})$  ( $0 \leq i \leq n$ ) — значения функций  $F(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  в точках деления (рис. 2).

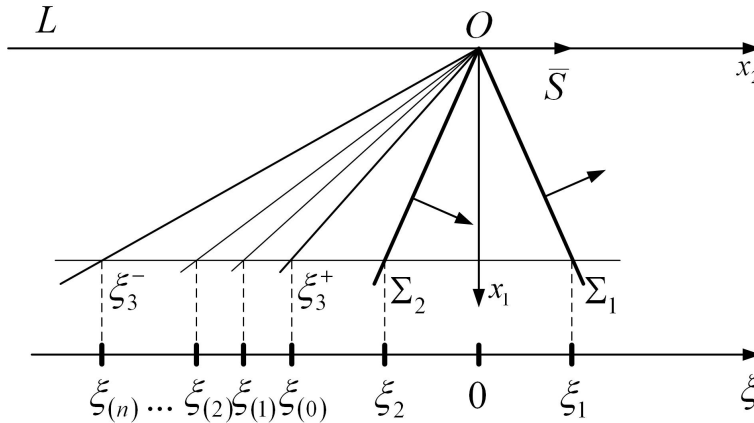


Рис. 2. Разбиение отрезка интегрирования в области простой волны

Производные функций  $F(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  во внутренних узлах ( $1 \leq i \leq n-1$ ) аппроксимируются конечно-разностными формулами [4]:

$$\begin{aligned} F'_{(i)} &= \frac{F_{(i+1)} - F_{(i-1)}}{2h}, & F''_{(i)} &= \frac{F_{(i+1)} - 2F_{(i)} + F_{(i-1)}}{h^2}, \\ \Phi'_{(i)} &= \frac{\Phi_{(i+1)} - \Phi_{(i-1)}}{2h}, & \Phi''_{(i)} &= \frac{\Phi_{(i+1)} - 2\Phi_{(i)} + \Phi_{(i-1)}}{h^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

В граничных узлах используем представление:

$$\begin{aligned} F'_{(0)} &= \frac{-3F_{(0)} + 4F_{(1)} - F_{(2)}}{2h}, & F'_{(n)} &= \frac{3F_{(n)} - 4F_{(n-1)} + F_{(n-2)}}{2h}, \\ \Phi'_{(0)} &= \frac{-3\Phi_{(0)} + 4\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)}}{2h}, & \Phi'_{(n)} &= \frac{3\Phi_{(n)} - 4\Phi_{(n-1)} + \Phi_{(n-2)}}{2h}. \end{aligned} \quad (13)$$

В первом узле  $\xi_{(0)} = \xi_3^+$  (на переднем фронте простой волны)  $F_{(0)} = a_2\xi_3^+ + b_2$ ,  $\Phi_{(0)} = e_2\xi_3^+ + f_2$ ,  $F'_{(0)} = a_2$ ,  $\Phi'_{(0)} = e_2$ . В каждом внутреннем узле  $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n-1)}$  требуется записать два дифференциальных уравнения (11), заменяя производные согласно принятой схеме (12). Таким образом, получается система  $2(n+1)$  уравнений относительно  $2(n+1)$  неизвестных  $F_{(i)}, \Phi_{(i)}$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Решив ее, вычисляем производные  $F'_{(n)}, \Phi'_{(n)}$  согласно (13).

**Шаг 4.** Решение краевой задачи заканчиваем, если  $F'_{(n)} = \Phi'_{(n)} = 0$  (следствие отсутствия движения точек среды на закрепленной границе). Условие остановки счета будет отличаться при решении другой краевой задачи. В противном случае, корректируя задаваемые значения положения фронта ударной волны  $\xi_2$ , шага интегрирования  $h$  и количество отрезков разбиения  $n$ , добиваемся выполнения на заднем фронте  $\xi_3^-$  простой волны условия неподвижности среды  $F'_{(n)} = \Phi'_{(n)} = 0$  на жестко закрепленной границе  $L$ . Таким образом, находим константы интегрирования  $a, b, e, f$  в области 3 из соотношений  $F_{(n)} = a_3\xi_3^- + b_3$ ,  $\Phi_{(n)} = e_3\xi_3^- + f_3$ ,  $F'_{(n)} = a_3$ ,  $\Phi'_{(n)} = e_3$  и значения функций  $F(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  в точках разбиения  $\xi_{(0)}, \xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$ , то есть получаем решение краевой задачи.

**Зв. Постановка с отраженной волной Римана и квазипоперечной ударной волной (рис. 1, в).** Для решения краевой задачи в случае отражения простой волны  $\xi \in [\xi_2^+, \xi_2^-]$  и ударной волны  $\Sigma_3$  нужно определить положения переднего и заднего фронтов  $\xi_2^+$  и  $\xi_2^-$ , ударного фронта  $\xi_3$ , значения констант интегрирования  $a, b, e, f$  в областях 2 и 3 и функции  $F(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  в области волны Римана. Применим следующий алгоритм.

**Шаг 1.** Подставляя известные параметры движения в зоне 1 ( $a_1, b_1, e_1, f_1$ ) в условие (6), находим положение переднего фронта простой волны  $\xi_2^+$ .

**Шаг 2.** Решение в области простой волны  $\xi \in [\xi_2^+, \xi_2^-]$  строится путем интегрирования по автомодельному параметру  $\xi$  системы (11). Как и в предыдущем случае, используем неявную конечно-разностную схему с трехточечным шаблоном, аппроксимируя производные формулами (12), (13). Положение  $\xi_2^-$  заднего фронта волны Римана заранее неизвестно. Задавая его произвольно, разбиваем отрезок  $[\xi_2^+, \xi_2^-]$  на  $n$  равных частей точками  $\xi_2^+ = \xi_{(0)} > \xi_{(1)} > \xi_{(2)} > \dots > \xi_{(n)} = \xi_2^-$  так, что  $\xi_{(i)} - \xi_{(i-1)} = (\xi_2^- - \xi_2^+)/n = h$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Решая систему (11), записанную в конечных разностях, находим константы интегрирования  $a, b, e, f$  в области 2 из соотношений  $F_{(n)} = a_2\xi_2^- + b_2$ ,  $\Phi_{(n)} = e_2\xi_2^- + f_2$ ,  $F'_{(n)} = a_2$ ,  $\Phi'_{(n)} = e_2$ .

**Шаг 3.** Определив параметры движения в зоне 2 ( $a_2, b_2, e_2, f_2$ ), записываем условия совместности разрывов (2) на ударной волне  $\Sigma_3$ :

$$\begin{cases} (a_2 - a_3)\xi_3 + (b_2 - b_3) = 0, \\ (e_2 - e_3)\xi_3 + (f_2 - f_3) = 0, \\ \left( \tilde{\sigma}_{11}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{11}^{(3)} \right) \xi_3 + \left( \tilde{\sigma}_{12}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{12}^{(3)} \right) = M^2 d^{(2)} \left( 1 - \tilde{v}_1^{(2)} \xi_3 - \tilde{v}_2^{(2)} \right) \left( \tilde{v}_1^{(2)} - \tilde{v}_1^{(3)} \right), \\ \left( \tilde{\sigma}_{21}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{21}^{(3)} \right) \xi_3 + \left( \tilde{\sigma}_{22}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(3)} \right) = M^2 d^{(2)} \left( 1 - \tilde{v}_1^{(2)} \xi_3 - \tilde{v}_2^{(2)} \right) \left( \tilde{v}_2^{(2)} - \tilde{v}_2^{(3)} \right). \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) содержит 5 неизвестных:  $a_3, b_3, e_3, f_3, \xi_3$ . Если дополнить ее одним из граничных условий на  $L$

$$\tilde{v}_1^{(3)} = \frac{-a_3}{(1 - b_3)(1 - e_3) - a_3 f_3} = 0, \quad (15)$$



то система становится замкнутой. Получив ее решение, подставляем найденные значения  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $e_3$ ,  $f_3$  во второе граничное условие

$$\tilde{v}_2^{(3)} = \frac{e_3 - b_3 e_3 + a_3 f_3}{(1 - b_3)(1 - e_3) - a_3 f_3} = 0. \quad (16)$$

Если соотношение (16) обращается в тождество, считаем краевую задачу решенной. В противном случае следует вернуться к шагу 2 и, скорректировав положение заднего фронта волны Римана  $\xi_2^-$ , пересчитать  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $e_3$ ,  $f_3$  и  $\xi_3$ . Эту процедуру необходимо выполнять до тех пор, пока условие (16) не обратится в тождество.

**3г. Постановка с двумя отраженными волнами Римана (рис. 1, г).** Решение краевой задачи в случае отражения двух волн Римана  $\xi \in [\xi_2^+, \xi_2^-]$  и  $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$  состоит в определении положения передних и задних фронтов  $\xi_2^+$ ,  $\xi_2^-$ ,  $\xi_3^+$ ,  $\xi_3^-$  и констант интегрирования  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $f$  в зонах 2 и 3, а также функций  $F(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  в областях волн Римана. Это решение строится комбинированием алгоритмов, описанных в п. 3б и 3в.

**4. Критерии выбора решения. Результаты численных экспериментов.** Решение задачи в постановке с двумя отраженными ударными волнами (рис. 1, а) можно получить всегда, в то время как остальные решения (рис. 1, б–г) при определенных параметрах задачи не существуют. Получив все математически возможные решения краевой задачи (в общем случае четыре), сравниваем их между собой, проверяя выполнение двух критериев.

Во-первых, на каждой ударной волне проверяем выполнение термодинамического условия совместности (4). Если соотношение (4) не выполняется при некоторой постановке, то такую постановку исключаем из числа возможных.

Еще одним ограничением на существование ударных волн является условие эволюционности. Если в результате сопоставления двух решений оказывается, что фронт ударной волны занимает промежуточное положение внутри веера простой волны, то считаем ударную волну неэволюционной и выбираем решение с волной Римана.

Вычисления проводились для нелинейной упругой среды с безразмерными константами:  $\tilde{\lambda} = 0,4$ ,  $\tilde{\mu} = 0,3$ ,  $\tilde{\nu} = -1,0$ ,  $\tilde{\chi} = -1,5$ ,  $\tilde{\eta} = -2,0$  (все упругие модули нормированы по  $(\lambda + 2\mu)$ ). Значения параметров падающей волны варьировались в интервалах  $0 < \beta_1 < 80^\circ$ ,  $0,001 \leq \tau_1 \leq 0,03$ .

Серия вычислительных экспериментов позволяет утверждать, что квазипоперечная ударная волна  $\Sigma_3$  всегда оказывается внутри веера центрированной волны  $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$  (рис. 1, б, г), т. е. волновые картины, показанные на рис. 1, а, в, не возникают. Распределение параметров напряженно-деформированного состояния, типичное для волновой картины с отраженной квазипродольной ударной волной  $\Sigma_2$  и центрированной волной  $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$  (рис. 1, б), получено при  $\beta_1 = 30^\circ$ ,  $\tau_1 = 0,02$ , и показано на рис. 3.

Квазипродольная ударная волна  $\Sigma_2$  приводит к дальнейшему сжатию среды. Простая волна, наоборот, расширяет среду ( $\rho^{(3)} < \rho^{(2)}$ ), уменьшая уровень объемных деформаций. Существует некоторое критическое значение  $\beta_1^*$  для угла падения  $\beta_1$ , зависящее от интенсивности  $\tau_1$  падающей волны. При превышении этого значения квазипродольная ударная волна  $\Sigma_2$  оказывается внутри веера простой волны  $\xi \in [\xi_2^+, \xi_2^-]$ , т. е. реализуется волновая картина, показанная на рис. 1, г. Предельные значения  $\beta_1^*$  увеличиваются с ростом интенсивности волны  $\Sigma_1$ . Например, при  $\tau_1 = 0,01$  предельный угол  $\beta_1^* = 64,54^\circ$ , при  $\tau_1 = 0,02$  угол  $\beta_1^* = 65,7^\circ$ .

На рис. 4 показано распределение параметров напряженно-деформированного состояния, типичное для отраженной волновой картины с двумя простыми волнами  $\xi \in [\xi_2^+, \xi_2^-]$  и  $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$  (рис. 1, г), полученное при  $\beta_1 = 70^\circ$ ,  $\tau_1 = 0,01$ . Отметим, что на обеих простых волнах уровень объемных деформаций уменьшается ( $\rho^{(3)} < \rho^{(2)} < \rho^{(1)}$ ). При изучении данной волновой картины угол изменялся в интервале  $(\beta_1^*, \beta_1^{**})$ . Второе критическое значение  $\beta_1^{**}$ , также как и  $\beta_1^*$ , зависит от величины  $\tau_1$  (например, при  $\tau_1 = 0,01$  значение  $\beta_1^{**} = 75,16^\circ$ ). При превышении этого значения постановка задачи в автомодельной формулировке становится невозможной, поскольку в этом случае необходимо вести речь об удаленном разрыве.

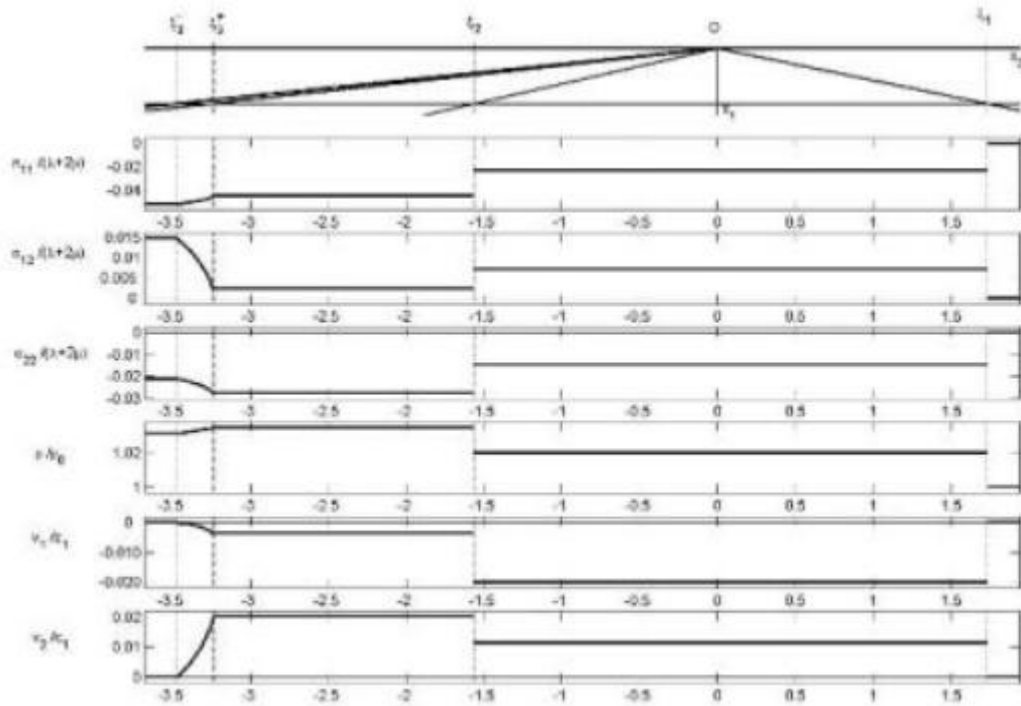


Рис. 3. Распределение параметров напряженно-деформированного состояния, соответствующее отраженной волновой картине с отраженными квазипродольной ударной волной  $\Sigma_2$  и центрированной волной  $\xi \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$  ( $\beta_1 = 30^\circ$ ,  $\tau_1 = 0,02$ )

**Заключение.** Рассмотрен алгоритм решения плоских автомодельных задач динамического деформирования нелинейно упругой среды на примере задачи о косом отражении продольной ударной волны от жесткой преграды. В качестве критериев выбора единственного решения из числа математически возможных приняты термодинамическое условие совместности сильных разрывов (аналог теоремы Цемплена о термодинамической невозможности скачков разрежения в задачах газовой динамики) и условие эволюционности ударных волн. Представленный алгоритм предполагает проверку указанных критериев в процессе численных расчетов.

При решении большого класса задач может возникнуть ситуация, когда даже при выполнении термодинамического условия совместности ударная волна перестает быть эволюционной [5]. Следовательно, условие эволюционности является более сильным. Однако численные эксперименты в рассматриваемой задаче и ряде других плоских автомодельных задач [3, 6, 7] показывают, что условие (4) и условие эволюционности являются эквивалентными, то есть выполняются или нарушаются одновременно.



*D. A. Potyanikhin*

**ALGORITHM OF THE DECISION OF AUTOMODELLING PROBLEMS OF  
DYNAMICS OF SHOCK DEFORMATION OF A FIRM BODY**

*Institute for Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of Academy of Sciences*

**Abstract.** The algorithm of the decision of flat automodelling problems of dynamic deformation of nonlinear elastic environment on a problem example about slanting reflexion of a longitudinal shock wave from a rigid barrier is considered. As the criteria of a choice of a unique realised variant of distribution of the deformations from a number of mathematically possible the thermodynamic condition of compatibility and a condition of evolutionary shock waves are accepted. The offered algorithm includes a check of criteria in the numerical calculations process on an example of a series of computing experiments.

**Keywords:** the elasticity theory, the shock waves, a computing experiment.

*Потянихин Дмитрий Андреевич*

*аспирант, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

*e-mail: potyanikhin@mail.ru*

*Potyanikhin, Dmitry Andreevich*

*Postgraduate student, Institute for Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of Academy of Sciences, Vladivostok*

## ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕСЖИМАЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН*

**Аннотация.** На основе метода сращиваемых асимптотических разложений строится решение ряда одномерных динамических нестационарных задач для несжимаемой нелинейно-упругой среды. Прифронтальная область волнового процесса определяется эволюционным уравнением для деформаций сдвига, которое имеет принципиальные отличия от эволюционного уравнения объемного деформирования.

**Ключевые слова:** нелинейная упругость, несжимаемость, ударная волна, метод возмущений, эволюционное уравнение.

УДК: 539.3

**Введение.** Известно [1]–[4], что нелинейный процесс ударного объемного деформирования в твердых телах имеет математическую аналогию в газовой динамике. В частности, можно показать, что передняя область данного волнового процесса определяется решениями модельного нелинейного уравнения, называемого эволюционным уравнением квазипростых волн или уравнением Хопфа [5]. Дополнительный учет факторов диссипации энергии и дисперсии приводит соответственно к уравнению Бюргерса [3] и уравнению Кортвега–де Вриза [3]. Если краевые условия рассматриваемой для твердого тела задачи приводят к возникновению не только объемного, но и сдвигового ударного деформирования, то данные динамические процессы оказываются взаимозависимыми [6–7], а скорости и геометрию поверхностей разрывов в общем случае необходимо включить в число неизвестных [6, 8]. Предположение о несжимаемости упругой среды дает возможность изучения чисто сдвиговых процессов без учета предварительного объемного деформирования. В настоящей статье представлены результаты применения метода сращиваемых асимптотических разложений [9] к задачам одномерного ударного сдвигового деформирования. Ключевая идея состоит в описании переходных процессов формоизменения решениями соответствующего эволюционного уравнения, которое оказывается отличным от уравнения Хопфа. Рассматривается большое количество краевых задач, решенных данным методом. Сочетание предлагаемого в статье метода с другими приближенными методами (например, применение лучевых рядов [10–11]), по мнению авторов, позволит строить решения многомерных задач ударного деформирования.

**1. Модельные соотношения среды. Рассматриваемые краевые задачи.** Движение нелинейно упругой изотропной несжимаемой среды в декартовых пространственных координатах  $x_1, x_2, x_3$  в представлении Эйлера задается системой уравнений

$$v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j},$$

Поступила 01.06.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00001-а).

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad \sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ W &= (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \dots \\ I_1 &= \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad \dot{v}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой  $u_i$  и  $v_i$  — компоненты векторов перемещений и скорости среды,  $\alpha_{ij}$  — компоненты тензора деформаций Альманси,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши,  $\rho = const$  — плотность среды,  $p_0$  — функция добавочного гидростатического давления,  $W$  — упругий потенциал,  $\mu, a, b, \kappa, \theta, c, d, k$  — упругие модули среды. По повторяющемуся индексу в (1) и в дальнейшем принято суммирование, многоточием обозначаем невыписанные слагаемые с более высокой малостью.

На поверхностях сильных разрывов следствием интегральных законов сохранения [12] будут динамические условия совместности [12], а также геометрические и кинематические условия совместности [13]:

$$\begin{aligned} [\rho(v_i n_i - G)] &= 0, \quad [\sigma_{ij}]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i], \\ \sigma_{ij}^+[v_i]n_j &= \rho^+(v_j^+ n_j - G) \left\{ \frac{[v_i][v_i]}{2} + [e] \right\} - [q_j]n_j, \\ [f_{,i}] &= \left[ \frac{df}{dn} \right] n_i + a^{\alpha\beta} [f]_{,\alpha} x_{i,\beta}, \quad [f] = -G \left[ \frac{df}{dn} \right] + \frac{\delta[f]}{\delta t}, \\ \frac{df}{dn} &= f_{,i} n_i, \quad x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial y^\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta}, \quad a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \\ [f] &= f^+ - f^-, \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \dot{f} + f_{,i} G n_i, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $n_i$  — компоненты единичной внешней нормали к ударной волне, направленной в сторону движения волны (в часть объема  $V^+, y^\alpha (\alpha = 1, 2)$ ) — поверхностная координатная система,  $q_j$  — компоненты вектора теплового потока,  $e$  — плотность внутренней энергии,  $\delta/\delta t$  — производная по Томасу [13]. Также здесь индексами «+» и «-» обозначены предельные значения величины, вычисленные перед и за ударной волной. Обозначению « $f$ » соответствуют компоненты любого тензорного поля в пространстве.

Далее рассматриваем следующую краевую задачу для полупространства  $x_1 \geq 0$ . До момента  $t = 0$  среда недеформирована. С момента  $t = 0$  на граничной плоскости  $L (x_1 = 0)$  происходит сдвиговое ударное нагружение. В результате него возникает поле перемещений  $u = u_2(x_1, t), u_1 = u_3 = 0$ . Также, в зависимости от нагружения, сразу либо впоследствии в среде образуется ударная волна. Перемещения граничных точек считаем известными функциями:

$$u|_{x_1=0} = g(t). \tag{3}$$

Если в формуле (3)  $g'(0) \neq 0$ , то ударная волна образуется сразу, иначе необходим дополнительный анализ. Следствием уравнений (1) и (2) для нашего случая будет такая скорость ударной волны:

$$G = C(1 + \alpha(\gamma^2 - 3\gamma u_1^+ + 3(u_1^+)^2) + \dots)^{1/2}, \quad \gamma = [u_{,1}], \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{a + b + \kappa + d}{\mu}, \quad C^2 = \mu\rho^{-1}.$$

На поверхности ударной волны  $\Sigma$  должны быть выполнены краевые условия

$$[u]|_\Sigma = 0, \quad [\sigma_{11}]|_\Sigma = 0, \tag{5}$$

причем положение волны задается уравнением

$$x_1 = x_1^0 + \int_{t_0}^t G(\zeta) d\zeta, \quad (6)$$

где  $x_1^0$  и  $t_0$  — место и время образования ударной волны.

Следствием общей системы (1) для поставленной задачи будут уравнения движения

$$u_{,11}(1 + 3\alpha u_{,1}^2) + \dots = \frac{\ddot{u}}{C^2} + \dots \quad (7)$$

$$\frac{p_{,1}}{\mu} = 2\beta u_{,1} u_{,11} + \dots, \quad \beta = \frac{a - b - \kappa/4}{\mu} - 1,$$

из которых для определения поля перемещений необходимо решить только первое. Определение добавочного гидростатического давления по найденному полю перемещений не представляет труда.

Рассмотрим также краевую задачу, которая позволяет отразить изменение кривизны волнового фронта. На границе  $r = r_0$  цилиндрической полости в пространстве, занятом несжимаемой упругой недеформированной средой, с момента  $t = 0$  происходит сдвиговое нагружение. Его следствием в пространственной цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  будут перемещения  $u_r = u_\varphi = 0, u_z(r, t)$ . Движение граничной поверхности, как и в случае плоской задачи, считаем известным. Предполагаем мгновенное или последующее возникновение ударной волны. Формула для скорости такой волны совпадает с формулой (4), а краевые условия на ней задаются уравнениями (5). Для этой задачи антиплоского деформирования поле перемещений определяется решениями уравнения движения

$$u_{z,rr} (1 + 3\alpha u_{z,r}^2) + \frac{u_{z,r}}{r} (1 + \alpha u_{z,r}^2) + \dots = \frac{\ddot{u}_z}{C^2}. \quad (8)$$

Далее рассмотрим возможность решения поставленных краевых задач методом сращиваемых асимптотических разложений.

**2. Применение метода возмущений к плоской задаче одномерного сдвигового деформирования.** С целью применения метода возмущений определим новые безразмерные переменные

$$s = \frac{x_1}{CT}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad w(s, m) = \frac{u(x_1, t)}{CT} \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (9)$$

где  $T$  — характерное время задачи. Считаем, что за такое время возникающие на границе перемещения много меньше, чем проходимое волной в линейном приближении расстояние, что и определяет появление малого параметра задачи. Если  $g'(0) \neq 0$ , то таким параметром может быть величина  $\varepsilon = g'(0)C^{-1}$ . В новых переменных из системы (7) для поля перемещений получим

$$w_{,ss}(1 + 3\alpha \varepsilon^2 w_{,s}^2) + \dots = w_{,mm} + \dots$$

От условия (3) перейдем к условию

$$w|_{s=0} = f(m).$$

Искомую функцию  $w(s, m)$  представим асимптотическим рядом по четным степеням малого параметра:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k}(s, m) \varepsilon^{2k} \approx w_0(s, m) + \varepsilon^2 w_2(s, m) + \varepsilon^4 w_4(s, m) + \dots$$

Относительно неизвестных функций  $w_0, w_2, w_4, \dots$  получаем краевую задачу, не учитывающую условия (5) и (4). Ее решение назовем внешним разложением [9], оно определяется

методом последовательных линейных приближений:

$$w(s, m) = f(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\alpha}{2} (f'(\xi))^3 s + \varepsilon^4 \alpha^2 \left\{ \frac{9}{8} (f'(\xi))^4 f''(\xi) (s^2 + s\xi - s) - \right. \\ \left. - \frac{39}{40} (f'(\xi))^5 s \right\} + \dots, \quad \xi = m - s. \quad (10)$$

Отметим, что при определении ряда (10) можно формально учесть условия (4), (5), записанные в переменных  $s, m$ , что приведет к такому же результату. В любом случае, если есть ударная волна, то ее скорость  $G$  больше  $C$ , поэтому в прифронтовой области, где  $m - s < 0$ , решение (10) неприменимо, т. к.  $f$  определена для неотрицательного аргумента.

Построение дополнительного, внутреннего [9] решения в прифронтовой области необходимо провести для переменной  $s \sim \varepsilon^{-2}$ , тогда ряд (10) теряет равномерность. Это приводит к внутренним переменным

$$n = \varepsilon^2 s, \quad p = s - m, \quad w = w(n, p).$$

В таких переменных от уравнения (7) переходим к уравнению

$$(w_{,pp} + 2\varepsilon^2 w_{,pn} + \varepsilon^4 w_{,nn}) \{1 + 3\alpha \varepsilon^2 (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^2\} + \dots = w_{,pp}, \quad (11)$$

а из формулы (4) и уравнения эйконала  $t = \int_{x_1^0}^{x_1} G(\zeta) d\zeta$  ( $x_1^0$  — начальная координата образования ударной волны) следует

$$(1 - \varepsilon^2 p'(n))^2 \{1 + \alpha \varepsilon^2 (w_{,p}^+ + \varepsilon^2 w_{,n}^+)^2 + (w_{,p}^+ + \varepsilon^2 w_{,n}^+) (w_{,p}^- + \varepsilon^2 w_{,n}^-) + \\ + (w_{,p}^- + \varepsilon^2 w_{,n}^-)^2 + \dots\} = 1, \quad (12)$$

где  $p(n)$  — неизвестная функция, определяющая положение переднего фронта ударной волны. Предварительные деформации считаем величинами одного порядка малости с решением за волной. Новую неизвестную функцию  $w(n, p)$ , как и функцию  $p(n)$ , представим асимптотическими рядами вида

$$w(n, p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k} \varepsilon^{2k} \approx w_0(n, p) + \dots \quad (13) \\ p(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} \varepsilon^{2k} \approx p_0(n) + \dots$$

В результате подстановки ряда для  $w(n, p)$  в уравнение (11) в нулевом шаге метода получим

$$v_{0,n} + \frac{3\alpha}{2} v_0^2 v_{0,p} = 0, \quad v_0 = w_{0,p}. \quad (14)$$

Это уравнение определяет основное поведение решения в прифронтовой области волнового процесса. По своему типу оно должно быть отнесено к эволюционным уравнениям, поскольку отражает нелинейную зависимость характеристик от строящегося решения, тем самым давая возможность описания процесса опрокидывания исходного непрерывного решения с формированием ударной волны. Отличием этого уравнения от уравнения Хопфа является зависимость угла наклона характеристик от квадрата функции  $v_0$ , а не от ее первой степени. Такое простое математическое обстоятельство указывает на различия в появлении и движении объемных и сдвиговых ударных волн. Как будет следовать из дальнейшего, на основе уравнения (14) и его решений можно рассматривать различные вопросы, от кинематики ударной волны до определения поля перемещений в области деформирования.

**3. Формирование и кинематика плоской сдвиговой ударной волны.** Непрерывное решение уравнения (14) будет удобным представить в параметрическом виде вдоль характеристик:

$$v_0 = h(y), \quad y = p - \frac{3\alpha}{2} n h^2(y), \quad y \leq 0, \quad (15)$$



где  $h(y)$  — функция, конкретный вид которой определяется краевыми условиями. Здесь такие условия задаются в пограничной для внешнего и внутреннего решений области, где  $l = \varepsilon^k s$ ,  $0 < k < 2$ . На структуре краевого условия для нулевого шага при этом отразится только вид функции  $f(m)$ , поэтому можно считать

$$h(y) = -f'(-y).$$

Из уравнения (15) следует, что росту функции  $h(y)$  должно отвечать пересечение характеристик. В пределах выбранной модели твердого тела однозначность решения сохраняется за счет определения поверхности разрывов функции  $v_0(n, p)$ . Появление такой поверхности определяется наименьшим из возможных значений переменной  $n$ , для которых обращаются в бесконечность производные  $v_{0,p}$  и  $v_{0,n}$  гладкого решения. Для этих производных имеем

$$v_{0,n} = -\frac{3\alpha}{2} \frac{h^2 h'}{1 + 3\alpha h h' n}, \quad v_{0,p} = \frac{h'}{1 + 3\alpha h h' n}, \quad h' = \frac{dh(y)}{dy}, \quad (16)$$

поэтому наименьшее значение и должно отвечать максимуму  $|hh'|$ , причем необходимо выполнение условия  $hh' < 0$ . Здесь также сразу отметим, что координата образования разрыва не уточняется последующими шагами метода, поскольку их уравнения имеют такие же характеристики, как и уравнение (14).

Для определения кинематики ударной волны в нулевом приближении из уравнений (12) и (13) получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dp_0(n)}{dn} = \frac{\alpha}{2} ((v_0^+)^2 + v_0^+ v_0^- + (v_0^-)^2) + \dots, \quad v_0^\pm = w_{0,p}^\pm(n, p_0(n)). \quad (17)$$

Его решение представим на основе подхода, изложенного в [4] для уравнения Хопфа. Суть его состоит в том, что при условии существования обратной к  $h$  функции  $H = h^{-1}$ , выбрать на ударной волне в качестве основной независимой переменной величину  $v_0^-$ . Для ударной волны известно, что в каждый момент ее существования наряду с уравнением (17) к ней с двух сторон подходят характеристики, вдоль которых

$$p = \frac{3\alpha}{2} (v_0^+)^2 n + H(v_0^+), \quad (18)$$

$$p = \frac{3\alpha}{2} (v_0^-)^2 n + H(v_0^-).$$

Из уравнений (17), (18) легко получить систему

$$\frac{dn}{dv_0^-} \left\{ \frac{(v_0^+)^2}{2} + \frac{v_0^+ v_0^-}{2} - (v_0^-)^2 \right\} = 3v_0^- n + \frac{1}{\alpha} \frac{dH(v_0^-)}{dv_0^-},$$

$$H(v_0^+) - H(v_0^-) = \frac{3\alpha}{2} n ((v_0^-)^2 - (v_0^+)^2),$$

которая будет замкнутой относительно функций  $v_0^+(v_0^-)$  и  $n(v_0^-)$ . Она допускает точные аналитические решения в ряде случаев. К примеру, если ударная волна формируется в передней части исходного возмущения и  $v_0^+ \equiv 0$ , то общее решение можно представить в виде

$$n(v_0^-) = \frac{1}{(v_0^-)^3} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \int_{v^*}^{v_0^-} \zeta \frac{dH(\zeta)}{d\zeta} d\zeta + n^*(v^*)^3 \right\}, \quad (19)$$

где  $n^*$  и  $v^* = v_0^-(n^*)$  — значения переменных, от которых идет развитие разрыва, либо начальная точка для повторно ставящейся задачи Коши при условии, что  $H(v_0^-)$  представима несколькими ветвями функции. Подстановка найденной функции (19) во второе из уравнений (18) позволяет определить положение фронта ударной волны в параметрическом виде. Такие решения интересны в случае, когда необходимо проследить за состоянием на ударной

волне, не обращаясь к решению в остальной области. Получаемая при этом информация может быть полезной при разработке численных схем с выделением поверхностей разрывов. Также данные, получаемые из формулы (19), можно использовать как информацию о разрывах производных первого порядка и включать в схемы лучевых рядов [11], [14], [15] для определения последующих разрывов.

Рассмотрим ряд примеров краевых условий для общего решения (19). Во-первых, остановимся на случае, когда  $[v_0]_{t=0} \neq 0$ . Наиболее простой вид имеет условие:

$$h(y) = A + By,$$

для которого  $A \neq 0$ , а знак  $B$  определяет рост либо спад нагрузки на границе. В этом случае  $v_0^+ \equiv 0$ ,  $v_0 = v_0^-$  и из формулы (19) получаем

$$n = -\frac{1}{2\alpha B v_0} + \frac{A^2}{2\alpha B v_0^3}.$$

Для экспоненциального затухания нагрузки, при котором

$$h(y) = A e^y,$$

также получим

$$n = \frac{1}{\alpha v_0^2} \left( -1 + \frac{A}{v_0} \right).$$

В этих случаях отличия от распространения объемного деформирования носят не столько качественный, сколько количественный характер. В обоих случаях с ростом переменной  $n$  величина  $v_0$  асимптотически приближается к нулю. Далее рассмотрим случай краевого условия в виде полукружности, рассмотренного в [4] для уравнения квазипростых волн:

$$h^2 + (y + A)^2 = A^2, \quad h \leq 0.$$

Для объемной волны такое условие за счет вертикальной касательной при  $y = 0$  приводит к мгновенному возникновению ударной волны, но с нулевым скачком в начале. Для сдвигового деформирования ударная волна также возникает при значении параметра  $y = 0$ , но от расстояния  $n = (3\alpha A)^{-1}$ , которое определяется как свойствами среды, так и максимумом нагрузки на границе. В этом случае решение состоит из двух ветвей. При росте модуля интенсивности от 0 до  $A$  из формулы (19) получим решение

$$n(v_0) = -\frac{\sqrt{A^2 - v_0^2}}{2\alpha v_0^2} + \frac{A^2}{2\alpha v_0^3} \arcsin \frac{v_0}{A},$$

справедливое в области  $(3\alpha A)^{-1} \leq n \leq \pi(4\alpha A)^{-1}$  и  $-\pi/2 \leq y \leq 0$ . Дальнейшее поведение определяется функцией

$$n(v_0) = \frac{A^2}{2\alpha v_0^2} \left\{ \frac{-\pi}{v_0} + \frac{\sqrt{A^2 - v_0^2}}{A^2} - \frac{1}{v_0} \arcsin \frac{v_0}{A} \right\}, \quad n \geq \frac{\pi}{4\alpha A}.$$

Для синусоидального затухания функции  $h(y) = A \sin y$ ,  $A > 0$  в случае процесса объемного деформирования наибольший из углов наклона касательной к функции  $h(y)$  для значения  $y = 0$  обеспечивает формирование ударной волны в передней части возмущения, так что  $v_0^+ = 0$ . Для сдвигового деформирования самое раннее обращение в бесконечность производных  $v_{0,n}$  и  $v_{0,p}$  в формулах (16) происходит при  $y = -\pi/4$ . Это означает, что ударная волна возникает внутри возмущенной области и для построения решения на волне необходимо рассматривать систему уравнений (17) и (18). Из нее после несложных преобразований следует система:

$$\frac{dv^\pm}{dn} = \frac{\alpha}{2} \left\{ (v^\pm)^2 + v^+ v^- - 2(v^\pm)^2 \right\} \frac{1}{3\alpha v^\pm n + \frac{dH(v^\pm)}{dv^\pm}}.$$

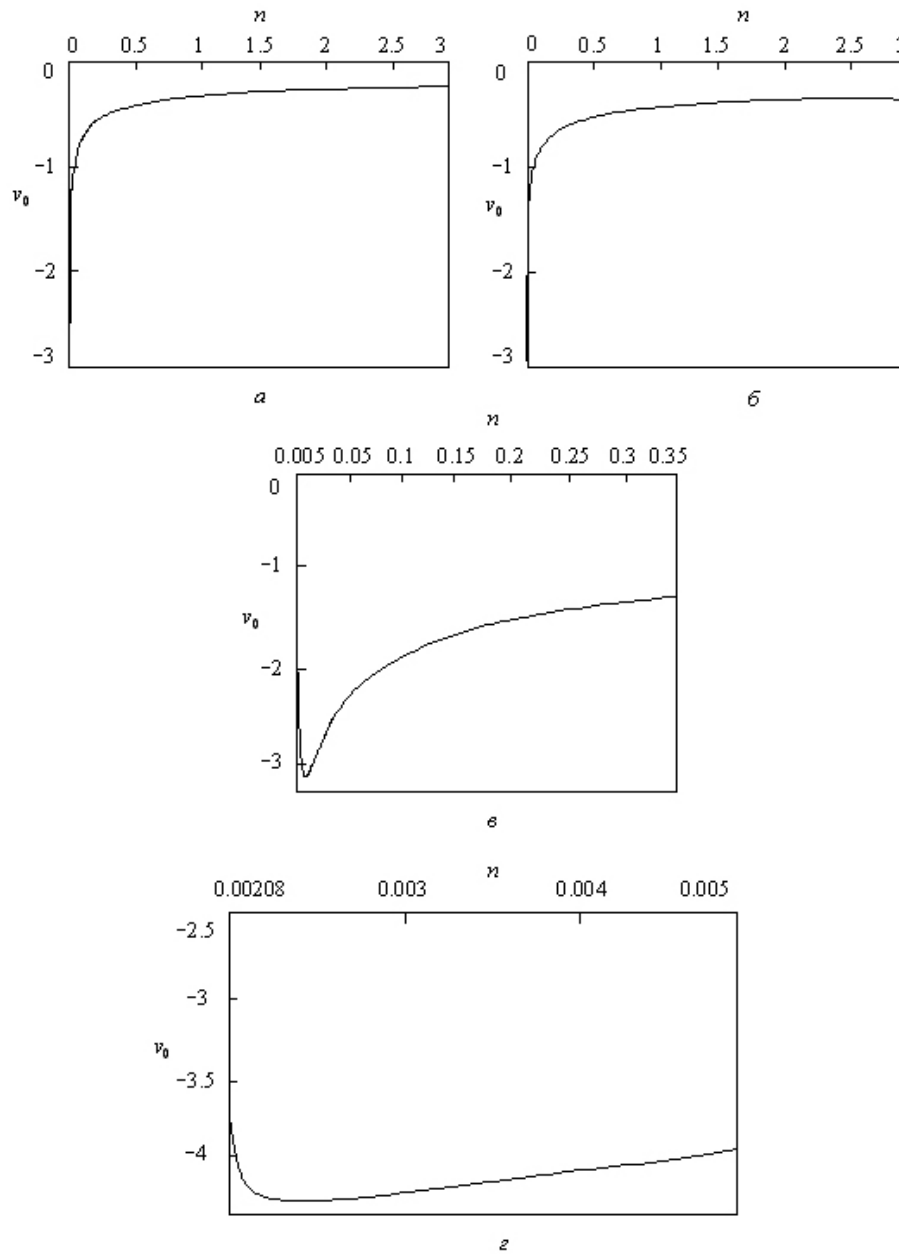


Рис. 1. Зависимость интенсивности ударной волны  $v_0$  от пространственной координаты  $x$ :

- а) линейно затухающий импульс на границе  $h(y) = A_1 + B_1 y$ ;
- б) экспоненциальное затухание нагрузки на границе  $h(y) = A_2 e^{y^2}$ ;
- в) нагружение по дуге окружности от 0 до  $L = -\sqrt{-y^2 - 2A_3 y}$ ;
- г) синусоидальная нагрузка  $h(y) = A_4 \sin y$ .

Значения констант при счете:  $A_1 = -3$ ,  $B_1 = -4$ ,  $A_2 = -3$ ,  $A_3 = 3$ ,  $A_4 = 4$ ,  $\alpha = 20$ .

В нашем случае здесь  $H(v^\pm) = \arcsin \frac{v^\pm}{A}$ , для  $v^- > -A$ , т.е. до характеристики, где  $y = -\frac{\pi}{2}$ . При  $-\frac{\pi}{2} \leq y < -\pi$  считаем  $H(v^-) = -\pi + \arcsin(-\frac{v^-}{A})$ . Разрыв начинает существование от значения  $v^- = v^+ = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ ,  $[v] = 0$  в точке  $n^* = \frac{2}{3\alpha A^2}$ . Ударная волна идет по области предварительных деформаций и затем выходит в недеформированную область. Отметим, что если не ограничиваться значениями  $-\pi \leq y \leq 0$  (одиночным импульсом), то образование повторной ударной волны произойдет для  $y = -\frac{5\pi}{4}$  и  $n^* = \frac{2}{3\alpha A^2}$ , т.е. эта волна образуется раньше, чем для объемного деформирования, а координата образования повторного разрыва не зависит от предварительных деформаций. На рис. 1 приведены данные численных расчетов для перечисленных краевых условий.

Рассмотренные варианты поведения исходных импульсов на ударной сдвиговой волне показывают как количественные, так и качественные отличия этого процесса от распространения объемных волн.

**4. Эволюционное уравнение для поля перемещений за фронтом плоской поперечной волны.** Ранее [17] решения эволюционных уравнений для задач ударного деформирования в твердом теле рассматривались в пределах квадратичных либо линейных функций времени для перемещений на нагружаемой поверхности. Рассмотрим подход, позволяющий применить метод сращиваемых асимптотических разложений с решением уравнения (14) для произвольных функций времени, задающих краевые условия. С этой целью заметим, что уравнение (14) имеет общее решение вдоль характеристик вида

$$v_0 = F \left( p - \frac{3\alpha}{2} n v_0^2 \right), \tag{20}$$

где  $F$  — произвольная функция, определяемая краевыми условиями. На уравнение (20) также можно смотреть как на соотношение

$$w_{0,p} = F \left( p - \frac{3\alpha}{2} n w_{0,p}^2 \right), \tag{21}$$

которое по типу может быть отнесено к обыкновенным дифференциальным уравнениям, не содержащим искомой функции  $w_0(n, p)$  (т.к. переменная  $n$  играет здесь роль параметра). Для таких уравнений задача интегрирования распадается на два варианта. В первом необходимо, чтобы функция  $F$  допускала явное представление производной  $w_{0,p}(n, p)$  с последующим интегрированием полученного уравнения. Это возможно, если функция  $F$  имеет вид некоторых алгебраических либо рациональных уравнений. Второй способ более универсален и связан с параметрическим представлением решения. Остановимся на нем более подробно. Предположим, что  $w_{0,p} = \psi(\delta)$ ,  $p = \varphi(\delta, n)$ , где  $\delta$  — новый параметр, выбор которого достаточно произволен и связан с удобством представления краевых условий. Функции  $\psi(\delta)$  и  $\varphi(\delta, n)$  связаны между собой, как следует из уравнения (21). Тогда для определения функции  $w_0(n, p)$  получим уравнение

$$dw_0 = \psi(\delta, n) \frac{\partial \varphi(\delta, n)}{\partial \delta} d\delta,$$

интегрирование которого дает параметрическое решение

$$\begin{cases} w_0(n, p) = w_0(n, p(\delta, n)) = W_0(\delta, n) \\ p = p(\delta, n). \end{cases}$$

В качестве примера для такого способа рассмотрим краевое условие

$$u(t)|_{x_1=0} = -\frac{A}{\beta_0} (1 - e^{\beta_0 t}), \quad A > 0, \quad \beta_0 < 0,$$

ему соответствует экспоненциальное затухание начального импульса  $A$  до 0. В переменных (9) внешней области переходим к краевому условию

$$w(s, m)|_{s=0} = B^{-1} (1 - e^{-Bm}), \quad B = -\beta_0 T, \quad \varepsilon = \frac{A}{C}.$$

Предположим, что  $v_0 = \psi(\delta)$ ,  $-\infty < \delta \leq 0$ . Тогда  $p = \varphi(\delta) = \frac{\delta}{B} + \frac{3\alpha}{2} ne^{2\delta}$ , поэтому

$$\begin{cases} W_0(n, \delta) = -\frac{e^\delta}{B} - \alpha ne^{3\delta} + K_0(n) \\ p = p(\delta, n) = \frac{\delta}{B} + \frac{3\alpha}{2} ne^{2\delta}, \end{cases} \quad (22)$$

где  $K_0(n)$  — неопределенная функция, которую можно определить из условия на переднем фронте ударной волны:

$$w(n, p)|_\Sigma = 0. \quad (23)$$

Для определения положения ударной волны на нулевом шаге метода необходимо решить уравнение

$$\frac{dp}{dn} = \frac{\alpha}{2} v_0^2(n, p(n)), \quad (24)$$

но  $\frac{dp}{dn} = \frac{\partial \varphi(n, \delta)}{\partial n} + \frac{\partial \varphi(n, \delta)}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dn}$ , поэтому теперь ищем не функцию  $p(n)$ , а функцию  $\delta(n)$  или

обратную к ней. При этом получаем уравнение

$$\frac{dn(\delta)}{d\delta} = -3n - \frac{1}{\alpha B} e^{-2\delta}$$

и на основе его решения с учетом начальных условий  $n(0) = 0$  записываем для ударной волны:

$$\begin{cases} n(\delta) = \frac{1}{\alpha B} \{e^{-3\delta} - e^{-2\delta}\} \\ p(\delta) = \frac{\delta}{B} + \frac{3}{2B} \{e^{-\delta} - 1\}. \end{cases}$$

Полученные формулы позволяют определить неизвестную функцию  $K_0(n) \equiv 0$ . При сравнении с внешним рядом (10) в пограничной области получаем, что построенное решение (22) отвечает двум шагам внешнего ряда. Этим и заканчивается решение для нулевого шага. Не представляют дополнительных трудностей другие краевые условия типа логарифмических или тригонометрических функций.

Возвращаясь к эволюционному уравнению (14) и его решениям (21), рассмотрим еще несколько примеров, позволяющих оценить влияние нелинейности (даже слабой) на искомое решение. Остановимся на краевых условиях, позволяющих строить решение в координатах  $n, p$ . Для начала рассмотрим функцию  $g(t) = v_0 t + at^2/2$ ,  $v_0 \neq 0$ . Для нее краевое условие в переменных  $m, s$  принимает вид

$$w|_{s=0} = m + \frac{Am^2}{2}, \quad A = \frac{aT}{v_0}, \quad \varepsilon = \frac{v_0}{C}. \quad (25)$$

Внешнее решение определяется подстановкой условия (25) в ряд (10) и поэтому подробно не рассматривается. Для внутреннего примем

$$v_0(n, p) = B_1 + B_2 \left( p - \frac{3\alpha}{2} v_0^2 n \right), \quad (26)$$

где  $B_1, B_2$  — неопределенные константы определяются при сопоставлении внутреннего и внешнего решений. Из формулы (26) получаем

$$v_0(n, p) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(B_1 + B_2 p)B_2 \gamma_0 n}}{2\gamma_0 B_2 n}, \quad \gamma_0 = \frac{3\alpha}{2}, \quad (27)$$

$$w_0(n, p) = \frac{-6B_2^2\gamma_0np + (1 + 4(B_1 + B_2p)B_2\gamma_0n)^{3/2}}{12\gamma_0^2B_2^3n^2} + \varphi_0(n),$$

где  $\varphi_0(n)$  — неизвестная функция, определяемая из условия (23). Из формул (27) следует, что нелинейность задачи приводит к искажению исходного воздействия, так что зависимость от времени изменяется от квадратичной до содержащей степени 3/2 и 1. Отметим, что сходное краевое условие для задачи объемного деформирования приводит к прифронтному решению, практически повторяющему краевое условие с учетом слабого затухания по переменной  $n$ . Этот эффект указывает как на влияние нелинейности, так и на отличие сдвиговой волны от объемной. Отметим, что применение правила Лопиталья к формуле (27) приводит к предельным результатам

$$\lim_{n \rightarrow 0} v_0(n, p) = B_1 + B_2p, \quad \lim_{n \rightarrow 0} w_0(n, p) = B_1p + \frac{B_2p^2}{2}, \quad (28)$$

которыми можно по непрерывности доопределить решение в нуле. Тем самым видно, что исходное воздействие передается по среде неискаженным только при  $n \sim 0$ . Из сравнения формул (28) с внешним решением следует  $B_1 = -1$ ,  $B_2 = A$ . Положение волнового фронта определяется на основе уравнения (24) и может быть представлено неявной зависимостью

$$\left(\sqrt{1 + 4A\gamma_0n(-1 + Ap)} - 1\right) \sqrt{2\sqrt{1 + 4A\gamma_0n(-1 + Ap)} + 1} = -2\sqrt{3}\gamma_0An,$$

которая после ряда алгебраических преобразований дает кубическое уравнение для функции  $p(n)$ . Корень этого уравнения, отвечающий поставленной задаче:

$$p(n) = \begin{cases} \frac{\left(\cos^2 \frac{\varphi}{3} - \frac{3}{4}\right) \left(\cos^2 \frac{\varphi}{3} + \frac{1}{4}\right) + A\gamma_0n}{A^2\gamma_0n}, & \cos \varphi = -2\sqrt{3}\gamma_0An, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (n = 0) \end{cases}$$

Отсюда легко определяется функция  $\varphi_0(n)$ , что и заканчивает решение данного шага.

Теперь рассмотрим краевое условие

$$u(x_1, t)|_{x_1=0} = \sqrt{at + b} - \sqrt{b}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

От него в переменных  $s, m, w(s, m)$  переходим к условию

$$w|_{s=0} = \frac{m}{\sqrt{Am + 1} + 1}, \quad A = \frac{aT}{b}, \quad \varepsilon = \frac{a}{C\sqrt{b}}.$$

Для такого условия и внешнего решения в уравнении (20) достаточно выбрать

$$v_0(n, p) = -\frac{1}{2\sqrt{1 - D(p - \gamma_0v_0^2(n, p)n)}},$$

где  $D$  — неопределенная константа. Отсюда следует явное решение

$$v_0(n, p) = -\sqrt{\frac{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0n}}{2D\gamma_0n}},$$

$$w_0(n, p) = -\frac{1}{3D\sqrt{2D\gamma_0n}} \left(\sqrt{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0n}}\right)^3 + \sqrt{\frac{\gamma_0n}{2D}} \frac{1}{\sqrt{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0n}}} + \varphi_0(n),$$

которое также показывает искажение исходного воздействия (меняется тип зависимости от времени). Для определения положения ударной волны необходимо проинтегрировать уравнение Дарбу

$$\frac{dg}{dn} = \frac{g}{3n} \left( 1 + \frac{2D\gamma_0 n}{g^2 + D\gamma_0 n} \right), \quad g = -1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}.$$

Его решение с учетом краевого условия  $\lim_{n \rightarrow 0} p(n) = 0$  имеет вид неявной зависимости

$$\begin{aligned} -1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n} = \ln \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}}} \right\} + \\ + \frac{3D\gamma_0}{2} \frac{n}{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}} - 3 - \ln \sqrt{\frac{2}{D\gamma_0}}. \end{aligned}$$

На основании этого уравнения функция  $\varphi_0(n)$  может быть определена каким-либо численным методом. Эта задача показывает, что решения в явном виде имеют наряду с достоинствами и ряд отрицательных свойств. В частности, нет гарантии, что на каждом этапе вычислений будем получать результаты в необходимой, удобной для нас форме.

Рассмотрим также еще один вариант краевого условия

$$u|_{x_1=0} = \frac{4A}{5} t^{5/4}, \quad (28)$$

интересный тем, что функция  $(g'(t))^2$  имеет вертикальную касательную в нуле. Это приводит к возникновению ударной волны мгновенно, но при этом ее интенсивность изменяется от нуля. Условие (26) в безразмерных переменных имеет вид

$$w(s, m)|_{s=0} = \frac{4}{5} m^{5/4}, \quad \varepsilon = \frac{AT^{1/4}}{C},$$

поэтому во внутреннем решении выберем

$$v_0 = -(-p + \gamma_0 n v_0^2)^{1/4},$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} v_0(n, p) = -\sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}}}, \quad (29) \\ w_0(n, p) = \frac{4}{5} \left( \frac{\gamma_0 n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}} \right)^{5/2} - \frac{2\gamma_0 n}{3} \left( \sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}}} \right)^3 + \varphi_0(n), \end{aligned}$$

где  $\varphi_0(n)$  — как обычно, неопределенная функция. Это решение для поля перемещений показывает как исходную зависимость от  $t$  в степени  $5/4$ , так и дополнительную зависимость от степени  $3/4$ , которая начинает влиять на решение на больших расстояниях (при  $n \sim 1$ ). Для определения положения переднего фронта ударной волны решаем уравнение

$$\frac{dg}{dn} = \frac{\gamma_0^2 n}{6g} - \frac{\gamma_0}{6}, \quad g = \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}},$$

которое также является вариантом уравнения Дарбу. Интересно, что в этом случае решение задачи Коши  $g(0) = 0$  совпадает с одним из особых решений. При этом получаем параболическую зависимость

$$p = \frac{5}{36} \gamma_0^2 n^2,$$

ее подстановка в решение (29) приводит к простому результату  $\varphi_0(n) = 0$ .

**5. Метод малого параметра для расходящейся цилиндрической поперечной волны.** Для цилиндрических ударных волн известно [3], что накопление нелинейных эффектов

происходит не только на больших расстояниях от границы  $r = r_0$ , но и на расстояниях порядка  $r_0$  в окрестности переднего волнового фронта. Поэтому можно выбрать безразмерные переменные следующим образом:

$$s = \frac{r - r_0}{r_0} \varepsilon^{-4}, \quad m = \frac{r - r_0 - Ct}{r_0} \varepsilon^{-3}, \quad w(s, m) = \frac{u_z}{r_0} \varepsilon^{-9/2}, \quad \varepsilon = \left(\frac{v_0}{C}\right)^{2/3}, \quad (30)$$

где  $v_0 = g'(0) \neq 0$ . Если  $v_0 = 0$ , то малый параметр  $\varepsilon$  может быть связан с другими характерными константами. Отметим, что решение в переменных (30) справедливо в окрестности нагружаемой границы и при условии, что волновой процесс отошел от нее незначительно. В переменных (30) для исходного уравнения (8) решение сводится к методу последовательных линейных приближений [16] и ввиду ограниченности объема статьи здесь подробно не рассматривается. Основной интерес связан с дополнительным, внутренним разложением в новых переменных  $n = \varepsilon^4 s$ ,  $p = m$ ,  $w(n, p)$ . В этих переменных от уравнения (8) переходим к уравнению

$$(2w_{,np} + \varepsilon^3 w_{,nn})(1 + 3\alpha \varepsilon^3 (w_{,p} + \varepsilon^3 w_{,n})^2) + 3\alpha w_{,pp} (w_{,p} + \varepsilon^3 w_{,n})^2 + \frac{w_{,p} + \varepsilon^3 w_{,n}}{1+n} + \frac{\alpha \varepsilon^3 (w_{,p} + \varepsilon^3 w_{,n})^3}{1+n} + \dots = 0. \quad (31)$$

Представление функции  $w(n, p)$  асимптотическим рядом

$$w(n, p) = w_0(n, p) + \varepsilon^3 w_3(n, p) + \dots \quad (32)$$

на нулевом шаге метода приводит к уравнению

$$v_{0,n} + \frac{3\alpha}{2} v_0^2 v_{0,p} + \frac{v_0}{2(1+n)} = 0, \quad v_0 = w_{0,m}, \quad (33)$$

которое является обобщением уравнения (14) на случай цилиндрической волновой поверхности. Последнее слагаемое в уравнении (33) определяет затухание интенсивности сдвигового процесса с ростом кривизны волнового фронта. Данное уравнение также является эволюционным уравнением для нелинейного процесса сдвигового деформирования. Его общее решение можно представить в параметрическом виде

$$m = \frac{3\alpha}{2} v_0^2 (1+n) \ln(1+n) + \xi, \quad v_0 = \frac{F(\xi)}{\sqrt{1+n}}, \quad (34)$$

где  $F(\xi)$  — функция, определяемая условиями задачи при  $n \rightarrow 0$ ,  $\xi$  — параметр решения. Исключая параметр  $\xi$ , получим решение вдоль характеристических линий

$$v_0 \sqrt{1+n} = F \left( m - \frac{3\alpha}{2} v_0^2 (1+n) \ln(1+n) \right). \quad (35)$$

Если краевые условия приводят к опрокидыванию непрерывного решения (35) и образуется ударная волна, то, как говорилось ранее, ее скорость определяется такой же зависимостью от интенсивности и состояния перед волной, что и в плоском случае. Поэтому на ударной волне в переменных  $n$ ,  $m$  в нулевом приближении получим

$$\frac{dm}{dn} = \frac{\alpha}{2} \left( (v_0^+)^2 + v_0^+ v_0^- + (v_0^-)^2 \right). \quad (36)$$

Для определения момента и места образования ударной волны заметим, что из (34) следует

$$g_{0,n} = \frac{F' \left( -\frac{3\alpha}{2} \frac{g_0^2}{1+n} \right)}{1 + 3\alpha F F' \ln(1+n)}, \quad g_{0,m} = \frac{F'}{1 + 3\alpha F F' \ln(1+n)}, \quad g_0 = v_0 \sqrt{1+n}, \quad F' = \frac{dF}{d\xi}. \quad (37)$$



Производные функции  $g_0$  обращаются в бесконечность при условии  $(F^2)' < 0$  и впервые для максимального по модулю значения  $(F^2)'$ . Для него определяем соответствующее значение  $n^*$ :

$$1 + n^* = \exp\left(-\frac{2}{3\alpha(F^2)'}\right). \quad (38)$$

Приведем решение, связывающее  $v_0$  и  $n$  на фронте ударной волны, считая основной независимой переменной величину  $v_0$ :

$$\ln(1 + n) = \frac{1}{v_0^3(1 + n)^{3/2}} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \int_{v_0^* \sqrt{1+n^*}}^{v_0 \sqrt{1+n}} \left( \zeta \frac{df}{d\zeta} \right) d\zeta + \ln(1 + n^*)(g_0^*)^3 \right\}; \quad (39)$$

$$f = F^{-1}, \quad g_0^* = v_0^* \sqrt{1 + n^*}.$$

Здесь  $v_0^*$  — значение  $v_0$ , соответствующее  $n^*$ .

К примеру, если  $v_0(m)|_{n=0} = A + Bm$ ,  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $m \leq 0$ , т.е. исходный импульс затухает по линейному закону, то из общего решения (39) на фронте цилиндрической волны получим

$$\ln(1 + n) = -\frac{1}{2\alpha B v_0 \sqrt{1 + n}} + \frac{A^2}{2\alpha B v_0^3 (1 + n)^{3/2}}. \quad (40)$$

Для экспоненциального затухания при краевом условии

$$v_0 = A \exp Bm, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad m \leq 0$$

из уравнения (39) получаем

$$\ln(1 + n) = \frac{1}{\alpha B} \left( \frac{A}{v_0^3(1 + n)^{3/2}} - \frac{1}{v_0^2(1 + n)} \right). \quad (41)$$

Аналогичным образом можно рассматривать и другие краевые условия. Отметим также, что если необходимо определить поле перемещений и деформаций за ударной волной, то перенос методик, рассмотренных для плоских волн, не представляет сложностей.

**Заключение.** Представленные в статье примеры показывают высокую эффективность применения метода малого параметра и решений эволюционных уравнений к задачам волновых процессов в твердом теле, включающим поверхности сильных разрывов. Приведенные методы (параметрический и явный) могут быть без труда перенесены на определение приближений высших порядков. Отметим, что для плоских сдвиговых волн такие приближения строятся на основе решений уравнения вида

$$w_{i,np} + \frac{3\beta}{2} w_{0,p}^2 w_{i,pp} + 3\beta w_{0,pp} w_{0,p} w_{i,p} + \Phi_i(w_0, w_{0,p}, \dots) = 0, \quad (42)$$

где  $\Phi_i$  — функция, определяемая предыдущими шагами. Очевидно, что это уравнение имеет такие же характеристические направления, как и исходное. Это позволяет строить решение в параметрическом виде с сохранением того же параметра  $\delta$ , что и в нулевом шаге. Явное решение также может строиться, единственной проблемой здесь можно считать большой объем вычислений, хотя в практических целях обычно достаточно ограничиться одним или двумя слагаемыми ряда. Необходимо отметить важность рассмотренного здесь метода для понимания сути решений для многомерных задач ударного деформирования. В прифронтной области ударной волны основные изменения решения происходят в направлении лучевой координаты, поэтому следует ожидать, что в лучевых координатах окрестность волнового фронта определяется эволюционным уравнением, для которого координата эйконала играет роль параметра. Оценивая практическую значимость проведенных решений, необходимо указать на методику численного счета для ударных волн в твердом теле [16–18], построенную на конечно-разностных расчетах в основной области деформирования и на применении приближенных аналитических решений в прифронтной области ударной волны. В таких численных схемах решения, получаемые на основе метода возмущений, можно считать более точными,

чем решения в виде лучевых рядов [11, 14, 15]. Все перечисленные обстоятельства определяют большое теоретическое и практическое значение применяемого к задачам ударного деформирования анализа на основе эволюционных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гельфанд, И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений / И. М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1959. – Т. 14. – № 9. – С. 87–158.
- [2] *Рождественский, Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 688 с.
- [3] *Уизем, Д.* Линейные и нелинейные волны / Д. Уизем. – М. : Мир, 1977. – 622 с.
- [4] *Пелиновский, Ю. Н.* Нелинейные эволюционные уравнения / Ю. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Ю. К. Энгельбрехт. – Таллин : Валгус, 1984. – 164 с.
- [5] *Буренин, А. А.* К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 103–108.
- [6] *Куликовский, А. Г.* Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – М. : Моск. лицей, 1998. – 412 с.
- [7] *Буренин, А. А.* Ударные волны в изотропном упругом пространстве / А. А. Буренин, А. Д. Чернышов // ПММ. – 1978. – Т. 42. Вып. 4. – С. 711–717.
- [8] *Бленд, Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Р. Бленд. – М. : Мир, 1972. – 183 с.
- [9] *Коул, Д.* Методы возмущений в прикладной математике / Д. Коул. – М. : Мир, 1972. – 275 с.
- [10] *Буренин, А. А.* Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. – Владивосток, 1991. – С. 129–137.
- [11] *Буренин, А. А.* Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях / А. А. Буренин // Дальневосточный математический сборник. – 1999. – Вып. 8. – С. 49–72.
- [12] *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М. : Наука, 1973. – Т. 1, 2.
- [13] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.
- [14] *Бабичева, Л. А.* Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // ПММ. – 1973. – Т. 37. – Вып. 1. – С. 145–155.
- [15] *Быковцев, Г. И.* Лучевой метод пространственных задач теории идеальной пластичности / Г. И. Быковцев, И. А. Власова // Механика деформируемого твердого тела. – Новосибирск, 1979. – С. 31–36.
- [16] *Иванова, Ю. Е.* Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях / Ю. Е. Иванова, В. Е. Рагозина // ПМТФ. – 2006. – Т. 47, № 6. – С. 144–151.
- [17] *Рагозина, В. Е.* Об использовании прифронтной асимптотики в численных решениях динамических задач теории упругости с ударными волнами / В. Е. Рагозина, И. И. Воронин, Е. Л. Вековшинин // Проблемы естествознания и производства. – 1995. – Вып. 115. – С. 25–27.
- [18] *Буренин, А. А.* К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев // Проблемы механики : сб. ст. к 90-летию А. Ю. Ишлинского. – М., 2003. – С. 146–155.

V. E. Ragozina, Y. E. Ivanova

**THE EVOLUTIONARY EQUATIONS FOR ONE-DIMENSIONAL SHOCK  
WAVES IN THE INCOMPRESSIBLE FIRM BODIES**

*Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of  
Sciences*

**Abstract.** On the basis of a joining asymptotic expansions' method the decision of some one-dimensional dynamic non-stationary problems for the incompressible nonlinear-elastic environment is under construction. The front area of a wave process is defined by the evolutionary equation for the shift deformations which has basic differences from the evolutionary equation of volume deformation.

**Keywords:** nonlinear elasticity, incompressibility, a shock wave, a perturbation method, the evolutionary equation.

*Рагозина Виктория Евгеньевна*

*старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

*e-mail: ragozina@vlc.ru*

*Иванова Юлия Евгеньевна*

*научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

*e-mail: ivanova@iacp.dvo.ru*

*Ragozina, Victoria Evgenevna*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

*Ivanova, Yulia Evgenevna*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТОДОВ НЕАРХИМЕДОВА АНАЛИЗА

*Институт горного дела СО РАН*

**Аннотация.** Рассматривается неархимедова числовая система, включающая в себя актуальные бесконечно малые величины. На ее основе строится математический анализ, имеющий более высокую степень разрешения, чем классический анализ. Показано, что аппарат неархимедова анализа может быть использован в моделях пластических сред с микроструктурой для решения задачи измерения касательных углов, в других областях.

**Ключевые слова:** неархимедовый, нестандартный анализ, роговидные углы, пластичность.

УДК: 517.12; 539.37

Главные труды Дюиса Даниловича Ивлева и его научной школы посвящены теории пластичности. Благодаря им ряд важных разделов теории приобрел вполне законченный вид [1-8]. Один из основных вопросов теории пластичности связан с анализом типов уравнений, постановкой и решением краевых задач.

Возьмем наиболее простой вариант теории, когда деформация является плоской, а тело идеально пластическим [1]. Уравнения идеальной пластичности принадлежат к гиперболическому типу. Это значит, что в пластическом состоянии тело разбивается сеткой характеристик на отдельные бесконечно малые элементы. При этом площадки максимальных сдвигов ориентируются вдоль характеристик. На этом основании их называют линиями скольжения. Теперь можно считать, что в пластическом состоянии тело разбивается ортогональной сеткой линий скольжения на отдельные элементы и пластические сдвиги сосредотачиваются на границах элементов. Данные факты имеют фундаментальное значение и могут служить исходной посылкой для целого ряда дальнейших обобщений.

**1. Необходимость построения теории актуальных бесконечно малых.** В качестве первого шага зададим следующие вопросы: А что, собственно, представляют собой указанные элементы тела? Являются ли все элементы одинаковыми или они различаются между собой ориентацией и размерами? Вопрос с ориентацией имеет ясный ответ: ориентация, как правило, зависит от координат и, значит, различные элементы ориентированы по-разному.

Вопрос с размерами гораздо сложнее. С одной стороны, в континуальной механике расстояния между линиями скольжения равны нулю и поэтому размеры всех элементов также равны нулю. Но с другой стороны, обратимся, например, к картине линий скольжения вокруг круглого отверстия. Мы видим два семейства логарифмических спиралей, которые, раскручиваясь, простираются от отверстия неограниченно далеко. При этом размеры элементов, вырезанных данными линиями, увеличиваются пропорционально расстоянию до центра. Можно

---

Поступила 18.06.2010

Работа выполнена по проекту РФФИ № 08-05-00543 и Интеграционному проекту № 69 СО РАН.

сказать так, что размер элемента на расстоянии  $r$  от центра равен  $l(r) \cdot 0$ . Для логарифмических спиралей  $l(r) = r$ . Конечно, умножение на нуль всегда уничтожает информацию о втором сомножителе. Но всегда ли такая техника адекватна реальной ситуации? Один из вариантов обобщения модели приводит к отрицательному ответу на данный вопрос [9]. Примем, что касательное напряжение на линии скольжения может явно зависеть от величины проскальзывания. На этом пути мы приходим к ситуации, когда тело в результате пластической деформации становится неоднородным. Причем неоднородность как раз и связана с различием “нулевых” размеров элементов в различных точках тела. Именно данная неоднородность дала в точном решении [10] эффект непоследовательного чередования зон, когда с удалением от выработки неупругая зона сменяется упругой, затем опять неупругой зоной и т.д. [11].

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что необходимо такое изменение континуального подхода, которое дало бы “место в пространстве” для учета различных размеров бесконечно малых элементов.

К такому же выводу можно прийти, рассматривая еще одно обобщение идеальной пластичности, связанное с учетом внутреннего трения. Трение приводит к неортогональности линий скольжения [12]. Неортогональность линий в свою очередь приводит к тому, что поле скоростей становится зависимым от микровращения элементов среды [13]. Следовательно, адекватная модель наряду с полем скоростей должна учитывать и новую кинематическую переменную – микровращение. В общем случае

$$\omega_M \neq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \quad (1)$$

Здесь  $v_1, v_2$  – компоненты поля скоростей в декартовых координатах  $Ox_1x_2$ ,  $\omega_M$  – микровращение. В записи (1) содержится определенное противоречие. Производные справа вычисляются на бесконечно малой базе изменения аргументов:  $\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0$ . С другой стороны,  $\omega_M$  – это скорость вращения указанных выше элементов, выделенных линиями скольжения. На каком пространственном масштабе может быть реализовано такое вращение? Элементы являются бесконечно малыми. Ясно, что их масштаб должен рассматриваться как актуальная бесконечно малая величина и – одновременно – как величина, меньшая, чем бесконечно малые  $\Delta x_1, \Delta x_2$ , которые служат для определения скорости макровращения. При классическом определении континуума эти условия являются несовместимыми между собой. В качестве паллиативного решения можно оставить обе переменные из (1) в качестве независимых друг от друга. Однако последовательное развитие подобных моделей (моделей с внутренними переменными) приводит к необходимости все же явно ввести масштабные уровни, на которых данные микропеременные могут реализовываться. Таким образом, речь идет о таком изменении концепции континуума, которое позволило бы описать наличие актуальных бесконечно малых величин и, значит, описать существование иерархии масштабных уровней пространства.

В классическом анализе существование актуальных бесконечно малых величин запрещено аксиомой Архимеда. Следовательно, данную аксиому необходимо заменить менее жесткой аксиомой. Следует отметить, что необходимость в таком шаге возникает и в ряде задач управления движением летательных аппаратов, пластической обработкой металлов и др. [14,15].

Но самым интересным является тот факт, что независимо от современных задач пластичности и оптимального управления, потребность в построении неархимедова континуума возникла еще во времена античности. Если открыть третью книгу Начал Евклида, то в Предложении 10 можно прочитать: “. . . угол полукруга больше всякого прямолинейного острого угла, а остаток меньше” [16]. Остаток угла полукруга – это угол между прямой и касательной к ней дугой окружности, прямолинейный угол – это угол между двумя лучами. Согласно Предложению 10, касательный угол представляет собой положительную величину, которая

меньше любого положительного рационального числа. Таким образом, угол касания (или роговидный угол) – это есть не что иное, как актуальная бесконечно малая величина. Причем между величинами такого рода есть свой порядок: большему радиусу  $R$  отвечает меньший угол касания. Далее путем выбора кривой касания строятся углы, меньшие угла, соответствующие любому радиусу  $R$ , и т. д. [17]. На данной основе можно ввести плоские элементы со сторонами, равными указанным бесконечно малым величинам. Таким образом можно прийти к масштабному уровню, на котором реализуется микровращение элементов пластического тела.

Вопросам построения теории актуальных бесконечно малых посвящена обширная литература. В настоящей статье ограничимся только ссылками на источники [18-20], в которых содержится дальнейшая библиография. Ниже рассмотрим одну из возможных числовых систем, которую можно использовать для построения неархимедова континуума, обладающего иерархией масштабных уровней [21]. Фактически речь идет о модификации классического анализа, которая позволила бы повысить его разрешающую способность.

Различные теории иногда сравнивают с инструментами для физических наблюдений [22]. Каждый инструмент имеет свою собственную разрешающую способность. Точно также и каждая теория имеет свою предельную степень разрешения. Это относится и к самому универсальному инструменту исследований – математическому анализу. В основе анализа лежит понятие вещественного числа (или, что то же самое, точки на числовой прямой). В основе понятия самого вещественного числа лежит аксиома Архимеда. Именно она определяет разрешающую способность теории. Причем в данном случае слова о разрешающей способности – это не фигура речи, их можно понимать вполне буквально. Разрешающую способность микроскопа можно измерить величиной, обратной максимальному расстоянию, на котором через данный микроскоп невозможно различить отдельные точки. Аксиоме Архимеда также можно придать форму утверждения о разрешающей способности теории (Первая аксиома разрешения):

Две точки  $\alpha$  и  $\beta$  на числовой прямой между собой не различаются, если для любого числа  $n$  из ряда

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (2)$$

имеют место условия

$$|\alpha - \beta| < 1/n. \quad (3)$$

Иными словами, вещественные числа совпадают, если выполняются условия (3) для любого  $n$  из ряда (2).

Таким образом, разрешающая способность анализа определяется натуральным рядом (2). Если бы удалось придать смысл длине этого ряда, то мера длины являлась бы и мерой разрешающей способности анализа. В качестве исходной посылки мы теперь знаем, что для исследования некоторых задач степень разрешения (2), (3) оказывается недостаточной. Формулировка аксиомы Архимеда в виде (2), (3) подсказывает и путь повышения степени разрешения теории. Если скоро мера разрешения связана с “длиной” ряда (2), то для ее увеличения необходимо найти способ увеличения “длины” ряда за счет включения в него актуальных бесконечно больших чисел. Отметим, что такой шаг имеет смысл и для исследования на новом уровне вполне традиционных задач механики и анализа.

Рассмотрим типичную задачу. Пусть тело свободно падает вниз без начальной скорости. Тогда траектория падения будет представлять собой прямую линию. Закон движения вдоль прямой имеет вид

$$S(t) = \frac{g \cdot t^2}{2}, \quad (4)$$

где  $S(t)$  – путь,  $t$  – время,  $g$  – ускорение свободного падения. Чему равна скорость тела  $v$  в момент времени  $t$ ? Вычислим среднюю скорость тела от  $t$  до  $t + \Delta t$ :

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = g \cdot t + g \frac{\Delta t}{2}.$$

Перейдем теперь к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ . В результате получим

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} g \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) = g \cdot t. \quad (5)$$

Так решается поставленная задача в классическом анализе. Но что значит перейти к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ ? Это значит, что промежуток времени  $\Delta t$  необходимо неограниченно уменьшать. Так,  $\Delta t$  должно стать меньше, чем  $10^{-10}$ ,  $10^{-20}$ , ... сек. В соответствие с этим и путь, пройденный телом, становится меньше, чем  $5 \cdot 10^{-20}$ ,  $5 \cdot 10^{-40}$ , ... м. Но ведь для таких времен и расстояний закон движения (4) никто не проверял! Вполне может оказаться, что здесь закон (4) не действует. Более того, возможно, что и сами понятия расстояния и времени и даже свойство их линейной упорядоченности на малых масштабах должны быть пересмотрены.

Техника кинематографа подсказывает следующую возможность, о которой более ста лет назад писал Клиффорд [23, 24]. То, что мы принимаем за непрерывное движение, на самом деле может быть быстрой сменой различных неподвижных состояний. В этом случае скорость движения равна нулю. А вот то, что происходит при смене кадров, должно быть описано отдельно.

Можно ввести сколько угодно гипотез подобного рода. Вопрос о том, какая из них ближе к реальности – это не вопрос математики. Но математика должна дать в руки аппарат для описания подобных гипотез. Классический (архимедов) анализ (анализ – 1) дает переход от закона (4) к закону (5) и наоборот. Неархимедов анализ (анализ – 2) дает большие возможности. Для определенных масштабов в неархимедовом анализе могут быть сохранены законы типа (4), (5). При этом на меньших масштабах возможно описание, например, “кинематографической” реальности с быстрой сменой неподвижных состояний.

**2. Неархимедовый континуум.** Примем, что натуральные числа и арифметические операции над ними заданы изначально. Следовательно, изначально заданы и рациональные числа. (Изначально заданные числа будем называть абсолютными). На основе рациональных чисел строятся числа вещественные. Существует несколько равносильных концепций вещественного числа: по Дедекинду, Вейерштрассу, Кантору и др. Для наших целей удобнее всего концепция Кантора [25]. Согласно данной концепции, вещественное число представляет собой класс эквивалентности последовательностей рациональных чисел.

Например, вещественное число ноль  $0_{вещ}$  принципиально отличается от абсолютного числа  $0_{абс}$ : абсолютный ноль – это разность одинаковых изначально заданных натуральных чисел, а число  $0_{вещ}$  – это класс последовательностей абсолютных рациональных чисел:

$$a_n = \frac{1}{n}; \quad a'_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n+1}, \quad \dots \quad c_n = \frac{1}{n^2}, \quad \dots \quad d_n = \frac{1}{n^n}, \quad \dots \quad (6)$$

В класс (6) входят также последовательности, отличающиеся от указанных любым конечным числом членов и, кроме этого, множество других последовательностей. Такие же конгломераты представляют собой и другие вещественные числа.

Вместе с тем, во всех построениях данные конгломераты выступают как единые объекты. Вещественное число есть единый, неделимый объект, то, “что не имеет частей” [16]. Если вещественное число сравнить с атомом, то можно сказать, что во всех операциях математического анализа данный атом выступает действительно как неделимый объект. То есть полностью соответствует смыслу названия “атом” (неделимый). Этот факт и определяет разрешающую способность классического математического анализа.

Однако, рассмотренные выше задачи показывают, что для создания аппарата с бóльшим разрешением, чем классический, вещественные числа являются слишком грубыми объектами. Их необходимо расщепить на более “тонкие” элементарные части, которые можно было бы использовать в дальнейших построениях. Если вернуться к сравнению вещественного числа и атома, то можно сказать, что речь идет о расщеплении атома. В физике составляющие атома называются элементарными частицами. Согласно современным представлениям, большинство элементарных частиц являются составными частицами.

Элементарные частицы рассматриваемой здесь математической реальности (в точном значении слова “элементарный”) – это абсолютные рациональные числа. Мы хотели бы расщепить вещественное число на такие “элементарные частицы”, которые, возможно, и были бы составными, но которые в дальнейших построениях расщеплять бы уже не пришлось. Обратимся к вещественному числу нуль, то есть к совокупности последовательностей (6). Можно было бы каждую из данных последовательностей рассмотреть как “элементарную частицу” числа  $0_{вещ}$ . Однако такие “частицы” для наших целей являются слишком мелкими. С другой стороны, вся совокупность (6) для наших целей является слишком крупной. Следующий промежуточный вариант удовлетворяет всем необходимым требованиям. Возьмем в качестве “элементарной частицы” числа  $0_{вещ}$  совокупность последовательностей, в которую входит последовательность  $a_n = 1/n$  и любые другие последовательности, отличающиеся от указанной любым конечным числом членов. Обозначим данную совокупность через  $E = \text{Lim } 1/n$ . Аналогично определим и другие “элементарные частицы” числа  $0_{вещ}$ .

Теперь общий случай. Пусть  $r_n$  – произвольная последовательность абсолютных рациональных чисел, а  $r'_n$  – последовательность, которая отличается от  $r_n$  любым конечным числом членов. На этом основании можно считать, что “предельное” поведение указанных последовательностей будет одинаковым и, значит, обе последовательности определяют один и тот же предельный объект. Данный объект обозначим как  $\text{Lim } r_n$  и определим как класс последовательностей, содержащий последовательность  $r_n$  и другие последовательности, отличающиеся от  $r_n$  любым конечным числом членов. Указанный класс будем называть элементарным числом и считать пределом последовательности  $r_n$  в смысле  $\text{Lim}$ , или пределом типа 1. Значения  $r_n$  будем считать приближениями элементарного числа. Арифметические операции с элементарными числами и частичный порядок введем через приближения:

$$\begin{aligned} \text{Lim } a_n + \text{Lim } b_n &= \text{Lim } (a_n + b_n), \dots \\ \text{Lim } a_n &\geq \text{Lim } b_n, \end{aligned} \tag{7}$$

если, начиная с некоторого  $n$ ,  $a_n \geq b_n$ . В частности, для любого натурального  $N$  имеем

$$\omega = \text{Lim } n > N, \quad E = \text{Lim } 1/n < 1/N. \tag{8}$$

Таким образом, элементарные числа  $\omega$  и  $E$  – это представители актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел (будем считать их эталонами). Собственно, все актуальные бесконечно малые числа – это “осколки” расщепленного числа “вещественный нуль”.

Элементарные числа (7) служат материалом для построения неархимедовой числовой прямой. Первое равенство (8) показывает, к какому именно объекту стремится переменная  $n$  в своем пределе  $\text{Lim } n$ : переменная (2) стремится к объекту  $\omega$ . Поэтому обозначение элементарных чисел можно уточнить таким образом:  $\text{Lim}_{n \rightarrow \omega} r_n$ . В силу (8) число  $\omega$  можно расположить правее любого натурального числа ряда (2). Далее следуют числа  $\omega + 1$ ,  $\omega + 2$  и т.д. В результате мы приходим к ряду

$$1, 2, 3 \dots \omega, \omega + 1, \dots 2\omega, \dots \omega^2, \dots \omega^\omega, \dots v, \dots \tag{9}$$

Данный ряд будем называть продолженным натуральным рядом или “натуральным” рядом. Числа, полученные в результате арифметических действий над “натуральными” числами будем называть “рациональными”. Дальше все построения можно делать по образцу



классического анализа с заменой рациональных чисел на “рациональные”. При этом последовательности рациональных чисел  $r_n$ , занумерованные натуральными  $n$ , заменяются последовательностями “натуральных” чисел, занумерованных “натуральными” числами  $v$ .

По этой схеме “вещественные” числа должны определяться следующим образом. Последовательности “рациональных” чисел

$$\begin{aligned} A_1, A_2 \dots A_\omega, \dots A_v \dots \\ A'_1, A'_2 \dots A'_\omega, \dots A'_v \dots \end{aligned} \quad (10)$$

будем считать эквивалентными, если для любого “натурального”  $\Gamma$  найдется “натуральное” число  $\Lambda$  такое, что для любых  $v > \Lambda$  будем иметь  $|A_v - A'_v| < 1/\Gamma$ . Последовательность  $A_v$  называется фундаментальной, если при любых  $\mu, v > \Lambda$  имеем  $|A_v - A_\mu| < 1/\Gamma$ . Классы эквивалентности фундаментальных последовательностей – это и есть числа неархимедовой числовой прямой, то есть “вещественные” числа. Введем для них следующее обозначение:

$$\sigma = \lim A_v \quad (11)$$

и собственное наименование – существенные числа. Операцию (11) будем называть предельным переходом типа 2. Класс последовательностей  $\lim 1/v$  является нулем в области существенных чисел ( $0_{\text{сущ}}$ ).

Выделим последовательности элементарных чисел  $A_v \neq 0$ , которые входят в состав числа  $0_{\text{сущ}}$ , и перейдем к последовательностям  $1/A_v$ . Объединим их в один класс, который обозначим как  $\infty_{\text{сущ}} = \lim 1/A_v$ . Подкласс  $A_v > 0$  обозначим как  $+\infty_{\text{сущ}} = \lim v$ . Последнее равенство показывает, в какой именно объект переходит переменная  $v$  в результате предельного перехода типа 2: она переходит в объект  $+\infty_{\text{сущ}}$ . Это дает основание для следующего уточнения записи (11):  $\sigma = \lim_{v \rightarrow \infty} A_v$ . (Знак и индекс у бесконечности опущены).

Числовая область (11) обладает всеми свойствами вещественных чисел, кроме свойства (3), диктуемого аксиомой Архимеда. Для чисел (11) аксиома Архимеда заменяется следующей: для любых  $0 < \tau < \sigma$  найдется такое “натуральное”  $\Lambda$ , что будет иметь место неравенство  $\Lambda \cdot \tau > \sigma$ . Если говорить о разрешающей способности теории, то теперь можно утверждать, что  $\sigma$  и  $\tau$  не различаются, если для любого  $\Gamma$  из ряда (9)  $|\sigma - \tau| < 1/\Gamma$ . (Вторая аксиома разрешения). Несколько условно можно сказать, что новая степень разрешения больше, чем прежняя настолько, насколько “натуральный” ряд (9) длиннее натурального ряда (2).

**3. Неархимедов математический анализ.** Числовая область (11) является достаточно богатой для того, чтобы на ее основе можно было развить математический анализ. В основе анализа лежит понятие предела. Если исключить “патологические” случаи, то можно доказать корректность следующих определений и формул:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \omega} \lim_{m \rightarrow \omega} r(n, m) &= \lim_{n \rightarrow \omega} r(n; n); \\ \lim_{v \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} A(v, \mu) &= \lim_{v \rightarrow \infty} A(v, v); \\ \lim_{n \rightarrow \omega} \lim_{v \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \omega} r(m, v, n) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \omega} r(n, v, n). \end{aligned} \quad (12)$$

Индексы записаны как аргументы. В числовую область (11) абсолютные рациональные числа входят через стационарные последовательности

$$r_{\text{сущ}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \omega} r_{abc}.$$

Кроме этого, числовая ось (11) содержит область, изоморфную области обычных вещественных чисел  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} r(n)$ . Это видно из следующего сопоставления:  $\alpha$  и

$$\alpha^* = \lim_{v \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \omega} r(v(n)). \quad (13)$$

Числа (13) будем называть ядрами вещественных чисел. Если отношение двух чисел равно ядру вещественного числа (кроме 0), то эти числа будем относить к одному масштабному уровню неархимедовой прямой. Уровень самих чисел  $\alpha^*$  будем называть вещественным масштабным уровнем, уровень чисел  $\omega, \omega^2, \dots E, E^2, \dots$  – первым, вторым и т. д. мега- или микроуровнями. Остальные числа будем относить к промежуточным масштабным уровням. Таким образом, неархимедовая прямая содержит бесконечную иерархию различных масштабных уровней. В этом ее принципиальное отличие от обычной вещественной прямой.

Поэтому неархимедов анализ хотя во многом и аналогичен классическому, но, тем не менее, в нем содержится и принципиально новые моменты. Рассмотрим данный вопрос подробнее. Известно, что в основе математического анализа лежит понятие бесконечно малой величины (сам анализ раньше назывался “исчислением бесконечно малых”). Бесконечно малая – это переменная величина, предел которой равен нулю, например, величина  $\Delta x_n : \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x_n = 0$ . Речь идет именно о переменной величине. С другой стороны, в классическом анализе непременные, то есть актуальные бесконечно малые, отсутствуют. Наверное, поэтому уточнение “переменная” в названии бесконечно малой не используется. В неархимедовом анализе ситуация другая. Здесь имеется сколько угодно актуальных бесконечно малых величин. Поэтому уточнение “переменная” бесконечно малая величина необходимо.

Далее, наличие двух типов предельных переходов приводит и к двум типам переменных бесконечно малых величин, например,

$$\lim_{n \rightarrow \omega} \Delta X_n = 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \Delta X_v = 0. \quad (14)$$

Индекс у бесконечно малой первого типа пробегает натуральный ряд чисел (2), у переменной бесконечно малой второго типа – продолженный натуральный ряд (9). Наличие бесконечно малых двух типов приводит и к двум разделам неархимедова анализа. В первом разделе фигурируют переменные бесконечно малые первого типа, во втором – второго типа. Например, функция  $Y = F(X)$  считается непрерывной по типу 1, если приращение аргумента на любую бесконечно малую типа 1 вызывает бесконечно малое типа 1 приращение функции. Заменяя тип 1 на тип 2, получаем определение непрерывности по типу 2.

Теперь главный вопрос: каков смысл (в частности, механический смысл) двух типов предельных переходов и, как следствие – каков смысл двух типов непрерывности и двух типов производных? Ответ проще всего получить, рассматривая примеры. Пусть бесконечно малые имеют вид

$$\Delta X_n = \omega^2 - n^2; \quad \Delta X_v = \frac{v}{v^2 + 1}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \omega} n^2 = \omega^2, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v}{v^2 + 1} = 0. \quad (15)$$

Характер сходимости последовательности  $\Delta X_v$  к своему пределу является таким же, как и сходимости к последовательности 0 в классическом анализе. В обоих случаях члены последовательности по модулю становятся меньше сколь угодно малого положительного числа. Это число имеет вид  $1/n$  в архимедовом случае и вид  $1/v$  в неархимедовом. Существа дела это различие не меняет. Поэтому смысл определений непрерывности и производных типа 2 в неархимедовом анализе будет таким же, как и в классическом анализе.

С непрерывностью и производными типа 1 ситуация является принципиально другой. Все дело в том, что разность между  $\lim X_n$  и  $X_n$  с увеличением  $n$  не становится малой и тем более сколь угодно малой. Конечно, можно сказать, что точка  $X_{100} = 10^4$  находится ближе к  $\omega^2$ , чем точка  $X_5 = 25$ . Но и в том, и в другом случае расстояние до  $\omega^2$  является бесконечно большим. Таким образом, говоря о пределе в смысле  $\lim$ , мы всегда говорим о связи различных масштабных уровней прямой: в случае (15) переменная  $X_n$  принадлежит

к вещественному уровню, а ее предел типа 1 – ко второму мегауровню. Поэтому условия непрерывности и производные типа 1 играют роль инструментов для описания переходов функции с одного масштабного уровня аргумента на другой его уровень. В пластичности это соответствует переходу от масштабов, на которых реализуется микровращение, к масштабам макропеременных.

Рассмотрим основные определения для одномерного случая. Пусть  $Y = F(X)$  – функция, заданная на неархимедовой прямой (11). Как отмечалось, прямая содержит неограниченное число масштабных уровней. Однако практически функция может быть задана только на ограниченном числе уровней. На остальные уровни будем продолжать функцию по непрерывности. Так, если функция определена при  $X = X_1, X_2 \dots X_n, \dots$ , то ее непрерывным продолжением (по типу 1) в точку  $X^* = \lim_{n \rightarrow \omega} X_n$  будем называть значение

$$F(X^*) = F\left(\lim_{n \rightarrow \omega} X_n\right) = \lim_{n \rightarrow \omega} F(X_n). \quad (16)$$

Будем считать также, что правило (16) позволяет продолжить функцию  $F$  с масштабного уровня  $X_n$  на уровень  $X^*$ . Такие продолжения необходимы будут при подсчете производных типа 2. Если равенство (16) не выполняется, то можно говорить о разрыве функции при переходе от уровня аргументов  $X_n$  к уровню  $X^*$ , или можно говорить о разрыве на стыке различных масштабных уровней.

**4. Измерение углов касания.** Как отмечалось, углы касания, описанные в Началах Евклида [16], представляют собой пример актуальной бесконечно малой величины. Задача их измерения всегда была одним из стимулов создания теории актуальных бесконечно малых. Рассмотрим ее решение в рамках построенной выше числовой системы (11).

Пусть  $Oxy$  – обычная декартова (и, значит, архимедова) плоскость и  $y = f(x), g(x)$  – графики двух гладких функций, которые проходят через начало координат. Предположим, что существует рациональное число  $\delta(g, f) > 0$  такое, что при  $0 < x < \delta$  знак  $f(x) - g(x)$  не меняется. Область между графиками функций при  $0 < x < \delta$  назовем углом, точку  $(0, 0)$  – его вершиной, а графики  $f(x), g(x)$  – сторонами угла.

Проблема состоит в том, чтобы найти меру подобных углов. Обозначим меру через  $\alpha(g, f)$ . Величина окрестности  $\delta$  значения не имеет. Поэтому параметр  $\delta$  в обозначении меры не фигурирует. Везде имеется в виду, что мы работаем в пределах  $\delta$  – окрестности. Мера углов должна удовлетворять следующим условиям:

1<sup>0</sup>  $\alpha(g, f) = -\alpha(f, g)$ . Если  $f(x) > g(x)$ , то  $\alpha(g, f) > 0$ .

2<sup>0</sup> Расширим понятие угла на случай, когда  $f(x) \equiv g(x)$ . Положим по определению, что  $\alpha(f, f) = 0$ .

3<sup>0</sup> Мера угла должна удовлетворять условию регулярности. Это означает, что для угла, образованного двумя лучами

$$g(x) \equiv 0, \quad f(x) = tg\beta \cdot x, \quad (17)$$

мера должна давать общепринятое значение, т.е. величину  $\beta$ :

$$\alpha(0; tg\beta x) = \beta. \quad (18)$$

4<sup>0</sup> Корректная мера должна удовлетворять также условию аддитивности: если  $f(x), g(x)$  и  $h(x)$  – три функции, удовлетворяющие указанным выше условиям, то

$$\alpha(h, g) + \alpha(g, f) = \alpha(h, f).$$

Для прямолинейных лучей решение задачи дается формулой (18). Проблема, как известно, возникает, когда стороны угла в вершине имеют общую касательную. Достаточно ограничиться случаем, когда  $g(x) \equiv 0$  и  $f(x) \geq 0$ . Например, пусть  $f(x) = x^2$ . Такой угол меньше угла вида (17) для любого вещественного числа  $\beta > 0$ . Значит, его величина – это некоторое актуальное бесконечно малое число. Какое именно?

Теперь у нас все готово для того, чтобы дать ответ на этот вопрос. Прежде всего заменим все вещественные числа  $x$ ,  $y$  их ядрами  $x^*$ ,  $y^*$  и перенесем измеряемый угол в неархимедовую плоскость. Конечно, вместе с углом в неархимедовую плоскость ОХУ мы переносим и всю архимедовую плоскость  $Ox^*y^*$  в качестве каркаса. Теперь стороны угла уже не выглядят как непрерывные, сплошные линии. Возьмем последовательность значений аргумента  $X_n = 1/n$ . Значения аргумента и функции являются безразмерными. В качестве меры угла примем значение

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right). \quad (19)$$

Мера (19) удовлетворяет всем указанным выше условиям.

Посмотрим, что она дает в конкретных случаях. Во-первых, определим угол, который имеет меру, равную эталонному числу  $E$ . Из уравнения  $\alpha = E$ , или

$$\operatorname{arctg} n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

сразу получаем, что  $f(x) = x \cdot \operatorname{tg} x$ .

Далее, пусть  $y = kx^2$ . Тогда

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} n \cdot \frac{k}{n^2} = \operatorname{arctg} (k \cdot E). \quad (20)$$

Меньшему (положительному) значению  $k$  соответствует меньший угол. Но при любом  $k > 0$  углы (20) будут всегда больше углов, образованных осью  $y = 0$  и кривой  $y = m \cdot x^3$ . Здесь имеем

$$\alpha = \operatorname{arctg} (m \cdot E^2)$$

и т. д. Интересно посмотреть угол между осью  $y = 0$  и окружностью радиуса  $R$  [16]

$$(y - R)^2 + x^2 = R^2.$$

Формула (19) дает

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{R}{E} \left( 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{E}{R}\right)^2} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{E}{2R} + \frac{E^3}{8R^3} + \dots \right). \quad (21)$$

Таким образом, мы сталкиваемся с новым феноменом. Оказывается, величина угла становится зависимой от масштаба длины. Причем, если мы имеем обычные углы типа (17), то масштаб длины в формуле (19) сокращается. Об этом можно сказать и по-другому. Если угол образован прямолинейными лучами, то изотропное растяжение плоскости величину угла не меняет. Однако в общем случае это не так: изотропное растяжение плоскости приводит к уменьшению углов касания.

Таким образом, формула (19) дает решение проблемы измерения углов касания. Их величины являются неархимедовыми. Они упорядочены между собой. Например, формула (21) показывает, что с уменьшением радиуса окружности величина угла увеличивается. Но до каких пределов можно уменьшать радиус окружности? Ответ следует из исходной постановки задачи. В исходной постановке задачи мы рассматриваем углы, заданные в обычной архимедовой плоскости. Следовательно, радиус окружности – это ядро любого положительного вещественного числа. Это и есть ответ на поставленный вопрос. И формула (21) для любого  $R > 0$ , принадлежащего вещественному масштабному уровню, дает вполне адекватный результат.

А что она даст, если формально применить ее, например, к углу, образованному прямой и окружностью бесконечно малого радиуса  $R = E$ ? Из формулы сразу следует, что  $\alpha = \pi/4$ .

Поясним смысл результата. Если мы допускаем значения  $R = E$ , то значит мы теперь рассматриваем графики неархимедовых функций. Их графики располагаются на неархимедовой плоскости. Поэтому и исходную задачу необходимо сформулировать уже именно для этого случая. Итак, пусть  $Y = F(X)$  – график неархимедовой функции, заданной на существенной прямой  $OX$ . График получен непрерывным продолжением с архимедовой плоскости:

$$(Y - R)^2 + X^2 = R^2; \quad F(O) = 0; \quad F(X) > 0 \quad \text{при} \quad X > 0.$$

На неархимедовой плоскости формула (19) означает не что иное, как определение угла наклона секущей линии к графику  $F(X)$ . Именно секущей, проходящей через начало координат и точку  $(E, F(E))$ , то есть

$$\alpha = \text{arctg } F(E)/E.$$

Ясно, что в неархимедовой плоскости такая секущая угол касания уже никак не характеризует. Попытки поиска адекватной характеристики показывают, что в рамках неархимедового анализа со степенью разрешения, даваемого рядом (9), это невозможно. Необходим переход к неархимедовому анализу с более высокой степенью разрешения.

Для этого продолжим ряд (9). Введем последовательности “рациональных” чисел, занумерованные “натуральными” числами (9). Две последовательности  $A_v$  и  $A'_v$  будем считать эквивалентными, если, начиная с некоторого  $\Lambda$ ,  $A_v = A'_v$ ,  $v \geq \Lambda$ . Классы эквивалентности обозначим как  $\text{Lim}_v A_v$ . Пусть  $\omega^{(2)} = \text{Lim}_v v$ . Это число можно использовать как эталон для продолжения ряда (9). Дальше можно действовать по описанной выше схеме. В результате мы приходим к числовой системе следующей степени разрешения (номер 3). В ее рамках уже можно будет измерить углы касания в неархимедовой плоскости  $OXY$ . И т. д., и т. д. до анализа степени разрешения 4, 5, ....

Таким образом, проблема измерения роговидных (касательных) углов приобретает какой-то совершенно особый смысл. Для своего разрешения она все время требует перехода к математическому аппарату, имеющему все большую разрешающую способность.

Действительно, вначале мы располагаем обычной вещественной прямой и геометрией Евклида на обычной архимедовой плоскости. На ней есть прямые, окружности, а также углы, образованные окружностями и касательными к ним прямыми. При этом радиус окружности – положительное вещественное число. Задача измерения таких углов не может быть решена в рамках архимедовой числовой системы, удовлетворяющей Первой аксиоме разрешения. Для измерения таких углов мы должны перейти к неархимедовой числовой системе, имеющей степень разрешения 2 (т.е. удовлетворяющей Второй аксиоме разрешения).

Новой числовой системе соответствует новая, неархимедовая плоскость – плоскость 2. На ней есть свои прямые, окружности и углы, образованные окружностями и касательными к ним прямыми. Для радиусов окружностей теперь допускаются значения, равные актуальным бесконечно малым числам из числовой системы 2. Например,  $R = E = 1/\omega$  или  $R = E^\omega = 1/\omega^\omega$  и т. д. Однако измерить такие углы в рамках неархимедовой числовой системы 2 невозможно. Необходим переход к теории со степенью разрешения 3. И т. д.

Таким образом, проблема измерения углов касания приобретает роль вечного стимула, требующего построения иерархии математических теорий, имеющих все большую разрешающую способность.

### 5. Некоторые приложения. Ограничимся двумя масштабными уровнями прямой

$$X = x_0^* + x_1^*E = x + \xi; \quad T = t_0^* + t_1^*E = t + \tau.$$

Здесь  $x_0^*$ ,  $x_1^*$ ,  $t_0^*$ ,  $t_1^*$  – ядра вещественных чисел,

$$x = x_0^*, \quad \xi = x_1^*E, \quad t = t_0^*, \quad \tau = t_1^*E,$$

$X$  – пространственная ось,  $T$  – ось неархимедова времени.

Пусть

$$Y(T) = Y(t + \tau) = f(t, \tau) = \frac{g(t + \tau)^2}{2}.$$

Данная функция является непрерывной и по типу 1 и по типу 2. Движение является равноускоренным как на вещественном масштабном уровне, так и на первом микроуровне. Рассмотрим теперь другой случай, когда

$$Y(t + \tau) = f(t, \tau) = \frac{gt^2}{2}. \quad (22)$$

Для наблюдателя на вещественном масштабном уровне движение (18) выглядит как равноускоренное. Однако на микроуровне состояние тела является неподвижным: при фиксированном  $t$  и увеличении  $\tau$  смещение не меняется. Поэтому функция (22) будет разрывной на стыке двух масштабных уровней. Формула (22) дает пример описания “кинематографической” реальности Клиффорда [23, 24].

Рассмотрим теперь неархимедовую плоскость с двумя масштабными уровнями по каждой из координат:

$$X_1 = x_1 + \xi_1, \quad X_2 = x_2 + \xi_2.$$

Поле перемещений в такой плоскости оказывается зависимым от четырех переменных

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2).$$

Это открывает целый ряд дополнительных возможностей для формулировки определяющих уравнений. Так, производные по  $\xi_1, \xi_2$  можно связать с микровращением и микродеформациями, производные по  $x_1, x_2$  – с деформациями и вращением на макроуровне и т. д. В [26] рассмотрена модель горной породы с двумя структурными уровнями. Приведен пример решения краевой задачи о деформировании горного массива вокруг выработки. В [27] приведена формулировка принципа возможных перемещений и рассмотрен механический смысл условий стационарности неархимедового функционала.

В заключение отметим, что в настоящей работе:

1<sup>0</sup> Указан ряд задач пластичности, оптимального управления, измерения касательных углов, для решения которых необходима разработка математического аппарата неархимедова анализа, имеющего большую разрешающую способность, чем классический математический анализ.

2<sup>0</sup> Классический анализ строится по схеме: натуральный ряд чисел  $\rightarrow$  рациональные числа  $\rightarrow$  вещественные числа  $\rightarrow$  понятие предела  $\rightarrow$  понятие производной и т. д.

3<sup>0</sup> Неархимедов анализ строится так: натуральный ряд продолжается в область актуальных бесконечно больших чисел и дальше используется схема 2<sup>0</sup>.

4<sup>0</sup> В рамках построенной числовой системы получено решение задачи об измерении касательных (роговидных) углов.

5<sup>0</sup> Неархимедова прямая обладает неограниченным числом масштабных уровней. Это обстоятельство может быть использовано при построении пластических моделей сред с микроструктурой. Возможно также описание “кинематографической” реальности, когда движение, воспринимаемое нами как непрерывное, на самом деле представляет собой быструю смену отдельных неподвижных состояний.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971. – 231 с.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [4] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 1 : Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.
- [6] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 2 : Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
- [7] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с.
- [8] *Ивлев, Д. Д.* Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с.
- [9] *Ревуженко, А. Ф.* К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов / А. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1977. – № 3. – С. 157–173.
- [10] *Ревуженко, А. Ф.* О напряженно-деформированном состоянии разупрочняющегося массива вокруг выработки // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1978. – № 2. – С. 10–20.
- [11] *Шемякин, Е. И.* Эффект зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок / Е. И. Шемякин, М. В. Курленя, В. Н. Опарин, Г. Л. Фисенко и др. // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289. – № 5.
- [12] *Соколовский, В. В.* Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М. : Физматгиз, 1960. – 243 с.
- [13] *Ревуженко, А. Ф.* Механика сыпучей среды. – Новосибирск : ОФСЕТ, 2003. – 373 с.
- [14] *Кротов, В. Р.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета / В. Р. Кротов, В. З. Букреев, В. И. Гурман. – М. : Машиностроение, 1969. – 288 с.
- [15] *Кротов, В. Ф.* Экстремальные процессы пластического деформирования металлов / В. Ф. Кротов, М. Я. Бровман // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 3. – С. 148–153.
- [16] Начала Евклида : пер. с греческого. Кн. 1–6 / Евклид. – М. ; Ленинград [СПб.] : ОГИЗ, 1948. – 447 с.
- [17] *Клейн, Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Геометрия / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1987. – 416 с.
- [18] *Альбеверио, С.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике / С. Альбеверио, Й. Фенстад, Р. Хуэг-Крон, Т. Линдстрем. – М. : Мир, 1990. – 616 с.
- [19] *Робинсон, А.* Введение в теорию моделей и математику алгебры / А. Робинсон. – М. : Наука. – 1967. – 355 с.
- [20] *Успенский, В. А.* Что такое нестандартный анализ? / В. А. Успенский – М. : Наука, 1987. – 128 с.
- [21] Механика – от дискретного к сплошному / отв. ред. В. М. Фомин ; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2008. – 344 с.
- [22] *Новожилов, В. В.* Две статьи о математических моделях в механике сплошной среды / В. В. Новожилов // ИПМ АН СССР, ЛГУ пр. – Москва, 1983. – № 215. – 56 с.

[23] *Clifford, W.* On theories of the physical forces / W. Clifford // Lectures and Essays. – London, 1901. – Vol. 1. – P. 120–138.

[24] *Вяльцев, А. Н.* Дискретное пространство-время / А. Н. Вяльцев. – М. : Наука, 1965. – 398 с.

[25] *Немыцкий, В.* Курс математического анализа. Т. 1. / В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов. – М. : Ленинград [СПб.] : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1940. – 459 с.

[26] *Лавриков, С. В.* Описание плоской деформации неупругих тел с использованием вектора внутренних усилий и неархимедового математического анализа / С. В. Лавриков, О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко // Вестник Чувашского гос. педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния : к 80-летию Г. К. Михайлова. – 2009. – № 1. – С. 160–171.

[27] *Ревуженко, А. Ф.* Принцип возможных перемещений в неархимедовом пространстве / А. Ф. Ревуженко // Труды XXI Всероссийской конференции ; под ред. В. М. Фомина. – Новосибирск, 2009. – С. 195–203.

*A. F. Revuzhenko*

## USE OF METHODS OF THE NON-ARCHIMEDEAN ANALYSIS IN THE PLASTICITY THEORY

*Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences*

**Abstract.** The non-Archimedean numerical system including the actual infinitesimal sizes is considered. On its basis the mathematical analysis having a higher degree of permission, than the classical analysis is under construction. It is shown that the device of the non-Archimedean analysis can be used in models of plastic environments with a microstructure, for the decision of a measurement problem of the corners' tangents, in other areas.

**Keywords:** non-Archimedean, the nonstandard analysis, the horn-shaped angles, plasticity.

*Ревуженко Александр Филиппович*

*заведующий лабораторией, доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск*

**e-mail:** revuzhenko@yandex.ru

*Revuzhenko, Alexander Filippovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department, Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*



Г. Ю. Северин, А. И. Шашкин

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФИНИТНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПЛАЗМЫ

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Приводится алгоритм построения системы ортогональных финитных функций для решения нелинейного пространственного уравнения состояния плазмы методом конечных элементов. Результат проектирования на соответствующее конечномерное подпространство – система обыкновенных дифференциальных уравнений с диагональной матрицей.

**Ключевые слова:** пространственное уравнение состояния плазмы, метод Галёркина, ортогональные финитные функции, условие Стренга-Фикса.

УДК: 519.63

**Введение.** При построении приближённых решений уравнений с частными производными с помощью метода Галёркина исходное уравнение в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Функции, используемые для этого, должны обладать специальными свойствами для получения хорошей точности приближения и, по возможности, максимального сокращения вычислительных процедур. Эти функции должны быть финитными, или хотя бы иметь хорошую локализацию. Полученная после проектирования на тестовое пространство система обыкновенных дифференциальных уравнений должна быть максимально простой, то есть линейной, с ленточной матрицей, желательно с диагональным преобладанием. После появления в конце 80-х годов прошлого века вейвлетов (всплесков) многие специалисты по численным методам возлагали надежды на появление всплесков с компактными носителями, специально предназначенных для метода Галёркина. Так как при использовании традиционных всплесков при решении нелинейных уравнений методом Галёркина, как и при использовании сплайнов и *wp*-функций Рвачёва, сохранилась основная трудность – после проектирования на тестовое пространство всё равно нужно решать нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. В. Л. Леонтьев в [2] привёл различные алгоритмы (непосредственный, на базе свёртки) построения систем ортогональных финитных функций (ОФФ), специально предназначенных для численных методов. Но ОФФ Леонтьева обладают только свойством ортогональности сдвигов исходной функции. Вейвлеты, сплайны и ОФФ, у которых сохраняется ортогональность при дифференцировании, умножении на какую-то функцию и т. д. – до сих пор не построены. Поэтому, при нахождении функций-амплитуд из нелинейной системы, полученной после применения метода Галёркина, исследователь вынужден идти на компромиссы: ограничиться не очень малым шагом сетки  $h$ , решать задачу в меньшей области и т. д.

В этой работе предлагается непосредственное построение двух систем ортогональных финитных функций вида  $\left\{ f\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right\}_{i=-\infty}^{\infty}$ ,  $\left\{ \varphi\left(\frac{y-y_j}{h}\right) \right\}_{j=-\infty}^{\infty}$  – сдвигов функций  $f(x/h)$  и  $\varphi(y/h)$ , специально адаптированных для пространственного уравнения состояния плазмы так, что

после проектирования на соответствующее тестовое пространство матрица Грамма диагональна. Более того, показан способ построения систем ортогональных финитных функций (ОФФ) для решения достаточно широкого класса нелинейных многомерных задач с частными производными. Описанные здесь конструкции ОФФ имеют два принципиальных отличия от ОФФ В.Л. Леонтьева: построенные функции  $f(x), \varphi(y)$  удовлетворяют не одному точному условию ортогональности, а нескольким условиям почти ортогональности, благодаря чему при проектировании на тестовое пространство исходного нелинейного уравнения нейтрализуется нелинейность  $(u^2)'''_{xxx}$ ; из-за чего точное условие разбиения единицы Стренга-Фикса также заменяется приближённым.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим пространственное нелинейное уравнение состояния плазмы:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2b \left( 3 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + G(x, y, z, t), \quad (1)$$

где  $a > 0$ ,  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ . Во всём множестве  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  функция  $H$  — кусочно непрерывна по  $t$ , непрерывно дифференцируема по  $x, y, z$ , функция  $u(x, y, z, t)$  удовлетворяет начальному условию:

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad (2)$$

где  $u_0$  — непрерывно дифференцируема по всем переменным.

**2. Построение ортогональных финитных функций.** Пусть  $h$  — фиксированное достаточно малое число — шаг равномерной сетки. Приближённо построим функции  $f(x)$  и  $\varphi(y)$  с носителями  $[-1, 1]$ , порождающие системы функций  $\left\{ f\left(\frac{x-x_m}{h}\right) \right\}_{m=-\infty}^{\infty}$ ,  $\left\{ \varphi\left(\frac{y-y_n}{h}\right) \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , на основе которых методом конечных элементов будет строиться приближённое решение задачи (1)-(2). Пусть

$$f(x) = (a_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + \dots + a_1 x + 1) up(x). \quad (3)$$

Здесь  $up(x)$  — атомарная функция В.Л. Рвачёва [4] — чётная, неотрицательная, бесконечно дифференцируемая с носителем  $[-1, 1]$ . Её график имеет характерный колоколообразный вид. Справедлива формула  $up'(x) = 2up(2x - 1) - 2up(2x + 1)$ . В [4] приведены явные формулы значений атомарной функции в двоично-рациональных точках отрезка  $[0, 1]$ . Неизвестные коэффициенты  $a_1, \dots, a_l$  определим далее из приближённых условий Стренга-Фикса и условий почти ортогональности. Пусть функция  $f$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\int_0^1 f(x) f(x-1) dx = 0, \quad (4)$$

$$\int_0^1 f(x) f''(x-1) dx = 0, \quad (5)$$

$$\int_0^1 f''(x) f''(x-1) dx = 0, \quad (6)$$

$$\int_0^1 f'(x-1) f''(x-1) f(x) dx = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^1 f'(x-1)f''(x)f(x)dx = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^1 f'(x)f''(x-1)f(x)dx = 0, \quad (9)$$

$$\int_0^1 f(x-1)f'''(x-1)f(x)dx = 0, \quad (10)$$

$$\int_0^1 f(x)f'''(x-1)f(x)dx = 0, \quad (11)$$

$$\int_0^1 f(x-1)f'''(x)f(x)dx = 0. \quad (12)$$

Известно [3], что если функция  $f(x)$  с носителем  $[-1, 1]$  принадлежит  $W_2^{p+1}$ , то эквивалентны следующие условия:

1) Если  $|\alpha| \leq p$ , то

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^\alpha f(t-j)$$

полином от  $t_1, \dots, t_k$  с главным членом  $ct^\alpha$ ,  $c \neq 0$ .

2) Для каждой функции  $u(x) \in W_2^{p+1}(\mathbb{R})$  существуют такие коэффициенты  $w_j$ , что при  $h \rightarrow 0+$  выполнены неравенства

$$\|u - \sum_j w_j f_j\|_{W_2^s} \leq c_s h^{p+1-s} \|u\|_{W_2^{p+1}}, \quad \sum_j |w_j|^2 \leq c \|u\|_{L_2}^2, \quad 0 \leq s \leq p,$$

где постоянные  $c_s$  и  $c$  не зависят от  $u(x)$  и от  $h$ . Показатель  $p+1-s$  является наилучшим для рассматриваемых классов  $W_2^s$  и  $W_2^{p+1}$ .

Согласно этой теореме (Стренга-Фикса), для точности порядка  $h$  в  $L_2(\mathbb{R})$  достаточно точного разбиения единицы:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(x-j) \equiv 1.$$

Для (3) условие  $\forall x \in [0, 1]: f(x) + f(x-1) \equiv 1$ , вообще говоря, невыполнимо.

Потребуем, чтобы финитная функция  $f(x)$  удовлетворяла неточному условию типа Стренга-Фикса на отрезке  $[0, 1]$ :

$$f(x) + f(x-1) \approx 1 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Пусть

$$f(x^i) + f(x^i - 1) = 1, \quad i = 1, \dots, q, \quad (13)$$

где  $x^1, \dots, x^q$  – сетка на отрезке  $[0, 1]$ .

Итак, объединяя условия ортогональности (4)-(12) и приближённое условие Стренга-Фикса (13), получим алгебраическую систему уравнений для чисел  $a_1, \dots, a_l$ . Число  $l$  в (3) нужно положить равным  $9+q$ . Численно решая полученную систему, в которой 9 уравнений нелинейные (три квадратичные и шесть кубических), находим вещественные коэффициенты  $a_1, \dots, a_l$

с точностью до знака. После чего нормируем найденную функцию и введём некоторые обозначения:

$$\|f(x)\|_{L_2} = 1, \quad \|f'(x)\|_{L_2}^2 = \alpha > 0, \quad \|f''(x)\|_{L_2}^2 = \beta > 0, \quad \int_{-1}^1 f(x)dx = \gamma. \quad (14)$$

Пусть

$$\varphi(y) = (b_1 y^s + b_{s-1} y^{s-1} + \dots + b_1 y + 1) u p(y). \quad (15)$$

Неизвестные коэффициенты  $b_1, \dots, b_s$  определим далее из неточных условий Стренга-Фикса и условий почти ортогональности.

Пусть выполнены следующие соотношения:

$$\int_0^1 \varphi(y) \varphi(y-1) dy = 0, \quad (16)$$

$$\int_0^1 \varphi''(x-1) \varphi(x) dy = 0. \quad (17)$$

Потребуем, чтобы финитная функция  $\varphi(y)$  удовлетворяла неточному условию Стренга-Фикса:

$$\varphi(y) + \varphi(y-1) \approx 1.$$

То есть

$$\varphi(y^i) + \varphi(y^i - 1) = 1, \quad i = 1, \dots, q, \quad (18)$$

где  $y^1, \dots, y^q$  сетка (необязательно равномерная) на отрезке  $[0, 1]$ .

Объединяя условия ортогональности (16)-(17) и неточное условие Стренга-Фикса (18), получим алгебраическую систему уравнений для чисел  $b_1, \dots, b_s$ . То есть степень  $s$  в (15) нужно положить равной  $2+q$ . Численно решая полученную алгебраическую систему, в которой только 2 уравнения нелинейные (квадратичные), находим вещественные коэффициенты  $b_1, \dots, b_s$  с точностью до знака. Наконец, нормируем найденную функцию и введём обозначения:

$$\|\varphi(y)\|_{L_2} = 1, \quad \|\varphi'(y)\|_{L_2}^2 = \delta, \quad \int_{-1}^1 \varphi(y) dy = \lambda. \quad (19)$$

Функции  $f, \varphi$  построены.

**3. Одно обобщение теоремы Стренга-Фикса.** На равномерной сетке шага  $h$  (общим для всех  $q$ ) с узлами  $x_j$  отрезка  $[0, X]$  рассмотрим системы функций  $f_j^q = f^S\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$ . Следующее утверждение обосновывает возможность аппроксимации произвольной функции  $u(x)$  из  $L_2[0, X]$  линейными комбинациями  $\left\{f^q\left(\frac{x-x_m}{h}\right)\right\}_{m=0}^M$ , где при каждом  $q$  функция  $f^q(x)$  с носителем  $[-1, 1]$  удовлетворяет неточному условию Стренга-Фикса.

Пусть функции  $\{F^q(x)\}_{q=1}^\infty$  с носителем  $[-1, 1]$  удовлетворяют точному условию теоремы Стренга-Фикса:

$$\forall x \in [0, 1] : F^q(x) + F^q(x-1) \equiv 1.$$

Пусть функции  $f^q(x)$  с носителем  $[-1, 1]$  на сгущающихся сетках шага  $h' = x^{s+1} - x^s$  отрезка  $[-1, 1]$  совпадают с функциями  $F^q(x)$ :

$$\forall x^s \in [-1, 1] (s = 1, \dots, q) \quad f^q(x^s) = F^q(x^s).$$

Тогда  $\forall X, h > 0, u(x) \in L_2[0, X] : \exists q, \{\omega_j^q\}_j, C(X, q) :$

$$\|u(x) - \sum_j \omega_j^q f_j^q\|_{L_2[0, X]} < C(X, q)h.$$

**Доказательство.** На основании классической теоремы Стренга-Фикса для любого  $q$  существуют такие коэффициенты  $\omega_j^q$ , что при малых  $h$  выполнено:

$$\|u - \sum_j \omega_j^q F_j^q\|_{L_2[0, X]} \leq ch, \quad \sum_j |\omega_j^q|^2 \leq c\|u\|_{L_2}^2.$$

Используя это, имеем

$$\begin{aligned} \|u - \sum_j \omega_j^q f_j^q\| &\leq \|u - \sum_j \omega_j^q F_j^q\| + \|\sum_j \omega_j^q F_j^q - \sum_j \omega_j^q f_j^q\| \leq \\ &\leq ch + \sum_j |\omega_j^q| \sqrt{\int_{x_s-h}^{x_s+h} \left(F^q\left(\frac{x-x_s}{h}\right) - f^q\left(\frac{x-x_s}{h}\right)\right)^2 dx} \leq \\ &\leq ch + h \sum_j |\omega_j^q| \sqrt{\int_{-1}^1 \left(F^q(x) - f^q(x)\right)^2 dx}. \end{aligned}$$

Величины  $\sum_j |\omega_j^q|$  в совокупности ограничены для фиксированного  $X$ . Интеграл  $\int_{-1}^1 \left(F^q(x) - f^q(x)\right)^2 dx$  можно сделать сколь угодно малым за счёт увеличения  $q$  (сгущения сетки с узлами  $x^s$  на отрезке  $[-1, 1]$ ). Поэтому  $\exists C(X, q) :$

$$\|u - \sum_j \omega_j^q f_j^q\|_{L_2[0, X]} \leq C(X, q)h.$$

**4. Приведение нелинейного уравнения состояния плазмы к линейной системе ОДУ с помощью построенных ОФФ.** Пусть сетка шага  $h$  имеет узлы  $x_m, m = -\infty, \dots, \infty; y_n, n = -\infty, \dots, \infty; z_p, p = -\infty, \dots, \infty$ . Приближённое решение  $U(x, y, z, t, h)$  задачи (1)-(2) будем искать в виде:

$$U(x, y, z, t, h) = \sum_{mnp} A_{mnp}(t) f\left(\frac{x-x_m}{h}\right) \varphi\left(\frac{y-y_n}{h}\right) \varphi\left(\frac{z-z_p}{h}\right) = \sum_{mnp} A_{mnp} f_m \varphi_n \varphi_p. \quad (20)$$

Подставим приближение (20) в начальное условие (2) и умножим скалярно в смысле  $L_2$  обе части полученного равенства на  $f\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$  ( $i = -\infty, \dots, \infty$ ). Затем полученное равенство умножим скалярно на  $\varphi\left(\frac{y-y_j}{h}\right)$  ( $j = -\infty, \dots, \infty$ ). После чего полученное равенство умножим скалярно на  $\varphi\left(\frac{z-z_k}{h}\right)$  ( $k = -\infty, \dots, \infty$ ). Используя (4), (14), (16) и (19), получим:

$$A_{ijk}(0) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_0(x_i + hx, y_j + hy, z_k + hz) f(x) \varphi(y) \varphi(z) dx dy dz = u_0(x_i, y_j, z_k) \gamma \lambda^2 + O(h). \quad (21)$$

Подставим (20) в (1) и умножим скалярно в смысле  $L_2$  обе части полученного равенства на  $f\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$  ( $i = -\infty, \dots, \infty$ ). Из (4)-(12) и (14) следует:

$$-\frac{\alpha}{h} \sum_{np} \frac{d}{dt} A_{inp} \varphi_n \varphi_p - \frac{a\beta}{h^3} \sum_{np} A_{inp} \varphi_n \varphi_p + h \sum_{np} A_{inp} (\varphi_n'' \varphi_p + \varphi_n \varphi_p'') = h\gamma G(x_i, y, z, t) + O(h^2).$$

Заметим, что именно благодаря условиям (7)-(12) обнулилось нелинейное слагаемое

$$2b \left( 3 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)$$

исходного уравнения (1).

Теперь умножим скалярно обе части этого равенства на  $\varphi\left(\frac{y-y_j}{h}\right)$  ( $j = -\infty, \dots, \infty$ ). После этого умножим скалярно обе части полученного равенства на  $\frac{1}{h} \varphi\left(\frac{z-z_k}{h}\right)$  ( $k = -\infty, \dots, \infty$ ). Из (16)-(17) и (19) получим:

$$\frac{d}{dt} A_{ijk} = \left( -\frac{a\beta}{\alpha h^2} - \frac{\delta}{\alpha h} \right) A_{ijk} - h^2 \gamma \lambda^2 G(x_i, y_j, z_k, t). \quad (22)$$

Из (21)-(22) имеем:

$$A_{ijk}(t) = \gamma \lambda^2 u_0(x_i, y_j, z_k) e^{-\left(\frac{a\beta}{\alpha h^2} + \frac{\delta}{\alpha h}\right)t} - h^2 \gamma \lambda \int_0^t e^{-\left(\frac{a\beta}{\alpha h^2} + \frac{\delta}{\alpha h}\right)(t-s)} G(x_i, y_j, z_k, s) ds.$$

В зависимости от конкретной физической задачи сетки  $x_m, y_n, z_p$  могут иметь разные шаги  $h_1, h_2, h_3$ . Построенные ОФФ  $f$  и  $\varphi$  будут теми же.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин, В. П. Методы и технологии конечных элементов / В. П. Ильин. – Новосибирск, 2007. – 369 с.
- [2] Леонтьев, В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы / В. Л. Леонтьев. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 178 с.
- [3] Агошков, В. И. Введение в проекционно-сеточные методы / В. И. Агошков, Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1981. – 416 с.
- [4] Рвачёв, В. А. Теория приближений и атомарные функции / В. А. Рвачёв, В. А. Рвачёв. – М. : Знание, 1978. – 64 с.

G. Y. Sewerin, A. I. Shashkin

## ORTHOGONAL FINITARY FUNCTIONS FOR THE NONLINEAR SPATIAL EQUATION OF A PLASMA CONDITION

Voronezh State University

**Abstract.** The algorithm of construction system of the orthogonal finitary functions for the decision of the nonlinear spatial equation of a plasma condition is resulted by a method of final elements. The result of designing on a corresponding finite-dimensional subspace - a system of the ordinary differential equations with a diagonal matrix.

**Keywords:** the spatial equation of a plasma condition, Galerkin method, the orthogonal finitary functions, Streng-Fiks condition

*Северин Григорий Юрьевич*

*кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

*e-mail: akg.77@mail.ru*

*Шашкин Александр Иванович*

*доктор технических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

*e-mail: akg.77@mail.ru*

*Sewerin, Grigorij Yurievich*

*Candidate of Phys. & Math., Senior Teacher, Voronezh State University, Voronezh*

*Shashkin, Alexander Ivanowitsh*

*Dr. Eng. Sci., Professor, Voronezh State University, Voronezh*

К. Т. Семенов, Е. А. Герасименко

## ДИССИПАТИВНЫЕ РАЗРЫВЫ ПРИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧНОСТИ

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН*

**Аннотация.** В представленной работе рассмотрены условия возникновения и закономерности распространения упругопластических волн в средах, удовлетворяющих произвольному кусочно-линейному условию пластичности в случаях грани и ребра поверхности текучести. Полученные результаты применяются для анализа поведения диссипативных разрывов в пластически сжимаемой среде, описываемой пирамидой Кулона–Мора.

**Ключевые слова:** кусочно-линейные условия пластичности, диссипативные разрывы, пластическая сжимаемость, пирамида Кулона–Мора.

УДК: 539.374

**Введение.** При постановке краевых задач динамики упругопластических сред необходимы первоначальные сведения о поверхностях разрывов необратимых деформаций. Этим объясняется постоянный интерес ([1–6, 8–12]) к их изучению. Фундаментальная механика неупругого деформирования располагает подобными сведениями, в основном в случае пластически несжимаемых материалов. Однако, например, при модельном учете необратимой сжимаемости среды имеющихся сведений совершенно недостаточно. На движущихся в среде поверхностях разрывов деформаций необходимо поставить краевые условия для систем дифференциальных уравнений динамики, поэтому при постановке краевых задач важно знать условия возникновения возможных поверхностей разрывов в зависимости от предварительных напряженных состояний, вычислять скорости движения возникающих поверхностей разрывов. Данные вопросы, при произвольном кусочно-линейном условии пластичности, рассмотрены в настоящей статье.

**1. Основные соотношения упругопластической среды.** Положим, что модель идеального упругопластического тела описывается малыми деформациями, т.е.

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad (1)$$

где  $u_i$  – компоненты вектора перемещений точек среды;  $e_{ij}$  – тензор полных деформаций;  $e_{ij}^e$ ,  $e_{ij}^p$  – обратимая (упругая) и необратимая (пластическая) составляющие полных деформаций соответственно; индексом после запятой обозначена частная производная по соответствующей пространственной координате ( $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ ).

Напряжения  $\sigma_{ij}$  в изотропной среде связаны с упругими деформациями  $e_{ij}^e$  посредством закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad (2)$$

Поступила 16.06.2010

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК–2436.2009.1 и гранта ДВО РАН № 10-III-B-03-037



где  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

При достижении напряжениями поверхности текучести

$$f^{(s)}(\sigma_{ij}) = k, \quad k = \text{const}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3)$$

в деформируемой среде начинают накапливаться пластические деформации  $e_{ij}^p$ . Постоянная  $k$  – предел текучести. Принимая принцип максимума Мизеса (при этом соотношения (3) становятся пластическим потенциалом) для скорости пластического деформирования согласно ассоциированному закону пластического течения можем записать:

$$\varepsilon_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p = \sum_{s=1}^n \psi_s \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4)$$

где  $\psi_s > 0$  при  $\frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$ ,  $\psi_s = 0$  при  $\frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0$ .

При отсутствии объемных сил связь компонент тензора напряжений и скоростей перемещений определяется уравнениями движения:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \chi_i = \rho \dot{v}_i, \quad (5)$$

где  $v_i$  – компоненты скорости перемещений точек среды ( $v_i = \dot{u}_i$ ). Точкой обозначается частная производная по времени ( $\dot{u} = \partial u / \partial t$ ).

**2. Диссипативные разрывы при условии пластичности, определяемом гранью поверхности текучести.** В качестве поверхности нагружения  $f$  из (3) выберем плоскость в пространстве главных напряжений

$$\alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3 = k, \quad (6)$$

или прямую, образованную пересечением плоскостей

$$\begin{cases} \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3 = k, \\ \beta_1 \sigma_1 + \beta_2 \sigma_2 + \beta_3 \sigma_3 = k, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\sigma_i$  – главные значения тензора напряжений,  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  являются константами,  $i = 1..3$ .

И тогда будем говорить, что (6) определяет грань поверхности текучести, а соотношение (7) – ребро.

Положим, что единственным диссипативным процессом, допускаемым средой, включая также процессы на ударной волне, является пластическое течение. С целью записи соотношений на поверхности разрывов принимаем ее в качестве тонкого переходного слоя шириной  $2h$ . Пусть вектор единичной нормали к поверхности разрывов сонаправлен с положительным направлением оси  $x_3$ , тогда условия существования поверхности разрыва можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = -c^{-1} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial c}{\partial x_3} = 0. \quad (8)$$

В (8)  $c$  – скорость распространения ударной волны. Так как толщина переходного слоя считается малой, а характер ударного перехода связан с резким изменением параметров движения среды в зависимости от нормальной к волне координаты  $x_3$ , то полагаем, что производными функций по  $x_1$  и  $x_2$  в записи уравнений движения точек среды в переходном слое можно пренебречь по сравнению с производными по  $x_3$ . Такое предположение позволяет получить одномерную систему уравнений, описывающую движение среды в ударном фронте. Отметим, что согласно работам [1, 2, 12] принимается неизменность главных направлений тензора напряжений при переходе через поверхность разрыва.

Если напряженное состояние во всем переходном слое определяется соотношением (6), то согласно ассоциированному закону пластического течения (4) получим

$$\varepsilon_1^p = \alpha_1 \Psi, \quad \varepsilon_2^p = \alpha_2 \Psi, \quad \varepsilon_3^p = \alpha_3 \Psi. \quad (9)$$

Компоненты тензора напряжения и тензора скоростей пластических деформаций выражаются через главные напряжения и главные скорости пластических деформаций соответственно посредством соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j, \\ \varepsilon_{ij}^p &= \varepsilon_1^p l_i l_j + \varepsilon_2^p m_i m_j + \varepsilon_3^p n_i n_j, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $l_i$ ,  $m_i$  и  $n_i$  - направляющие косинусы главных осей тензора напряжений. Для них справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} l_i l_i &= m_i m_i = n_i n_i = 1, \\ l_i m_i &= l_j n_j = m_k n_k = 0, \\ l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (11)$$

В соотношениях (11) по повторяющимся индексам производится суммирование.

Следуя уравнениям движения (5), определяющим зависимости (1), (2), (6), (9), (10) и (11), в условиях переходного слоя (8) получим систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют грани поверхности текучести

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 l_i l_j + \dot{\sigma}_2 m_i m_j + \dot{\sigma}_3 n_i n_j - \lambda \delta_{ij} v_{3,3} - \mu (v_{i,3} v_j + v_{j,3} v_i) + \zeta_{ij} &= 0, \\ (\mu - \rho c^2) v_{i,3} + (\lambda + \mu) v_{3,3} v_i - \zeta_{i3} &= 0, \\ \zeta_{ij} = \lambda \Psi \delta_{ij} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 2 \mu \Psi (\alpha_1 l_i l_j + \alpha_2 m_i m_j + \alpha_3 n_i n_j), \\ \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3 &= k. \end{aligned} \quad (12)$$

Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда проинтегрировав (12) поперек переходного слоя, с учетом (8) получим соотношения в разрывах

$$\begin{aligned} -c([\sigma_1] l_i l_j + [\sigma_2] m_i m_j + [\sigma_3] n_i n_j) - \lambda \delta_{ij} [v_3] - \\ - \mu ([v_i] v_j + [v_j] v_i) + \theta_{ij} &= 0, \\ (\mu - \rho c^2) [v_i] + (\lambda + \mu) [v_3] v_i - \theta_{i3} &= 0, \\ \theta_{ij} = \lambda \Phi \delta_{ij} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 2 \mu \Phi (\alpha_1 l_i l_j + \alpha_2 m_i m_j + \alpha_3 n_i n_j), \\ \alpha_1 [\sigma_1] + \alpha_2 [\sigma_2] + \alpha_3 [\sigma_3] &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В (13)  $\Phi = \int_{-h}^h \Psi dx_3$  квадратными скобками обозначается разрыв некоторой величины  $[m] = m^+ - m^-$  на упругопластической волне, где  $m^+$  - значение переменной перед поверхностью разрыва,  $m^-$  - значение за поверхностью разрыва.

Система (13) является системой нелинейных уравнений и получение ее решений в принципе нетривиально. Однако, данную систему можно представить в виде множества систем линейных уравнений, причем каждая из таких линейных систем характеризуется определенным набором направляющих косинусов  $l_i, m_i, n_i$ . Именно этот набор направляющих косинусов и определяет возможность возникновения диссипативного разрыва. Ниже представлены решения системы (13), при этом в процессе решения было установлено существование продольных и комбинированных диссипативных разрывов. Для упрощения определяющих соотношений полагается, что  $l_2 = 0$ . Этого можно всегда добиться поворотом плоскости  $x_1 0 x_2$  вокруг оси  $x_3$ .

*Комбинированные разрывы.* Наиболее примечательным является случай комбинированных разрывов, когда разрыв только одной компоненты вектора скорости равен нулю. Для существования подобных разрывов необходимо, чтобы одно из главных направлений тензора напряжений было ортогонально нормали к поверхности разрыва.

Решение 1.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ n_1 & 0 & n_3 \end{pmatrix}$$

$$[v_2] = 0, \quad [v_3] = 1/2 \frac{[v_1](1 - 2l_1^2)}{l_1 l_3},$$

$$l_1^2 \neq 1/2, \quad \alpha_1 \neq \alpha_3.$$

$$\Phi = \frac{[v_3](\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + (\lambda + \mu)\alpha_3},$$

$$c^2 = \frac{(2\mu + 3\lambda)\alpha_2^2\mu}{\rho((\lambda + \mu)\alpha_3^2 + (-2\mu - 2\lambda)\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2(2\mu + 3\lambda) + (\lambda + \mu)\alpha_1^2)},$$

$$l_1^2 = \frac{-\lambda\alpha_2\alpha_3 + (-2\mu - 2\lambda)\alpha_3^2 + (2\mu + 2\lambda)\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\lambda\alpha_2 + (-2\mu - 3\lambda)\alpha_2^2}{-2((\lambda + \mu)\alpha_3^2 + (-2\mu - 2\lambda)\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2(2\mu + 3\lambda) + (\lambda + \mu)\alpha_1^2)}.$$

Решение 1а.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ n_1 & 0 & n_3 \end{pmatrix}$$

$$l_1^2 = 1/2, \quad \alpha_1 = \alpha_3, \quad [v_2] = 0, \quad [v_3] = 0,$$

$$\Phi = 0, \quad [\sigma_2] = 0, \quad [\sigma_1] = -[\sigma_3], \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Решение 2.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & l_3 \\ m_1 & 0 & m_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[v_2] = 0, \quad [v_3] = 1/2 \frac{[v_1](1 - 2l_1^2)}{l_1 l_3},$$

$$l_1^2 \neq 1/2, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

$$\Phi = \frac{[v_3](\lambda + \mu)}{\lambda\alpha_3 + (\lambda + \mu)\alpha_1 + (\lambda + \mu)\alpha_2},$$

$$c^2 = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_3^2\mu}{\rho((\lambda + \mu)\alpha_1^2 + (\lambda + \mu)\alpha_2^2 + (-2\lambda - 2\mu)\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3^2(3\lambda + 2\mu))},$$

$$l_1^2 = \frac{-\alpha_1\lambda\alpha_3 + \alpha_2\lambda\alpha_3 + (2\mu + 2\lambda)\alpha_2^2 + (-2\lambda - 2\mu)\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3^2(3\lambda + 2\mu)}{2((\lambda + \mu)\alpha_1^2 + (\lambda + \mu)\alpha_2^2 + (-2\lambda - 2\mu)\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3^2(3\lambda + 2\mu))}.$$

Решение 2а.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & l_3 \\ m_1 & 0 & m_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_1^2 = 1/2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad [v_2] = 0, \quad [v_3] = 0, \\ \Phi = 0, \quad [\sigma_3] = 0, \quad [\sigma_1] = -[\sigma_2], \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Решение 3.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & m_3 \\ 0 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

$$[v_1] = 0, \quad [v_3] = 1/2 \frac{[v_2](1 - 2n_2^2)}{n_2 n_3}, \\ n_2^2 \neq 1/2, \quad \alpha_2 \neq \alpha_3.$$

$$c^2 = \frac{(2\mu + 3\lambda)\alpha_1^2\mu}{\rho(\alpha_1^2(2\mu + 3\lambda) + (\lambda + \mu)\alpha_3^2 + (\lambda + \mu)\alpha_2^2 + (-2\mu - 2\lambda)\alpha_3\alpha_2)}, \\ \Phi = \frac{[v_2](\lambda + \mu)}{\alpha_1\lambda + (\lambda + \mu)\alpha_2 + (\lambda + \mu)\alpha_3}, \\ n_2^2 = \frac{-\alpha_3\alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda\alpha_2 + \alpha_1^2(2\mu + 3\lambda) + (2\lambda + 2\mu)\alpha_2^2 + (-2\mu - 2\lambda)\alpha_3\alpha_2}{2(\alpha_1^2(2\mu + 3\lambda) + (\lambda + \mu)\alpha_3^2 + (\lambda + \mu)\alpha_2^2 + (-2\mu - 2\lambda)\alpha_3\alpha_2)}.$$

Решение 3а.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & m_3 \\ 0 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

$$n_2^2 = 1/2, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad [v_1] = 0, \quad [v_3] = 0, \\ \Phi = 0, \quad [\sigma_1] = 0, \quad [\sigma_2] = -[\sigma_3], \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Решения 1а, 2а, 3а являются частными случаями решения системы определяющих соотношений и описывают собой поперечные бездиссипативные разрывы.

*Продольные разрывы* характеризуются тем, что разрыв только одной компоненты вектора скорости отличен от нуля. Коллинеарность одного из главных направлений тензора напряжений нормали к поверхности разрыва является необходимым условием существования подобных разрывов.

Решение 1.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m_1 & m_2 & 0 \\ n_1 & n_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[v_1] = 0, \quad [v_2] = 0.$$

$$\Phi = \frac{[v_3](2\mu\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\lambda)}{(2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2)\mu + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2\lambda}, \\ c^2 = 4 \frac{\mu((\alpha_2^2 + \alpha_3^2)\mu + (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\lambda)}{\rho((2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2)\mu + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2\lambda)}.$$

Где  $m_1, m_2, n_1, n_2$  – являются произвольными.

Решение 2.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[v_1] = 0, \quad [v_2] = 0.$$

$$\Phi = \frac{[v_3] ((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \lambda + 2 \mu \alpha_3)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 \lambda + (2 \alpha_3^2 + 2 \alpha_2^2 + 2 \alpha_1^2) \mu},$$

$$c^2 = 4 \frac{\mu ((\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) \lambda + (\alpha_2^2 + \alpha_1^2) \mu)}{\rho ((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 \lambda + (2 \alpha_3^2 + 2 \alpha_2^2 + 2 \alpha_1^2) \mu)}.$$

Решение 3.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[v_1] = 0, \quad [v_2] = 0.$$

$$\Phi = \frac{[v_3] ((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \lambda + 2 \mu \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 \lambda + (2 \alpha_2^2 + 2 \alpha_3^2 + 2 \alpha_1^2) \mu},$$

$$c^2 = 4 \frac{\mu ((\alpha_3^2 + \alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_3) \lambda + (\alpha_3^2 + \alpha_1^2) \mu)}{\rho ((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 \lambda + (2 \alpha_2^2 + 2 \alpha_3^2 + 2 \alpha_1^2) \mu)}.$$

**3. Диссипативные разрывы при условии пластичности, определяемом ребром поверхности текучести.** В этом случае условие пластичности определяется соотношением (7). Из ассоциированного закона пластического течения (4) получим

$$\varepsilon_1^p = \alpha_1 \Psi_1 + \beta_1 \Psi_2, \quad \varepsilon_2^p = \alpha_2 \Psi_1 + \beta_2 \Psi_2, \quad \varepsilon_3^p = \alpha_3 \Psi_1 + \beta_3 \Psi_2. \quad (14)$$

Из соотношений (1), (2), (5), (7), (9), (10) и (11), в условиях переходного слоя (8) можно вывести систему соотношений, описывающую необратимое деформирование в случае, когда напряжения соответствуют ребру поверхности текучести

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 l_i l_j + \dot{\sigma}_2 m_i m_j + \dot{\sigma}_3 n_i n_j - \lambda \delta_{ij} v_{3,3} - \mu (v_i, v_j + v_{j,3} v_i) + \phi_{ij} &= 0, \\ (\mu - \rho c^2) v_{i,3} + (\lambda + \mu) v_{3,3} v_i - \phi_{i3} &= 0, \\ \phi_{ij} = \lambda \delta_{ij} (\Psi_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \Psi_2 (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)) + \\ &+ 2 \mu \Psi_1 (\alpha_1 l_i l_j + \alpha_2 m_i m_j + \alpha_3 n_i n_j) + \\ &+ 2 \mu \Psi_2 (\beta_1 l_i l_j + \beta_2 m_i m_j + \beta_3 n_i n_j), \\ \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3 = k, \quad \beta_1 \sigma_1 + \beta_2 \sigma_2 + \beta_3 \sigma_3 = k. \end{aligned} \quad (15)$$

Проинтегрировав выражения (15) поперек переходного слоя, можно получить систему уравнений в разрывах, описывающую процессы на переходном слое

$$\begin{aligned} -c ([\sigma_1] l_i l_j + [\sigma_2] m_i m_j + [\sigma_3] n_i n_j) - \lambda \delta_{ij} [v_3] - \mu ([v_i] v_j + [v_j] v_i) + \eta_{ij} &= 0, \\ (\mu - \rho c^2) [v_i] + (\lambda + \mu) [v_3] v_i - \eta_{i3} &= 0, \\ \eta_{ij} = \lambda \delta_{ij} (\Phi_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \Phi_2 (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)) + \\ &+ 2 \mu \Phi_1 (\alpha_1 l_i l_j + \alpha_2 m_i m_j + \alpha_3 n_i n_j) + \\ &+ 2 \mu \Phi_2 (\beta_1 l_i l_j + \beta_2 m_i m_j + \beta_3 n_i n_j), \\ \alpha_1 [\sigma_1] + \alpha_2 [\sigma_2] + \alpha_3 [\sigma_3] = 0, \quad \beta_1 [\sigma_1] + \beta_2 [\sigma_2] + \beta_3 [\sigma_3] &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\Phi_1 = \int_{-h}^h \Psi_1 dx_3$ ,  $\Phi_2 = \int_{-h}^h \Psi_2 dx_3$ .

*Продольные разрывы.* Ниже представлены решения системы (16), определяющие собой продольные разрывы. Условием существования подобных решений является коллинеарность нормали к поверхности разрыва одного из главных направлений тензора напряжений.

Решение 1.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m_1 & m_2 & 0 \\ n_1 & n_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[v_1] = 0, \quad [v_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = A_2/A_3, \quad \Phi_2 = A_4/A_3, \quad c^2 = A_5/(\rho A_1).$$

$$\begin{aligned} A_1 = & \beta_2^2 \alpha_3 \alpha_1 \lambda + \beta_1 \lambda \beta_2 \alpha_3^2 - \beta_2 \alpha_3 \lambda \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2^2 \beta_3 \beta_1 \lambda - 2 \beta_3 \alpha_1 \beta_1 \mu \alpha_3 - \\ & - 2 \beta_3 \lambda \alpha_1 \beta_1 \alpha_3 + \alpha_2 \beta_1^2 \alpha_3 \lambda + \alpha_2 \beta_3^2 \alpha_1 \lambda - \beta_3 \alpha_1 \beta_2 \lambda \alpha_3 + \beta_2^2 \alpha_3^2 \lambda + \\ & + \beta_1^2 \alpha_3^2 \lambda + \beta_2^2 \lambda \alpha_1^2 + \beta_3^2 \lambda \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \beta_3^2 \lambda + \alpha_2^2 \beta_1^2 \lambda + \beta_2^2 \alpha_3^2 \mu + \\ & + \beta_1^2 \alpha_3^2 \mu + \beta_2^2 \mu \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \beta_3^2 \mu + \alpha_2^2 \beta_1^2 \mu + \beta_3^2 \mu \alpha_1^2 + \beta_3 \lambda \alpha_1^2 \beta_2 - \\ & - 2 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1 \beta_1 \lambda - 2 \alpha_2 \beta_2 \mu \alpha_1 \beta_1 - 2 \alpha_2 \beta_3 \beta_2 \mu \alpha_3 - \alpha_2 \beta_3 \beta_1 \lambda \alpha_3 - \\ & - \alpha_2 \beta_3 \lambda \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_1 \lambda \beta_2 \alpha_3 - 2 \alpha_2 \beta_3 \lambda \beta_2 \alpha_3 - \alpha_2 \beta_3 \alpha_1 \beta_2 \lambda, \\ A_2 = & (2 \alpha_1 \beta_3^2 \lambda - 2 \beta_1 \alpha_2 \lambda \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \lambda \beta_3 + 2 \alpha_1 \beta_2^2 \lambda + 2 \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_3 - \\ & - \beta_2 \alpha_3 \lambda \beta_1 + \beta_2^2 \alpha_3 \lambda - 2 \alpha_2 \beta_2 \mu \beta_1 + 2 \beta_3^2 \mu \alpha_1 - 2 \beta_3 \mu \beta_1 \alpha_3 - \\ & - \beta_2 \alpha_3 \lambda \beta_3 + 2 \beta_2^2 \mu \alpha_1 + \alpha_2 \beta_3^2 \lambda - 2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_3 - \beta_2 \alpha_2 \lambda \beta_3) [v_3], \\ A_3 = & 2 \beta_2^2 \alpha_3 \alpha_1 \lambda + 2 \beta_1 \lambda \beta_2 \alpha_3^2 - 2 \beta_2 \alpha_3 \lambda \alpha_1 \beta_1 + 2 \alpha_2^2 \beta_3 \beta_1 \lambda - 4 \beta_3 \alpha_1 \beta_1 \mu \alpha_3 - \\ & - 4 \beta_3 \lambda \alpha_1 \beta_1 \alpha_3 + 2 \alpha_2 \beta_1^2 \alpha_3 \lambda + 2 \alpha_2 \beta_3^2 \alpha_1 \lambda - 2 \beta_3 \alpha_1 \beta_2 \lambda \alpha_3 + 2 \beta_2^2 \alpha_3^2 \lambda + \\ & + 2 \beta_1^2 \alpha_3^2 \lambda + 2 \beta_2^2 \lambda \alpha_1^2 + 2 \beta_3^2 \lambda \alpha_1^2 + 2 \alpha_2^2 \beta_3^2 \lambda + 2 \alpha_2^2 \beta_1^2 \lambda + \\ & + 2 \beta_2^2 \alpha_3^2 \mu + 2 \beta_1^2 \alpha_3^2 \mu + 2 \beta_2^2 \mu \alpha_1^2 + 2 \alpha_2^2 \beta_3^2 \mu + 2 \alpha_2^2 \beta_1^2 \mu + \\ & + 2 \beta_3^2 \mu \alpha_1^2 + 2 \beta_3 \lambda \alpha_1^2 \beta_2 - 4 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1 \beta_1 \lambda - 4 \alpha_2 \beta_2 \mu \alpha_1 \beta_1 - \\ & - 4 \alpha_2 \beta_3 \beta_2 \mu \alpha_3 - 2 \alpha_2 \beta_3 \beta_1 \lambda \alpha_3 - 2 \alpha_2 \beta_3 \lambda \alpha_1 \beta_1 - \\ & - 2 \alpha_2 \beta_1 \lambda \beta_2 \alpha_3 - 4 \alpha_2 \beta_3 \lambda \beta_2 \alpha_3 - 2 \alpha_2 \beta_3 \alpha_1 \beta_2 \lambda, \\ A_4 = & - (2 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \mu + \alpha_1 \beta_2 \lambda \alpha_3 + 2 \alpha_1 \beta_2 \lambda \alpha_2 + 2 \alpha_1 \beta_3 \alpha_3 \mu + 2 \alpha_1 \beta_3 \lambda \alpha_3 + \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 \lambda - 2 \beta_1 \mu \alpha_2^2 - 2 \beta_1 \mu \alpha_3^2 - 2 \beta_1 \alpha_2 \lambda \alpha_3 - 2 \beta_1 \alpha_2^2 \lambda - \\ & - 2 \beta_1 \alpha_3^2 \lambda + \beta_2 \alpha_2 \lambda \alpha_3 - \beta_2 \alpha_3^2 \lambda - \alpha_2^2 \beta_3 \lambda + \alpha_2 \beta_3 \lambda \alpha_3) [v_3], \\ A_5 = & \mu (2 \alpha_2^2 \beta_3^2 \mu - 6 \alpha_2 \beta_3 \lambda \beta_2 \alpha_3 + 3 \alpha_2^2 \beta_3^2 \lambda + 2 \beta_2^2 \alpha_3^2 \mu - 4 \alpha_2 \beta_3 \beta_2 \mu \alpha_3 + \\ & + 3 \beta_2^2 \alpha_3^2 \lambda). \end{aligned}$$

Решение 2.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[v_1] = 0, \quad [v_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = A_7/A_8, \quad \Phi_2 = A_9/A_8, \quad c^2 = A_{10}/(\rho A_6).$$

$$\begin{aligned}
A_6 &= \alpha_1^2 \lambda \beta_3 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2^2 \lambda \alpha_3 + \alpha_1 \beta_3^2 \lambda \alpha_2 - 2 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \alpha_2 \mu - \alpha_1 \beta_2 \beta_3 \lambda \alpha_2 - \\
&\quad - \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_3 \alpha_3 - \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \lambda \beta_3 - 2 \alpha_1 \beta_1 \alpha_3 \beta_3 \lambda - 2 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \lambda \alpha_2 - \\
&\quad - \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \lambda \alpha_3 - 2 \alpha_1 \mu \beta_1 \alpha_3 \beta_3 + \beta_2^2 \lambda \alpha_3^2 + \mu \beta_2^2 \alpha_3^2 + \beta_1^2 \mu \alpha_3^2 + \\
&\quad + \alpha_2^2 \beta_1^2 \lambda + \alpha_2^2 \beta_1^2 \mu + \alpha_2^2 \beta_3^2 \lambda + \alpha_2^2 \beta_3^2 \mu + \alpha_2^2 \beta_3 \lambda \beta_1 + \\
&\quad + \alpha_2 \beta_1^2 \alpha_3 \lambda - \alpha_2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_3 - \alpha_2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_2 - 2 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \mu \beta_3 - 2 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \lambda \beta_3 + \\
&\quad + \alpha_1^2 \beta_2^2 \lambda + \alpha_1^2 \beta_3^2 \mu + \beta_1 \beta_2 \lambda \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \beta_3^2 \lambda + \alpha_1^2 \beta_2^2 \mu + \beta_1^2 \lambda \alpha_3^2, \\
A_7 &= - [v_3] (-\alpha_1 \beta_2^2 \lambda + \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_1 + 2 \alpha_1 \beta_1 \mu \beta_3 + 2 \alpha_1 \beta_3 \lambda \beta_1 - \\
&\quad - 2 \mu \beta_2^2 \alpha_3 - 2 \beta_2^2 \alpha_3 \lambda + 2 \alpha_2 \beta_2 \mu \beta_3 + 2 \alpha_2 \beta_3 \lambda \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \lambda \beta_2 - \\
&\quad - 2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_2 - 2 \beta_1^2 \mu \alpha_3 - 2 \beta_1^2 \alpha_3 \lambda + \beta_1 \alpha_2 \lambda \beta_3 - \beta_1^2 \alpha_2 \lambda), \\
A_8 &= 2 \alpha_1^2 \lambda \beta_3 \beta_2 + 2 \alpha_1 \beta_2^2 \lambda \alpha_3 + 2 \alpha_1 \beta_3^2 \lambda \alpha_2 - 4 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \alpha_2 \mu - 2 \alpha_1 \beta_2 \beta_3 \lambda \alpha_2 - \\
&\quad - 2 \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_3 \alpha_3 - 2 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \lambda \beta_3 - 4 \alpha_1 \beta_1 \alpha_3 \beta_3 \lambda - 4 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \lambda \alpha_2 - \\
&\quad - 2 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \lambda \alpha_3 - 4 \alpha_1 \mu \beta_1 \alpha_3 \beta_3 + 2 \beta_2^2 \lambda \alpha_3^2 + 2 \mu \beta_2^2 \alpha_3^2 + 2 \beta_1^2 \mu \alpha_3^2 + \\
&\quad + 2 \alpha_2^2 \beta_1^2 \lambda + 2 \alpha_2^2 \beta_1^2 \mu + 2 \alpha_2^2 \beta_3^2 \lambda + 2 \alpha_2^2 \beta_3^2 \mu + 2 \alpha_2^2 \beta_3 \lambda \beta_1 + \\
&\quad + 2 \alpha_2 \beta_1^2 \alpha_3 \lambda - 2 \alpha_2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_3 - 2 \alpha_2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_2 - 4 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \mu \beta_3 - \\
&\quad - 4 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \lambda \beta_3 + 2 \alpha_1^2 \beta_2^2 \lambda + 2 \alpha_1^2 \beta_3^2 \mu + 2 \beta_1 \beta_2 \lambda \alpha_3^2 + \\
&\quad + 2 \alpha_1^2 \beta_3^2 \lambda + 2 \alpha_1^2 \beta_2^2 \mu + 2 \beta_1^2 \lambda \alpha_3^2, \\
A_9 &= (\alpha_1^2 \beta_2 \lambda + 2 \alpha_1^2 \mu \beta_3 + 2 \alpha_1^2 \beta_3 \lambda - \beta_1 \alpha_2 \lambda \alpha_1 - 2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \alpha_1 - \\
&\quad - 2 \alpha_1 \beta_1 \alpha_3 \mu - \alpha_1 \beta_2 \lambda \alpha_3 - \alpha_1 \beta_2 \lambda \alpha_2 + 2 \alpha_1 \beta_3 \lambda \alpha_2 + \beta_1 \alpha_2^2 \lambda - \beta_1 \alpha_2 \lambda \alpha_3 - \\
&\quad - 2 \beta_2 \lambda \alpha_2 \alpha_3 - 2 \beta_2 \alpha_2 \mu \alpha_3 + 2 \alpha_2^2 \beta_3 \lambda + 2 \alpha_2^2 \mu \beta_3) [v_3], \\
A_{10} &= \mu (2 \alpha_2^2 \beta_1^2 \mu - 6 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \lambda \alpha_2 - 4 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \alpha_2 \mu + 3 \alpha_1^2 \beta_2^2 \lambda + \\
&\quad + 3 \alpha_2^2 \beta_1^2 \lambda + 2 \alpha_1^2 \beta_2^2 \mu).
\end{aligned}$$

Решение 3.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[v_1] = 0, \quad [v_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = A_{12}/A_{13}, \quad \Phi_2 = A_{14}/A_{13}, \quad c^2 = A_{15}/(\rho A_{11}).$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \alpha_1^2 \beta_2^2 \mu + \alpha_2^2 \beta_1^2 \lambda + \alpha_2^2 \beta_3^2 \mu + \alpha_2^2 \beta_3^2 \lambda + \beta_1 \beta_2 \alpha_3^2 \lambda + \alpha_2^2 \beta_3 \lambda \beta_1 + \\
&\quad + \alpha_2 \beta_1^2 \alpha_3 \lambda + \alpha_1^2 \beta_2^2 \lambda + \beta_2^2 \lambda \alpha_3^2 + \mu \beta_2^2 \alpha_3^2 + \beta_1^2 \mu \alpha_3^2 + \beta_1^2 \lambda \alpha_3^2 + \\
&\quad + \alpha_1^2 \beta_3^2 \mu - \alpha_2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_3 - 2 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \lambda \beta_3 + \alpha_2^2 \beta_1^2 \mu - \\
&\quad - 2 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \mu \beta_3 - 2 \alpha_1 \beta_2 \mu \beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_3 \alpha_3 - \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_3 \alpha_2 - \\
&\quad - 2 \alpha_1 \beta_1 \beta_3 \alpha_3 \mu - 2 \alpha_1 \beta_1 \lambda \beta_3 \alpha_3 - \alpha_1 \beta_1 \beta_3 \lambda \alpha_2 - 2 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \lambda \alpha_2 - \\
&\quad - \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \lambda \alpha_3 + \alpha_1^2 \beta_3^2 \lambda + \alpha_1^2 \lambda \beta_3 \beta_2 + \alpha_1 \lambda \alpha_3 \beta_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_3^2 \lambda,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} &= -[v_3](-\beta_1^2 \alpha_3 \lambda - \alpha_1 \beta_3^2 \lambda + 2 \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \lambda - 2 \alpha_2 \beta_3^2 \lambda - 2 \beta_1^2 \alpha_2 \mu - \\
&\quad - 2 \beta_1 \alpha_2 \lambda \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_2 + 2 \beta_2 \alpha_3 \lambda \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_3 + 2 \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \mu - \\
&\quad - 2 \beta_1^2 \alpha_2 \lambda - 2 \alpha_2 \beta_3^2 \mu + 2 \beta_2 \alpha_3 \mu \beta_3 + \alpha_1 \beta_3 \lambda \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_3), \\
A_{13} &= 2 \alpha_1^2 \beta_2^2 \mu + 2 \alpha_2^2 \beta_1^2 \lambda + 2 \alpha_2^2 \beta_3^2 \mu + 2 \alpha_2^2 \beta_3^2 \lambda + 2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3^2 \lambda + \\
&\quad + 2 \alpha_2^2 \beta_3 \lambda \beta_1 + 2 \alpha_2 \beta_1^2 \alpha_3 \lambda + 2 \alpha_1^2 \beta_2^2 \lambda + 2 \beta_2^2 \lambda \alpha_3^2 + 2 \mu \beta_2^2 \alpha_3^2 + \\
&\quad + 2 \beta_1^2 \mu \alpha_3^2 + 2 \beta_1^2 \lambda \alpha_3^2 + 2 \alpha_1^2 \beta_3^2 \mu - 2 \alpha_2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_2 - \\
&\quad - 2 \alpha_2 \beta_1 \alpha_3 \lambda \beta_3 - 4 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \lambda \beta_3 - 4 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \mu \beta_3 + 2 \alpha_2^2 \beta_1^2 \mu - \\
&\quad - 4 \alpha_1 \beta_2 \mu \beta_1 \alpha_2 - 2 \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_3 \alpha_3 - 2 \alpha_1 \beta_2 \lambda \beta_3 \alpha_2 - 4 \alpha_1 \beta_1 \beta_3 \alpha_3 \mu - \\
&\quad - 4 \alpha_1 \beta_1 \lambda \beta_3 \alpha_3 - 2 \alpha_1 \beta_1 \beta_3 \lambda \alpha_2 - 4 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \lambda \alpha_2 - 2 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \lambda \alpha_3 + \\
&\quad + 2 \alpha_1^2 \beta_3^2 \lambda + 2 \alpha_1^2 \lambda \beta_3 \beta_2 + 2 \alpha_1 \lambda \alpha_3 \beta_2^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_3^2 \lambda, \\
A_{14} &= (2 \alpha_1^2 \beta_2 \mu + \alpha_1^2 \lambda \beta_3 - \alpha_1 \beta_1 \alpha_3 \lambda - 2 \beta_1 \alpha_2 \lambda \alpha_1 - 2 \beta_1 \alpha_2 \mu \alpha_1 + \\
&\quad + 2 \alpha_1^2 \beta_2 \lambda + 2 \alpha_1 \beta_2 \lambda \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_3 \beta_3 \lambda - \alpha_1 \beta_3 \lambda \alpha_2 + \beta_1 \lambda \alpha_3^2 - \\
&\quad - \beta_1 \alpha_2 \lambda \alpha_3 + 2 \beta_2 \alpha_3^2 \lambda + 2 \beta_2 \alpha_3^2 \mu - 2 \alpha_2 \beta_3 \lambda \alpha_3 - 2 \alpha_2 \beta_3 \mu \alpha_3) [v_3], \\
A_{15} &= \mu (2 \beta_1^2 \mu \alpha_3^2 + 2 \alpha_1^2 \beta_3^2 \mu + 3 \beta_1^2 \lambda \alpha_3^2 + 3 \alpha_1^2 \beta_3^2 \lambda - \\
&\quad - 4 \alpha_1 \beta_1 \beta_3 \alpha_3 \mu - 6 \alpha_1 \beta_1 \lambda \beta_3 \alpha_3).
\end{aligned}$$

**4. Частные случаи.** Ниже представлены частные решения системы уравнений (16), описывающие поперечные диссипативные разрывы. Отличительной особенностью этих решений является дополнительное ограничение на константы  $(\alpha_i, \beta_i)$  из условия пластичности (7).

Решение 1. Данное решение справедливо, только если выполняется соотношение

$$\alpha_2(\beta_3 - \beta_1) + \beta_2(\alpha_1 - \alpha_3) = 0.$$

$$[v_2] = 0, \quad [v_3] = 0, \quad l_1^2 = 1/2.$$

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ n_1 & 1 & n_3 \end{pmatrix}$$

При этом в случае, если  $l_1 l_3 = -1/2$ , выполняются следующие соотношения:

$$\Phi_1 = A_{17}/A_{16}, \quad \Phi_2 = A_{18}/A_{16}, \quad c^2 = A_{19}/(\rho A_{16}).$$

Если же верно равенство  $l_1 l_3 = 1/2$ , то итоговые выражения будут такими:

$$\Phi_1 = -A_{17}/A_{16}, \quad \Phi_2 = -A_{18}/A_{16}, \quad c^2 = A_{19}/(\rho A_{16}).$$

$$\begin{aligned}
A_{16} &= 2 \mu \beta_3 \alpha_2^2 - 2 \alpha_2 \mu \beta_2 \alpha_3 + 2 \mu \beta_1 \alpha_2^2 - 2 \alpha_1 \mu \beta_1 \alpha_3 + 2 \beta_1 \alpha_3^2 \mu - \\
&\quad - 2 \alpha_1 \mu \beta_3 \alpha_3 + \alpha_1^2 \lambda \beta_2 + 2 \alpha_1^2 \lambda \beta_3 - 2 \alpha_2 \mu \beta_2 \alpha_1 + 2 \alpha_1^2 \mu \beta_3 + \\
&\quad + 3 \lambda \beta_1 \alpha_2^2 + \lambda \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 + 3 \lambda \beta_3 \alpha_2^2 - 3 \alpha_2 \lambda \beta_2 \alpha_1 - 2 \alpha_1 \lambda \beta_2 \alpha_3 + \\
&\quad + \lambda \beta_2 \alpha_3^2 - 2 \lambda \alpha_1 \beta_3 \alpha_3 + \alpha_1 \beta_3 \lambda \alpha_2 - 3 \alpha_2 \lambda \beta_2 \alpha_3 - \alpha_1 \beta_1 \lambda \alpha_2 - \\
&\quad - 2 \alpha_1 \lambda \beta_1 \alpha_3 + 2 \lambda \beta_1 \alpha_3^2 - \lambda \alpha_2 \alpha_3 \beta_3, \\
A_{17} &= -[v_1] (\alpha_1 \lambda \beta_2 - \lambda \beta_2 \alpha_3 + \alpha_1 \lambda \beta_3 - \lambda \beta_3 \alpha_3 + \alpha_1 \lambda \beta_1 - \lambda \beta_1 \alpha_3 + \\
&\quad + \alpha_1 \mu \beta_1 - \mu \beta_1 \alpha_3 + \alpha_1 \mu \beta_3 - \mu \beta_3 \alpha_3),
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
A_{18} &= (\alpha_1 - \alpha_3) [v_1] (\lambda \alpha_1 + \lambda \alpha_2 + \lambda \alpha_3 + \mu \alpha_1 + \mu \alpha_3), \\
A_{19} &= -\mu \alpha_2 (-3 \alpha_2 \lambda \beta_1 + 2 \beta_2 \mu \alpha_1 + 2 \beta_2 \mu \alpha_3 + 3 \alpha_1 \lambda \beta_2 + \\
&\quad + 3 \lambda \beta_2 \alpha_3 - 2 \alpha_2 \mu \beta_3 - 2 \alpha_2 \mu \beta_1 - 3 \alpha_2 \lambda \beta_3).
\end{aligned}$$

Решение 2.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & m_3 \\ 0 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[v_1] &= 0, \quad [v_3] = 0, \quad n_2^2 = 1/2, \\
\alpha_1(\beta_2 - \beta_3) + \beta_1(\alpha_3 - \alpha_2) &= 0,
\end{aligned}$$

В случае, если  $n_2 n_3 = -1/2$ , выполняются следующие соотношения:

$$\Phi_1 = A_{21}/A_{20}, \quad \Phi_2 = A_{22}/A_{20}, \quad c^2 = A_{23}/(\rho A_{20}).$$

Если же верно равенство  $n_2 n_3 = 1/2$ , то итоговые выражения будут следующими:

$$\Phi_1 = -A_{21}/A_{20}, \quad \Phi_2 = -A_{22}/A_{20}, \quad c^2 = A_{23}/(\rho A_{20}).$$

$$\begin{aligned}
A_{20} &= -2 \beta_2 \alpha_2 \lambda \alpha_3 - 2 \beta_3 \alpha_2 \lambda \alpha_3 - 3 \alpha_1 \lambda \beta_1 \alpha_3 + \beta_2 \alpha_1 \lambda \alpha_3 + 3 \lambda \beta_3 \alpha_1^2 - \\
&\quad - 2 \alpha_2 \lambda \beta_1 \alpha_3 + 2 \lambda \beta_3 \alpha_2^2 - \beta_2 \alpha_1 \lambda \alpha_2 - \beta_3 \alpha_1 \lambda \alpha_3 + \lambda \beta_1 \alpha_2^2 - \\
&\quad - 3 \alpha_1 \lambda \beta_1 \alpha_2 + \lambda \beta_1 \alpha_3^2 + 2 \beta_2 \mu \alpha_1^2 + 3 \lambda \beta_2 \alpha_1^2 + 2 \alpha_3^2 \beta_2 \mu + \\
&\quad + 2 \beta_3 \mu \alpha_1^2 + 2 \lambda \beta_2 \alpha_3^2 + 2 \alpha_2^2 \beta_3 \mu + \beta_3 \alpha_1 \lambda \alpha_2 - 2 \alpha_2 \beta_3 \mu \alpha_3 - \\
&\quad - 2 \alpha_1 \beta_1 \mu \alpha_2 - 2 \alpha_1 \beta_1 \mu \alpha_3 - 2 \alpha_2 \mu \beta_2 \alpha_3, \\
A_{21} &= -[v_2] (\alpha_3 \mu \beta_2 + \alpha_3 \mu \beta_3 - \alpha_2 \mu \beta_2 - \alpha_2 \mu \beta_3 + \alpha_3 \lambda \beta_2 - \\
&\quad - \alpha_2 \lambda \beta_1 - \alpha_2 \lambda \beta_3 + \alpha_3 \lambda \beta_3 - \alpha_2 \lambda \beta_2 + \alpha_3 \lambda \beta_1), \\
A_{22} &= (-\alpha_2 + \alpha_3) [v_2] (\lambda \alpha_1 + \lambda \alpha_2 + \lambda \alpha_3 + \mu \alpha_2 + \mu \alpha_3), \\
A_{23} &= \mu \alpha_1 (2 \alpha_1 \mu \beta_3 - 3 \alpha_2 \lambda \beta_1 - 3 \alpha_3 \lambda \beta_1 + 3 \alpha_1 \lambda \beta_2 + \\
&\quad + 2 \alpha_1 \mu \beta_2 + 3 \alpha_1 \lambda \beta_3 - 2 \beta_1 \alpha_2 \mu - 2 \beta_1 \alpha_3 \mu).
\end{aligned}$$

Решение 3.

$$\begin{pmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & l_3 \\ m_1 & 0 & m_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[v_2] &= 0, \quad [v_3] = 0, \quad l_1^2 = 1/2, \\
\beta_3(\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_3(\beta_2 - \beta_1) &= 0.
\end{aligned}$$

В случае, если  $l_1 l_3 = -1/2$ , выполняются следующие соотношения:

$$\Phi_1 = A_{25}/A_{24}, \quad \Phi_2 = A_{26}/A_{24}, \quad c^2 = A_{27}/(\rho A_{24}).$$

Если же верно равенство  $l_1 l_3 = 1/2$ , то итоговые выражения будут такими:

$$\Phi_1 = -A_{25}/A_{24}, \quad \Phi_2 = -A_{26}/A_{24}, \quad c^2 = A_{27}/(\rho A_{24}).$$

$$\begin{aligned}
A_{24} &= \alpha_1^2 \lambda \beta_3 - 2 \alpha_1 \mu \beta_2 \alpha_2 + 3 \lambda \beta_2 \alpha_3^2 - 2 \alpha_3 \mu \beta_3 \alpha_1 - 2 \lambda \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 + \\
&\quad + 2 \alpha_1^2 \mu \beta_2 - 3 \alpha_3 \lambda \beta_3 \alpha_1 + 2 \alpha_1^2 \lambda \beta_2 + \lambda \beta_3 \alpha_2^2 - 2 \alpha_3 \mu \beta_3 \alpha_2 - \\
&\quad - \lambda \alpha_3 \alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 \lambda \alpha_3 + 2 \mu \beta_2 \alpha_3^2 + 3 \lambda \beta_1 \alpha_3^2 + \beta_1 \lambda \alpha_3 \alpha_2 - \\
&\quad - \alpha_1 \beta_1 \lambda \alpha_3 + 2 \beta_1 \lambda \alpha_2^2 - 2 \alpha_1 \lambda \beta_1 \alpha_2 - 2 \alpha_1 \lambda \beta_3 \alpha_2 + 2 \mu \beta_1 \alpha_3^2 - \\
&\quad - 3 \alpha_3 \lambda \beta_3 \alpha_2 - 2 \alpha_1 \mu \beta_1 \alpha_2 + 2 \beta_1 \alpha_2^2 \mu, \\
A_{25} &= - [v_1] (\alpha_1 \lambda \beta_2 - \lambda \beta_2 \alpha_2 + \alpha_1 \lambda \beta_3 - \lambda \beta_3 \alpha_2 + \alpha_1 \lambda \beta_1 - \lambda \beta_1 \alpha_2 + \\
&\quad + \alpha_1 \mu \beta_1 - \mu \beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \mu \beta_2 - \mu \beta_2 \alpha_2), \\
A_{26} &= (\alpha_1 - \alpha_2) [v_1] (\lambda \alpha_1 + \lambda \alpha_2 + \lambda \alpha_3 + \mu \alpha_1 + \mu \alpha_2), \\
A_{27} &= - \mu \alpha_3 (-3 \alpha_3 \lambda \beta_1 + 2 \beta_3 \mu \alpha_1 + 2 \beta_3 \mu \alpha_2 + 3 \alpha_1 \lambda \beta_3 + 3 \lambda \beta_3 \alpha_2 - \\
&\quad - 2 \mu \beta_2 \alpha_3 - 2 \mu \beta_1 \alpha_3 - 3 \alpha_3 \lambda \beta_2).
\end{aligned}$$

**5. Диссипативные разрывы при условии пластичности Кулона–Мора.** Решения, полученные в пунктах 2 и 3, являются соотношениями относительно произвольного кусочно-линейного условия пластичности и зависят от неопределенных коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ . Для получения решений, соответствующих желаемому условию пластичности, необходимо конкретизировать эти коэффициенты.

В качестве примера применения математической модели, представленной в данной статье, определим скорости распространения диссипативных разрывов при условии пластичности Кулона–Мора

$$\frac{1}{2} \max_i |\sigma_i - \sigma_j| + q \sigma = k. \quad (17)$$

Соотношение (17) – это пирамида в пространстве главных напряжений, ее основанием является шестиугольник Треска. Данная пирамида определяет собой пластически сжимаемый материал.  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ ;  $q$  – константа среды, отвечающая за пластическую сжимаемость среды.

*Разрывы в условиях текучести, соответствующих грани пирамиды Кулона–Мора.* Рассмотрим одну из граней пирамиды Кулона–Мора

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{q}{3}\right) \sigma_1 + \frac{q}{3} \sigma_2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{q}{3}\right) \sigma_3 = k. \quad (18)$$

На других гранях решения будут идентичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

Из условия (18) следует, что  $\alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{q}{3}$ ,  $\alpha_2 = \frac{q}{3}$ ,  $\alpha_3 = -\frac{1}{2} + \frac{q}{3}$ . При заданных коэффициентах математическая модель, представленная в данной статье, определяет следующий набор возможных скоростей распространения упругопластических волн.

Продольные разрывы:

$$\begin{aligned}
c^2 &= 1/3 \frac{\mu (8 \mu q^2 - 12 \mu q + 9 \mu + 12 \lambda q^2 - 18 \lambda q + 9 \lambda)}{\rho (2 \mu q^2 + 3 \mu + 3 \lambda q^2)}, \\
c^2 &= 1/3 \frac{\mu (12 \lambda q^2 + 18 \lambda q + 9 \lambda + 8 \mu q^2 + 12 \mu q + 9 \mu)}{\rho (2 \mu q^2 + 3 \mu + 3 \lambda q^2)}, \\
c^2 &= 1/3 \frac{\mu (12 \lambda q^2 + 9 \lambda + 8 \mu q^2 + 18 \mu)}{\rho (2 \mu q^2 + 3 \mu + 3 \lambda q^2)}.
\end{aligned}$$

В случае исключения пластической сжимаемости ( $q = 0$ ) получим соотношения для скоростей распространения поверхности разрывов, известные в классической теории

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c^2 = \frac{\lambda + \mu}{\rho}.$$

Комбинированные разрывы:

$$c^2 = \frac{(2\mu + 3\lambda)(2q + 3)^2 \mu}{\rho(8\mu q^2 + 12\lambda q^2 + 24\mu q + 36\lambda q + 27\mu + 36\lambda)},$$

$$c^2 = \frac{(2\mu + 3\lambda)(2q - 3)^2 \mu}{\rho(12\lambda q^2 - 36\lambda q + 36\lambda + 8\mu q^2 - 24\mu q + 27\mu)}.$$

Если в данных соотношениях исключить пластическую сжимаемость ( $q = 0$ ), то получим значение скорости распространения поверхности разрывов, ранее в теории неизвестное

$$c^2 = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\rho(4\lambda + 3\mu)}.$$

Имеется еще одно особое решение, описывающее комбинированный разрыв

$$c^2 = \frac{(2\mu + 3\lambda)q^2\mu}{\rho(3\lambda q^2 + 9\lambda + 2\mu q^2 + 9\mu)}, \quad \Phi = 3 \frac{[v_3](\lambda + \mu)}{q(2\mu + 3\lambda)}.$$

Заметим, что отмечаемая поверхность разрыва невозможна при исключении пластической сжимаемости.

*Разрывы в условиях текучести, соответствующих ребру пирамиды Кулона–Мора.* Пусть ребро пирамиды Кулона–Мора определяется следующим соотношением:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + q\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + q\sigma = k. \quad (19)$$

При этом на других ребрах решения будут идентичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

Определив из выражения (19) коэффициенты для соотношений (7), получим набор решений, описывающих только продольные разрывы.

$$c^2 = 1/3 \frac{\mu(48q^2\lambda + 18\mu - 48\mu q + 32\mu q^2 + 27\lambda - 72\lambda q)}{\rho(9\mu + 8\mu q^2 + 12q^2\lambda)},$$

$$c^2 = 1/3 \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)(3 + 2q)^2}{\rho(9\mu + 8\mu q^2 + 12q^2\lambda)}.$$

Если в данных соотношениях исключить пластическую сжимаемость, то получим выражение для скорости распространения поверхности разрывов, хорошо известное в литературе ([1, 3, 11])

$$c^2 = \frac{3\lambda + 2\mu}{3\rho}.$$

Отметим, что учет пластической сжимаемости приводит к уточнениям для скоростей продвижения поверхностей разрывов, а также увеличивает количество возможных разрывов, распространяющихся с разными скоростями. То есть, если в пластически несжимаемой среде возникает одна поверхность разрыва, то учет пластической сжимаемости приводит к возникновению нескольких разрывов с разными скоростями распространения.

**Закключение.** В рамках математической модели, рассмотренной в данной статье, изучены возможные диссипативные разрывы, соответствующие грани и ребру поверхности текучести, определяемой произвольным кусочно-линейным условием пластичности. Определены условия существования упругопластических волн и вычислены скорости их распространения.

Если условие пластичности соответствует грани поверхности текучести, возможно существования продольных и комбинированных диссипативных разрывов. В случае, когда

напряженно-деформированное состояние среды соответствует ребру поверхности текучести, возможно распространение продольных и поперечных упругоэластических волн. В случае продольных разрывов необходимым условием их существования является коллинеарность нормали к поверхности разрыва одному из главных направлений тензора напряжений. При распространении комбинированных или поперечных разрывов нормаль к поверхности разрыва должна быть ортогональна одному из главных направлений тензора напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Буренин, А. А.* Поверхность разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, В. А. Рычков // Проблемы механики сплошной среды : сб. науч. тр. : к 60-летию акад. В. П. Мясникова. – Владивосток, 1996. – С. 106–127.
- [2] *Буренин, А. А.* Об условиях существования поверхностей разрывов необратимых деформаций в упругоэластических средах / А. А. Буренин, О. В. Дудко, К. Т. Семенов // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 5. – С. 176–185.
- [3] *Быковцев, Г. И.* О распространении ударных волн в упругоэластических средах / Г. И. Быковцев, Л. Д. Кротова // ПММ. – 1972. – Т. 36, вып. 1. – С. 106–116.
- [4] *Быковцев, Г. И.* Определяющие уравнения пластически сжимаемых сред / Г. И. Быковцев, В. А. Рычков // Прикладные задачи механики деформируемых сред : сб. науч. тр. – Владивосток, 1991. – С. 49–56.
- [5] *Демьянов, Ю. А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках / Х. А. Рахматулин, Ю. А. Демьянов. – М. : Физматлит. – 1961. – 396 с.
- [6] *Друянов, Б. А.* О сильных разрывах в сжимаемых пластических средах / Б. А. Друянов // Реологические модели и процессы деформирования пористых, порошковых и композиционных материалов. – Киев, 1985. – С. 23–33.
- [7] *Ивлев, Д. Д.* К теории сжимаемых идеально пластических сред / Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова // ПММ. – 1963. – Т. 27, вып. 3. – С. 589–592.
- [8] *Кукудджанов, В. Н.* Нелинейные волны в упругоэластических средах / В. Н. Кукудджанов // Волновая динамика машин. – М., 1991. – С. 126–140.
- [9] *Лимарев, А. Е.* О распространении ударных волн в упругоэластической среде с упрочнением / А. Е. Лимарев, А. Д. Чернышов // ПММ. – 1971. – Т. 35, вып. 6. – С. 1083–1088.
- [10] *Мандель, Ж.* Пластические волны в неограниченной трехмерной среде / Ж. Мандель // Механика : сборник переводов. – 1963. – № 5. – С. 119–141.
- [11] *Садовский, В. М.* К теории распространения упругоэластических волн в упрочняющихся средах / В. М. Садовский. – Новосибирск : Изд-во СО РАН. – 1985. – 143 с.
- [12] *Садовский, В. М.* Разрывные решения в задачах динамики упругоэластических сред / В. М. Садовский. – М. : Наука : Физматлит. – 1997. – 208 с.

K. T. Semenov, E. A. Gerasimenko

**DISSIPATIVE RUPTURES IN PIECEWISE LINEAR CONDITIONS OF PLASTICITY**

*Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences*

**Abstract.** In this work the conditions of occurrence and the spreading regularity of the elastoplastic waves in the medium, satisfying any piecewise linear condition of plasticity in cases of a side and an edge of a surface of fluidity are considered. The received results are applied to the behaviour analysis of dissipative ruptures in plastically compressed medium described by the Kulon-Moor pyramid.

**Keywords:** piecewise linear conditions of plasticity, dissipative ruptures, plastic compressibility, the Kulon-Moor pyramid.

*Семенов Кирилл Тихонович*

*старший инженер-математик, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

**e-mail:** kirill3121@rambler.ru

*Герасименко Екатерина Андреевна*

*кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

**e-mail:** gerasimenko@iacp.dvo.ru

*Semenov, Kirill Tikhonovich*

*Senior Engineer-Mathematician, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

*Gerasimenko, Ekaterina Andreevna*

*Candidate of Phys. & Math., Research Scientist, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

С. И. Сенашов, А. Н. Яхно, Л. В. Яхно

## ПОСТРОЕНИЕ НОВЫХ РЕШЕНИЙ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ С ПОМОЩЬЮ СИММЕТРИЙ

*Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика  
М. Ф. Решетнева,*

*Университет Гвадалахары, Мексика*

**Аннотация.** Рассматривается гиперболическая система уравнений двумерной идеальной пластичности с условием текучести Треска – Сен-Венана – Мизеса. Используется техника размножения решений для получения новых решений и их характеристик. Строится гомотопия решений рассматриваемой системы, которая позволяет получить новые классы аналитических решений. Обсуждается механический смысл полученных решений.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, идеальная пластичность, групповой анализ, симметрии дифференциальных уравнений, точные решения, гомотопия.

УДК: 539.375

**Введение.** В настоящее время математическая теория пластичности является одной из хорошо разработанных частей механики деформируемого твердого тела. Первые работы по математической теории пластичности относятся к семидесятым годам XIX века и связаны с именами Анри Треска, Б. Сен-Венана, М. Леви [10].

Систематическое исследование двумерных полей напряжений при пластическом состоянии было начато в 20-х годах XX века. В его основе лежит метод, основанный на изучении характеристик гиперболической системы пластичности. Эти характеристики, известные как линии скольжения, обладают рядом замечательных свойств и позволяют построить решения многих практических задач. Работы в этом направлении были начаты Г. Генки, Р. Мизесом, Л. Прандтлем [10] и продолжены А. Надаи [6], [7], Х. Гейрингер [13], Р. Хиллом [14], С.А. Христиановичем, С.Г. Михлиным, В.В. Соколовским [12], А.Ю. Ишлинским [3], Д.Д. Ивлевым [2] и др.

Исследование двумерных уравнений пластичности интенсивно продолжается и сейчас, это связано с важностью этих уравнений для приложений, но эта работа еще далека от завершения, поскольку уравнения являются нелинейными. Что касается получения точных решений в замкнутом виде, то здесь стоит отметить работы Л. Прандтля [18], А. Надаи [17], Д.Д. Ивлева [2], В.В. Соколовского [12], Б.Д. Аннина, С.И. Сенашова [1] и др.

За всю историю изучения системы двумерных уравнений пластичности было получено лишь несколько аналитических решений, которые используются для решения реальных механических задачи, как тестовые при разработке численных методов, а также позволяют оценивать надежность несущих конструкций и т.п. Поэтому каждое новое решение представляет несомненный теоретический и практический интерес.

Одним из наиболее эффективных методов поиска точных решений дифференциальных уравнений механики является групповой анализ, базой которого являются группы непрерывных преобразований (или точечные симметрии), допускаемые уравнениями. Симметрии позволяют искать различные виды решений (инвариантные, частично-инвариантные), получать новые решения из известных и т.п. В данной работе продолжают исследования в этом направлении, начатые Б.Д. Анниным, С.И. Сенашовым [1], [5], [19], для двумерных уравнений идеальной пластичности.

Структура статьи такова. Во введении приводятся основные сведения о рассматриваемой системе пластичности и ее симметриях. Во второй части излагается общий алгоритм размножения решений с помощью симметрий и приводятся примеры его применения, изложенные в работах [11], [20–23]. В третьей части вводится понятие гомотопии двух решений и строится гомотопия некоторых известных решений, а также определяются соответствующие граничные условия.

Рассмотрим классическую систему плоской идеальной пластичности, состоящую из двух уравнений равновесия и условия пластичности Треска – Сен-Венана – Мизеса [4], [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненты тензора напряжений,  $k$  – постоянная пластичности. Система (1) описывает напряженное состояние пластически деформируемого материала.

Заменой, предложенной М. Леви,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta, \end{aligned}$$

система (1) сводится к квазилинейной системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) = 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

в которой  $\sigma$  – гидростатическое давление,  $\theta + \frac{\pi}{4}$  – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью  $ox$ .

Система (2) является гиперболической, характеристики задаются уравнениями:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \theta. \quad (3)$$

Вдоль соответствующих характеристик выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\sigma}{2k} - \theta = C_1, \quad \frac{\sigma}{2k} + \theta = C_2.$$

Известно [19], что базис алгебры Ли  $L$  точечных симметрий системы (2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ X_4 &= \xi_1(x, y, \sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x, y, \sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial y} - 4k\theta \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_5 &= x_0(\sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + y_0(\sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\xi_1 = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta + y \frac{\sigma}{k}, \quad \xi_2 = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta - x \frac{\sigma}{k},$$

и  $(x = x_0, y = y_0)$  – произвольное решение линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta} - 2k \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \sin 2\theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} - 2k \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} \sin 2\theta - \frac{\partial y}{\partial \sigma} \cos 2\theta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Эту систему можно получить из (2) применением преобразований годографа

$$x = x(\sigma, \theta), \quad y = y(\sigma, \theta)$$

в области, где якобиан преобразования отличен от нуля.

**1. Построение новых решений системы идеальной пластичности с помощью симметрий.** Приведем основные сведения о группе точечных преобразований (симметрий) системы дифференциальных уравнений для двух неизвестных функций  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$ :

$$F_1(x, y, u_1, u_2) = 0, \quad F_2(x, y, u_1, u_2) = 0$$

и их использовании для построения новых решений из известных решений (см., например, [8], [9]).

Точечная симметрия  $S$ , соответствующая оператору  $X$ ,

$$\begin{aligned} X = & \xi_1(x, y, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x, y, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial y} + \\ & + \eta_1(x, y, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial u_1} + \eta_2(x, y, u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial u_2}. \end{aligned}$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f_1(x, y, u_1, u_2, a), \quad \bar{y} = f_2(x, y, u_1, u_2, a), \\ \bar{u}_1 &= g_1(x, y, u_1, u_2, a), \quad \bar{u}_2 = g_2(x, y, u_1, u_2, a), \\ f_1|_{a=0} &= x, \quad f_2|_{a=0} = y, \quad g_1|_{a=0} = u_1, \quad g_2|_{a=0} = u_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где функции  $f_i, g_i$  ( $i = 1, 2$ ) связаны с коэффициентами оператора уравнениями Ли, величины с чертой означают преобразованные переменные.

Преобразования  $S$  переводят систему в себя. Это означает, что если  $U = (u_1, u_2)$  является некоторым решением системы, то функция  $\bar{U}$ , получаемая преобразованием  $S : U \rightarrow \bar{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  – другое решение той же системы [9]. Здесь и далее  $a \in [-l, l] \subset \mathbb{R}$  – некоторый параметр (так называемый групповой параметр).

Если известна симметрия  $S$ , допускаемая системой, и некоторое известное решение этой системы  $U^0 = (u_1^0(x, y), u_2^0(x, y))$  (неинвариантное относительно  $S$ ), то действием преобразований (6) на  $U^0$  получаем неявную формулу для целого класса новых решений  $u_1$  и  $u_2$ :

$$\begin{aligned} g_1(x, y, u_1, u_2, a) &= u_1^0(f_1(x, y, u_1, u_2, a), f_2(x, y, u_1, u_2, a)), \\ g_2(x, y, u_1, u_2, a) &= u_2^0(f_1(x, y, u_1, u_2, a), f_2(x, y, u_1, u_2, a)). \end{aligned} \quad (7)$$

Формула (7) дает семейство решений, зависящее от параметра  $a$ . Решения такого вида называются «размноженными», «деформированными», преобразованными и т. п. Если параметр  $a$  равен нулю, то преобразованное решение совпадает с начальным.

Преобразования вида (6) можно применить и к характеристикам системы в случае ее гиперболичности. Характеристические кривые для системы двух зависимых функций от двух независимых переменных являются плоскими кривыми, в то время как решения – пространственными поверхностями. Поэтому анализировать действие симметрии на характеристики легче. Меняя значение параметра, можно следить за изменением семейств характеристик.



Группы точечных преобразований, соответствующие операторам (4), переводят систему (2) в себя. Приведем следующую лемму:

**Лемма 1.** *Однопараметрическая группа преобразований, задаваемая оператором  $X_4$ , имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned}\bar{x} &= ue^a \cos \bar{\theta} - ve^{-a} \sin \bar{\theta}, \\ \bar{y} &= ue^a \sin \bar{\theta} + ve^{-a} \cos \bar{\theta}, \\ \bar{\sigma} &= 2k \left( \frac{\sigma}{2k} \operatorname{ch} 2a - \theta \operatorname{sh} 2a \right), \\ \bar{\theta} &= - \left( \frac{\sigma}{2k} \operatorname{sh} 2a - \theta \operatorname{ch} 2a \right),\end{aligned}\quad (8)$$

где  $u, v$  задаются соотношениями:

$$\begin{aligned}u &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ v &= -x \sin \theta + y \cos \theta.\end{aligned}$$

Преобразования (8) действуют на переменные  $u, v, \xi, \eta$  как масштабные преобразования (или преобразования растяжения), поэтому назовем симметрию (8) квазирастяжением.

**1.1. Размножение решения Прандтля о сжатии пластического слоя симметрией квазирастяжения.** Решение Прандтля [18] явилось в свое время основой теоретического анализа прикладных задач обработки металлов давлением. Оно может быть интерпретировано как решение, описывающее напряжения в прямоугольном слое жестко-пластического материала, сжимаемого шероховатыми плитами. Слой предполагается тонким, т.е. его длина гораздо больше толщины. Это решение приближенно описывает реальную ситуацию в некотором отдалении от центра слоя, если начало координат расположено в середине слоя [4].

В терминах функций  $\sigma$  и  $\theta$  для системы (2) это решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\sigma &= -p_1 - k \frac{x}{h} + k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}, \\ y &= h \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (9)$$

где  $2h = \text{const}$  – толщина слоя, прямые линии  $y = \pm h$  являются границами плит,  $p_1 = \text{const}$ .

Граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned}\theta|_{y=h} &= \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \sigma|_{y=h} &= -p_1 - k \frac{x}{h}.\end{aligned}$$

Поле линий скольжения для решения Прандтля указано на рисунке 1.

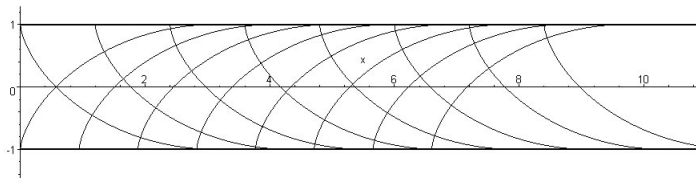


Рис. 1. Поле линий скольжения для решения Прандтля ( $h = k = 1, p_1 = 0$ )

В терминах преобразованных переменных  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\sigma}, \bar{\theta}$  решение Прандтля (9) имеет тот же вид (т.к. симметрия квазирастяжения допускается исходной системой):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= -p_1 - k \frac{\bar{x}}{h} + k \sqrt{1 - \frac{\bar{y}^2}{h^2}}, \\ \bar{y} &= h \cos 2\bar{\theta}.\end{aligned}$$

Чтобы получить новое решение в виде «деформированного» решения вида (7), необходимо заменить  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\theta}$  соответствующими соотношениями из (8). И выражая новое решение в терминах функций  $x$ ,  $y$ , получаем, что в исходной системе координат семейство новых решений имеет следующий вид [11]:

$$\begin{aligned} x &= -h(e^a \sin \theta \cos \bar{\theta} + e^{-a} \cos \theta \sin \bar{\theta}) - \frac{h}{k}(\bar{\sigma} + p_1)(e^a \sin \theta \sin \bar{\theta} + e^{-a} \cos \theta \cos \bar{\theta}), \\ y &= h(e^a \cos \theta \cos \bar{\theta} - e^{-a} \sin \theta \sin \bar{\theta}) + \frac{h}{k}(\bar{\sigma} + p_1)(e^a \cos \theta \sin \bar{\theta} - e^{-a} \sin \theta \cos \bar{\theta}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\bar{\sigma} = \sigma \operatorname{ch} 2a - 2k\theta \operatorname{sh} 2a, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta - \frac{\bar{\sigma}}{2k} \operatorname{sh} 2a}{\operatorname{ch} 2a}.$$

Учитывая соотношения для первого семейства характеристик:

$$\bar{\sigma} = 2k(K_1 + \bar{\theta}),$$

где  $K_1$  – некоторая константа, и то, что:

$$e^a = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a, \quad e^{-a} = \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a, \quad (11)$$

получаем уравнения первого семейства линий скольжения для нового решения (10). Они имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{h}{k}[2k(K_1 + \bar{\theta}) + p_1][\operatorname{ch} a \cos(\theta - \bar{\theta}) - \operatorname{sh} a \cos(\theta + \bar{\theta})] - \\ &\quad - h[\operatorname{sh} a \sin(\theta - \bar{\theta}) + \operatorname{ch} a \sin(\theta + \bar{\theta})], \\ y &= -\frac{h}{k}[2k(K_1 + \bar{\theta}) + p_1][\operatorname{ch} a \sin(\theta - \bar{\theta}) - \operatorname{sh} a \sin(\theta + \bar{\theta})] - \\ &\quad - h[-\operatorname{sh} a \cos(\theta - \bar{\theta}) - \operatorname{ch} a \cos(\theta + \bar{\theta})], \\ \theta &= K_1 \operatorname{sh} 2a + \bar{\theta} e^{2a}. \end{aligned}$$

Полагая в (10)

$$\bar{\sigma} = 2k(K_2 - \bar{\theta}),$$

аналогично получаем уравнения второго семейства линий скольжения:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{h}{k}[2k(K_2 - \bar{\theta}) + p_1][\operatorname{ch} a \cos(\theta - \bar{\theta}) - \operatorname{sh} a \cos(\theta + \bar{\theta})] - \\ &\quad - h[\operatorname{sh} a \sin(\theta - \bar{\theta}) + \operatorname{ch} a \sin(\theta + \bar{\theta})], \\ y &= -\frac{h}{k}[2k(K_2 - \bar{\theta}) + p_1][\operatorname{ch} a \sin(\theta - \bar{\theta}) - \operatorname{sh} a \sin(\theta + \bar{\theta})] - \\ &\quad - h[-\operatorname{sh} a \cos(\theta - \bar{\theta}) - \operatorname{ch} a \cos(\theta + \bar{\theta})], \\ \theta &= K_2 \operatorname{sh} 2a + \bar{\theta} e^{-2a}, \quad K_2 = \operatorname{const}. \end{aligned}$$

Необходимое условие существования огибающей для семейства линий, заданных в параметрическом виде (здесь  $\theta$  – параметр линии,  $c$  – параметр семейства)

$$x = x(\theta, c), \quad y = y(\theta, c),$$

выглядит так:

$$\frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0.$$

Учитывая, что в силу (3) для первого семейства линий скольжения выполняется соотношение:

$$\frac{dy}{dK_1} = \frac{dx}{dK_1} \operatorname{tg} \theta,$$

получаем уравнения огибающей  $\Gamma_1$  первого семейства характеристик нового решения (10):

$$\begin{aligned} x &= -\frac{h}{k} \left[ 2k \left( -\bar{\theta} - \frac{p_1}{2k} + \operatorname{tg} \bar{\theta} \left( \frac{e^{2a} \operatorname{tg} \bar{\theta}}{\operatorname{sh} 2a} - \frac{1}{2} \right) + \bar{\theta} \right) + p_1 \right] [\operatorname{ch} a \cos(\theta - \bar{\theta}) - \\ &\quad - \operatorname{sh} a \cos(\theta + \bar{\theta})] - h [\operatorname{sh} a \sin(\theta - \bar{\theta}) + \operatorname{ch} a \sin(\theta + \bar{\theta})], \\ y &= -\frac{h}{k} \left[ 2k \left( -\bar{\theta} - \frac{p_1}{2k} + \operatorname{tg} \bar{\theta} \left( \frac{e^{2a} \operatorname{tg} \bar{\theta}}{\operatorname{sh} 2a} - \frac{1}{2} \right) + \bar{\theta} \right) + p_1 \right] [\operatorname{ch} a \sin(\theta - \bar{\theta}) - \\ &\quad - \operatorname{sh} a \sin(\theta + \bar{\theta})] - h [-\operatorname{sh} a \cos(\theta - \bar{\theta}) - \operatorname{ch} a \cos(\theta + \bar{\theta})], \\ \theta &= \left[ -\bar{\theta} - \frac{p_1}{2k} + \operatorname{tg} \bar{\theta} \left( \frac{e^{2a} \operatorname{tg} \bar{\theta}}{\operatorname{sh} 2a} - \frac{1}{2} \right) \right] \operatorname{sh} 2a + \bar{\theta} e^{2a}. \end{aligned} \quad (12)$$

Имея в виду, что для второго семейства линий скольжения выполняется соотношение:

$$\frac{dy}{dK_2} = -\operatorname{ctg} \theta \frac{dx}{dK_2},$$

получаем огибающую  $\Gamma_2$  второго семейства характеристик:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{h}{k} \left[ 2k \left( \bar{\theta} - \frac{p_1}{2k} - \operatorname{ctg} \bar{\theta} \left( \frac{1}{2} + \frac{e^{-2a}}{\operatorname{sh} 2a} \right) - \bar{\theta} \right) + p_1 \right] [\operatorname{ch} a \cos(\theta - \bar{\theta}) - \\ &\quad - \operatorname{sh} a \cos(\theta + \bar{\theta})] - h [\operatorname{sh} a \sin(\theta - \bar{\theta}) + \operatorname{ch} a \sin(\theta + \bar{\theta})], \\ y &= -\frac{h}{k} \left[ 2k \left( \bar{\theta} - \frac{p_1}{2k} - \operatorname{ctg} \bar{\theta} \left( \frac{1}{2} + \frac{e^{-2a}}{\operatorname{sh} 2a} \right) - \bar{\theta} \right) + p_1 \right] [\operatorname{ch} a \sin(\theta - \bar{\theta}) - \\ &\quad - \operatorname{sh} a \sin(\theta + \bar{\theta})] - h [-\operatorname{sh} a \cos(\theta - \bar{\theta}) - \operatorname{ch} a \cos(\theta + \bar{\theta})], \\ \theta &= \left[ \bar{\theta} - \frac{p_1}{2k} - \operatorname{ctg} \bar{\theta} \left( \frac{1}{2} + \frac{e^{-2a}}{\operatorname{sh} 2a} \right) \right] \operatorname{sh} 2a + \bar{\theta} e^{-2a}. \end{aligned} \quad (13)$$

Огибающие (12), (13) являются расходящимися спиралями, поэтому их можно интерпретировать как твердые стенки. Таким образом решение (10) можно использовать для описания сжатия пластического слоя плитам, имеющими форму, указанную на рисунке 2.

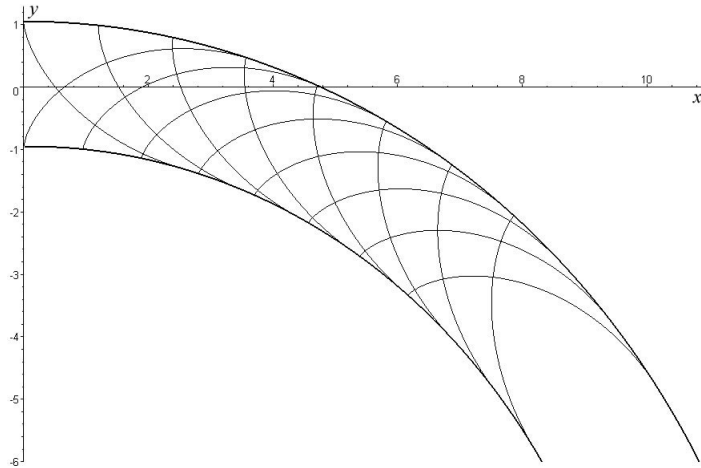


Рис. 2. Поле линий скольжения для решения, полученного в результате действия квазирастяжения на решение Прандтля ( $a = 0.4$ )

Граничные условия для полученного решения (10) можно искать в терминах  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в декартовых координатах, в терминах  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$  в полярных координатах или в терминах  $\sigma, \theta$ . Но проще всего (и более естественно) использовать понятие нормального и касательного напряжений  $\sigma_n, \tau_n$ , так как смысл таких напряжений на сложных контурах следующий: нормальное напряжение “давит” (или “растягивает”) перпендикулярно контуру в каждой его точке, а касательное напряжение, соответственно, действует по касательной к контуру.

Пусть в общем случае на некотором гладком контуре  $L$  заданы нормальная  $\sigma_n$  и касательная  $\tau_n$  составляющие напряжения, причем  $|\tau_n| \leq k$ . Следуя [4], связь между этими составляющими и функциями  $\sigma$  и  $\theta$  следующая:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma - k \sin 2(\theta - \Phi), \\ \tau_n &= k \cos 2(\theta - \Phi),\end{aligned}$$

где  $\Phi$  – это угол между нормалью к контуру  $L$  и осью  $ox$ .

Для решений, граничная линия которых является огибающей семейства характеристик (т.е. характеристики этого семейства касаются граничной линии), угол  $\Phi$  будет иметь значение  $\Phi = \theta \pm \pi/2$ , так как  $\theta$  по определению – это угол между касательной к линии скольжения и осью  $ox$ , а линия скольжения, в свою очередь, касается контура. Поэтому касательная к контуру имеет угол с осью  $ox$  равный углу  $\theta$ . А для любого контура нормаль в любой его точке перпендикулярна к касательной в этой точке.

Поэтому для всех таких решений

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma - k \sin 2(\theta - \Phi) = \sigma - k \sin 2\left(\theta - \theta \mp \frac{\pi}{2}\right) = \sigma - k \sin(\mp\pi) = \sigma, \\ \tau_n &= k \cos 2(\theta - \Phi) = k \cos 2\left(\theta - \theta \mp \frac{\pi}{2}\right) = k \cos(\mp\pi) = -k,\end{aligned}\tag{14}$$

т.е. на всех граничных линиях для таких решений нормальное напряжение совпадает с гидростатическим давлением  $\sigma$ , а касательное напряжение постоянно и равно  $-k$ .

Учитывая, что каждая точка огибающей семейства характеристик принадлежит также и характеристике этого семейства и используя соотношения (11) и (14) получаем, что граничные условия для решения (10) имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_n|_{\Gamma_1} &= 2k(K_1 e^{-2a} + \theta), \quad \sigma_n|_{\Gamma_2} = 2k(K_2 e^{2a} - \theta), \\ \tau_n|_{\Gamma_1} &= \tau_n|_{\Gamma_2} = -k.\end{aligned}$$

**1.2. Размножение решения для отверстия в виде окружности.** Рассмотрим известное решение Надаи [17], описывающее пластическое состояние среды вокруг кругового отверстия радиуса  $R$ , нагруженного равномерно распределенным нормальным давлением  $p_2 = \text{const}$  и нулевым касательным напряжением на контуре отверстия. Это решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\theta &= \text{arctg} \frac{y}{x} + \frac{\pi}{4} = \varphi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma &= -p_2 + k + k \ln \frac{x^2 + y^2}{R^2} = -p_2 + k + k \ln \frac{r^2}{R^2},\end{aligned}\tag{15}$$

где  $r, \varphi$  – полярные координаты.

Решение (15) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}\theta|_{r=R} &= \varphi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma|_{r=R} &= -p_2 + k.\end{aligned}\tag{16}$$

Линиями скольжения решения (15) являются логарифмические спирали (рис. 3):

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{4}, \quad r = R \exp\left(\pm\theta + \frac{p_2 - k}{2k} + C_i\right).$$

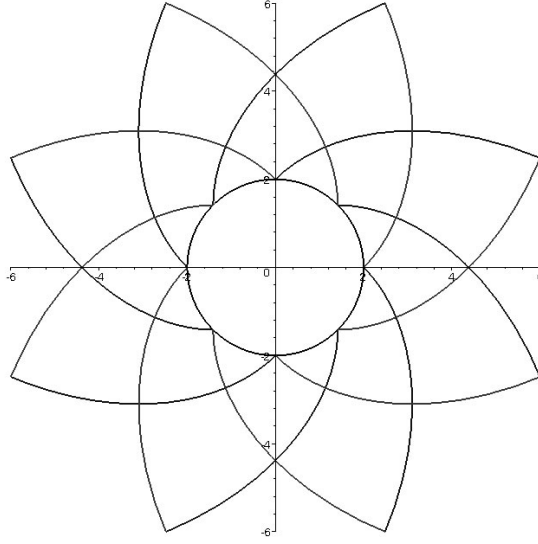


Рис. 3. Поле линий скольжения для решения Надаи для кругового отверстия, нагруженного равномерно распределенным нормальным давлением и нулевым касательным напряжением

Рассмотрим действие квазирастяжения (8) на решение (15). Т.к. оператор  $X_4$  допускается системой (2), то в новых переменных  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\theta}$  решение Надаи (15) имеет тот же самый вид:

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} + \frac{\pi}{4}, \\ \bar{\sigma} &= -p_2 + k + k \ln \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{R^2}.\end{aligned}$$

Заменяя переменные  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\theta}$  в последнем равенстве на их выражения из (8) и переходя к полярным координатам, получаем семейство новых решений, зависящее от группового параметра  $a$ :

$$\begin{aligned}\theta &= \varphi + \operatorname{arctg} e^{2a}, \\ \sigma &= \frac{-p_2 + k}{\operatorname{ch} 2a} + 2k \operatorname{th} 2a (\varphi + \operatorname{arctg} e^{2a}) + \frac{k}{\operatorname{ch} 2a} \ln \frac{r^2}{R^2 \operatorname{ch} 2a}.\end{aligned}\quad (17)$$

Заметим, что при  $a = 0$  новое решение (17) совпадает с исходным решением (15).

Так как оператор  $X_4$  определяет симметрию системы (2), то для преобразованных переменных граничные условия можно положить аналогичными условиям (16) для исходного (“недеформированного” решения):

$$\begin{aligned}\bar{\theta}|_{\bar{r}=R} &= \bar{\varphi} + \frac{\pi}{4}, \\ \bar{\sigma}|_{\bar{r}=R} &= -p_2 + k.\end{aligned}$$

Таким образом, линия

$$r^2 = R^2 \operatorname{ch} 2a \quad (18)$$

является граничной линией нового решения и представляет собой окружность радиуса  $R\sqrt{\operatorname{ch} 2a}$ .

Окончательно, подставляя (18) в (17), получаем, что новое решение (17) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}\theta|_{r=R\sqrt{\operatorname{ch} 2a}} &= \varphi + \operatorname{arctg} e^{2a}, \\ \sigma|_{r=R\sqrt{\operatorname{ch} 2a}} &= \frac{-p_2 + k}{\operatorname{ch} 2a} + 2k \operatorname{th} 2a (\varphi + \operatorname{arctg} e^{2a}),\end{aligned}$$

и гидростатическое давление  $\sigma$  теперь зависит от полярного угла  $\varphi$ .

**2. Гомотопия решений двумерной пластичности.** Система (2) допускает бесконечномерную группу точечных симметрий, порождаемую оператором  $X_5$  из (4).

**Лемма 2.** Точечные преобразования, соответствующие оператору  $X_5$  и переводящие любое точное неособое решение  $(x, y)$  системы (2) в решение  $(\bar{x}, \bar{y})$  этой же системы имеют вид:

$$\bar{x} = x + ax_0, \quad \bar{y} = y + ay_0, \quad (19)$$

где  $a$  – групповой параметр,  $(x = x_0, y = y_0)$  – произвольное решение линейной системы (5).

Решение системы (2) будем называть *неособым*, если его преобразование в решение линеаризованной системы (5) является невырожденным.

Рассмотрим два точных решения

$$\chi_1 = (x_1(\sigma, \theta), y_1(\sigma, \theta)), \quad \chi_2 = (x_2(\sigma, \theta), y_2(\sigma, \theta))$$

линейной системы (5), определяющие неявно два решения  $U_1$  и  $U_2$  квазилинейной системы (2) соответственно. И возьмем в качестве коэффициентов оператора  $X_5$  следующие выражения:

$$x_0(\sigma, \theta) = x_1 - x_2, \quad y_0(\sigma, \theta) = y_1 - y_2, \quad (20)$$

т.к. в силу линейности системы (5) любая линейная комбинация решений также является решением этой системы. Этот принцип можно назвать *принципом суперпозиции решений* [15], [16] для системы плоской пластичности (2). В силу этого принципа любое неособое решение системы (2) можно связать с другим ее неособым решением.

Подействуем на решение  $\chi_2 = (x_2(\sigma, \theta), y_2(\sigma, \theta))$  оператором  $X_5$  с коэффициентами вида (20), тогда в силу (19) будем иметь семейство новых решений для системы (5):

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}(\sigma, \theta) = x_2 + ax_0 = x_2 + a(x_1 - x_2) = ax_1 + (1 - a)x_2, \\ y &= \bar{y}(\sigma, \theta) = y_2 + ay_0 = y_2 + a(y_1 - y_2) = ay_1 + (1 - a)y_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношения (21) задают неявным образом решение и для системы (2). Эти соотношения можно назвать *гомотопией* решений  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , так как при  $a = 0$  формулы (21) задают решение, совпадающее с решением  $(x_2, y_2)$ , а при  $a = 1$  – решение, совпадающее с решением  $(x_1, y_1)$ . При значениях группового параметра  $a \in (0, 1)$  формулы (21) задают семейство новых решений, зависящее от параметра  $a$ .

Отметим, что в теории группового анализа дифференциальных уравнений [8], если любое решение системы получается из одного фиксированного ее решения преобразованием, принадлежащей группе, то такую систему называют *автоморфной* относительно данной группы. Таким образом, в результате действия группы (19) оператора  $X_5$  квазилинейная система (2) распадается на автоморфную (5) и разрешающую системы (для которой якобиан преобразования годографа  $D(\sigma, \theta)/D(x, y)$  равен нулю).

Тем самым, любое неособое решение системы (2) можно получить с помощью симметрий из решения Прандтля (9).

**2.1. Гомотопия решений Прандтля и Надаи для канала.** Рассмотрим известное решение системы (1) – решение Надаи для плоского сходящегося канала с прямолинейными сторонами [14]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -2kc \ln r + k \cos 2\psi - kc \ln (c - \cos 2\psi) + A, \\ \sigma_\varphi &= -2kc \ln r - k \cos 2\psi - kc \ln (c - \cos 2\psi) + A, \\ \tau_{r\varphi} &= k \sin 2\psi, \quad \sigma_r - \sigma_\varphi = 2k \cos 2\psi > 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$  – компоненты тензора напряжений в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ ,  $\psi$  – угол между главным направлением и полярным радиусом, постоянная  $A$  – произвольная. Для угла  $\psi(\varphi)$  выполняются соотношения:

$$\varphi = \int_0^\psi \frac{\cos 2\psi}{c - \cos 2\psi} d\psi, \quad \psi' = \frac{c - \cos 2\psi}{\cos 2\psi}, \quad c > 1. \quad (23)$$

Постоянная  $c$  связана с углом канала  $2\alpha$  следующим образом:

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c+1}{c-1}}, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Интегрируя (23), получаем неявную зависимость между полярным углом  $\varphi$  и углом  $\psi$ :

$$\varphi = -\psi + \frac{c}{\sqrt{c^2 - 1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c+1}{c-1}} \operatorname{tg} \psi \right).$$

Условие на константу  $c$  необходимо для сходимости интеграла (23). Данное решение описывает напряженное состояние в клиновидной области, в которой границы канала являются огибающими линий скольжения.

Используя формулы связи компонент девиатора напряжений в полярной и декартовой системах координат [12]:

$$\begin{aligned} s_r = -s_\varphi &= -k \sin 2\theta \cos 2\varphi + k \cos 2\theta \sin 2\varphi = k \sin 2(\varphi - \theta), \\ \tau_{r\varphi} &= k \cos 2(\varphi - \theta), \end{aligned}$$

решение Надаи для сходящегося канала в терминах функций  $\sigma$ ,  $\theta$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma &= -kc \left( \ln(x^2 + y^2) + \ln \left[ c + \sin \left( 2\theta - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) \right] \right) + A, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{c^2-1}}{c} \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Выражая переменные  $x$ ,  $y$  через  $\sigma$ ,  $\theta$ , получаем решение Надаи для сходящегося канала (22) в следующем виде (рассмотрим случай  $x > 0$ ):

$$\begin{aligned} x &= \exp \left( \frac{A - \sigma}{2kc} \right) S^{-1}(\theta), \quad y = xT(\theta), \\ T(\theta) &= \operatorname{tg} \left[ \theta + \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{c^2-1}}{c} \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right) \right], \\ S(\theta) &= \sqrt{c + cT^2(\theta) + \sin 2\theta[1 - T^2(\theta)] - 2T(\theta) \cos 2\theta}. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения двух семейств характеристик решения (25) соответственно задаются следующими соотношениями:

$$x = \exp \left( \frac{A - 2k(c_1 + \theta)}{2kc} \right) S^{-1}(\theta), \quad y = xT(\theta),$$

$$x = \exp \left( \frac{A - 2k(c_2 - \theta)}{2kc} \right) S^{-1}(\theta), \quad y = xT(\theta),$$

где  $\theta \in \left(\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha\right)$ ,  $c = c_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$ . Различным значениям констант  $c_1$ ,  $c_2$  соответствуют различные линии скольжения соответствующего семейства (рис. 4).

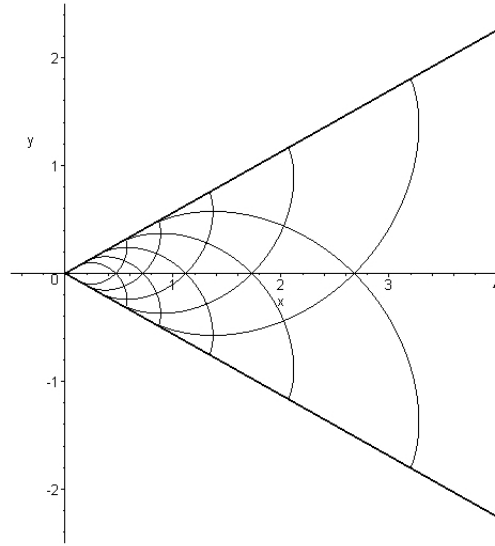


Рис. 4. Поле линий скольжения для решения Надаи для сходящегося канала с прямолинейными границами ( $c = 1.8$ ,  $k = 1$ ,  $A = 0$ )

Выражая  $x$ ,  $y$  из решения Прандтля (9), имеем:

$$\begin{aligned} x &= -\sigma \frac{h}{k} - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta, \\ y &= h \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Построим гомотопию решений (25) и (26). Возьмем в качестве решения  $(x_1, y_1)$  решение Надаи (25), а в качестве решения  $(x_2, y_2)$  – решение Прандтля (26), тогда в силу (21) семейство новых решений системы (5), полученное в результате гомотопии, имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= a \exp\left(\frac{A - \sigma}{2kc}\right) S^{-1}(\theta) + (1 - a) \left(-\sigma \frac{h}{k} - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta\right), \\ y &= a \exp\left(\frac{A - \sigma}{2kc}\right) S^{-1}(\theta) T(\theta) + (1 - a) h \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \operatorname{tg} \left( \theta + \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{c^2-1}}{c} \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right), \\ S(\theta) &= \sqrt{c + cT^2(\theta) + (1 - T^2(\theta)) \sin 2\theta - 2T(\theta) \cos 2\theta}. \end{aligned} \quad (28)$$

Полагая в (27)  $\sigma = 2k(c_1 + \theta)$ , получим уравнения первого семейства характеристик решения (27):

$$\begin{aligned} x &= a \exp\left(\frac{A - 2k(c_1 + \theta)}{2kc}\right) S^{-1}(\theta) + (1 - a) \left(-2h(c_1 + \theta) - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta\right), \\ y &= a \exp\left(\frac{A - 2k(c_1 + \theta)}{2kc}\right) S^{-1}(\theta) T(\theta) + (1 - a) h \cos 2\theta, \end{aligned}$$

где  $\theta \in (0, \alpha)$  – параметр, а функции  $T(\theta)$ ,  $S(\theta)$  определяются соотношениями (28).



Полагая в (27)  $\sigma = 2k(c_2 - \theta)$  получим уравнения второго семейства характеристик решения (27):

$$\begin{aligned} x &= a \exp\left(\frac{A - 2k(c_2 - \theta)}{2kc}\right) S^{-1}(\theta) + (1 - a) \left(-2h(c_2 - \theta) - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta\right), \\ y &= a \exp\left(\frac{A - 2k(c_2 - \theta)}{2kc}\right) S^{-1}(\theta) T(\theta) + (1 - a) h \cos 2\theta, \end{aligned}$$

где  $\theta \in \left(\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha\right)$ .

Имея в виду, что для первого семейства линий скольжения выполняется условие:

$$\frac{dx}{dc_1} \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dc_1},$$

а для второго – условие:

$$\frac{dx}{dc_2} (-\operatorname{ctg} \theta) = \frac{dy}{dc_2},$$

уравнение огибающей первого семейства характеристик имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : x &= -(1 - a)h \left[ \sin 2\theta - 2c \ln \left( -2hc \frac{1 - a}{a} \frac{S(\theta)}{1 - T(\theta) \operatorname{ctg} \theta} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{2(1 - a)hc}{1 - T(\theta) \operatorname{ctg} \theta} - \frac{(1 - a)h}{k} (A + p_1), \\ y &= (1 - a)h \cos 2\theta - \frac{2(1 - a)hc}{1 - T(\theta) \operatorname{ctg} \theta} T(\theta), \quad \theta \in (0, \alpha). \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнение огибающей второго семейства характеристик имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 : x &= -(1 - a)h \left[ \sin 2\theta - 2c \ln \left( -2hc \frac{1 - a}{a} \frac{S(\theta)}{1 + T(\theta) \operatorname{tg} \theta} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{2(1 - a)hc}{1 + T(\theta) \operatorname{tg} \theta} - \frac{(1 - a)h}{k} (A + p_1), \\ y &= (1 - a)h \cos 2\theta - \frac{2(1 - a)hc}{1 + T(\theta) \operatorname{tg} \theta} T(\theta), \quad \theta \in \left(-\alpha - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Можно заметить, что огибающая  $\Gamma_1$  переходит в огибающую  $\Gamma_2$  заменой  $\theta$  на  $-\frac{\pi}{2} - \theta$ .

Граничные условия решения (27) таковы:

$$\begin{aligned} \sigma|_{\Gamma_1} &= A - 2kc \ln \left( -2hc \frac{1 - a}{a} \frac{S(\theta)}{1 - T(\theta) \operatorname{ctg} \theta} \right), \quad \theta \in (0, \alpha); \\ \sigma|_{\Gamma_2} &= A - 2kc \ln \left( -2hc \frac{1 - a}{a} \frac{S(\theta)}{1 + T(\theta) \operatorname{tg} \theta} \right), \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, решение (27) при  $a \in (0, 1)$  является новым точным решением системы уравнений (5), а значит задает в неявной форме новый класс точных решений системы (2); описывает напряженное состояние канала с границами (29), (30) и имеет граничные условия (31).

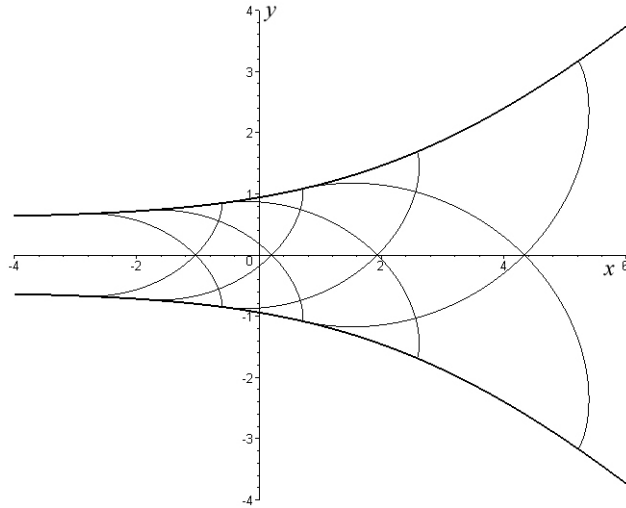


Рис. 5. Поле линий скольжения для решения, полученного в результате гомотопии решений Прандтля и Надаи для сходящегося канала

На рисунке 5 изображены линии скольжения и огибающие для следующих значений параметров решения (27):

$$a = 0, 4, \quad c = 1, 4, \quad A = 0, \quad h = p_1 = k = 1.$$

При  $a = 0$  решение (27) совпадает с решением Прандтля, при  $a = 1 - c$  решением Надаи.

Проанализируем поведение  $\sigma$  на граничных линиях (29), (30). При движении по  $\Gamma_1$  “влево”, т.е. в сторону уменьшения  $x$  получаем:

$$\theta \rightarrow 0, \quad T(\theta) \rightarrow \text{const} \equiv T, \quad S(\theta) \rightarrow \text{const} \equiv S, \quad \text{ctg}(\theta) \rightarrow +\infty,$$

тогда аргумент логарифма в первом соотношении (31) стремится к нулю, т.к.  $\frac{S(\theta)}{1 - T(\theta) \text{ctg} \theta} \rightarrow 0$ , сам логарифм стремится к  $-\infty$ , и  $\sigma \rightarrow +\infty$ , что согласуется с характером поведения  $\sigma$  для решения Прандтля (9).

При движении по  $\Gamma_1$  “вправо”, т.е. в сторону увеличения  $x$ , получаем:

$$\theta \rightarrow \alpha, \quad T(\theta) \rightarrow \text{tg} \alpha, \quad S(\theta) \rightarrow \frac{\sqrt{c}}{\cos \alpha} \equiv \text{const},$$

тогда аргумент логарифма в первом соотношении (31) стремится к  $+\infty$ , сам логарифм стремится к  $+\infty$  и  $\sigma \rightarrow -\infty$ , что согласуется с характером поведения  $\sigma$  для решения Надаи (24). Аналогично анализируется поведение  $\sigma$  для линии  $\Gamma_2$ .

**2.2. Гомотопия решений Прандтля и Надаи для круглого отверстия с ненулевым касательным напряжением.** Построим новые аналитические решения для системы пластичности (2), используя однопараметрическую группу (19), порождаемую оператором  $X_5$ .

Для этого рассмотрим решение Надаи для пластической зоны вокруг отверстия, ограниченного круговым контуром радиуса  $R$ , вдоль которого заданы равномерно распределенные компоненты напряжения  $\sigma_r = -p = \text{const}$ ,  $\tau_{r\phi} = -k$  [14]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -k \left( \ln \text{tg} \left( \beta + \frac{\pi}{4} \right) - \sin 2\beta \right) - p, \\ \sigma_\phi &= -k \left( \ln \text{tg} \left( \beta + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 2\beta \right) - p, \\ \tau_{r\phi} &= -k \cos 2\beta, \quad \cos 2\beta = \frac{R^2}{r^2} > 0, \end{aligned} \tag{32}$$

где  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$  – компоненты тензора напряжений в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ .

В терминах функций  $x(\sigma, \theta), y(\sigma, \theta)$  решение Надаи (32) имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= -R \left[ \sin \theta \operatorname{ch} \left( \frac{\sigma + p}{2k} \right) + \cos \theta \operatorname{sh} \left( \frac{\sigma + p}{2k} \right) \right], \\ y &= -R \left[ \sin \theta \operatorname{sh} \left( \frac{\sigma + p}{2k} \right) - \cos \theta \operatorname{ch} \left( \frac{\sigma + p}{2k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Граничные условия для решения Надаи выглядят так:

$$\sigma|_{r=R} = -p, \quad \theta|_{r=R} = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя  $\sigma = 2k(c_1 + \theta)$  в (33), получим параметрическое уравнение первого семейства линий скольжения этого решения

$$\begin{aligned} x &= -R \left[ \sin \theta \operatorname{ch} \left( c_1 + \theta + \frac{p}{2k} \right) + \cos \theta \operatorname{sh} \left( c_1 + \theta + \frac{p}{2k} \right) \right], \\ y &= -R \left[ \sin \theta \operatorname{sh} \left( c_1 + \theta + \frac{p}{2k} \right) - \cos \theta \operatorname{ch} \left( c_1 + \theta + \frac{p}{2k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя  $\sigma = 2k(c_2 - \theta)$  в (33), получим параметрическое уравнение второго семейства линий скольжения

$$\begin{aligned} x &= -R \left[ \sin \theta \operatorname{ch} \left( c_2 - \theta + \frac{p}{2k} \right) + \cos \theta \operatorname{sh} \left( c_2 - \theta + \frac{p}{2k} \right) \right], \\ y &= -R \left[ \sin \theta \operatorname{sh} \left( c_2 - \theta + \frac{p}{2k} \right) - \cos \theta \operatorname{ch} \left( c_2 - \theta + \frac{p}{2k} \right) \right]. \end{aligned}$$

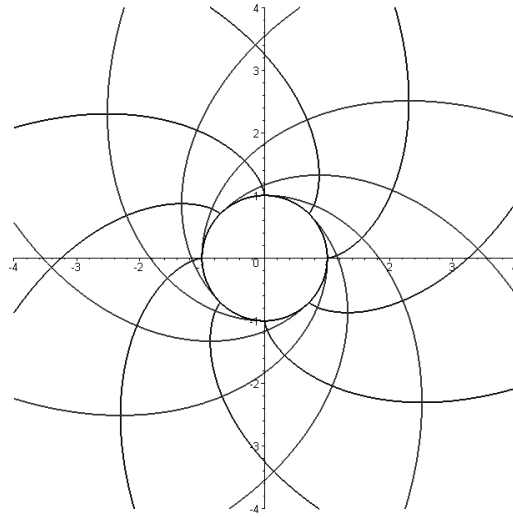


Рис. 6. Поле линий скольжения решения Надаи для кругового отверстия  
( $p = p_1 = -k = -1/2, h = R = 1$ )

Можно заметить, что граничная линия  $r = R$  является огибающей для семейства (34).

Возьмем в соотношении (21) в качестве решения  $(x_1, y_1)$  решение Прандтля (26), а в качестве решения  $(x_2, y_2)$  – решение Надаи (33). Упрощая, получим семейство новых решений системы (5):

$$\begin{aligned} x &= a \left( -\sigma \frac{h}{k} - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta \right) - R(1-a) \left( \sin \theta \operatorname{ch} \frac{\sigma + p}{2k} + \cos \theta \operatorname{sh} \frac{\sigma + p}{2k} \right), \\ y &= ah \cos 2\theta - R(1-a) \left( \sin \theta \operatorname{sh} \frac{\sigma + p}{2k} - \cos \theta \operatorname{ch} \frac{\sigma + p}{2k} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя в (35)  $\sigma = 2k(c_1 + \theta)$ , получим уравнение первого семейства линий скольжения:

$$\begin{aligned} x &= -ah \left( 2c_1 + 2\theta + \frac{p_1}{k} + \sin 2\theta \right) - \\ &\quad - R(1-a) \left[ \sin \theta \operatorname{ch} \left( c_1 + \theta + \frac{p}{2k} \right) + \cos \theta \operatorname{sh} \left( c_1 + \theta + \frac{p}{2k} \right) \right], \\ y &= ah \cos 2\theta - R(1-a) \left[ \sin \theta \operatorname{sh} \left( c_1 + \theta + \frac{p}{2k} \right) - \cos \theta \operatorname{ch} \left( c_1 + \theta + \frac{p}{2k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в (35)  $\sigma = 2k(c_2 - \theta)$ , получим уравнение второго семейства линий скольжения:

$$\begin{aligned} x &= -ah \left( 2c_2 - 2\theta + \frac{p_1}{k} + \sin 2\theta \right) - \\ &\quad - R(1-a) \left[ \sin \theta \operatorname{ch} \left( c_2 - \theta + \frac{p}{2k} \right) + \cos \theta \operatorname{sh} \left( c_2 - \theta + \frac{p}{2k} \right) \right], \\ y &= ah \cos 2\theta - R(1-a) \left[ \sin \theta \operatorname{sh} \left( c_2 - \theta + \frac{p}{2k} \right) - \cos \theta \operatorname{ch} \left( c_2 - \theta + \frac{p}{2k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Уравнение огибающей первого семейства характеристик задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Gamma : x &= \frac{ah(p - p_1)}{k} - 2ah \operatorname{Arsh} \frac{2ah \sin \theta}{R(a-1)} - \sin \theta \sqrt{4a^2 h^2 \sin^2 \theta + R^2(a-1)^2}, \\ y &= ah + \cos \theta \sqrt{4a^2 h^2 \sin^2 \theta + R^2(a-1)^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Второе семейство характеристик не имеет огибающей.

Вдоль линии  $\Gamma$  граничное условие для  $\sigma$  имеет вид:

$$\sigma|_{\Gamma} = 2k(c_1 + \theta)|_{\Gamma} = 2k \left( -\theta + \operatorname{Arsh} \frac{2ah \sin \theta}{R(a-1)} - \frac{p}{2k} + \theta \right) = -p + 2k \operatorname{Arsh} \frac{2ah \sin \theta}{R(a-1)}.$$

Из решения уравнения  $y'_\theta = 0$  находим, что контур  $\Gamma$  остается гладким при указанном значении группового параметра  $a$ :

$$a = \frac{R}{2h + R} < 1, h > 0.$$

Таким образом, решение (35) описывает напряженное состояние вокруг овалоподобного отверстия с контуром вида (36) при  $a < \frac{R}{2h + R}$  (рис. 7).

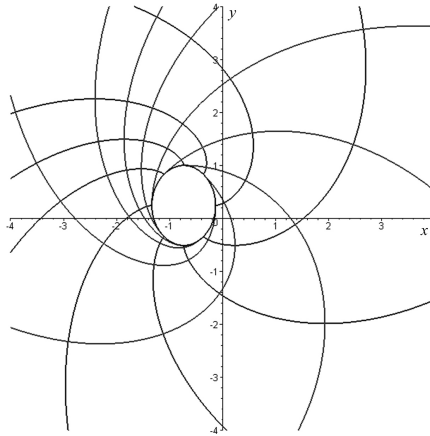


Рис. 7. Поле линий скольжения для решения, полученного в результате гомотопии решений Прандтля и Надаи для кругового отверстия с ненулевым касательным напряжением ( $a = 0.245$ ,  $p = p_1 = -k = -1/2$ ,  $h = R = 1$ )

Касательное напряжение  $\tau_n$  постоянно и равно  $-k$  при любых значениях параметра  $a$ . Нормальное напряжение  $\sigma_n = \sigma$  при  $a = 0$  постоянно и равно  $-p$ , а при  $a \neq 0$  уже не является постоянным и зависит от позиции точки на контуре. Для некоторых значений  $0 < a < \frac{R}{2h + R}$  нормальное напряжение  $\sigma_n$  сохраняет знак по всему контуру, что говорит о растяжении отверстия, хотя это растяжение и непостоянно вдоль контура; для других нормальное напряжение принимает различные знаки вдоль контура, что говорит о том, что есть как сжатие, так и растяжение вдоль контура.

**2.3. Гомотопия решений Прандтля и Надаи для круглого отверстия с нулевым касательным напряжением.** Построим новое аналитическое решение для системы пластичности (2), используя группу (19) оператора  $X_5$ .

Для этого выразим решение Надаи (15) в терминах функций  $x(\sigma, \theta)$ ,  $y(\sigma, \theta)$ , т.е. как решение линеаризованной системы (5):

$$\begin{aligned} x &= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) Re^{\frac{p_2-k}{2k}} e^{\frac{\sigma}{2k}}, \\ y &= \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) Re^{\frac{p_2-k}{2k}} e^{\frac{\sigma}{2k}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Полагая в соотношении (21) в качестве решения  $(x_1, y_1)$  решение Прандтля (26), а в качестве решения  $(x_2, y_2)$  решение Надаи (37), получим семейство новых решений системы (5):

$$\begin{aligned} x &= a\left(-\sigma\frac{h}{k} - p_1\frac{h}{k} - h\sin 2\theta\right) + (1-a)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) Re^{\frac{p_2-k}{2k}} e^{\frac{\sigma}{2k}}, \\ y &= ah\cos 2\theta + (1-a)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) Re^{\frac{p_2-k}{2k}} e^{\frac{\sigma}{2k}}. \end{aligned} \quad (38)$$

По аналогии с граничными условиями (16) ищем граничную кривую для нового решения (38). Полагая

$$\sigma = -p_1 + k, \quad \theta = \varphi + \frac{\pi}{4} \quad (39)$$

и переходя к полярным координатам, получаем, что:

$$r = -2ah\cos\varphi + (1-a)Re^{\frac{p_2-p_1}{2k}}. \quad (40)$$

Подставляя  $\sigma = 2k(c_1 + \theta)$  в (38), получим параметрическое уравнение первого семейства линий скольжения решения (38):

$$\begin{aligned} x &= -ah\left(2(c_1 + \theta) + \frac{p_1}{k} + \sin 2\theta\right) + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{c_1+\theta}, \\ y &= ah\cos 2\theta + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{c_1+\theta}, \end{aligned}$$

где  $\theta$  – параметр, а константа  $c_1$  определяет характеристику.

Аналогично, подставляя  $\sigma = 2k(c_2 - \theta)$  в (38), получим параметрическое уравнение второго семейства линий скольжения решения (38):

$$\begin{aligned} x &= -ah\left(2(c_2 - \theta) + \frac{p_1}{k} + \sin 2\theta\right) + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{c_2-\theta}, \\ y &= ah\cos 2\theta + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{c_2-\theta}, \end{aligned}$$

где  $\theta$  – параметр, а константа  $c_2$  определяет характеристику.

Таким образом, новое решение (38) удовлетворяет граничным условиям (39) вдоль граничной линии (40) и описывает напряженное состояние пластического материала вокруг отверстия, являющегося улиткой Паскаля (см. рис. 8).

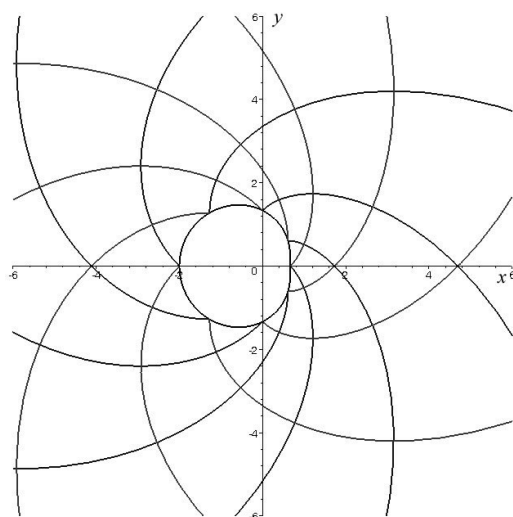


Рис. 8. Поле линий скольжения для отверстия в виде улитки Паскаля

**Заключение.** В настоящей работе рассмотрены некоторые приложения групп точечных симметрий системы двумерной идеальной пластичности для получения новых семейств решений из уже известных точных решений. Этот метод дает так называемые размноженные решения. Параметр группы непрерывных преобразований входит в новые решения как параметр семейства. Различным значениям этого параметра соответствуют различные решения. Так, из решения Прандтля для тонкого слоя с параллельными прямолинейными плитами получено семейство решений для слоя, сжимаемого плитами в виде расходящихся спиралей.

Понятие гомотопии решений, ассоциированное с бесконечномерной группой точечных симметрий, позволяет связать любые два решения системы пластичности между собой, если эти решения можно выразить в виде решений соответствующей линеаризованной системы. В работе построена гомотопия решения Прандтля с известными решениями Надаи. В результате получены поля линий скольжения для канала в виде плоской воронки, для овалоподобного отверстия и для отверстия в виде улитки Паскаля.

Для построенных решений находятся как граничная линия, так и соответствующие граничные условия, что позволяет дать механическую интерпретацию этих решений. Стоит заметить, что при некоторых значениях параметра, фигурирующего в решениях, происходит самопересечение характеристик одного семейства. Это может говорить о появлении в решениях линий разрыва. Эта ситуация требует дальнейшего исследования и будет рассмотрена в последующих работах.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Аннин, Б. Д.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1985. – 143 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 1 : Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.
- [3] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2003. – 704 с.
- [4] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [5] *Кирияков, П. П.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Кирияков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.
- [6] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : ИЛ, 1954. – 647 с.
- [7] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2 / А. Надаи. – М. : Мир, 1969.
- [8] *Овсянников, Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
- [9] *Олвер, П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М. : Мир, 1989. – 639 с.
- [10] Теория пластичности : сборник статей / ред. Ю. Н. Работнов. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – 452 с.
- [11] *Сенашов, С. И.* Деформация линий скольжения для двумерной идеальной пластичности / С. И. Сенашов, А. Яхно, Л. Яхно // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 4–18.
- [12] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
- [13] *Фрейденталь, А.* Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. М. Гейрингер. – М. : Физматгиз, 1962.
- [14] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТЛ, 1956.
- [15] *Яхно, Л. В.* Принцип суперпозиции решений для задачи плоской пластичности / Л. В. Яхно // Вестник СамГУ. – 2009. – № 2 (68). – С. 140–145.
- [16] *Яхно, Л. В.* Суперпозиция решений Надаи и Прандтля для системы двумерной идеальной пластичности / Л. В. Яхно // СиБЖИМ. – 2009. – № 3 (39). – С. 151–156.
- [17] *Nadai, A.* Über die Gleit- und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrter Körper / A. Nadai // Z. Physik. – 1924. – 30 (1). – P. 106–138.
- [18] *Prandtl, L.* Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht / L. Prandtl // ZAMM. – 1923. – 3 (6). – P. 401–406.
- [19] *Senashov, S. I.* Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity / S. I. Senashov, A. M. Vinogradov // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1988. – Vol. 3 (2). – P. 415–439.
- [20] *Senashov, S. I.* 2-dimensional plasticity: boundary problems and conservation laws, reproduction of solutions / S. I. Senashov, A. Yakhno // Symmetry in nonlinear mathematical physics. – Kiev, 2004. – Pt. 1, 2, 3. – P. 231–237.
- [21] *Senashov, S. I.* Reproduction of solutions of bidimensional ideal plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // Internat. J. Non-Linear Mech. – 2007. – Vol. 42. – P. 500–503.
- [22] *Senashov, S. I.* Group analysis of solutions of 2-dimensional differential equations / S. I. Senashov, A. Yakhno // In: Lie Groups: New Research. – 2009. – Ch. 4. – P. 123–138.
- [23] *Senashov, S. I.* Deformation of Characteristic Curves of the Plane Ideal Plasticity Equations by Point Symmetries / Sergey I. Senashov, Alexander Yakhno, Liliya Yakhno // Nonlinear Analysis : theory, methods and applications. – 2009. – Vol. 71 (12). – P. 1274–1284.

S. I. Senashov, A. Yakhno, L. Yakhno

**CONSTRUCTION OF THE NEW DECISIONS AND THEIR  
CHARACTERISTICS FOR TWO-DIMENSIONAL IDEAL PLASTICITY WITH  
THE HELP OF SYMMETRIES**

*Siberian State Aerospace University*

*Universidad de Guadalajara*

**Abstract.** The hyperbolic system of the equations of two-dimensional ideal plasticity with the Tresca-Saint-Venant-Mises fluidity condition is considered. The technique of decisions reproduction for reception of new decisions and their characteristics is used. Homotopy of the decisions of the considered system which allows to receive the new classes of analytical decisions is constructed. The mechanical sense of received decisions is discussed.

**Keywords:** pressure, deformation, ideal plasticity, group analysis, symmetries of differential equations, exact decisions, homotopy.

*Сенашов Сергей Иванович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск*

**e-mail:** senashov@mail.kgtei.ru

*Яхно Александр Николаевич*

*кандидат физико-математических наук, профессор, Университет Гвадалахары, Гвадалахара, Мексика*

**e-mail:** alexander.yakhno@cucei.udg.mx

*Яхно Лилия Владимировна*

*кандидат физико-математических наук, профессор, Университет Гвадалахары, Гвадалахара, Мексика*

**e-mail:** iakhno@kgtei.ru

*Senashov, Sergey Ivanovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk*

*Yakhno, Alexander Nikolaevich*

*Candidate of Phys. & Math., Professor, Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Mexico*

*Yakhno, Lilia Vladimirovna*

*Candidate of Phys. & Math., Professor, Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Mexico*



В. В. Сильвестров, Ю. О. Васильева

## ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ТРЕЩИНА С ЖЕСТКОЙ НАКЛАДКОЙ НА БЕРЕГУ

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина,

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

**Аннотация.** Рассматривается прямолинейная полубесконечная трещина в однородном упругом теле, к верхнему берегу которой на конечном промежутке, примыкающем к вершине трещины, присоединена жесткая прямолинейная накладка. Берега трещины свободны от напряжений. Тело растягивается заданным продольным напряжением на бесконечности. На накладку действуют внешние силы, имеющие заданный главный вектор и момент. Методом римановых поверхностей находятся угол поворота накладки и комплексные потенциалы, описывающие напряженное состояние тела, исследуется напряженное состояние тела вблизи вершины трещины и второго конца накладки. Приводятся многочисленные числовые примеры.

**Ключевые слова:** трещина, жесткая накладка, упругость, смешанная задача, точное решение, напряжения, коэффициенты интенсивности напряжений, штамп.

УДК: 539.3

Пусть в однородном изотропном упругом теле с модулем сдвига  $\mu$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  на положительной полуоси  $Ox$  расположена полубесконечная открытая трещина  $[0, +\infty)$ . Ось  $Oy$  проходит через вершину трещины и направлена снизу вверх. К верхнему берегу трещины на участке  $[0, l]$  присоединена абсолютно жесткая прямолинейная накладка, а остальная часть этого берега и весь нижний берег трещины свободны от напряжений:

$$\begin{aligned}u^+(x) + iv^+(x) &= i\varepsilon x, \quad x \in (0, l), \\ \tau_{xy}^+(x) + i\sigma_y^+(x) &= 0, \quad x \in (l, +\infty), \\ \tau_{xy}^-(x) + i\sigma_y^-(x) &= 0, \quad x \in (0, +\infty),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $u + iv$  — вектор смещений,  $\tau_{xy} + i\sigma_y$  — вектор напряжений,  $\varepsilon$  — угол поворота накладки, а верхние индексы «+» и «-» у функций означают их значения на верхнем и нижнем берегах трещины соответственно. Угол поворота  $\varepsilon$  накладки неизвестен и находится после решения задачи. На бесконечности действует заданное нормальное продольное напряжение  $\sigma_x^\infty$ . Нормальное отрывающее напряжение  $\sigma_y^\infty$  и касательное напряжение  $\tau_{xy}^\infty$  на бесконечности исчезают, причем так, что

$$\sigma_y - i\tau_{xy} \sim \frac{K_I^\infty - iK_{II}^\infty}{\sqrt{2\pi z}}, \quad z \rightarrow \infty \quad (z = x + iy),\tag{2}$$

Поступила 16.06.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00103)

где  $K_I^\infty, K_{II}^\infty$  – заданные действительные постоянные. Вращение на бесконечности равно  $\omega^\infty$ . Заданы еще главный вектор  $X_0 + iY_0$  внешних сил, действующих на накладку, и момент  $M_0$  этих сил относительно точки  $z = 0$ .

Требуется найти комплексные потенциалы, описывающие напряженное состояние упругого тела, при котором напряжения и вращение в вершине трещины  $z = 0$  и на правом конце накладки  $z = l + i0$  могут иметь особенности интегрируемого характера, и исследовать их поведение вблизи этих точек.

Выразим напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , вращение  $\omega$  и производную по  $x$  от вектора смещения  $u + iv$  через комплексные потенциалы  $\Phi(z), \Omega(z)$  ( $z = x + iy$ ) по формулам Колосова-Мусхелишвили [1]

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re}\Phi(z), \quad 2\mu\omega = (1 + \kappa)\operatorname{Im}\Phi(z), \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu(u + iv)'_x &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\kappa = 3 - 4\nu$  при плоской деформации тела и  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  при плоском напряженном состоянии. Функции  $\Phi(z), \Omega(z)$  кусочно-голоморфны с линией разрыва  $[0, +\infty)$  и ограничены на бесконечности. В точках  $z = 0$  и  $z = l \pm i0$  они могут иметь особенности интегрируемого характера, однако функция  $\Phi(z)$  должна быть ограниченной в точке  $z = l - i0$ , а функция  $\Omega(z)$  – в точке  $z = l + i0$ , что необходимо и достаточно для ограниченности напряжений в окрестности точки  $z = l - i0$ .

Из условий (1), дифференцируя первое по  $x$ , на основании формул (3) получим матричную краевую задачу Римана

$$\begin{aligned} \kappa\Phi^+(x) - \Omega^-(x) &= 2i\mu\varepsilon, \quad x \in (0, l), \\ \Phi^+(x) + \Omega^-(x) &= 0, \quad x \in (l, +\infty), \\ \Phi^-(x) + \Omega^+(x) &= 0, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned} \tag{4}$$

Разные методы решения задачи (4) изложены в работах [2–4]. Здесь мы воспользуемся работами [3; 4], следуя которым на двулистной римановой поверхности  $R$  алгебраической функции  $w$ , определяемой уравнением  $w^2 = z$ , определим функцию

$$F(z, w) = \begin{cases} \Phi(z), & (z, w) \in \mathbb{C}_1, \\ -\Omega(z), & (z, w) \in \mathbb{C}_2, \end{cases} \tag{5}$$

которая на  $R$  непрерывна всюду, кроме линии  $L = [0, l]^+$ , на которой она удовлетворяет краевому условию

$$F^+(t, \zeta) = -\kappa^{-1}F^-(t, \zeta) + 2i\kappa^{-1}\mu\varepsilon, \quad (t, \zeta) \in L. \tag{6}$$

Линия  $L$  расположена на линии склеивания листов поверхности  $R$  и на ней  $\zeta = \sqrt{t}$ ,  $0 < t < l$ . Ограниченное на бесконечности решение задачи (6), допускающее интегрируемые особенности на концах линии  $L$ , имеет вид

$$\begin{aligned} F(z, w) &= X(z, w)[A_0w^{-1} + A_1 + A_2w + \mu\varepsilon I(z, w)], \\ X(z, w) &= \frac{1}{w - \sqrt{l}} \exp\left(\frac{\ln(-\kappa^{-1})}{2\pi i} \int_L \frac{w + \zeta}{2\zeta} \frac{dt}{t - z}\right), \\ I(z, w) &= \frac{1}{\pi\kappa} \int_L \frac{1}{X^+(t, \zeta)} \frac{w + \zeta}{2\zeta} \frac{dt}{t - z}, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $A_k$  — комплексные постоянные. Так как  $w = \sqrt{z}$  ( $0 < \arg z < 2\pi$ ) на  $\mathbb{C}_1 \setminus [0, +\infty)$  и  $w = -\sqrt{z}$  на  $\mathbb{C}_2 \setminus [0, +\infty)$ , то на основании (5), (7), вычислив некоторые интегралы, находим

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= z^{-\frac{1}{4}-i\delta}(\sqrt{z}-\sqrt{l})^{-\frac{1}{2}+2i\delta} [A_0(\sqrt{z})^{-1} + A_1 + A_2\sqrt{z} + \mu\varepsilon(I_1(z) + \sqrt{z}I_2(z))], \\ \Omega(z) &= z^{-\frac{1}{4}-i\delta}(\sqrt{z}+\sqrt{l})^{-\frac{1}{2}+2i\delta} [-A_0(\sqrt{z})^{-1} + A_1 - A_2\sqrt{z} + \mu\varepsilon(I_1(z) - \sqrt{z}I_2(z))],\end{aligned}\quad (8)$$

$$I_1(z) = \frac{i}{2\pi\sqrt{\kappa}} \int_0^l t^{\frac{1}{4}+i\delta} (\sqrt{l}-\sqrt{t})^{\frac{1}{2}-2i\delta} \frac{dt}{t-z},$$

$$I_2(z) = \frac{i}{2\pi\sqrt{\kappa}} \int_0^l t^{-\frac{1}{4}+i\delta} (\sqrt{l}-\sqrt{t})^{\frac{1}{2}-2i\delta} \frac{dt}{t-z}, \quad \delta = (4\pi)^{-1} \ln \kappa,$$

где функции  $\sqrt{z}$ ,  $z^{-\frac{1}{4}-i\delta}$ ,  $(\sqrt{z}-\sqrt{l})^{-\frac{1}{2}+2i\delta}$ ,  $(\sqrt{z}+\sqrt{l})^{-\frac{1}{2}+2i\delta}$ , однозначные в плоскости с разрезом по лучу  $[0, +\infty)$ , фиксированы условиями:  $\arg z = 0$  на верхнем берегу  $(0, +\infty)^+$  указанного разреза для первых двух функций;  $\arg(\sqrt{z}-\sqrt{l}) = 0$  на верхнем берегу  $(l, +\infty)^+$  для третьей функции и  $\arg(\sqrt{z}+\sqrt{l}) = \pi$  на нижнем берегу  $(l, +\infty)^-$  для последней функции.

Из формул (8) видно, что в окрестности бесконечности

$$\Phi(z) = A_2 + \left[ A_1 + A_2 \left( \frac{1}{2} - 2i\delta \right) \sqrt{l} \right] z^{-\frac{1}{2}} + O(z^{-1}),$$

$$\Omega(z) = -A_2 + \left[ A_1 + A_2 \left( \frac{1}{2} - 2i\delta \right) \sqrt{l} \right] z^{-\frac{1}{2}} + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Тогда на основании формул (3) имеем

$$\sigma_x^\infty = 4\operatorname{Re}A_2, \quad 2\mu\omega^\infty = (1 + \kappa)\operatorname{Im}A_2,$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 2 \left[ A_1 + A_2 \left( \frac{1}{2} - 2i\delta \right) \sqrt{l} \right] z^{-\frac{1}{2}} + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty,$$

откуда в силу (1)

$$A_2 = \frac{\sigma_x^\infty}{4} + i \frac{2\mu\omega^\infty}{1 + \kappa}, \quad A_1 = \frac{1}{2} (K_I^\infty - iK_{II}^\infty) - A_2 \left( \frac{1}{2} - 2i\delta \right) \sqrt{l}.$$

Для нахождения постоянных  $A_0$  и  $\varepsilon$  воспользуемся условиями равновесия накладки

$$\int_0^l [\tau_{xy}^+(t) + i\sigma_y^+(t)] dt = -X_0 - iY_0, \quad \int_0^l t\sigma_y^+(t) dt = -M_0,$$

откуда на основании формул (3) и первого краевого условия (4) получим два равенства

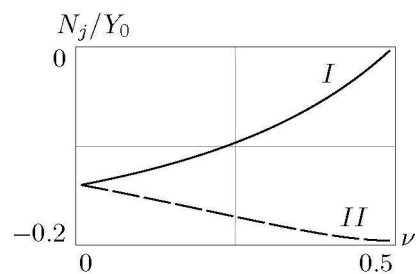
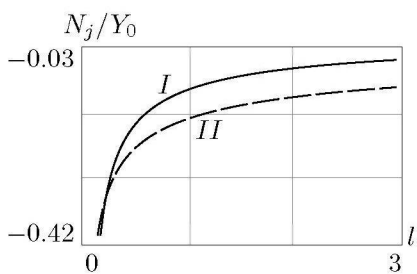
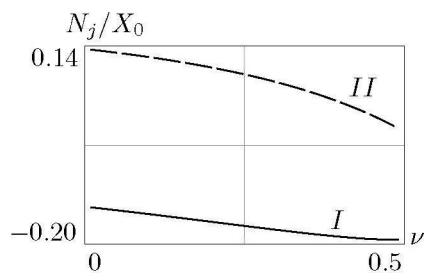
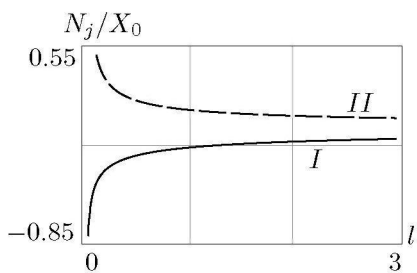
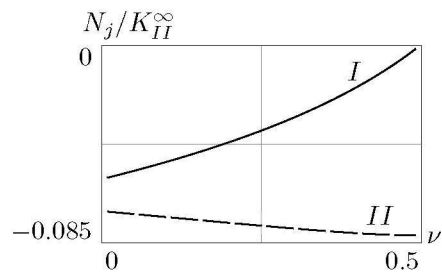
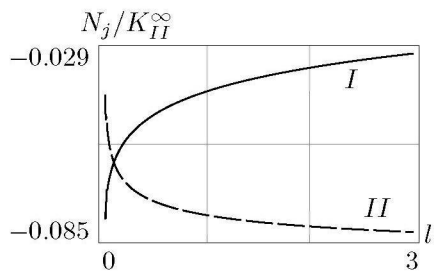
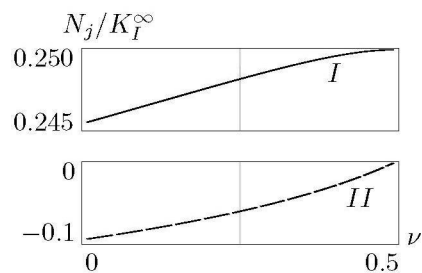
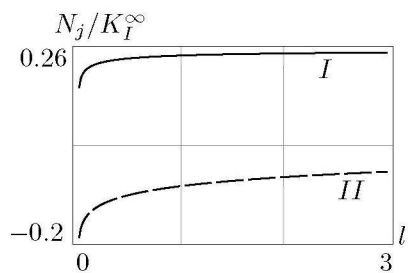
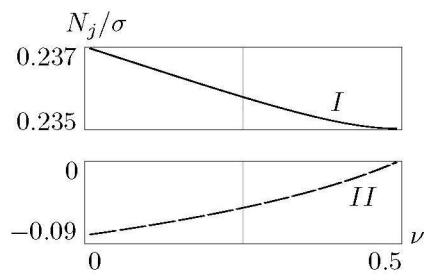
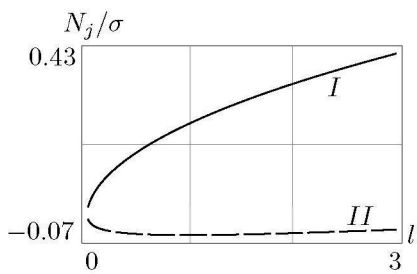
$$(\kappa + 1) \int_0^l \Phi^+(t) dt - 2i\mu\varepsilon l = i(X_0 + iY_0), \quad (\kappa + 1) \int_0^l t\operatorname{Re}\Phi^+(t) dt = -M_0,$$

которые после подстановки

$$\Phi^+(t) = -i\kappa^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{4}-i\delta} (\sqrt{l}-\sqrt{t})^{-\frac{1}{2}+2i\delta} [A_0 t^{-\frac{1}{2}} + A_1 + A_2\sqrt{t} + \mu\varepsilon(I_1^+(t) + \sqrt{t}I_2^+(t))]$$

представляют собой систему трех линейных действительных уравнений относительно оставшихся неизвестных  $\operatorname{Re}A_0$ ,  $\operatorname{Im}A_0$  и угла поворота  $\varepsilon$ .

Значения отношения  $\varepsilon\mu/p$  для различных значений модуля Юнга  $\nu$  упругого тела в зависимости от параметра  $p$ , равного одному из значений  $K_I^\infty/\sqrt{l}$ ,  $K_{II}^\infty/\sqrt{l}$ ,  $X_0/l$ ,  $Y_0/l$ ,  $M_0/l^2$  при нулевых значениях остальных, приведены в прилагаемой таблице. В случае исключительно продольного растяжения среды напряжением  $\sigma_x^\infty$  включение практически не поворачивается ( $\mu\varepsilon \approx 0$ ). Из этой таблицы, в частности, видно, что при значениях  $p$ , сравнимых с 1, значение  $\varepsilon$  имеет порядок малости от  $10\mu^{-1}$  до  $1000\mu^{-1}$ .



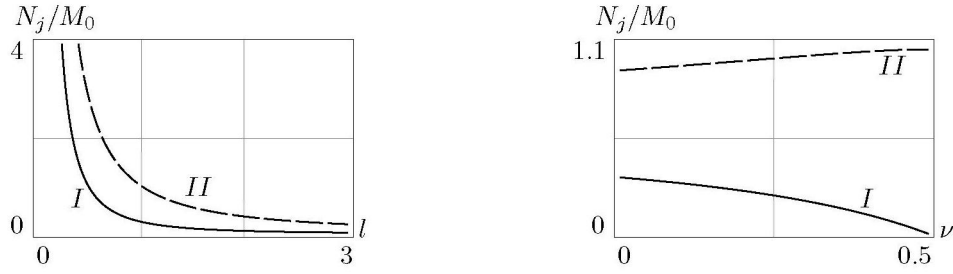


Рис. 1.

Например, для тела с модулем сдвига  $\mu = 100\text{МПа}$  угол поворота включения  $\varepsilon$  в радианах имеет порядок малости  $10^{-7} \div 10^{-5}$ . Расчеты проведены для случая плоского деформированного состояния тела.

$\nu$	Значения $\varepsilon\mu/p$ при $p =$				
	$K_I^\infty/\sqrt{l}$	$K_{II}^\infty/\sqrt{l}$	$X_0/l$	$Y_0/l$	$M_0/l^2$
0.0	-0.0815	-0.6997	0.3479	-0.7157	1.9898
0.1	-0.0640	-0.6318	0.2806	-0.6707	1.8456
0.2	-0.0471	-0.5634	0.2122	-0.6210	1.6916
0.3	-0.0308	-0.4945	0.1426	-0.5651	1.5249
0.4	-0.0152	-0.4250	0.0718	-0.5009	1.3410
0.5	0.0	-0.3546	0.0	-0.4244	1.1317

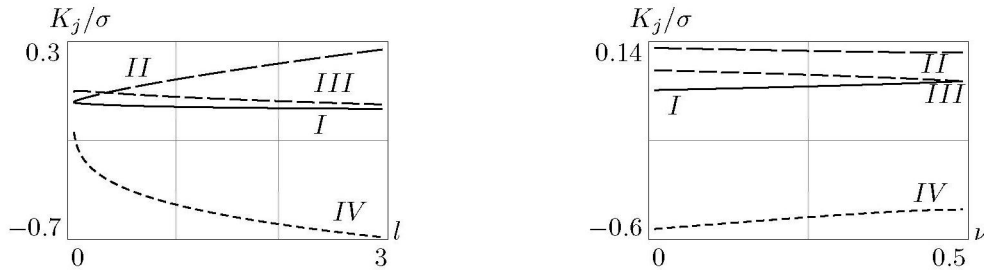
Изучим теперь поведение напряжений вблизи концов накладки. Из формул (8) видно, что в точке  $z = l - i0$  функция  $\Phi(z)$  ограничена, а функция  $\Omega(z)$  ограничена в точке  $z = l + i0$ . Следовательно, в полукрестности точки  $z = l - i0$  напряжения ограничены.

Согласно (8) вблизи точки  $z = l + i0$  справедливы представления

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{N_I - iN_{II}}{\sqrt{\pi}(z-l)^{\frac{1}{2}-2i\delta}} + O(1), \\ \Omega(\bar{z}) &= \frac{\kappa(N_I - iN_{II})}{\sqrt{\pi}(\bar{z}-l)^{\frac{1}{2}-2i\delta}} + O(1), \quad \text{Im}z > 0, \quad z \rightarrow l + i0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$N_I - iN_{II} = \sqrt{2\pi}(2l)^{-2i\delta} [A_0 l^{-\frac{1}{2}} + A_1 + A_2 \sqrt{l} + \mu\varepsilon(I_1(l) + I_2(l)\sqrt{l})],$$

где  $2\delta = (2\pi)^{-1} \ln \kappa$ .



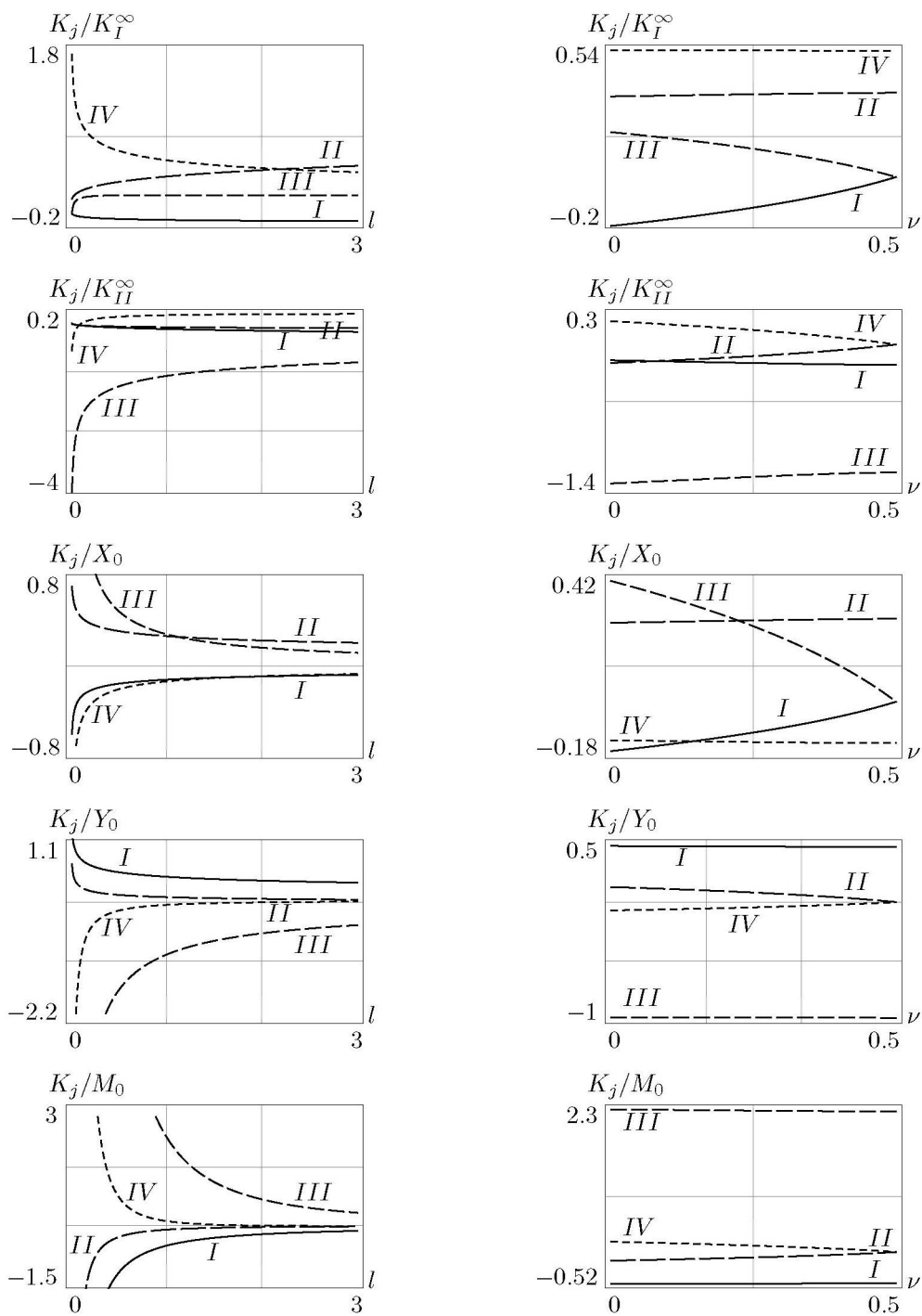


Рис. 2.

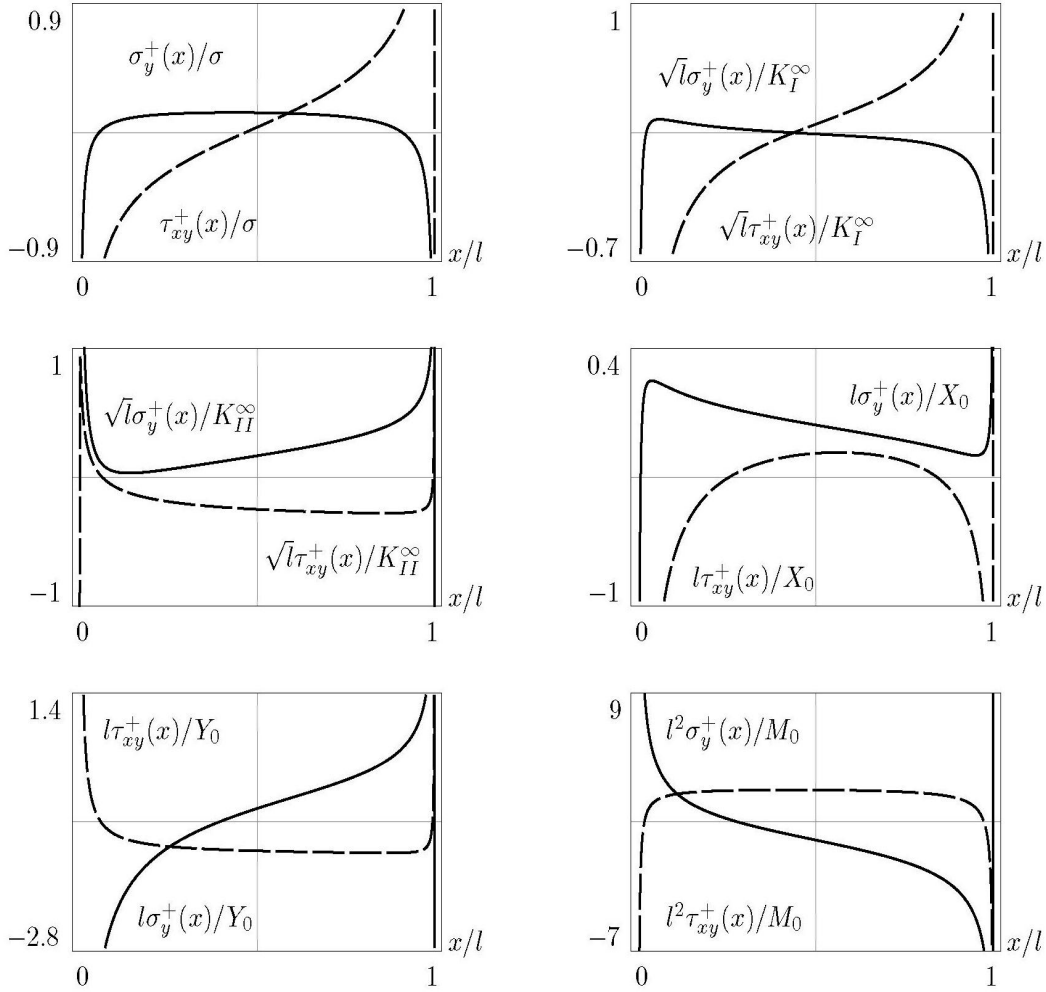


Рис. 3.

Следовательно, напряжения вблизи точки  $z = l + i0$  ведут себя так же, как вблизи вершины жесткого штампа, полностью сцепленного со средой [1], и их поведение полностью определяется числами  $N_I, N_{II}$  — коэффициентами интенсивности напряжений вблизи точки  $z = l + i0$ . Графики зависимости их от длины накладки  $l$  и от коэффициента Пуассона  $\nu$  для различных видов силовых нагрузок приведены на рисунках 1. При изменении  $l$  принято  $\nu = 0.2$ , а при изменении  $\nu$  принято  $l = 1$ .

Вблизи вершины трещины и одновременно левого конца включения  $z = 0$ , согласно (8),

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= i\kappa^{-\frac{1}{2}} [B_0 z^{-\frac{3}{4}-i\delta} - B_1 z^{-\frac{1}{4}-i\delta}] + O(1), \\ \Omega(z) &= B_0 z^{-\frac{3}{4}-i\delta} + B_1 z^{-\frac{1}{4}-i\delta} + O(1), \quad z \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$B_0 = -A_0 l^{-\frac{1}{2}+2i\delta}, \quad B_1 = [A_1 + \mu \varepsilon I_1(0)] l^{-\frac{1}{2}+2i\delta},$$

поэтому на действительной отрицательной полуоси  $x < 0$

$$\sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) = \kappa^{-\frac{1}{2}} [(\sqrt{\kappa} + i)B_0 x^{-\frac{3}{4}-i\delta} + (\sqrt{\kappa} - i)B_1 x^{-\frac{1}{4}-i\delta}] + O(1), \quad x \rightarrow 0 - 0$$

или

$$\sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) = \frac{K_I - iK_{II}}{\sqrt{2\pi}|x|^{\frac{3}{4}+i\delta}} + \frac{K_{III} - iK_{IV}}{\sqrt{2\pi}|x|^{\frac{1}{4}+i\delta}} + O(1), \quad x \rightarrow 0 - 0,$$

где

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\pi}\kappa^{-\frac{1}{4}}(1+i)(\sqrt{\kappa}+i)A_0l^{-\frac{1}{2}+2i\delta},$$

$$K_{III} - iK_{IV} = \sqrt{\pi}\kappa^{-\frac{1}{4}}(1-i)(\sqrt{\kappa}-i)[A_1 + \mu\varepsilon I_1(0)]l^{-\frac{1}{2}+2i\delta} -$$

коэффициенты интенсивности напряжений вблизи вершины трещины. Их графики в зависимости от длины накладки  $l$  и от коэффициента Пуассона  $\nu$  для различных видов силовых нагрузок приведены на рисунке 2. Как и на рисунке 1, при изменении  $l$  принято  $\nu = 0.2$ , а при изменении  $\nu$  принято  $l = 1$ .

На рисунке 3 приведены графики контактных напряжений  $\sigma_y^+(x), \tau_{xy}^+(x)$  под накладкой при разных видах силовых нагрузок, приложенных к телу или накладке. При расчетах принято  $\nu = 0.2$ . Из представлений (9), (10) следует, что напряжения вблизи концов  $z = 0, z = l + i0$  имеют не только степенную, но и осциллирующую особенность, причем осциллирующая особенность напряжений проявляется лишь в достаточно малых окрестностях этих точек, которыми вполне можно пренебречь. В частности, это хорошо видно из рисунка 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [2] *Черепанов, Г. П.* Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости / Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, вып. 5. – С. 907–912.
- [3] *Зверович, Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гильдеровских классах на римановых поверхностях / Э. И. Зверович // Успехи математических наук. – 1971. – Т. 26, вып. 1. – С. 113–179.
- [4] *Нуллер, Б. М.* Контактные задачи для системы упругих полуплоскостей / Б. М. Нуллер // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т. 54, вып. 2. – С. 302–306.



V. V. Silvestrov, Yu. O. Vasileva

## SEMI-INFINITE CRACK WITH A RIGID OVERLAY ON THE EDGE

*I. Gubkin Russian State University of Oil and Gas*

*I. Ulyanov Chuvash State University*

**Abstract.** The rectilinear semi-infinite crack in a homogeneous elastic body is considered. The rigid rectilinear overlay is attached to the top shore on the final interval adjoining top of a crack. Crack edges are free from pressures. The body is stretched by the set longitudinal stress on infinity. The external forces having the set main vector and the moment influence on the overlay. The angle of an overlay rotation and the complex potentials describing a body's tension are calculated by the Riman surfaces method, the body's tension near to the top of a crack and the second end of an overlay is investigated. Numerous numerical examples are given.

**Keywords:** a crack, a rigid overlay, elasticity, mixed problem, exact decision, pressures, the factors of pressure intensity, a stamp.

*Сильвестров Василий Васильевич*

*доктор физико-математических наук, профессор, Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, г. Москва*

**e-mail:** v silvestrov@mail.ru

*Васильева Юлия Олеговна*

*аспирант, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары*

*Silvestrov, Vasily Vasilyevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow*

*Vasileva, Yulia Olegovna*

*Postgraduate student, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary*

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ТЕЛ

*Военный авиационный инженерный университет*

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы устойчивости нелинейно-упругих тел при динамическом нагружении. После наложения конечных возмущений на основное состояние деформированного нелинейно-упругого тела получена система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая исследуется в одномерном случае. Получены критерии устойчивости.

**Ключевые слова:** устойчивость нелинейно-упругих тел, конечные возмущения, нелинейные колебания.

УДК: 539.3

В данном параграфе рассмотрим вопрос неустойчивости нелинейно-упругих тел при динамическом нагружении относительно конечных возмущений. Вопрос о переходе динамических закономерностей в статистические в нелинейно-упругих системах, когда движение системы принимает перемешивающийся, стохастический характер, обсуждался в работе [1]. В рамках представлений [2] рассмотрим процесс деформирования нелинейно-упругого тела, занимающего в начальный момент времени объем  $V$ . Определяющие соотношения для нелинейно-упругого тела принимаем в виде [3]

$$\nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^m)] + X^m - \rho \ddot{u}^m = 0, \quad (1)$$

$$S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^m) N_1 |_{S_1} = P^m, \quad (2)$$

$$u_m |_{S_1} = f(x_1, x_2, x_3, t), \quad (3)$$

где (1)-(3) уравнения движения и граничные условия в напряжениях и перемещениях на частях поверхности  $S_1$  и  $S_2$ .

В предположении существования функции энергии деформации  $W$ , отнесенной к единице объема в теле до деформации, компоненты тензора напряжений  $S^{ij}$  для сжимаемого и несжимаемого тела, соответственно, будут вычисляться по формулам

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) W; \quad (4)$$

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) W + p G^{ij}, \quad (5)$$

где множитель лагранжа  $p$  является скалярной функцией координат  $\xi_j$ .

При исследовании устойчивости нелинейно-упругих тел как для динамического, так и статического нагружения, рассмотрим возмущенное состояние, отличающееся от заданного состояния, описываемого системой уравнений (1)-(5), наличием конечных возмущений. При

этом считаем, что компоненты поверхностных и массовых сил есть функции времени. Учитывая, что компоненты невозмущенного состояния удовлетворяют соотношениям (1)-(5), получим уравнения относительно возмущений, являющиеся нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных вида [3]

$$\nabla_i [(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m] + \nabla_i [S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] + \rho_0 X^m - \rho_0 \ddot{u}^m = 0; \quad (6)$$

$$[(S^{0in} + S^{in}) \nabla_n u^m + S^{in} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] N_i^0 = P^m. \quad (7)$$

Здесь нуликом отмечены величины основного состояния, возмущениям не приписан никакой индекс.

Отыскиваем решение системы уравнений в возмущениях в виде ряда

$$u_j(\xi_i, t) = \sum_m f_m(t) \cdot \varphi_j^m(\xi_i). \quad (8)$$

Составим вариационное уравнение [4] метода Бубнова-Галеркина, соответствующее нелинейной краевой задаче, заданной уравнениями (1)-(5). Для этого, будем трактовать эти уравнения как уравнения принципа возможных перемещений, учитывая, что левые части уравнений (6) представляют собой взятые с обратным знаком компоненты некоторых объемных сил, а левые части уравнений (7) – компоненты некоторых поверхностных сил, составим условия, чтобы работа этих сил на возможных перемещениях  $\delta u_m (m = 1, 2, 3)$  была равна нулю.

Способом, аналогичным [5], получим систему нелинейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$A_l^k \ddot{Z}_l + C_l^k Z_l + D_{lr}^k Z_l Z_r + L_{lr d}^k Z_l Z_r Z_d + \dots = \zeta \Phi(t), \quad (9)$$

нулевое решение этой системы соответствует невозмущенному состоянию.

Коэффициенты системы уравнений (9) конкретизируются заданием формы упругого потенциала и имеют вид

$$\begin{aligned} A_p^k &= \rho_0 \int_V \varphi_p^m \varphi_m^k dV; \\ B_p^k &= - \int_V \varphi_{mp} M_2^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dV - \int_S \varphi_{mp} M_4^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dS; \\ C_p^k &= \int_V [S^{0in} \nabla_n \varphi_p^m + g_{lp} S^{inl} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \nabla_l \varphi_m^k dV - \\ &\quad - \rho_0 \int_V \varphi_{mp} M_2^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dV - \rho_0 \int_V \varphi_{mp} M_4^{m\alpha} \varphi_\alpha^k dS; \\ D_p^{kd} &= \int_V [S^{ind} \nabla_n \varphi^{mk} + S^{indk} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \nabla_l \varphi_{mp} dV; \\ L_p^{kdr} &= \int_V [S^{indk} \nabla_n \varphi^{mr} + S^{indkr} (\delta_n^m + \nabla_n u^{0m})] \nabla_l \varphi_{mp} dV. \\ &\dots \\ &p, k, d, r, \dots = 1, 2, 3, \dots \infty \end{aligned}$$

Если ограничиться в дальнейшем рассмотрении потенциалом Муни, Трелоара или гармонического типа, то в левой части системы уравнений (9) останутся только четыре первых слагаемых.

Для одномерного случая из (9) получим следующее уравнение:

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z + \beta Z^2 + \alpha Z^3 = \zeta \Phi(t), \quad (10)$$

где  $\Phi(t)$  – внешнее возмущение,  $\omega_0$  – собственная частота. Очевидно, что выбор кубической восстанавливающей силы переводит (10) в аналог уравнения Дуффинга при малом затухании

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z(I + \alpha Z^2) = \zeta \Phi. \quad (11)$$

Представим  $\Phi(t)$  в виде  $\delta_0$ -функций с периодом  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  ( $\Omega$  – частота внешнего возмущения) и

$$\Phi(t) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT) \quad (\Omega \ll \omega_0). \quad (12)$$

Далее предположим  $\delta_0$  – образность какой-либо производной  $\Phi(t)$

$$\frac{d^n \Phi(t)}{dt^n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - kT), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Это соответствует присутствию большого числа гармоник в спектральном составе внешнего возмущения. Уравнение (11) с учетом (13) будет иметь вид

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z(I + \alpha Z^2) = \varepsilon Z \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - kT). \quad (14)$$

В интервале между двумя соседними  $\delta$ - толчками решение уравнения (14) имеет вид

$$Z = A \cos \left[ \left( 1 + \frac{3}{8} \alpha A^2 \right) \omega_0 t + \varphi \right]. \quad (15)$$

Опуская промежуточные преобразования, аналогичные [6], получим в конечных разностях рекуррентную формулу изменения амплитуды и фазы колебаний в виде

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{1}{2} A_n (2 + \varepsilon \sin 2\varphi_n), \\ \varphi_{n+1} &= \left\{ \varphi_n + \frac{\omega_n 2\pi}{\Omega} + (2S_n \cos \varphi_n - \varepsilon \sin \varphi_n) \sin \varphi_n + \varepsilon \right\}, \\ S_n &= \frac{3}{16\pi} \varepsilon A_n^2 \alpha \omega t. \end{aligned} \quad (16)$$

Фигурные скобки в (16) означают дробную часть аргумента. В случае  $S_n < 1$  разностные уравнения (16) можно заменить дифференциальными, описывающими нелинейный резонанс. В этом случае исследование устойчивости можно проводить с помощью критериев, приведенных в [7].

При  $S_n \gg 1$  переход от разностных уравнений к дифференциальным невозможен и условие  $S_n \gg 1$  эквивалентно закону релаксации (закону расщепления корреляций) [6].

Очевидно, затухание фазовых скоростей в соседних точках имеет вид

$$K_1 = \frac{1}{S_1} \approx \frac{1}{S_2} \approx \dots \approx \frac{1}{S_n} \approx 0 \quad (17)$$

и характеризует случайную последовательность фаз  $\psi_1, \psi_2, \dots$ . При реализации критерия стохастичности ( $S_n \gg 1$ ) для исследования устойчивости нелинейных колебаний (14) необходимо привлекать вероятностные методы.

Уравнение (14) перепишем в переменных "действие-угол" ( $J, \beta$ ) в стандартной форме [8]

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \zeta \frac{\partial H(J, \beta, t)}{\partial \beta}, \\ \dot{\beta} &= \omega(J) + \zeta \frac{\partial H(J, \beta, t)}{\partial J}. \end{aligned} \quad (18)$$

$H = H_0(J) + \zeta H_1(J, \beta, t)$  – гамильтониан системы. Вторым членом во втором уравнении (18) можно пренебречь, так как для малых  $\zeta$  ( $\zeta \ll 1$ ) он имеет меньший порядок по сравнению с нелинейностью в  $\omega(J)$ .

Введем функцию плотности вероятности  $W(J, \beta, t)$  и запишем уравнение Лиувилля относительно  $W$  в виде [6]

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= (L_0 + \varepsilon \delta L)W, \\ L_0 &= -\omega \frac{\partial}{\partial \beta}, \\ \delta L &= \left[ \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial}{\partial \beta} \right].\end{aligned}\quad (19)$$

Разложим функции  $W(J, \beta, t)$ ,  $R(J, \beta, t) = \frac{\partial H_1(J, \beta, t)}{\partial \beta}$  в ряды Фурье

$$\begin{aligned}W(J, \beta, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n(J, t) \exp in\beta, \\ R(J, \beta, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{n,n}(J) \exp(n + n\Omega t).\end{aligned}\quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), получим уравнение, которое для начального распределения

$$W_n(J, \beta) = W_0(J, \beta) \delta_{n,0}$$

принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial J} \langle CJW_1 \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial J^2} (DJ^2W_1), \\ C &= \frac{1}{2} D = 16\varepsilon^2 \frac{\pi}{T}.\end{aligned}\quad (21)$$

Уравнение (21) представляет собой диффузионное уравнение типа Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для функции распределения  $W_0$  от переменных действия-угол  $J, \beta$  которые служат интегралами движения невозмущенной системы.

Решение уравнения (21) дает значение функции плотности состояния, с помощью которой можно проводить исследование устойчивости в стохастической области, стохастического поведения системы (14) [7].

Стохастическое дифференциальное уравнение, соответствующее (21), в старых переменных запишется в форме

$$\dot{Z} = \frac{1}{2} Z \sqrt{2C} \tilde{\gamma}(t); \quad \langle \tilde{\gamma}(t) \rangle = 0; \quad \langle \tilde{\gamma}(t) \tilde{\gamma}(t + \tau) \rangle = \delta(\tau), \quad (22)$$

где  $\tilde{\gamma}(t)$  – возмущение в виде “белого шума”.

В (22) сделано предположение, что “белый шум”  $\tilde{\gamma}(t)$  имеет единичную спектральную плотность на всей оси частот. Тогда уравнение ФПК, соответствующее (22), примет вид:

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{C}{4} Z W_0 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} (C Z^2 W_0). \quad (21)$$

Интегрируя (3.4.15) при  $\frac{\partial W_0}{\partial t} = 0$ , получим [7]

$$W_{0S}(Z) = \frac{M}{C Z^2} \exp \ln \sqrt{Z},$$

где  $M$  – постоянная интегрирования, определяемая из условия нормировки

$$M = \int_0^{\infty} \frac{1}{C Z^2} \exp \ln \sqrt{Z} dZ.$$

Решение уравнения (14)  $Z^*(t) = 0$  [14] назовем устойчивым в среднеквадратичном, если для любого  $\mu > 0$  найдется такое  $\Delta(\mu) > 0$ , что при выполнении условия  $|Z_0| < \Delta(\mu) > 0$  для любого  $t > t_0$  справедливо неравенство

$$E[Z^2] < \mu,$$

где  $[Z^2]$  – среднеквадратическое значение, определяемое равенством

$$E[Z^2] = \int_{-Z}^Z W_{0S} Z^2 dZ.$$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Наука, 1974.
- [2] Спорыхин, А. Н. О новых явлениях в теории устойчивости нелинейных сред при конечных возмущениях / А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 8. – С. 46–49.
- [3] Грин, А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс. – М. : Мир, 1965. – 456 с.
- [4] Болотин, В. В. Нелинейная теория упругости и устойчивость “в большом” / В. В. Болотин // Расчеты на прочность. – М., 1958. – Вып. 3. – С. 310–353.
- [5] Спорыхин, А. Н. Иерархия устойчивых состояний в механике нелинейных сред / А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 1999. – 210 с.
- [6] Заславский, Г. М. Стохастичность динамических систем / Г. М. Заславский. – М. : Наука, 1984.
- [7] Пригожин, И. Неравновесная статистическая механика / И. Пригожин. – М. : Мир, 1964.
- [8] Стратонович, Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. – М. : Сов. радио, 1961.

A. I. Sumin

### OCCURRENCE OF STOCHASTIC INSTABILITY IN NONLINEAR FLUCTUATIONS OF ELASTIC BODIES

*Military Aviation Engineering University*

**Abstract.** Questions of stability of nonlinearly elastic bodies at dynamic load are considered. The system of second order ordinary differential equations is obtained after imposing finite disturbances on the basic condition of the deformed nonlinearly elastic body. This system is investigated in one-dimensional case. The stability criterion is obtained.

**Keywords:** stability of nonlinearly elastic bodies, finite disturbances, nonlinear vibrations.

Сумин Александр Иванович

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Военный авиационный инженерный университет, г. Воронеж

e-mail: sumin\_ai@mail.ru

Sumin, Alexander Ivanovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematics, Military Aviation Engineering University, Voronezh

А. А. Трещев, В. Г. Теличко

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ОБОЛОЧКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния железобетонных оболочек положительной гауссовой кривизны с помощью разработанной авторами конечно-элементной модели. Представлен пример решения задачи об изгибе железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны, опертой на типовые фермы ФКБ-24.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, метод конечных элементов, бетон, железобетон, оболочка.

УДК: 539.3

При выборе конечно-элементной модели для расчета конструкций типа железобетонных оболочек было предложено использовать изопараметрические конечные элементы (КЭ) [1]. Численные эксперименты на примере пластин и оболочек показали, что при уменьшении их толщины использование изопараметрических КЭ, учитывающих деформации поперечного сдвига, приводит к прогрессирующему возрастанию изгибной жесткости [2]. В железобетонных конструкциях типа плит или оболочек уменьшение толщины происходит по мере углубления трещин, что значительно увеличивает погрешность расчета. Свободными от так называемых “паразитных жесткостей” элементами являются гибридные КЭ [3]. Р. Куком получены две модификации гибридных КЭ с тремя степенями свободы в узле. Непосредственное применение конечных элементов Р. Кука к расчету железобетонных пространственных конструкций показало, что они не учитывают продольные усилия и перемещения в срединной плоскости, а также не позволяют определить вектор обобщенных сил  $\{M\}$  в центре КЭ достаточно просто и точно. Поэтому авторами была разработана модификация гибридных КЭ с пятью степенями свободы в узле и матрицей жесткости, полученной непосредственно для произвольного плоского треугольного элемента. Вывод матрицы жесткости и все необходимые формулы приведены в работе [4].

**1. Модель деформирования железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны.** Очевидно, что математическая модель деформирования железобетонных оболочек должна достаточно точно учитывать специфические особенности сложной среды «бетон-арматура» на различных стадиях работы композита, быть вполне обозримой и практически реализуемой, т. е. модель не может быть полностью свободной от дополнительных технических гипотез.

Задачи деформирования железобетонных оболочек положительной гауссовой кривизны будем рассматривать в условиях активной деформации и простого нагружения, что позволяет

представить бетон как нелинейный материал с присущими ему упругопластическими свойствами, вполне укладывающимися в «рамки» потенциала деформаций [5]. Вопрос о ползучести бетона оставляем открытым, т. е. деформации ползучести не учитываем.

Ограничимся анализом напряженно-деформированного состояния оболочек с ортогональным армированием стержней.

Рассмотрим оболочки, размеры которых в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями. Такой выбор конструкции позволяет пренебречь местными напряжениями в зоне контакта арматуры и бетона, а значит – распределить арматуру, представив ее в виде сплошного слоя, обладающего свойствами структурной анизотропии.

В качестве модели для стальной арматуры примем идеальное упругопластическое тело.

Предположим, что арматура воспринимает только нормальные напряжения в поперечных сечениях, а ее коэффициенты Пуассона примем равными нулю. Обнуление коэффициентов поперечной деформации заметно упрощает зависимости между напряжениями и деформациями, тогда как погрешность с введением этого допущения лежит в пределах точности исходных данных.

Напряжения в пределах армированных слоев оболочки определим как сумму напряжений в бетоне и арматуре, а за условие совместности бетона и арматуры примем равенство деформаций этих двух сред.

Срединную поверхность оболочки представим сетью гибридных конечных элементов разработанной в исследовании модификации  $H12$ , с учетом разбиения по толщине на ряд фиктивных слоев  $n_C$ . Жесткостные характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространим на любые точки фиктивного слоя.

За критерий трещинообразования бетона в каждом фиктивном слое примем критерий Баландина [6]. Предполагая, что трещины нормальны к срединной поверхности оболочки, будем рассчитывать главные напряжения по формулам плоского напряженного состояния. Трещины в области треснувшего фиктивного слоя будем считать сквозными и параллельными друг другу.

Так как на участке между трещинами сцепление между арматурой и бетоном сохраняется, то влияние растянутого бетона учтем при помощи коэффициента Мурашева, который представляет собой отношение средней деформации между трещинами к максимальной деформации арматуры в трещине.

При наличии трещин бетон моделируем трансверсально-изотропным телом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин.

В зависимости от конкретных условий напряженно-деформированного состояния фиктивных слоев выделим следующие группы: а) бетонные слои без трещин; б) армированные (железобетонные слои) без трещин; в) бетонные слои с трещинами, г) армированные (железобетонные слои) с трещинами; д) армированные (железобетонные слои) с пересекающимися трещинами. Моделируются указанные слои согласно математической модели, приведенной в работе [7].

**2. Алгоритм решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) железобетонных оболочек различной геометрической конфигурации.** Общий алгоритм решения задачи об определении НДС железобетонных оболочек различной геометрической конфигурации условно расчленим на следующие подалгоритмы:

1. Формирование задания на расчет оболочечной конструкции.
2. Формирование матрицы связи узлов конечных элементов.
3. Формирование граничных условий.
4. Задания нагружения оболочки.
5. Формирование матриц жесткости конечных элементов.
6. Расчет вектора узловых перемещений.

Такое расчленение алгоритма решения задачи позволяет повысить помехозащищенность вычислительного процесса и дает возможность искусственно прервать ход решения, оценить



динамику сходимости, корректировать дальнейшие вычислительные процессы, начиная их с прерванной операции. Решение задачи предполагалось методом пошаговых нагружений в сочетании с методом «переменных параметров упругости» – вариантом метода последовательных приближений [8].

Формирование задания на расчет оболочки представляет собой процесс определения следующих исходных данных: а) задание геометрических параметров оболочки; б) определение толщины неармированной и армированной частей оболочки; в) вычисление количества фиктивных слоев в армированной части; г) определение констант потенциала деформаций [5], характеризующее напряженно-деформированное состояние бетона; д) задания модуля упругости и предела текучести материала арматуры армированных элементов; е) определение коэффициентов армирования; ж) задание величины допустимой погрешности для расчетных значений прогибов в качестве критерия сходимости решения.

Формирование матрицы связи узлов конечных элементов реализует следующие функции: а) производит автоматизированное разбиение конструкции на треугольные конечные элементы, создавая ансамбль конечных элементов; б) выполняет нумерацию конечных элементов; в) определяет связь номеров узлов в ансамбле элементов с нумерацией узлов, принятой внутри конечного элемента и формирует матрицу связи узлов.

Формирование граничных условий представляет собой присвоение нулевых значений заданному подмножеству вектора узловых перемещений  $\{q\}$  ансамбля элементов. Это подмножество перемещений генерируется в ответ на указание последовательности узлов ансамбля (если узлы последовательности лежат на одной прямой, достаточно задать только номера его первого и последнего узлов) и номеров перемещений согласно принятой их нумерации внутри узла.

Операция задания нагрузки формирует вектор узловых сил для заданной области ансамбля, которая, в частности, может быть сведена к одному узлу (сосредоточенная сила в точке).

Формирование матриц жесткости конечных элементов заключается в вычислении жесткостных характеристик по слоям элемента в зависимости от их типа, с последующим их суммированием в матрицу жесткости всего конечного элемента.

Расчет вектора узловых перемещений для всего ансамбля конечных элементов выполняется согласно методу  $LDL^T$  – факторизации для решения линейных алгебраических уравнений [1]. В пределах каждого шага нагрузки и внутри каждой итерации по методу «переменных параметров упругости» решение системы уравнений заканчивается, если все переменные в течение итерации изменяются менее чем на  $10^{-6}$  от предыдущего значения. После того как решение сошлось, фиксируются следующие параметры: вектор узловых перемещений ансамбля; деформации и напряжения для центра фиктивных слоев конечных элементов, характеристики трещинообразования для каждого фиктивного слоя.

Разработанный алгоритм решения реализован на алгоритмическом объектно-ориентированном языке высокого уровня C++ с применением среды разработки Visual C++ фирмы Microsoft.

**3. Расчет напряженно-деформированного состояния железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны, опертой на типовые фермы ФКБ-24.** Разработанная конечно-элементная модель апробировалась на расчете железобетонных плит [4], [7], [8] и показала, что обладает высокой скоростью сходимости, достаточно низкой требовательностью к вычислительным ресурсам. Сопоставление результатов, с приведенными в работе [9], позволяет сделать вывод об адекватности разработанной модели определения напряженно-деформированного состояния.

Для иллюстрации работоспособности модели и алгоритма определения напряженно-деформированного состояния оболочек с усложненными свойствами, такими как разносопротивляемость, структурная анизотропия и т.д., была решена задача о расчете деформаций трубчатых элементов при чистом кручении [8]. Как и в работе [9] были отобраны эксперименты, выполненные в НИИЖБ Э.Г. Елагиным. Сравнение с экспериментальными данными

свидетельствует об адекватности разработанной теории и возможности ее использования при решении задачи об определении напряженно-деформированного состояния железобетонных оболочек.

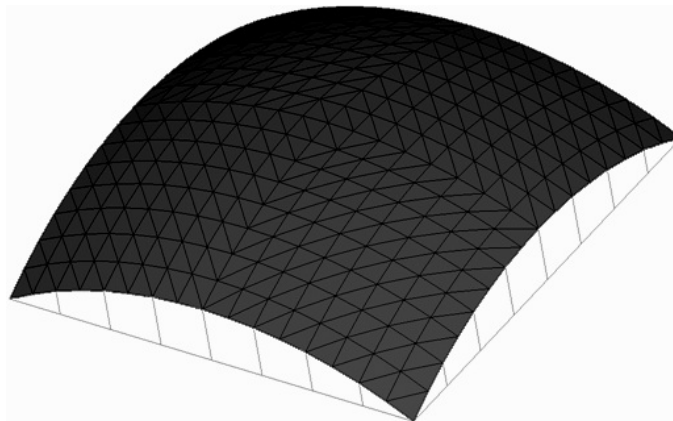


Рис. 1. Схема разбиения оболочки положительной гауссовой кривизны на конечные элементы

Железобетонная оболочка положительной гауссовой кривизны (1) рассчитывалась в следующей конфигурации: оболочка на квадратном основании размерами в плане 24x24 м, высота подъема 6 м, толщина оболочки принималась постоянной по площади оболочки и равнялась 0,12 м. В качестве основного материала оболочки использовался бетон с пределом прочности на сжатие  $R^c = 28,4$  МПа. Армирование оболочки принималось следующим: а) по всей поверхности оболочка армировалась двумя сетками из арматуры класса Вр-II диаметром 6 мм с шагом 0,25 м на расстоянии 0,025 м от верхнего и от нижнего края соответственно (предел текучести  $\sigma_p = 1175$  МПа, модуль упругости  $E_s = 1,7 \cdot 10^5$  МПа); б) в приконтурных полосах для восприятия изгибающих моментов укладывалась арматура класса А-III диаметром 6 мм в виде сетки расположенной в растянутой от изгиба зоне на расстоянии 0,015 м от нижней поверхности оболочки с шагом 0,15 м (предел текучести  $\sigma_p = 390$  МПа, модуль упругости  $E_s = 2 \cdot 10^5$  МПа); в) в угловых областях оболочки под углом в  $45^\circ$  на глубине центра тяжести поперечного сечения располагалась рабочая арматура класса А-II диаметром 10 мм (предел текучести  $\sigma_p = 295$  МПа, модуль упругости  $E_s = 2 \cdot 10^5$  МПа).

По контуру оболочка принималась опертой на железобетонные фермы типа ФКБ24 – контурные фермы пролетом 24 м, цельные, безраскосные с предварительно напряженным нижним поясом. Стержни фермы армировались шестью арматурными стержнями класса А-V (предел текучести  $\sigma_p = 785$  МПа, модуль упругости  $E_s = 1,9 \cdot 10^5$  МПа) диаметром 20 мм, использовался бетон с пределом прочности на сжатие  $R^c = 37$  МПа. Так же, как было показано выше для оболочки, в стержнях учитывались усложненные свойства, такие как разносопротивляемость материала, трещинообразование и пластические деформации в арматуре. Для моделирования стержней применялся конечный элемент, приведенный в работе [1], модифицированный с целью учета особых свойств железобетона.

Нагружалась оболочка равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью от 0 до 7,5 кПа с учетом собственного веса оболочки. Расчет проводился для оболочки шарнирно-опертой по углам плана.

На рис. 2-4 приведены результаты расчета вертикальных прогибов  $w$ , м оболочки для различной величины нагрузки: 25, 35, 50, 70, 90, 95 и 100 %; соответственно от максимального  $q = 7,5$  кПа.

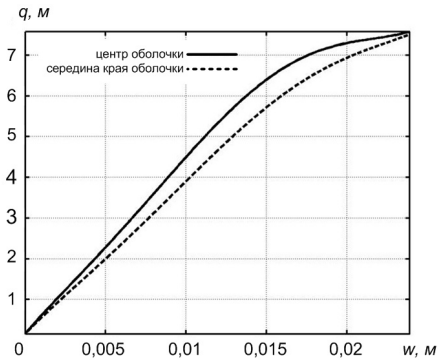


Рис. 2. Прогобы  $w$  в центре плана оболочки и в середине опертого на ферму края

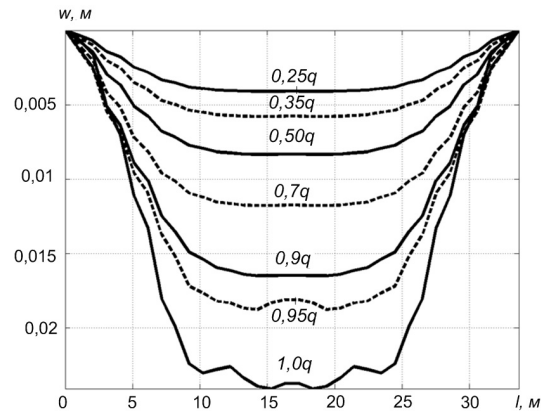


Рис. 3. Прогобы оболочки вдоль диагонали:  $l$  - расстояние вдоль диагонали плиты

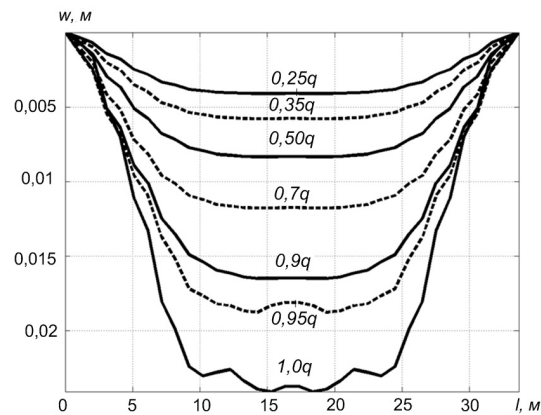


Рис. 4. Прогобы оболочки вдоль оси симметрии:  $l$  - расстояние вдоль диагонали плиты

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Секулович, М.* Метод конечных элементов / М. Секулович. – М. : Стройиздат, 1993. – 664 с.
- [2] *Гениев, Г. А.* Теория пластичности бетона и железобетона / Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. – М. : Стройиздат, 1974. – 316 с.
- [3] *Cook, R. D.* Two hybrid elements for analysis of thick thin and sandwich plates / R. D. Cook // Int. J. num. Meth. Engng. – 1972. – Vol. 5. – P. 277–288.
- [4] *Теличко, В. Г.* Гибридный конечный элемент для расчета плит и оболочек с усложненными свойствами / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // Известия вузов. Строительство. – 2003. – № 5. – С. 17–23. – Библиогр.: с. 23.
- [5] *Матченко, Н. М.* Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 2 : Нелинейные соотношения / Н. М. Матченко, Л. А. Толоконников, А. А. Трещев // Известия РАН. МТТ. – 1999. – № 4. – С. 87–95. – Библиогр.: с. 95.
- [6] *Артемов, А. Н.* Поперечный изгиб железобетонных плит с учетом трещин / А. Н. Артемов, А. А. Трещев // Известия вузов. Строительство. – 1994. – № 9–10. – С. 7–12. – Библиогр.: с. 12.
- [7] *Теличко, В. Г.* Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций из железобетона / Теличко В. Г., Трещев А. А. // Известия ТулГУ. Сер. Строительные материалы, конструкции и сооружения. – Тула, 2005. – Вып. 8. – С. 147–161. – Библиогр.: с. 161.
- [8] *Теличко, В. Г.* Определение напряженно-деформированного состояния трубчатых железобетонных оболочек при чистом кручении методом конечных элементов / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 138–156. – Библиогр.: с. 156.
- [9] *Карпенко, Н. И.* Теория деформирования железобетона с трещинами / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1976. – 208 с.

A. A. Treschev, V. G. Telichko

**CALCULATION OF INTENSE-DEFORMED CONDITION OF A REINFORCED  
CONCRETE COVER OF THE POSITIVE GAUSSIAN CURVATURE**

*Tula State University*

**Abstract.** The problem of definition of the intense-deformed condition of the reinforced concrete covers of the positive Gaussian curvature by means of the finite-element model developed by the authors is considered. The example of a problem decision about bending of a reinforced concrete cover of the positive Gaussian curvature, supported by the typical FKB-24 forms is presented.

**Keywords:** pressure, deformation, method of finite elements, concrete, reinforced concrete, cover.

*Трещев Александр Анатольевич*

*доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: taa57@yandex.ru*

*Теличко Виктор Григорьевич*

*кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: katranv@yandex.ru*

*Treschev, Alexander Anatolievich*

*Dr. Eng. Sci., Professor, Tula State University, Tula*

*Telichko, Victor Grigorievich*

*Candidate Eng. Sci., Assoc. Professor, Tula State University, Tula*

А. А. Трещев, С. А. Рыбальченко

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ТОНКОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ ДИЛАТИРУЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

*Тулский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается решение задачи пластического изгиба тонких круглых пластин, выполненных из дилатирующих разносопротивляющихся материалов, работающих за пределами упругости при конечных прогибах.

**Ключевые слова:** дилатирующие материалы, пластический изгиб, круглые пластины.

УДК: 539.3

**Введение.** За последние 20 лет произошло широкое внедрение полимерных и композитных материалов в строительстве, в машиностроении, а также во многих других отраслях промышленности. К сожалению, полноценное их применение затруднено отсутствием единой расчетной базы.

Исследование экспериментальных данных по деформированию и предельным состояниям таких материалов, как бетоны, чугуны, графиты, указывает на неприменимость к ним обобщенного закона Гука. Гораздо более результативным оказывается аналитическое представление опытных данных при одноосном сжатии и при одноосном растяжении различными линейными функциями с вычислением модулей деформации, соответствующих одноосному сжатию и одноосному растяжению. Этот подход предлагается считать главным для представления свойств изотропного разносопротивляющегося материала.

Дальнейшее изучение свойств и поведения разносопротивляющихся материалов обнаружило, что ощутимые эффекты, возникающие в работе конструкций, связанные с явлением разносопротивляемости, обнаруживаются лишь при сложном напряженно-деформированном состоянии.

На основе анализа экспериментальных данных можно заключить, что вид напряженного состояния существенно влияет на величину предельных напряжений. Причем следует отметить, что эта величина зависит не только от вида напряженного состояния, но и от количественного соотношения возникающих напряжений.

Для обобщения подхода к описанию предельных состояний разносопротивляющихся дилатирующих материалов условие пластичности можно сформулировать в следующем виде, предложенном в работе [1]:

$$F(\sigma_i) = \tau \cdot f(\xi) = k_\tau, \quad (1)$$

где  $f(\xi)$  – функция вида напряженного состояния;  $\xi = \sigma/S_0$  – октаэдрическое нормальное нормированное напряжение;  $\sigma = \sigma_i \delta_i / 3$  – среднее напряжение;  $\tau = \sqrt{S_i S_i / 3}$  – касательное напряжение на октаэдрической площадке;  $S_i = \sigma_i - \delta_i \sigma$  – девиатор напряжений;  $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  – модуль вектора полного напряжения на октаэдрической площадке;  $\delta_i$  – символ Кронекера;  $k_\tau = \sqrt{2/3} \tau_S$ ,  $\tau_S$  – предел текучести при чистом сдвиге.

Поступила 31.05.2010

Выражение для функции, характеризующей вид напряженного состояния  $f(\xi)$ , входящей в условие (1), определяется индивидуально для каждого материала при обработке экспериментальных диаграмм его предельных состояний при различных видах напряженного состояния. Следует заметить, что используемый в выражении (1) качественный параметр  $\xi$  изменяется в интервале  $[-1;1]$ , что позволяет описать полный спектр напряженных состояний.

### 1. Разрешающие уравнения изгиба круглой пластины при конечных прогибах.

Рассмотрим равновесие тонкой пластины толщиной  $h$  и радиусом  $R$  из дилатирующего разносопротивляющегося материала, находящейся под действием поперечной нагрузки, распределенной с интенсивностью  $q$  по ее верхней поверхности симметрично относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластинки и проходящей через ее центр.

Для стадии работы дилатирующего разносопротивляющегося материала в пластической области принимаем следующие предпосылки:

- 1) используются традиционные положения технической теории изгиба пластин – гипотезы Кирхгофа-Лява;
- 2) диаграмма напряжений–деформаций материала обладает ярко выраженной площадкой текучести, что позволяет применить к нему концепцию идеально упругопластического тела;
- 3) нагружение считается простым.

Для удобства дальнейших расчетов введем функцию угла поворота поперечного сечения:

$$\varphi = \frac{dw}{dr},$$

где  $w$  – прогиб срединной плоскости;  $r$  – радиальная координата.

Следуя методике последовательных нагружений, запишем геометрические соотношения для круглых пластин в приращениях:

$$\delta e_r = \delta \varepsilon_r - z \frac{d\delta\varphi}{dr}, \quad \delta e_\theta = \delta \varepsilon_\theta - z \frac{1}{r} \delta\varphi, \quad (2)$$

где  $\delta \varepsilon_r = \frac{d\delta u}{dr} + \varphi \delta\varphi$ ;  $\delta \varepsilon_\theta = \frac{\delta u}{r}$ ;  $\delta\varphi = \frac{d\delta w}{dr}$ ;  $u$  – радиальное перемещение в срединной плоскости.

Выражения для приращений напряжений с учетом принятых гипотез и справедливости обобщенного закона Гука при упругом деформировании запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\delta e_r + \nu \delta e_\theta); \\ \delta \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \delta e_r + \delta e_\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку переход от напряжений к их интегральным характеристикам – усилиям и моментам – не зависит от физической природы материала, эти характеристики можно определить обычным образом. Перейдем от приращений напряжений к приращениям усилий и моментов:

$$\delta N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_i dz; \quad \delta M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_i z dz. \quad (4)$$

Подставляя в формулы (4) выражения для напряжений (3) с учетом геометрических соотношений (2), получим:

$$\begin{aligned} \delta N_r &= D_1 \left( \frac{d\delta u}{dr} + \varphi \delta\varphi + \nu \frac{\delta u}{r} \right); \quad \delta M_r = -D \left( \frac{d\delta\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \delta\varphi \right), \\ \delta N_\theta &= D_1 \left( \nu \frac{d\delta u}{dr} + \nu \varphi \delta\varphi + \frac{\delta u}{r} \right); \quad \delta M_\theta = -D \left( \nu \frac{d\delta\varphi}{dr} + \frac{1}{r} \delta\varphi \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $D_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ ;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость;  $E$  – модуль упругости материала;  $\nu$  – коэффициент поперечной деформации;  $\varphi_k$  – функция угла поворота поперечного сечения с предыдущих этапов нагружения.

Уравнения равновесия элемента круглой пластины с учетом действующих мембранных усилий в приращениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta N_r - \delta N_\theta + r \frac{d\delta N_r}{dr} &= 0; \\ \frac{d\delta M_r}{dr} + \frac{\delta M_r - \delta M_\theta}{r} &= -\varphi \cdot \delta N_r - N_r \cdot \delta \varphi - \frac{r\delta q}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $N_{rk}$  – продольное усилие с предыдущих этапов нагружения.

Подставляя зависимости (5) в уравнения (6) получим линеаризованную систему разрешающих уравнений относительно приращений функций  $u$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} D_1 \left( \frac{d^2 \delta u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\delta u}{dr} - \frac{\delta u}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr} \delta \varphi + \frac{d\delta \varphi}{dr} \varphi + \frac{(1-\nu)}{r} \varphi \delta \varphi \right) &= 0; \\ D \left( \frac{d^2 \delta \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\delta \varphi}{dr} - \frac{\delta \varphi}{r^2} \right) - D_1 \left( \frac{d\delta u}{dr} \varphi + \varphi^2 \delta \varphi + \frac{\nu}{r} \delta u \varphi + N_r \delta \varphi \right) &= \frac{r\delta q}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Упругая стадия работы дилатирующего разносопротивляющегося материала полностью описывается дифференциальными уравнениями (7). Распределение напряжений в поперечном сечении элемента пластины будет соответствовать эпюре, изображенной на рис. 1.

Перейдем к рассмотрению работы материала пластинки при наступлении упругопластической стадии. Введение в условие пластичности функции вида напряженного состояния обуславливает разницу между напряжениями, вызывающими пластичность в растянутой и сжатой зонах сечения (рис. 2). Очевидно, что работу материала за пределом упругости следует разделить на две стадии: состояние односторонней текучести (рис. 2 а) и состояние двусторонней текучести (рис. 2 б). Введем следующие обозначения. Пусть  $i$  – напряжения, вызывающие пластичность в верхней зоне,  $B_i$  – напряжения, вызывающие пластичность в нижней зоне. Параметры  $i$  и  $B_i$  определяются при помощи условия пластичности (1).

Зоны распространения пластичности по толщине пластины по всем направлениям ( $i = r, \theta$ ) одинаковы для каждого определенного сечения, поскольку они формируются комплексным соотношением из условия пластичности (1), а не каждым отдельно взятым напряжением. Вследствие этого будет удобно опустить в дальнейших выкладках индексы для величин  $a_i$  и  $b_i$ , приняв для них общие обозначения  $a, b$ .

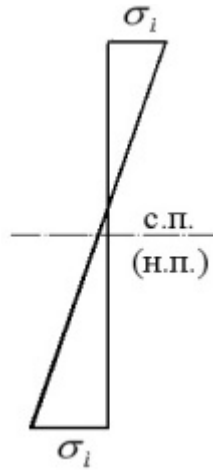


Рис. 1. Распределение напряжений в поперечном сечении элемента пластины в упругой стадии работы

Выражения для приращений напряжений запишем следующим образом:

$$\delta \sigma_r = k(\delta \eta_r - z \cdot \delta \Delta_r); \quad \delta \sigma_\theta = k(\delta \eta_\theta - z \cdot \delta \Delta_\theta), \quad (8)$$

где  $k = E/(1 - \nu^2)$ ;  $\delta \Delta_r = \frac{d\delta \varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \delta \varphi$ ;  $\Delta_\theta = \nu \frac{d\delta \varphi}{dr} + \frac{1}{r} \delta \varphi$ ;  $\delta \eta_r = \delta \varepsilon_r + \nu \cdot \delta \varepsilon_\theta$ ;  $\delta \eta_\theta = \nu \cdot \delta \varepsilon_r + \delta \varepsilon_\theta$ .



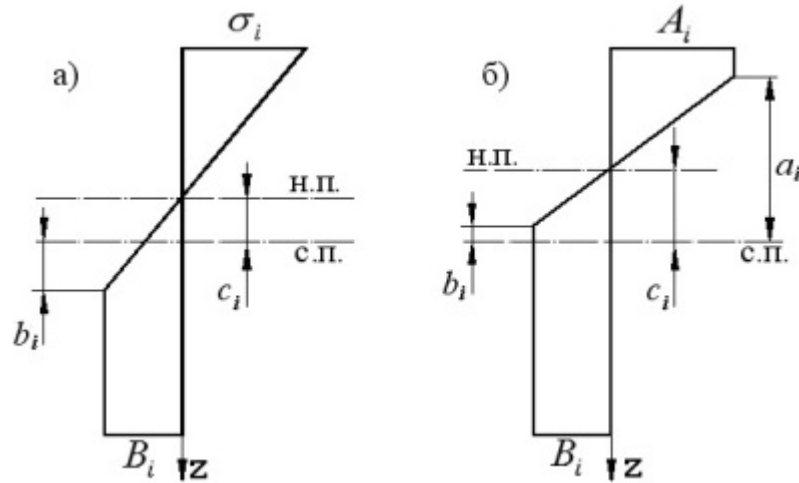


Рис. 2. Распределение напряжений в поперечном сечении элемента пластины в пластической стадии работы

Значения приращений продольных усилий вычисляются путем интегрирования приращений напряжений по толщине пластины:

а) при односторонней пластичности

$$\delta N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_i dz = \int_{-h/2}^a A_i dz + \int_a^{h/2} \delta \sigma_i dz; \quad (9)$$

б) при двусторонней пластичности

$$\delta N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_i dz = \int_{-h/2}^a A_i dz + \int_a^b \delta \sigma_i dz + \int_b^{h/2} B_i dz. \quad (10)$$

Рассматривая зависимости (8), (9) и (10) совместно, получим выражения для продольных усилий в виде:

а) при односторонней пластичности

$$\delta N_i = C_i + D \delta \Delta_i, \quad (11)$$

где  $C_i = k \delta \eta_i (h/2 - a) + A_i (h/2 + a)$ ,  $D = -k(h^2/4 - a^2)/2$ ;

б) при двусторонней пластичности

$$\delta N_i = K_i + L \delta \Delta_i, \quad (12)$$

где  $K_i = A_i (h/2 + a) + B_i (h/2 - b) + k \delta \eta_i (b - a)$ ,  $L = -k(b^2 - a^2)/2$ .

Значения моментов вычисляются путем интегрирования напряжений по толщине пластины:

а) при односторонней пластичности

$$\delta M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_i z dz = \int_{-h/2}^a A_i z dz + \int_a^{h/2} \delta \sigma_i z dz; \quad (13)$$

б) при двусторонней пластичности

$$\delta M_i = \int_{-h/2}^a A_i z dz + \int_a^b \delta \sigma_i z dz + \int_b^{h/2} B_i z dz. \quad (14)$$

Рассматривая зависимости (8), (13) и (14) совместно и проведя несложные преобразования, получим выражения для моментов в виде:

а) при односторонней пластичности

$$\delta M_i = P_i + R\delta\Delta_i, \quad (15)$$

где  $P_i = (h^2/4 - a^2)(k\delta\eta_i - A_i)/2$ ,  $R = -k(h^3/8 - a^3)/3$ ;

б) при двусторонней пластичности

$$\delta M_i = S_i + T\delta\Delta_i, \quad (16)$$

где  $S_i = B_i(h^2/4 - b^2)/2 - A_i(h^2/4 - a^2)/2 + k\delta\eta_i(b^2 - a^2)/2$ ,  $T = k(a^3 - b^3)/3$ .

Подставляя зависимости (13), (15) в уравнения (6), получим линейризованную систему разрешающих уравнений при односторонней пластичности:

$$\begin{aligned} & -\frac{k}{2}(1-\nu)\left(\frac{h^2}{4}-a^2\right)\left(\frac{d\delta\varphi}{dr}-\frac{1}{r}\delta\varphi\right)+k(1-\nu)\left(\frac{h}{2}-a\right)\left(\frac{d\delta u}{dr}+\varphi_k\delta\varphi+\frac{1}{r}\delta u\right)+ \\ & + (A_r - A_\theta)\left(\frac{h}{2}+a\right)-\frac{kr}{2}\left(\frac{h^2}{4}-a^2\right)\left(\frac{d^2\delta\varphi}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{d\delta\varphi}{dr}-\frac{\nu}{r^2}\delta\varphi\right)+ \\ & + k\left(\frac{h}{2}-a\right)\left(\frac{d^2\delta u}{dr^2}+\frac{d\varphi_k}{dr}\delta\varphi+\varphi_k\frac{d\delta\varphi}{dr}+\frac{\nu}{r}\frac{d\delta u}{dr}-\frac{\nu}{r^2}\delta u\right)=0; \\ & \frac{k}{3}\left(\frac{h^3}{8}-a^3\right)\left(\frac{d^2\delta\varphi}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{d\delta\varphi}{dr}-\frac{\nu}{r^2}\delta\varphi\right)+\frac{k}{2}\left(\frac{h^2}{4}-a^2\right)\left(\frac{d\delta\varphi}{dr}+\frac{\nu}{r}\delta\varphi\right)\varphi_k- \\ & -\frac{k}{2}\left(\frac{h^2}{4}-a^2\right)\left(\frac{d^2\delta u}{dr^2}+\frac{d\varphi_k}{dr}\delta\varphi+\varphi_k\frac{d\delta\varphi}{dr}+\frac{\nu}{r}\frac{d\delta u}{dr}-\frac{\nu}{r^2}\delta u\right)-N_{rk}\delta\varphi+ \\ & +\frac{k}{3r}(1-\nu)\left(\frac{h^3}{8}-a^3\right)\left(\frac{d\delta\varphi}{dr}-\frac{1}{r}\delta\varphi\right)-\frac{k}{2r}(1-\nu)\left(\frac{h^2}{4}-a^2\right)\left(\frac{d\delta u}{dr}+\varphi_k\delta\varphi-\frac{1}{r}\delta u\right)+ \\ & +\frac{1}{2r}\left(\frac{h^2}{4}-a^2\right)(A_r-A_\theta)-\left(\frac{h}{2}+a\right)A_r\varphi_k-\left(\frac{h}{2}-a\right)\left(\frac{d\delta u}{dr}+\varphi_k\delta\varphi+\frac{\nu}{r}\delta u\right)\varphi_k=\frac{r\delta q}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя зависимости (14), (16) в уравнения (6), получим линейризованную систему разрешающих уравнений при двусторонней пластичности:

$$\begin{aligned} & (A_r - A_\theta)\left(\frac{h}{2}+a\right)+(B_r - B_\theta)\left(\frac{h}{2}-b\right)+\frac{k}{2}(1-\nu)(a^2-b^2)\left(\frac{d\delta\varphi}{dr}+\frac{\nu}{r}\delta\varphi\right)+ \\ & +k(1-\nu)(b-a)\left(\frac{d\delta u}{dr}+\varphi_k\delta\varphi-\frac{1}{r}\delta u\right)-\frac{kr}{2}(b^2-a^2)\left(\frac{d^2\delta\varphi}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{d\delta\varphi}{dr}-\frac{\nu}{r^2}\delta\varphi\right)+ \\ & +kr\left(\frac{h}{2}-a\right)\left(\frac{d^2\delta u}{dr^2}+\frac{d\varphi_k}{dr}\delta\varphi+\varphi_k\frac{d\delta\varphi}{dr}+\frac{\nu}{r}\frac{d\delta u}{dr}-\frac{\nu}{r^2}\delta u\right)=0; \\ & \frac{k}{3}(b^3-a^3)\left(\frac{d^2\delta\varphi}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{d\delta\varphi}{dr}-\frac{\nu}{r^2}\delta\varphi\right)+\frac{k}{3r}(1-\nu)(b^3-a^3)\left(\frac{d\delta\varphi}{dr}-\frac{1}{r}\delta\varphi\right)+ \\ & -\frac{k}{2}(b^2-a^2)\left(\frac{d^2\delta u}{dr^2}+\frac{d\varphi_k}{dr}\delta\varphi-\frac{\nu}{r}\varphi_k\delta\varphi+\frac{\nu}{r}\frac{d\delta u}{dr}-\frac{\nu}{r^2}\delta u\right)-\frac{1}{2r}\left(\frac{h^2}{4}-b^2\right)(B_r-B_\theta) \\ & -\frac{k}{2r}(1-\nu)(b^2-a^2)\left(\frac{d\delta u}{dr}+\varphi_k\delta\varphi-\frac{1}{r}\delta u\right)+\frac{1}{2r}\left(\frac{h^2}{4}-a^2\right)(A_r-A_\theta)-\left(\frac{h}{2}+a\right)A_r\varphi_k- \\ & -\left(\frac{h}{2}-b\right)B_r\varphi_k-k(b-a)\left(\frac{d\delta u}{dr}+\varphi_k\delta\varphi+\frac{\nu}{r}\delta u\right)\varphi_k-N_{rk}\delta\varphi=\frac{r\delta q}{2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Системы уравнений (17) и (18) определяют работу круглой пластины при конечных прогибах в упругопластической стадии с учетом пластической дилатации. Решение полученных разрешающих дифференциальных уравнений проводится численным методом конечных разностей.

**2. Решение задачи изгиба круглой пластины из графита МПГ-6.** С точки зрения развития любой теории важным аспектом является возможность применения ее для решения конкретных прикладных задач, использующихся в инженерной практике. В качестве такой задачи в данной работе предлагается решение задачи упругопластического изгиба тонкой круглой пластины, выполненной из графита МПГ-6 при конечных прогибах.

Расчет проводился по двум вариантам: в первом варианте в качестве условия предельного состояния использовалось уравнение (1), а аппроксимация функции вида напряженного состояния для графита МПГ-6 принималась по выражению:

$$f(\xi) = 1 + (0,9582_1 + 0,0341\text{Sign}\xi)\xi.$$

При этом константа пластичности  $k_T$  для графита МПГ-6, входящая в условие (1), равна 21,68 МПа.

Во втором варианте расчета в качестве условия предельного состояния применялось классическое уравнение Мизеса [2], не учитывающее зависимость характеристик пластичности от вида напряженного состояния.

Пластина принималась круглой в плане с жесткой заделкой по контуру и толщиной  $h$ , равной 1 см, радиус пластины – 50 см, модуль упругости – 10000 МПа, коэффициент поперечной деформации – 0,25.

На рис. 3 представлена полученная картина развития текучести по поверхности пластины при принятом опирании для первого варианта расчета. Поверхности, вступившие в состояние текучести, заштрихованы.

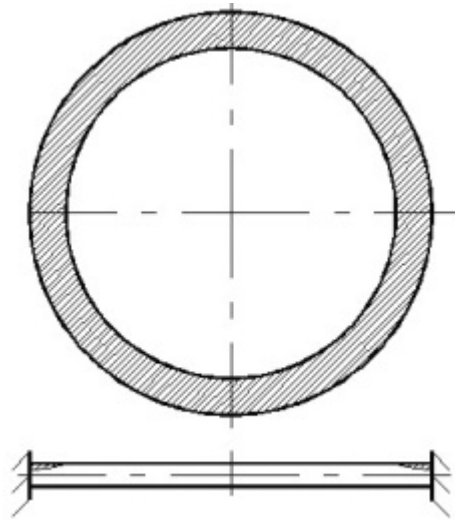


Рис. 3. Развитие текучести по поверхности пластины при упругопластическом изгибе

Пластичность при расчете пластины для обоих вариантов расчета возникает в верхней зоне пластины. Нагрузка, соответствующая появлению пластичности для первого варианта расчета, составила 23,41 МПа, для второго – 38,71 МПа. Предельная нагрузка для первого варианта расчета составила – 48,80 МПа, для второго – 57,21 МПа.

На рис. 4 отражены зависимости безразмерного прогиба  $w/h$  в центральной точке пластины от величины интенсивности безразмерной нагрузки  $qR^4/Eh^4$ . На этом рисунке сплошной линией обозначен прогиб, полученный при первом варианте расчета, и пунктирной линией – прогиб, полученный во втором варианте расчета.

**Заключение.** Полученные результаты, очевидно, подтверждают тот факт, что описание пластического изгиба пластин из дилатирующих разносопротивляющихся материалов не укладывается в рамки классической теории механики пластин. Различие величин нагрузок, вызывающих наступление пластичности, и предельных разрушающих нагрузок, полученных в первом варианте расчета, на 17-65 % ниже, чем соответствующие значения по второму варианту расчета.

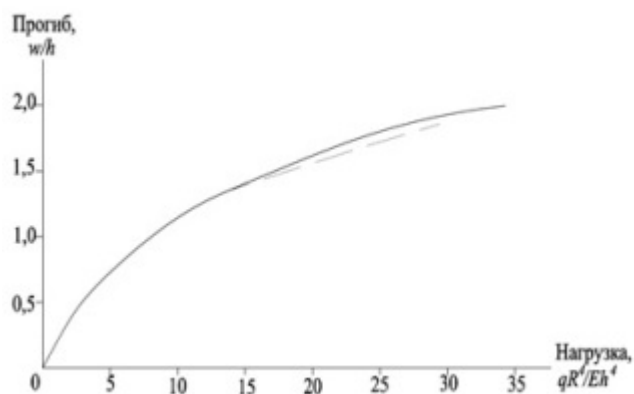


Рис. 4. График зависимости безразмерного прогиба в центральной точке пластины

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Трещев, А. А.* К теории пластичности дилатирующих разнсопротивляющихся материалов / А. А. Трещев // Проблемы машиностроения и автоматизации. Строительство : междунар. журн. – 2003. – № 2. – С. 58–62.

[2] *Писаренко, Г. С.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. – Киев : Наукова думка, 1976. – 416 с.

A. A. Treschev, S. A. Rubalchenko

**THE DECISION OF A PROBLEM OF A PLASTIC BENDING OF A THIN  
ROUND PLATE MADE OF DELATIRUYUSCHIE MATERIALS**

*Tula State University*

**Abstract.** The decision of a problem of a plastic bending of the thin round plates made of the delatiruyuschie different resistant materials, working outside of elasticity at final deflections is considered.

**Keywords:** delatiruyuschie materials, plastic bend, round plates.

*Трещев Александр Анатольевич*

*заведующий кафедрой ССМиК, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: taa58@yandex.ru*

*Рыбальченко Сергей Александрович*

*ассистент кафедры ССМиК, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: Sershr@yandex.ru*

*Treschev, Alexander Anatolyevich*

*Dr. Eng. Sci., Professor, Head, Department of Faculty of Mining and Civil Engineering, Tula State University, Tula*

*Rubalchenko, Sergey Aleksandrovich*

*Assistant, Tula State University, Tula*

А. И. Хромов, О. В. Патлина

## ПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ СКРУГЛЕННЫХ УГЛОВЫХ ВЫРЕЗОВ

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика  
С. П. Королева

**Аннотация.** В рамках модели идеального жесткопластического тела рассматривается квазистатическая задача о растяжении образца со скругленными угловыми вырезами. Проводится построение возможных пластических течений и определяется форма свободной поверхности, в которую деформируется скругленный угловой вырез вследствие растяжения образца. Исследуется движение частиц в пластической области и изменение геометрии поля с течением времени. Формулируется энергетический критерий перехода от непрерывного формообразования свободной поверхности к разрушению в вершине скругленного углового выреза.

**Ключевые слова:** идеальное жесткопластическое тело, плоская деформация, движение частиц, свободная поверхность, аналитические решения, диссипация энергии, разрушение.

УДК: 539.3

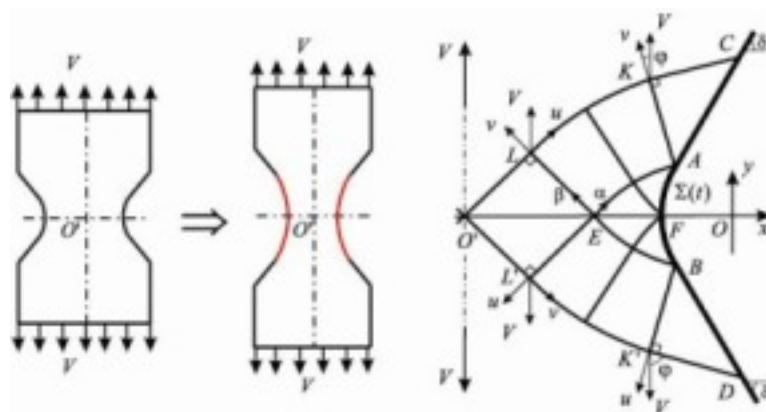


Рис. 1.

Поступила 02.06.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию РФ (проект 2.1.1/889 – “Теоретические и экспериментальные исследования влияния диссипативных процессов на механические характеристики и разрушение материалов”).

Попытки описания формы свободной поверхности, образующейся из скругленного углового выреза вследствие растяжения образца (рис. 1), предпринимались неоднократно. Однако точных решений получено не было. Обзор работ, посвященных исследованию геометрии растягиваемого образца, приведен Ф. Макклинтоком в главе “Пластические аспекты разрушения” [2]. Для решения представленной задачи используется модель идеального жесткопластического тела, которая позволяет аналитически описывать пластические течения с учетом изменения геометрии свободных поверхностей.

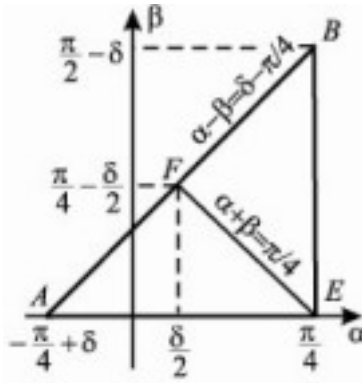


Рис. 2.

Пусть жесткопластический образец растягивается в условиях плоской деформации с постоянной скоростью  $V = 1$  (рис. 1). Первое пластическое течение (рис. 1) построено на основе сетки линий скольжения  $E$ . Ли для углового выреза [6] и имеет постоянный угол раскрытия выреза  $2\delta$ . Особенностью данного поля является наличие линий разрыва скоростей перемещений:  $O'LKC$  и  $O'L'K'D$ . Свободная поверхность на криволинейном участке  $AFB$  обозначена буквой  $\Sigma$ . Для решения задачи введены: физическая система координат  $Oxy$  и связанная с полем линий скольжения [3], криволинейная система  $\alpha, \beta$ -координат:

$$\phi = \alpha + \beta, \quad \frac{p}{2k} = \beta - \alpha + \frac{p_0}{2k},$$

где  $\phi$  – угол между касательной к  $\alpha$ -линии и осью  $Ox$ ;  $k$  – максимальное касательное напряжение;  $p, p_0$  – гидростатическое давление в любой точке пластической области и в начале координат соответственно.

В плоскости характеристик  $\alpha, \beta$  пластическая область, примыкающая к свободной поверхности  $\Sigma$ , изображается прямоугольным треугольником  $AEB$  (рис. 2).

Поле скоростей перемещений в жестком квадрате  $O'LEL'$  однородно. Поле скоростей перемещений в пластической области  $AEB$  определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} + u = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u, v$  – проекции скоростей перемещений на  $\alpha, \beta$ -линии. Граничные условия для системы (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \text{на АЕ: } v &= V \cos \phi = V \cdot \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \left[ \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right], \\ v &= \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)^i, \quad -\frac{\pi}{4} + \delta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}; \\ \text{на ВЕ: } u &= -V \sin \phi = -V \cdot \sin \left( \beta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \left[ \sin \beta + \cos \beta \right], \\ u &= \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i \beta^i, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} - \delta. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение краевой задачи (1), (2) получено в двойных степенных рядах в окрестности точки  $E \left( \frac{\pi}{4}, 0 \right)$ :

$$\begin{cases} u(\alpha, \beta) = \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{mn} \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)^m \cdot \beta^n, \\ v(\alpha, \beta) = \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{mn} \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)^m \cdot \beta^n. \end{cases}$$

Коэффициенты  $U_{mn}, V_{mn}$  заданы рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} U_{mn} &= (-1)^m \frac{b_{n-m}}{m!n!}, \quad m - n \leq 0; \quad U_{mn} = (-1)^n \frac{a_{m-n-1}}{m!n!}, \quad m - n > 0; \\ V_{mn} &= (-1)^n \frac{a_{m-n}}{m!n!}, \quad m - n \geq 0; \quad V_{mn} = (-1)^{m+1} \frac{b_{n-m-1}}{m!n!}, \quad m - n < 0; \\ U_{0n} &= \frac{b_n}{n!}, \quad U_{m0} = \frac{a_m}{m!}. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения свободной поверхности  $\Sigma(t)$  представляются в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y = y(\gamma, t), \\ x = x(\gamma, t), \end{cases} \tag{4}$$

где  $t$  – время,  $\gamma = \alpha + \beta + \frac{\pi}{4}$  – угол между касательной к  $\Sigma(t)$  и осью  $Ox$  :

$$y' \cos \gamma - x' \sin \gamma = 0. \tag{5}$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по параметру  $\gamma$  .

В уравнениях движения частиц

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = V_y(\Gamma), \\ \frac{dx}{dt} = V_x(\Gamma) \end{cases} \tag{6}$$

полные производные по времени имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = V_n(\Gamma) \cos \Gamma - V_\tau \sin \Gamma, \\ \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = -V_n(\Gamma) \sin \Gamma - V_\tau \cos \Gamma. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь  $\Gamma$  – обозначение зависимости  $\gamma(t)$  вдоль траектории движения частицы. Совместное рассмотрение уравнений (5), (7) приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = V_n(\gamma) \cos \gamma - V'_n \sin \gamma, \\ \frac{\partial x}{\partial t} = -V_n(\gamma) \sin \gamma - V'_n \cos \gamma, \end{cases}$$

интегрирование которой по времени определяет аналитическое представление свободной поверхности  $\Sigma(t)$ :

$$\begin{cases} y(\gamma, t) = [ V_n(\gamma) \cos \gamma - V'_n(\gamma) \sin \gamma ] \cdot t + y_0(\gamma), \\ x(\gamma, t) = [ -V_n(\gamma) \sin \gamma - V'_n(\gamma) \cos \gamma ] \cdot t + x_0(\gamma). \end{cases} \tag{8}$$

Нормальная и касательная составляющие скорости частицы определяются выражениями

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - u), \quad V_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(-v - u).$$



С помощью формул (8) находится радиус кривизны свободной поверхности:

$$\rho(\gamma, t) = \frac{y'}{\sin \gamma} = \frac{x'}{\cos \gamma} = -[V_n(\gamma) + V_n''(\gamma)] \cdot t + \rho_0(\gamma). \quad (9)$$

В соотношениях (8), (9):  $y_0(\gamma), x_0(\gamma), \rho_0(\gamma)$  – уравнения и радиус кривизны поверхности, скругляющей угловой вырез в начальный момент времени. Из соотношений (8) видно, что с течением времени начальные условия все меньше влияют на форму свободной поверхности, которая стремится к некоторой устойчивой форме. Найденные уравнения свободной поверхности (8) позволяют продолжить дальнейшие исследования пластического течения (рис. 1). Если подставить соотношения (8) обратно в уравнения (7), то из решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{V_\tau(\Gamma) - V_n'(\Gamma)}{[V_n(\Gamma) + V_n''(\Gamma)] \cdot t - \rho_0(\Gamma)} \quad (10)$$

можно определить функцию  $\Gamma(t)$ , которая индивидуализирует частицы, перемещающиеся вдоль свободной поверхности. Траектории частиц определяются интегрированием уравнений движения (6) по времени:

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t V_y(\Gamma(\theta)) d\theta + y_0(\Gamma_0), \\ x(t) = \int_0^t V_x(\Gamma(\theta)) d\theta + x_0(\Gamma_0). \end{cases}$$

Найденные уравнения свободной поверхности (8) позволяют поставить граничные условия для системы, определяющей радиусы кривизны поля линий скольжения в пластической области:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \beta} - S = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} + R = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где  $R, S$  – радиусы кривизны  $\alpha, \beta$ -линий скольжения. Граничные условия для системы (11) на участке свободной поверхности  $\Sigma(t)$  задаются с помощью радиуса кривизны  $\rho(\gamma, t)$  свободной поверхности, разложенного в ряд в окрестности точки  $A(-\frac{\pi}{4} + \delta, 0)$ :

$$R = -S = \rho\sqrt{2}, \quad \rho(\alpha, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\rho_\gamma^{(p)}(\delta) \cdot 2^p}{p!} (\alpha - \alpha_A)^p. \quad (12)$$

Решение краевой задачи (11), (12) получено в двойных степенных рядах:

$$\begin{cases} R(\alpha, \beta, t) = \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=0}^{\infty} R_{mn} (\alpha - \alpha_A)^m \cdot \beta^n \cdot t + R_0(\alpha, \beta), \\ S(\alpha, \beta, t) = \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=0}^{\infty} S_{mn} (\alpha - \alpha_A)^m \cdot \beta^n \cdot t + S_0(\alpha, \beta), \end{cases}$$

где  $R_0(\alpha, \beta) = -S_0(\alpha, \beta) = \rho_0(\gamma)\sqrt{2}$  – радиусы кривизны  $\alpha, \beta$ -линий скольжения в начальный момент времени. Радиус кривизны  $\alpha$ -линии  $AE$

$$R(\alpha, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} (\alpha - \alpha_A)^m \cdot t + R_0(\alpha)$$

позволяет определить абсциссу точки пространства  $E$ :

$$xE(t) = \int_{\alpha_A}^{\pi/4} R(\alpha, t) \cos \alpha d\alpha + x(A).$$

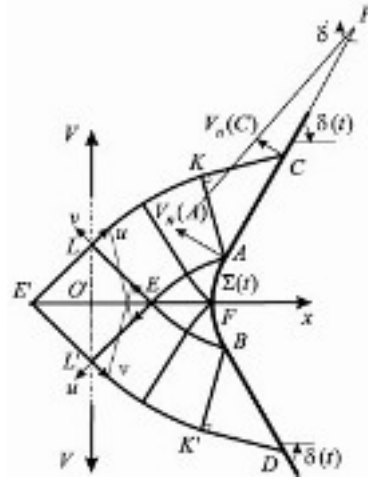


Рис. 3.

Коэффициенты  $R_{mn}, S_{mn}, a_m$  задаются рекуррентными соотношениями, аналогичными (3). Координата  $x(A)$  определяется уравнениями (8). Значения  $xE(t) - xE(0)$  для диапазона рассматриваемых углов  $\delta \in [0, 90^\circ)$  интерполированы в функцию  $XE(\delta, t) = XE(\delta) \cdot t$ , которая позволяет задать закон уменьшения отрезка  $L(t)$  с течением времени:  $L(t) = L(0) + XE(\delta) \cdot t$ .

Экспериментальные исследования не подтверждают существование линий разрыва скоростей перемещений, поэтому полученное решение имеет ограниченное применение и ниже используется для построения более общего поля. Под более общим полем понимается пластическое течение с переменным углом раскрытия  $2\delta(t)$ , построенное на основе сетки линий скольжения О. Ричмонда [7] для углового выреза (рис. 3). Линий разрыва скоростей перемещений в рассматриваемом течении нет.

Соотношения (1)-(3) для скоростей перемещений справедливы для обоих рассматриваемых полей. Уменьшение угла  $\delta(t)$  вызвано вращением прямых  $AC$  и  $BD$ , которое происходит из-за линейности поля скоростей в жестком квадрате  $E'LEL'$ :

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{V_n(A)}{AP} = -\frac{V_n(C)}{CP}.$$

На рис. 3: точка  $P$  – мгновенный центр скоростей перемещений,  $AP = L(t) + CP$ ,  $L(t) = EE' = AC = BD$ .

Определение нормальных скоростей  $V_n(A)$  и  $V_n(C)$  из граничных условий на линиях  $AE$  и  $LKC$  приводит к соотношению

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{V}{L(t)}.$$

Уравнения свободной поверхности представляются в параметрическом виде, совпадающим с (4):

$$\begin{cases} y = y(\gamma, t), \\ x = x(\gamma, t). \end{cases}$$

Совместное рассмотрение уравнения касательной (5) и уравнений движения частиц

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = V_y(\Gamma(t), \delta(t)), \\ \frac{dx}{dt} = V_x(\Gamma(t), \delta(t)) \end{cases}$$

приводит к интегральному представлению радиуса кривизны свободной поверхности

$$\rho(\gamma, t) = - \int_0^t [V_n(\gamma, \delta(t)) + V_n''(\gamma, \delta(t))] dt + \rho_0(\gamma), \quad (13)$$

в котором  $\delta(t)$  – неизвестная функция. Обозначим для рациональности записей  $\bar{\rho} = -[V_n(\gamma, \delta(t)) + V_n''(\gamma, \delta(t))]$  и применим к интегралу (13) теорему о среднем. Получим соотношение

$$\int_0^t \bar{\rho} dt = \bar{\rho} \cdot F(t), \quad (14)$$

в котором  $F(t)$  – неизвестная функция времени,  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\gamma, \delta(t))$ . Теорема о среднем показывает, что свободная поверхность для первого и второго полей геометрически (то есть по  $\gamma$ ) будет одна и та же. Но закон распространения поверхностей во времени будет разным. Данные обстоятельства позволяют применить найденную ранее функцию  $XE(\delta)$  для определения закона поворота  $\delta(t)$ :

$$\frac{d\delta}{dt} = - \frac{V}{L(t)} = - \frac{V}{L(0) + 2 \cdot XE(\delta) \cdot F(t)}. \quad (15)$$

Неизвестная функция времени представляется в виде ряда:

$$F(t) = F(0) + \frac{\dot{F}(0)}{1!} t + \frac{\ddot{F}(0)}{2!} t^2 + \frac{\overset{\circ}{F}(0)}{3!} t^3 + \dots \quad (16)$$

Точкой обозначены производные по времени  $t$ . Функция  $\delta(t)$  определяется из решения обыкновенного дифференциального уравнения (15). Коэффициенты разложения (16) определяются путем последовательного дифференцирования уравнений (14), (15). Соотношение (14) предполагает существование двух форм уравнений для  $\Sigma(t)$ :

$$\begin{cases} y(\gamma, t) = \int_0^t [V_n(\gamma, \delta(t)) \cos \gamma - V_n'(\gamma, \delta(t)) \sin \gamma] dt + y_0(\gamma), \\ x(\gamma, t) = \int_0^t [-V_n(\gamma, \delta(t)) \sin \gamma - V_n'(\gamma, \delta(t)) \cos \gamma] dt + x_0(\gamma), \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y(\gamma, t) = [V_n(\gamma, \delta(t)) \cos \gamma - V_n'(\gamma, \delta(t)) \sin \gamma] \cdot F(t) + y_0(\gamma), \\ x(\gamma, t) = [-V_n(\gamma, \delta(t)) \sin \gamma - V_n'(\gamma, \delta(t)) \cos \gamma] \cdot F(t) + x_0(\gamma). \end{cases}$$

Функция  $\Gamma(t)$  определяется из решения дифференциального уравнения, аналогичного (10):

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{V_\tau(\Gamma(\theta), \delta(\theta)) - V_n'(\Gamma(\theta), \delta(\theta))}{[V_n(\Gamma(\theta), \delta(\theta)) + V_n''(\Gamma(\theta), \delta(\theta))] \cdot F(\theta) - \rho_0(\Gamma(\theta))}.$$

Траектории движения частиц определяются интегрированием уравнений движения:

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t V_y(\Gamma(\theta), \delta(\theta)) d\theta + y_0(\Gamma_0), \\ x(t) = \int_0^t V_x(\Gamma(\theta), \delta(\theta)) d\theta + x_0(\Gamma_0). \end{cases}$$

Решение краевой задачи (11), (12) для радиусов кривизны линий скольжения принимает вид:

$$\begin{cases} R(\alpha, \beta, t) = \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=0}^{\infty} R_{mn}(\delta(t)) (\alpha - \alpha_A)^m \cdot \beta^n \cdot F(t) + R_0(\alpha, \beta), \\ S(\alpha, \beta, t) = \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=0}^{\infty} S_{mn}(\delta(t)) (\alpha - \alpha_A)^m \cdot \beta^n \cdot F(t) + S_0(\alpha, \beta), \end{cases}$$

где  $\alpha_A = -\frac{\pi}{4} + \delta(t)$ . Коэффициенты  $R_{mn}(\delta), S_{mn}(\delta)$  получены интерполяцией значений  $R_{mn}, S_{mn}$  для рассматриваемого диапазона углов  $\delta \in (0, 90^\circ)$ .

Рассмотрим движение частиц вдоль оси абсцисс, которая совпадает со срединной линией образца (рис. 4).

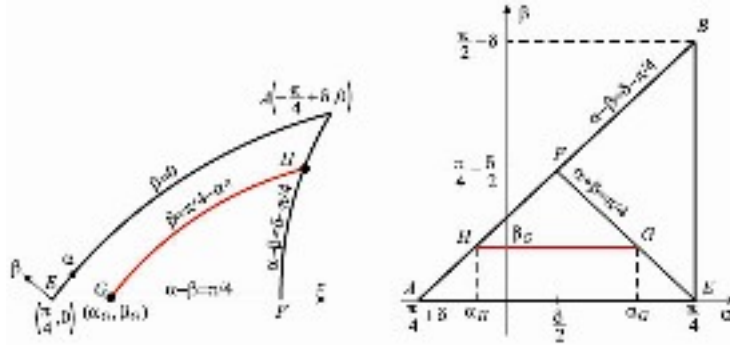


Рис. 4.

Местоположение некоторой частицы  $G$  будем задавать с помощью функции  $x(\alpha_G, t)$ . В уравнении движения частицы полная производная по времени имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \alpha_G} \frac{d\alpha_G}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \beta_G} \frac{d\beta_G}{dt} = V_x(\alpha_G, \beta_G).$$

Поскольку на участке  $FE$  оси абсцисс справедливо соотношение:  $\alpha_G + \beta_G = \frac{\pi}{4}$ , то последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_G} \frac{d\alpha_G}{dt} = V_x(\alpha_G).$$

Частные производные по  $t$  и по  $\alpha_G$  известны, поскольку их можно выразить через радиус кривизны  $\alpha$ -линии, проходящей через частицу  $G$  (рис. 4):

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\alpha_G) = \int_{\alpha_H}^{\alpha_G} R(\alpha) \cos(\alpha + \beta_G) d\alpha + \frac{\partial x(H)}{\partial t}, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha_G, t) = R(\alpha_G, t) \cdot \cos(\alpha_G + \beta_G).$$

Поэтому из решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\alpha_G}{dt} = \frac{V_x(\alpha_G) - \frac{\partial x}{\partial t}(\alpha_G)}{2 \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha_G, t)}$$

определяется функция  $\alpha_G(t)$ , которая индивидуализирует частицы, перемещающиеся на участке  $FE$  оси абсцисс.

В теории идеального жесткопластического тела работа внутренних сил совпадает с объемной плотностью диссипации энергии [1]:

$$\bar{W} = \frac{1}{k} \int_0^t \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dt = \int_0^t \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + u \right) - \frac{1}{S} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} - v \right) \right] dt. \quad (17)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  – тензор скоростей деформаций. Рассеяние энергии в материале является одной из причин разрушения, поэтому расчет  $\bar{W}$  важен для прогноза изменений геометрии тела. Расчет величины  $\bar{W}$ , в свою очередь, представляет известные трудности, вызванные необходимостью интегрирования вдоль пути деформирования частиц.

Полученные функции  $\Gamma(t)$  и  $\alpha_G(t)$  предоставляют возможность проинтегрировать уравнение (17). Для частиц, расположенных на оси  $Ox$ , формула (17) принимает вид:

$$\bar{W} = \frac{Vk}{\sqrt{2}} \int_0^{t_0} \frac{dt}{L(t)} + \int_{t_0}^t \frac{u(\alpha(t)) - v(\alpha(t)) + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\alpha(t)) + \frac{\partial u}{\partial \beta}(\alpha(t))}{R(\alpha(t), t)} dt, \quad (18)$$

где  $t_0$  – момент достижения частицей точки пространства  $E$ . Первый интеграл в формуле (18) описывает диссипацию энергии частицы за период деформирования на участке  $O'E$ . Вторым интегралом описывается диссипация энергии частицы на участке  $EF$ .

На свободной поверхности  $R = -S = \rho\sqrt{2}$ . Поэтому формула (17) принимает вид

$$\bar{W} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \frac{u(\Gamma(t), \delta(t)) - v(\Gamma(t), \delta(t)) + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\Gamma(t), \delta(t)) + \frac{\partial u}{\partial \beta}(\Gamma(t), \delta(t))}{-[V_n(\Gamma(t), \delta(t)) + V_n''(\Gamma(t), \delta(t))] \cdot F(t) + \rho_0(\Gamma(t))} dt. \quad (19)$$

Интеграл (19) описывает диссипацию энергии частиц, деформирующихся на свободной поверхности  $AFB$ . Вычислительным экспериментом установлено, что максимальное значение  $\bar{W}$  достигается в вершине (точка  $F$ ).

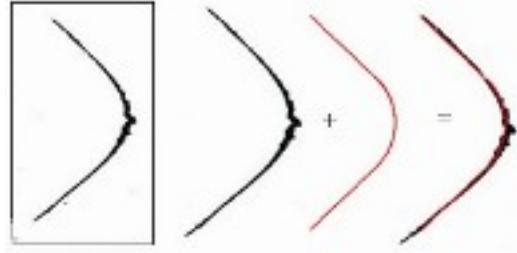


Рис. 5.

На рис. 5 приведено сравнение геометрической формы кривой, построенной по формулам (8), со снимком эксперимента Дж. Джойса [5], исследовавшим форму  $\Sigma(t)$  путем растяжения образцов Шарпи-Изода. Эксперименты Дж. Джойса показали также, что “округлая конфигурация оказывается неустойчивой”: непрерывная деформация свободной поверхности скругленного выреза сменяется локальным острым надрезом в вершине (рис. 5). Критерий перехода Дж. Джойса не установил. Ф. Макклиток, описывая эксперимент Дж. Джойса [2], связывал появление локальной трещины с дефектами начальной формы выреза, вместе с этим указывая на необходимость четкого математического описания данного явления. На основе формулы (19) сформулирован энергетический критерий перехода от затупления скругленного выреза к локальному разрушению в вершине:

*Непрерывное формообразование скругленной поверхности углового выреза, вызванное поперечным растяжением образца, будет продолжаться до тех пор, пока значение объемной плотности диссипации энергии в вершине свободной поверхности в момент времени  $t_*$  не достигнет критического значения  $\bar{W}_*$ :*

$$\bar{W}_* = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{t_*} \frac{u(\frac{\pi}{2}, \delta(t)) - v(\frac{\pi}{2}, \delta(t)) + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\frac{\pi}{2}, \delta(t)) + \frac{\partial u}{\partial \beta}(\frac{\pi}{2}, \delta(t))}{-[V_n(\frac{\pi}{2}, \delta(t)) + V_n''(\frac{\pi}{2}, \delta(t))] \cdot F(t) + \rho_0(\frac{\pi}{2})} dt.$$

$\bar{W}_*$  есть константа материала, определяемая экспериментально [4].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 529 с.
- [2] *Либовиц, Г.* Разрушение. Т. 3 : Инженерные основы и воздействие внешней среды / Г. Либовиц. – М. : Мир, 1976. – 797 с.
- [3] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит, 1956. – 407 с.
- [4] *Хромов, А. И.* Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения / А. И. Хромов, О. В. Козлова. – Владивосток : Дальнаука, 2005. – 159 с.
- [5] *Joyce, J. A.* Tensile Plastic Deformation at Notch Roots / J. A. Joyce // M. S. thesis. Dept. of Mechanical Eng., M.I.T. – Cambridge, 1968.
- [6] *Lee, E. H.* Plastic Flow in a V-Notched Bar Pulled in Tension / E. H. Lee // J. Appl. Mech. – 1952. – Vol. 19. – P. 331–336.
- [7] *Richmond, O.* Plane strain necking of V-notched and un-notched tensile bars / O. Richmond // J. Mech. And Phys. Solids. – 1969. – Vol. 17. – P. 83–90.

*A. I. Khromov, O. V. Patlina*

## PLASTIC CURRENTS IN A VICINITY OF THE ROUNDED ANGULAR CUTS

*S. Korolev Samara State Aerospace University*

**Abstract.** Within the limits of the ideal stiff-plastic bodies model the quasistatic problem about the sample stretching with the rounded angular cuts is considered. The construction of possible plastic currents is realised and the form of a free surface in which the rounded angular cut is deformed as a result of stretching a sample is defined. Motion of the particles in a plastic area and change of the geometry of the field with time of time are investigated. The energy transition criterion from the continuous forming of a free surface to destruction in the top of the rounded angular cut is formulated.

**Keywords:** ideal stiff-plastic body, flat deformation, motion of particles, free surface, analytical decisions, energy dissipation, destruction.

*Хромов Александр Игоревич*

*доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева, г. Самара*

*e-mail: khromov@ssau.ru*

*Патлина Оксана Валерьевна*

*младший научный сотрудник, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева, г. Самара*

*e-mail: oksana@my-scinet.org*

*Khromov, Alexander Igorevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, S. Korolev Samara State Aerospace University, Samara*

*Patlina, Oksana Valerievna*

*Researcher, S. Korolev Samara State Aerospace University, Samara*

## ОБ ОБРАТНОМ ТЕНЗОРЕ ЭШЕЛБИ

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН*

**Аннотация.** Рассматривается проблема нахождения тензора, обратного известному тензору Эшелби, связывающему свободную однородную и стесненную деформации эллипсоидального упругого включения, испытывающего превращение. Для включений в виде эллипсоидов вращения компоненты указанного тензора найдены.

**Ключевые слова:** обратный тензор Эшелби, изолированные эллипсоидальные жесткие включения, сплюснутый и вытянутый сфероиды.

УДК: 539.3

В [1] было доказано, что для любого эллипсоида вращения, т. е. для любого сплюснутого или вытянутого сфероида, находящегося в изотропном упругом пространстве, существует единственный обратный тензор Эшелби. Для этих случаев в данной работе найдены в замкнутом виде компоненты указанного тензора. Рассмотрены некоторые примеры, в частности, задачи об определении напряжений в изолированных эллипсоидальных жестких включениях, находящихся в упругом пространстве, подвергнутом действию равномерно распределенных на бесконечности напряжений.

**1. Матрицы, соответствующие тензорам  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}^{-1}$ .** Несимметричный тензор 4-го ранга (тензор Эшелби, который будем обозначать через  $\mathbf{S}$ ) связывает свободную однородную и стесненную деформации эллипсоидального упругого включения, испытывающего превращение, а также входит в соотношения между напряжениями и деформациями в бесконечно удаленных точках упругой среды  $v$  и в эллипсоидальном физически нелинейном включении  $v^*$  (в частности, в жестком), содержащемся в этой среде. Тензор  $\mathbf{S}$  не зависит от пространственных координат, поэтому напряженно-деформированное состояние включения  $v^*$  в указанных случаях будет однородным [1].

Ненулевые компоненты тензора  $\mathbf{S}$  в системе координат, связанной с осями симметрии эллипсоида  $v^*$ , имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} S_{kkkk} &= Qa_k^2 I_{kk} + RI_k, & S_{kkll} &= Qa_l^2 I_{kl} - RI_k, \\ 2S_{klkl} &= 2S_{kllk} = Q(a_k^2 + a_l^2)I_{kl} + R(I_k + I_l), \\ Q &= 3/[8\pi(1 - \nu)], & R &= (1 - 2\nu)/[8\pi(1 - \nu)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $a_k$  — полуоси эллипсоида ( $k, l = 1, 2, 3; k \neq l$ ; суммирование по  $k$  и  $l$  не проводится), а величины  $I_k$ ,  $I_{kk}$  и  $I_{kl}$  для сплюснутого и вытянутого сфероидов определяются следующим образом ( $\delta < 1$ ):

при  $a_1 = a_2 = \alpha$ ,  $a_3 = \delta\alpha$  имеем

$$I_1 = I_2 = I \equiv 2\pi\delta(1 - \delta^2)^{-3/2}[\arccos \delta - \delta(1 - \delta^2)^{1/2}],$$

$$I_3 = 4\pi - 2I, \quad I_{11} = I_{22} = 3I_{12} = \frac{3I - 4\pi\delta^2}{4\alpha^2(1 - \delta^2)}, \quad (2)$$

$$I_{13} = I_{23} = \frac{4\pi - 3I}{3\alpha^2(1 - \delta^2)}, \quad I_{33} = \frac{4\pi(1 - 3\delta^2) + 6I\delta^2}{3\alpha^2\delta^2(1 - \delta^2)},$$

а при  $a_1 = \alpha$ ,  $a_2 = a_3 = \delta\alpha$  имеем

$$I_2 = I_3 = I \equiv 2\pi\delta^{-1}(\delta^{-2} - 1)^{-3/2}[\delta^{-1}(\delta^{-2} - 1)^{1/2} - \operatorname{arch} \delta^{-1}], \quad I_1 = 4\pi - 2I,$$

$$I_{11} = \frac{4\pi(3 - \delta^2) - 6I}{3\alpha^2(1 - \delta^2)}, \quad I_{22} = I_{33} = 3I_{23} = \frac{4\pi - 3I\delta^2}{4\alpha^2\delta^2(1 - \delta^2)}, \quad (3)$$

$$I_{12} = I_{13} = \frac{3I - 4\pi}{3\alpha^2(1 - \delta^2)}.$$

Тензору  $\mathbf{S}$  соответствует матрица  $\|s_{kl}\|$  размером  $6 \times 6$ , элементы  $s_{kl}$  которой определяются следующим образом [1]:  $s_{kl} = S_{kkll}$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ; по  $k$  и  $l$  суммирования нет),  $s_{44} = 2S_{1212}$ ,  $s_{55} = 2S_{1313}$ ,  $s_{66} = 2S_{2323}$ , а остальные  $s_{kl}$  равны нулю.

Нахождение обратного тензора  $\mathbf{S}^{-1}$  эквивалентно нахождению матрицы, обратной  $\|s_{kl}\|$ . В [1] доказано, что для эллипсоидов вращения, матрица  $\|s_{kl}\|$  является невырожденной, т. е.  $\det\|s_{kl}\| \neq 0$ . Более того, из полученных в [1] результатов следует, что в обоих случаях (сплющенного и вытянутого сфероидов)  $\det\|s_{kl}\| > 0$ . Поэтому для  $\|s_{kl}\|$  существует обратная матрица  $\|c_{kl}\|$ , соответствующая тензору  $\mathbf{S}^{-1}$ . Ее элементы определяются известными соотношениями [2] и в данном случае имеют вид

$$c_{kl} = d_{lk}/\Delta_0, \quad (4)$$

где  $d_{kl}$  — алгебраические дополнения для элементов  $s_{kl}$  матрицы  $\|s_{kl}^0\| \equiv \|s_{kl}\|$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ),  $\Delta_0 = \det\|s_{kl}^0\|$ ,  $c_{kk} = s_{kk}^{-1}$  ( $k = 4, 5, 6$ ; по  $k$  суммирования нет), а остальные  $c_{kl} = 0$ .

Легко видеть, что поскольку величины  $s_{kl}$  являются компонентами тензора  $\mathbf{S}$  в системе координат, связанной с осями симметрии эллипсоида  $v^*$ , то  $c_{kl}$  есть компоненты обратного тензора  $\mathbf{S}^{-1}$  в той же системе координат. Произведение матриц  $\|s_{kl}\|$  и  $\|c_{kl}\|$  дает единичную матрицу 6-го порядка.

Вследствие вытекающих из (1) и (2) соотношений:  $s_{11} = s_{22}$ ,  $s_{12} = s_{21}$ ,  $s_{13} = s_{23}$  и  $s_{31} = s_{32}$  для сплющенного сфероида получим:

$$\begin{aligned} d_{11} = d_{22} &= s_{11}s_{33} - s_{13}s_{31}, & d_{12} = d_{21} &= s_{13}s_{31} - s_{12}s_{33}, \\ d_{13} = d_{23} &= s_{31}(s_{12} - s_{11}), & d_{31} = d_{32} &= s_{13}(s_{12} - s_{11}), \\ d_{33} &= s_{11}^2 - s_{12}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Для величины  $\Delta_0$  имеем [1]:

$$\begin{aligned} &32(1 - \nu)^3 t^2 \Delta_0 = \\ &= (1 + \nu)[3F - 2(1 - t) + 4t(1 - 2\nu)F][(3 - 4\nu t)F - 2(1 - t) - 2(1 - 2\nu)tF^2] > 0, \\ &t = 1 - \delta^2, \quad F = I/(2\pi). \end{aligned} \quad (6)$$

Из (1) и (3) следует, что  $s_{12} = s_{13}$ ,  $s_{31} = s_{21}$ ,  $s_{32} = s_{23}$  и  $s_{33} = s_{22}$ . Отсюда для вытянутого сфероида будем иметь:

$$\begin{aligned} d_{11} &= s_{22}^2 - s_{23}^2, \\ d_{12} = d_{13} &= s_{21}(s_{23} - s_{22}), & d_{21} = d_{31} &= s_{12}(s_{23} - s_{22}), \\ d_{22} = d_{33} &= s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}, & d_{23} = d_{32} &= s_{12}s_{21} - s_{11}s_{23}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определителя  $\Delta_0$ , по аналогии с (6), найдем

$$\begin{aligned} &32(1 - \nu)^3 t^2 \Delta_0 = \\ &= (1 + \nu)[2 - 3F(1 - t) + 4(1 - 2\nu)tF]\{2 + [(3 - 4\nu)t - 3]F - 2(1 - 2\nu)tF^2\} > 0, \\ &t = 1 - \delta^2, \quad F = I/(2\pi). \end{aligned} \quad (8)$$

Функции  $I = I(\delta)$  из (6) и (8) определены в (2) и (3) соответственно.



**2. Изотропное упругое пространство с изолированными эллипсоидальными жесткими включениями.** Под изолированными понимаются такие включения, расстояние между центрами любых двух из которых велико по сравнению с их размерами, так что влиянием каждого из них на напряженное состояние любого другого можно пренебречь. Тогда задача сводится к определению напряженно-деформированного состояния упругого пространства  $v$  с одним включением  $v^*$  при заданных на бесконечности равномерно распределенных напряжениях  $\sigma_{kl}^\infty$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) [1].

В области  $v$  справедлив закон Гука:  $\varepsilon = a : \sigma$ ,  $\sigma = b : \varepsilon$  ( $\sigma$  и  $\varepsilon$  — тензоры напряжений и деформаций,  $a$  и  $b$  — взаимно обратные тензоры упругих податливостей и упругих модулей).

В [1] установлены следующие зависимости между напряжениями на бесконечности и в жесткой области  $v^*$ :

$$S : \tilde{\varepsilon}^* = \varepsilon^\infty, \quad \varepsilon^\infty = a : \sigma^\infty, \quad \tilde{\varepsilon}^* \equiv a : \sigma^*, \quad (9)$$

где  $S$  — тензор 4-го ранга (тензор Эшелби).

Для рассматриваемого случая изотропной среды  $v$  имеем в покомпонентной записи известные выражения для деформаций через напряжения:

$$\varepsilon_{ij} = [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{nn}\delta_{ij}]/E \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (10)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\delta_{ij}$  — компоненты единичного тензора; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.

Если ввести 6-мерный вектор напряжений:  $\Sigma_k = \sigma_{kk}$  ( $k = 1, 2, 3$ ; по  $k$  суммирования нет),  $\Sigma_4 = \sigma_{12}$ ,  $\Sigma_5 = \sigma_{13}$ ,  $\Sigma_6 = \sigma_{23}$ , то из (9) и (10) получим равенства, связывающие напряжения  $\Sigma_k^\infty$  на бесконечности и  $\Sigma_k^*$  во включении:

$$\Sigma_k^* = c_{kl}\tilde{\Sigma}_l^\infty + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \sum_{n=1}^3 c_{nl}\tilde{\Sigma}_n^\infty, \quad \tilde{\Sigma}_l^\infty \equiv \Sigma_l^\infty - \frac{\nu}{1 + \nu} I_\sigma^\infty,$$

$$I_\sigma^\infty = \Sigma_1^\infty + \Sigma_2^\infty + \Sigma_3^\infty \quad (k = 1, 2, 3; \text{ суммирование по } l \text{ от } 1 \text{ до } 3), \quad (11)$$

$$\Sigma_k^* = \Sigma_k^\infty / s_{kk} \quad (k = 4, 5, 6; \text{ по } k \text{ суммирования нет}).$$

### 3. Некоторые примеры.

а) Рассмотрим случай сплюсненного сфероида, когда величина  $\delta^2$  из (2) мала по сравнению с единицей, т. е.  $\delta^2 \ll 1$ . Для элементов матрицы  $\|s_{kl}\|$  будем иметь [3]:

$$\begin{aligned} s_{11} = s_{22} &= (13 - 8\nu)\delta_0, & s_{12} = s_{21} &= (8\nu - 1)\delta_0, & s_{13} = s_{23} &= 4(2\nu - 1)\delta_0, \\ s_{31} = s_{32} &= \nu(1 - \nu)^{-1} - 4(1 + 4\nu)\delta_0, & s_{33} &= 1 - 8(1 - 2\nu)\delta_0, \\ s_{44} &= 2(7 - 8\nu)\delta_0, & s_{55} = s_{66} &= 1 - 8(2 - \nu)\delta_0, & \delta_0 &\equiv \pi\delta/[32(1 - \nu)] < \delta/4. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (5), получим

$$\begin{aligned} d_{11} = d_{22} &= \frac{13 - 17\nu}{1 - \nu}\delta_0 - 120(1 - 2\nu)\delta_0^2, \\ d_{12} = d_{21} &= \frac{16\nu^2 - 13\nu + 1}{1 - \nu}\delta_0 + 8(1 - 2\nu)(1 + 16\nu)\delta_0^2, \\ d_{13} = d_{23} &= \frac{2\nu(8\nu - 7)}{1 - \nu}\delta_0 - 8(8\nu - 7)(1 + 4\nu)\delta_0^2, \\ d_{31} = d_{32} &= 8(1 - 2\nu)(7 - 8\nu)\delta_0^2, \\ d_{33} &= 24(7 - 8\nu)\delta_0^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Для величины определителя  $\Delta_0$  из (6) с учетом вытекающего из (2) соотношения  $F \equiv I/(2\pi) = \pi\delta/2 - 2\delta^2 + o(\delta^2)$  и приближенного равенства  $1 - \delta^2 \approx 1$  будем иметь

$$\Delta_0 = 8(1 + \nu)(1 - \nu)^{-1}(7 - 8\nu)(3 - 4\nu)\delta^2 + o(\delta^2). \quad (14)$$

Из (4), (13) и (14) при  $\delta_0 \rightarrow 0$  получим

$$\begin{aligned}
 c_{11} = c_{22} = d_{11}/\Delta_0 &\sim \frac{13 - 17\nu}{8f\delta_0}, \\
 c_{12} = c_{21} = d_{21}/\Delta_0 &\sim \frac{16\nu^2 - 13\nu + 1}{8f\delta_0}, \\
 c_{13} = c_{23} = d_{31}/\Delta_0 &\sim \frac{(1 - 2\nu)(1 - \nu)}{(1 + \nu)(3 - 4\nu)}, \\
 c_{31} = c_{32} = d_{13}/\Delta_0 &\sim -\frac{\nu}{4(1 + \nu)(3 - 4\nu)\delta_0}, \\
 c_{33} = d_{33}/\Delta_0 &\sim \frac{3(1 - \nu)}{(1 + \nu)(3 - 4\nu)}, \quad f \equiv (1 + \nu)(7 - 8\nu)(3 - 4\nu).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя (15) и выражения для  $s_{kk}$  ( $k = 4, 5, 6$ ) из (12) в (11), найдем

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1^* = \sigma_{11}^* &\sim \frac{(13 - 16\nu)A_1 + A_2}{8f\delta_0}, \quad \Sigma_2^* = \sigma_{22}^* \sim \frac{A_1 + (13 - 16\nu)A_2}{8f\delta_0}, \\
 \Sigma_3^* = \sigma_{33}^* &\sim \frac{3(1 - \nu)A_3}{(1 + \nu)^2(3 - 4\nu)}, \\
 A_1 &\equiv \sigma_{11}^\infty - \nu(\sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty), \\
 A_2 &\equiv \sigma_{22}^\infty - \nu(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{33}^\infty), \quad A_3 \equiv \sigma_{33}^\infty - \nu(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty), \\
 \Sigma_4^* = \sigma_{12}^* &\sim \frac{\sigma_{12}^\infty}{2(7 - 8\nu)\delta_0}, \quad \Sigma_5^* = \sigma_{13}^* \sim \sigma_{13}^\infty, \quad \Sigma_6^* = \sigma_{23}^* \sim \sigma_{23}^\infty.
 \end{aligned} \tag{16}$$

б) Рассмотрим случай вытянутого сфероида, когда величина  $\delta^2$  из (3) мала по сравнению с единицей и для элементов матрицы  $\|s_{ki}\|$  будем иметь [3]:

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= \frac{2 - \nu}{1 - \nu}\delta_1, \quad s_{12} = s_{13} = -\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}\delta_1, \quad s_{21} = s_{31} = \frac{\nu - (1 + \nu)\delta_1}{2(1 - \nu)}, \\
 s_{22} = s_{33} &= \frac{5 - 4\nu - 2(1 - 2\nu)\delta_1}{8(1 - \nu)}, \quad s_{23} = s_{32} = \frac{4\nu - 1 + 2(1 - 2\nu)\delta_1}{8(1 - \nu)}, \\
 s_{44} = s_{55} &= \frac{1}{2} - \frac{(1 + \nu)\delta_1}{2(1 - \nu)}, \quad s_{66} = \frac{3 - 4\nu - 2(1 - 2\nu)\delta_1}{4(1 - \nu)}, \quad \delta_1 \equiv -\delta^2 \ln(\delta/2).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя (17) в (7), получим

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= \frac{3 - 4\nu - 2(1 - 2\nu)\delta_1}{8(1 - \nu)^2}, \\
 d_{12} = d_{13} &= -\frac{\nu - (1 + \nu)\delta_1}{8(1 - \nu)^2}[3 - 4\nu - 2(1 - 2\nu)\delta_1], \\
 d_{21} = d_{31} &= \frac{1 - 2\nu}{8(1 - \nu)^2}[3 - 4\nu - 2(1 - 2\nu)\delta_1]\delta_1, \\
 d_{22} = d_{33} &= \frac{\delta_1}{8(1 - \nu)^2}[10 - 11\nu - 6(1 - 2\nu)\delta_1], \\
 d_{23} = d_{32} &= \frac{\delta_1}{8(1 - \nu)^2}[8\nu^2 - 11\nu + 2 + 2(1 - 2\nu)^2\delta_1].
 \end{aligned} \tag{18}$$

Как следует из (3), с точностью до малых порядка  $\delta^2$  величина  $I = 2\pi[1 + \delta^2 \ln(\delta/2)]$ , т. е.  $F \equiv I/(2\pi) = 1 - \delta_1$ , и из (8) с учетом приближенного равенства  $t \approx 1$  для определителя  $\Delta_0$  будем иметь

$$8(1 - \nu)^3 \Delta_0 = (1 + \nu)[2(1 - \nu)(3 - 4\nu)\delta_1 - (1 - 2\nu)(7 - 8\nu)\delta_1^2] + o(\delta_1^2). \tag{19}$$

Элементы обратной матрицы  $\|c_{kl}\|$  определяются из (4), (18) и (19). Укажем только асимптотические соотношения, аналогичные (15), при  $\delta_1 \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} c_{11} &\sim \frac{1}{2(1+\nu)\delta_1}, & c_{12} = c_{13} &\sim \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}, \\ c_{21} = c_{31} &\sim -\frac{\nu}{2(1+\nu)\delta_1}, & c_{22} = c_{33} &\sim \frac{10-11\nu}{2(1+\nu)(3-4\nu)}, \\ c_{23} = c_{32} &\sim \frac{8\nu^2-11\nu+2}{2(1+\nu)(3-4\nu)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя (20) и выражения для  $s_{kk}$  ( $k = 4, 5, 6$ ) из (17) в (11), найдем

$$\begin{aligned} \Sigma_1^* = \sigma_{11}^* &\sim \frac{A_1}{2(1+\nu)\delta_1}, & \Sigma_2^* = \sigma_{22}^* &\sim \frac{(10-11\nu)A_2 + (8\nu^2-11\nu+2)A_3}{2(1+\nu)^2(3-4\nu)}, \\ \Sigma_3^* = \sigma_{33}^* &\sim \frac{(8\nu^2-11\nu+2)A_2 + (10-11\nu)A_3}{2(1+\nu)^2(3-4\nu)}, \\ \Sigma_4^* = \sigma_{12}^* &\sim 2\sigma_{12}^\infty, & \Sigma_5^* = \sigma_{13}^* &\sim 2\sigma_{13}^\infty, & \Sigma_6^* = \sigma_{23}^* &\sim \frac{4(1-\nu)}{3-4\nu}\sigma_{23}^\infty. \end{aligned}$$

Величины  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  определены в (16).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Цвелодуб, И. Ю. О тензоре Эшелби / И. Ю. Цвелодуб // ПММ. – 2010. – Т. 74. – Вып. 2. – С. 346–351.  
 [2] Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Наука, 1988. – 552 с.  
 [3] Цвелодуб, И. Ю. Эллипсоидальное физически нелинейное включение в линейно-упругой среде / И. Ю. Цвелодуб // ПМТФ. – 2004. – Т. 45, № 1. – С. 84–91.

I. Y. Tsvelodub

## ESHELBY INVERSE TENSOR

*A. Lavrentev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences*

**Abstract.** The problem of finding a tensor, reverse to well-known Eshelby tensor connecting free homogeneous and constrained deformation of an ellipsoidal elastic inclusion, testing transformation is considered. For inclusions in the form of rotation ellipsoids the mentioned tensor components are found.

**Keywords:** Eshelby inverse tensor, isolated ellipsoidal rigid inclusions, flattened and stretched spheroids.

Цвелодуб Игорь Юрьевич

доктор физико-математических наук, профессор, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

e-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

Tsvelodub, Igor Yurievich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, A. Lavrentev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

А. Д. Чернышов

## ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ БЫСТРЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

*Воронежская государственная технологическая академия*

**Аннотация.** Построение двумерной граничной функции для быстрых рядов Фурье с целью определения межфазной границы.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, быстрые ряды Фурье, межфазная граница.

УДК: 539

В механике сплошных сред часто возникают задачи, в которых область деформируемого тела разделена неизвестной границей на несколько частей. В случае упругопластического тела такая граница разделяет упругую область от пластической [1], в задачах Стефана это – межфазная граница [2]. Задачи с неизвестной границей относятся к наиболее трудным. Для них получены только отдельные результаты [3; 4]. При рассмотрении подобных задач, а также и нелинейных, в [5] предлагается использовать специальные быстрые ряды Фурье, которые обладают быстрой сходимостью, малыми временными затратами при завершении построения решения с помощью ЭВМ. Следует отметить, что полученное приближенное решение задачи имеет аналитический вид, что позволяет проводить исследования.

Быстрые ряды Фурье основаны на введении специальных граничных функций. В этой связи проведем следующие рассуждения. Пусть неизвестная функция  $U(x, y)$  находится из решения краевой задачи

$$D_2(U(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad L(U(x, y))|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где  $D_2$  – некоторый дифференциальный оператор второго порядка,  $L$  – оператор, заданный на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ . Операторы  $D_2$  и  $L$  пока не будем конкретизировать. Для простоты будем считать, что на  $\Gamma$  заданы условия Дирихле. Предлагаемые ниже рассуждения применимы и для другого типа граничных условий, а также и для нелинейных.

Для получения быстрых рядов Фурье необходимо представить неизвестную функцию  $U(x, y)$  в виде суммы

$$U(x, y) = M_{2p}(x, y) + \varphi(x, y), \quad (2)$$

где  $\varphi(x, y)$  – новая неизвестная,  $M_{2p}(x, y)$  – называется граничной функцией, для которой на границе  $\Gamma$  следует поставить какие-либо линейные граничные условия, например, условия Дирихле

$$M_{2p}(x, y)|_{\Gamma} = f(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}). \quad (3)$$

В случае, когда оператор  $L$  соответствует условиям Дирихле,  $f(x_{\Gamma}, y_{\Gamma})$  следует взять из этого условия, в общем случае

$$f(x_\Gamma, y_\Gamma) = U(x, y)|_\Gamma. \quad (4)$$

Если  $U(x, y)|_\Gamma$  заранее неизвестно, то  $f(x_\Gamma, y_\Gamma)$  включается в общее число неизвестных и её также следует представить быстрым рядом Фурье, коэффициенты которого будут находиться из действительного граничного условия в (1). Подобное свойство предлагаемого подхода позволяет решать краевые задачи с нелинейными граничными условиями. При этом не следует опасаться усложнения решения задачи в целом, т. к. для достижения высокой точности в быстрых рядах Фурье достаточно ограничиваться всего несколькими слагаемыми. Практические эксперименты показывают, что для монотонных функций при использовании граничной функции  $M_2$  в быстрых рядах Фурье достаточно ограничиваться двумя слагаемыми для обеспечения точности до  $10^{-3}$ . Кроме (3) для  $M_{2p}$  на  $\Gamma$  могут быть поставлены и еще дополнительные условия. От количества граничных условий, задаваемых на  $\Gamma$  для определения  $M_{2p}$ , зависит скорость сходимости рядов Фурье для неизвестной  $\varphi(x, y)$  [5]. При правильном построении граничной функции  $M_{2p}$  классический ряд Фурье для  $\varphi(x, y)$  из (2) будет обладать вышеуказанными особыми свойствами. В простейшем случае это свойство доказано в работе [6]. В изложении ниже будем считать  $\Omega$  прямоугольной областью

$$\Omega = (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b). \quad (5)$$

Если для  $U(x, y)$  заданы условия Дирихле

$$U|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad U|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad U|_{y=0} = \psi_1(x), \quad U|_{y=b} = \psi_2(x), \quad (6)$$

то простейшая граничная функция  $M_0$  при  $p = 0$  (нулевого порядка) находится из решения задачи, состоящей только из граничных условий

$$M_0|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad M_0|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad M_0|_{y=0} = \psi_1(x), \quad M_0|_{y=b} = \psi_2(x). \quad (7)$$

Граничная функция  $M_2$  второго порядка находится из двойных граничных условий, заданных на  $\Gamma$  для функции и её вторых производных, т. е.

$$\begin{aligned} M_0|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad M_0|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad M_0|_{y=0} = \psi_1(x), \quad M_0|_{y=b} = \psi_2(x) \\ M_{0xx}|_{x=0} = \varphi_3(y), \quad M_{0xx}|_{x=a} = \varphi_4(y), \quad M_{0yy}|_{y=0} = \psi_3(x), \quad M_{0yy}|_{y=b} = \psi_4(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично могут быть поставлены граничные условия для нахождения  $M_4(x, y)$  – для функции, вторых и четвертых производных. Поскольку для построения  $M_{2p}$  ставятся только граничные условия (7), (8) и т.д. и при этом нет никакого дифференциального уравнения, то и решение подобных граничных задач типа (7), (8) многозначно. Из этого множества следует выбрать простейшую  $M_{2p}$ . Так, из класса полиномов по  $x, y$  наименьшей степени функция  $M_0(x, y)$  имеет вид

$$\begin{aligned} M_0(x, y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \varphi_1(y) + \frac{x}{a} \varphi_2(y) + \left(1 - \frac{y}{b}\right) \psi_1(x) + \frac{y}{b} \psi_2(x) - \\ - \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \varphi_1(0) - \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \varphi_1(b) - \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \varphi_2(0) - \frac{x}{a} \frac{y}{b} \varphi_2(b). \end{aligned} \quad (9)$$

Впоследствии при построении решения задачи (1) предполагаемые быстрые ряды Фурье для функции  $\varphi(x, y)$  из (2) придется дважды почленно дифференцировать по  $x, y$ , что допустимо только для непрерывных функций. Поэтому граничные условия в (7) и (8) тоже должны быть непрерывными всюду на  $\Gamma$ , в том числе и в угловых точках прямоугольника  $\Omega$ , т. е.  $M_{2p} \in C^{(2p)}(\bar{\Omega})$ . Отсюда приходим к необходимости выполнения следующих условий, накладываемых на граничные условия при построении  $M_{2p}$ . В случае задачи (7) эти условия согласования имеют вид

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(a), \quad \varphi_2(b) = \psi_2(a), \quad \varphi_1(b) = \psi_2(0). \quad (10)$$

Для задачи (8) в области прямоугольника  $\Omega = (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$  полагаем  $U(x, y) \in C^{(2)}(\Omega)$ . Тогда граничные условия должны удовлетворять условиям согласования, которые следуют из условия непрерывности  $U(x, y)$  и её частных производных  $U_{xx}$ ,  $U_{yy}$ ,  $U_{xyy}$  в углах прямоугольника, которые представим равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \psi_1(0) \quad , \quad \psi_1(a) = \varphi_2(0) \quad , \quad \varphi_2(b) = \psi_2(a) \quad , \quad \psi_2(0) = \varphi_1(b) \quad , \\ \varphi_1''(0) &= \psi_3(0) \quad , \quad \psi_3(a) = \varphi_2''(0) \quad , \quad \varphi_3(0) = \psi_1''(0) \quad , \quad \psi_2''(0) = \varphi_3(b) \quad , \\ \varphi_4(0) &= \psi_1''(a) \quad , \quad \psi_2''(a) = \varphi_4(b) \quad , \quad \varphi_1''(b) = \psi_4(0) \quad , \quad \psi_4(a) = \varphi_2''(b) \quad , \\ \psi_3''(a) &= \varphi_4''(0) \quad , \quad \psi_4''(a) = \varphi_4''(b) \quad , \quad \psi_3''(0) = \varphi_3''(0) \quad , \quad \psi_4''(0) = \varphi_3''(0) \quad . \end{aligned} \quad (11)$$

Граничную функцию  $M_2(x, y)$  будем строить в виде

$$M_2(x, y) = A_i(x) [\varphi_i(y) + Y_i(y)] + B_i(y) [\psi_i(x) + X_i(x)] \quad , \quad i = 1 \div 4. \quad (12)$$

В правой части выражения (12) и всюду в дальнейшем по повторяющемуся индексу  $i$  предполагается суммирование от 1 до 4. После подстановки  $M_2(x, y)$  из (12) в первое граничное условие получим уравнение

$$M_2(0, y) = A_i(0) [\varphi_i(y) + Y_i(y)] + B_i(y) [\psi_i(0) + X_i(0)] = \varphi_1(y). \quad (13)$$

Поскольку все функции  $\varphi_i(y)$ ,  $\psi_i(x)$ ,  $i = 1 \div 4$  могут быть заданы независимо между собой, то из (13) будем иметь

$$A_1(0) = 1 \quad , \quad A_2(0) = A_3(0) = A_4(0) = 0 \quad , \quad Y_1(y) = -B_i(y) [\psi_i(0) + X_i(0)]. \quad (14)$$

После выполнения по два граничных условия на каждой стороне прямоугольника  $\Omega$  аналогичными действиями получим ещё семь подобных выражений. Совместно с (14) вся система принимает форму

$$\begin{aligned} A_1(0) &= 1 \quad , \quad A_2(0) = A_3(0) = A_4(0) = 0 \quad , \quad A_2(a) = 1 \quad , \quad A_1(a) = A_3(a) = A_4(a) = 0 \quad , \\ A_3''(0) &= 1 \quad , \quad A_1''(0) = A_2''(0) = A_4''(0) = 0 \quad , \quad A_4''(a) = 1 \quad , \quad A_1''(a) = A_2''(a) = A_3''(a) = 0 \quad , \\ B_1(0) &= 1 \quad , \quad B_2(0) = B_3(0) = B_4(0) = 0 \quad , \quad B_2(b) = 1 \quad , \quad B_1(b) = B_3(b) = B_4(b) = 0 \quad , \\ B_3''(0) &= 1 \quad , \quad B_1''(0) = B_2''(0) = B_4''(0) = 0 \quad , \quad B_4''(b) = 1 \quad , \quad B_1''(b) = B_2''(b) = B_3''(b) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} X_1(x) &= -A_i(x) [\varphi_i(0) + Y_i(0)] \quad ; \quad X_2(x) = -A_i(x) [\varphi_i(b) + Y_i(b)] \quad ; \\ X_3(x) &= -A_i(x) [\varphi_i''(0) + Y_i''(0)] \quad ; \quad X_4(x) = -A_i(x) [\varphi_i''(b) + Y_i''(b)] \quad ; \\ Y_1(y) &= -B_i(y) [\psi_i(0) + X_i(0)] \quad ; \quad Y_2(y) = -B_i(y) [\psi_i(a) + X_i(a)] \quad ; \\ Y_3(y) &= -B_i(y) [\psi_i''(0) + X_i''(0)] \quad ; \quad Y_4(y) = -B_i(y) [\psi_i''(a) + X_i''(a)] \quad . \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) дифференцированием вычислим вторые производные

$$\begin{aligned} X_1''(x) &= -A_i''(x) [\varphi_i(0) + Y_i(0)] \quad ; \quad X_2''(x) = -A_i''(x) [\varphi_i(b) + Y_i(b)] \quad ; \\ X_3''(x) &= -A_i''(x) [\varphi_i''(0) + Y_i''(0)] \quad ; \quad X_4''(x) = -A_i''(x) [\varphi_i''(b) + Y_i''(b)] \quad ; \\ Y_1''(y) &= -B_i''(y) [\psi_i(0) + X_i(0)] \quad ; \quad Y_2''(y) = -B_i''(y) [\psi_i(a) + X_i(a)] \quad ; \\ Y_3''(y) &= -B_i''(y) [\psi_i''(0) + X_i''(0)] \quad ; \quad Y_4''(y) = -B_i''(y) [\psi_i''(a) + X_i''(a)] \quad . \end{aligned} \quad (17)$$

В выражениях (16) и (17) для  $X_i(x)$ ,  $Y_i(y)$  и вторых производных  $X_i''(x)$ ,  $Y_i''(y)$  последовательно положим  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ . С учетом (15) получим вспомогательные уравнения

$$\begin{aligned}
& X_1(0) + \varphi_1(0) + Y_1(0) = 0 ; \quad X_2(0) + \varphi_1(b) + Y_1(b) = 0 ; \\
& X_1(a) + \varphi_2(0) + Y_2(0) = 0 ; \quad X_2(a) + \varphi_2(b) + Y_2(b) = 0 ; \\
& X_3(0) + \varphi_1''(0) + Y_1''(0) = 0 ; \quad X_4(0) + \varphi_1''(b) + Y_1''(b) = 0 ; \\
& X_3(a) + \varphi_2''(0) + Y_2''(0) = 0 ; \quad X_4(a) + \varphi_2''(b) + Y_2''(b) = 0 ; \\
& Y_1(0) + \psi_1(0) + X_1(0) = 0 ; \quad Y_2(0) + \psi_1(a) + X_1(a) = 0 ; \\
& Y_1(b) + \psi_2(0) + X_2(0) = 0 ; \quad Y_2(b) + \psi_2(a) + X_2(a) = 0 ; \\
& Y_3(0) + \psi_1''(0) + X_1''(0) = 0 ; \quad Y_4(0) + \psi_1''(a) + X_1''(a) = 0 ; \\
& Y_3(b) + \psi_2''(0) + X_2''(0) = 0 ; \quad Y_4(b) + \psi_2''(a) + X_2''(a) = 0 ;
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
& X_1''(0) + \varphi_3(0) + Y_3(0) = 0 ; \quad X_1''(a) + \varphi_4(0) + Y_4(0) = 0 ; \\
& X_2''(0) + \varphi_3(b) + Y_3(b) = 0 ; \quad X_2''(a) + \varphi_4(b) + Y_4(b) = 0 ; \\
& X_3''(0) + \varphi_3''(0) + Y_3''(0) = 0 ; \quad X_3''(a) + \varphi_4''(0) + Y_4''(0) = 0 ; \\
& X_4''(0) + \varphi_3''(b) + Y_3''(b) = 0 ; \quad X_4''(a) + \varphi_4''(b) + Y_4''(b) = 0 ; \\
& Y_1''(0) + \psi_3(0) + X_3(0) = 0 ; \quad Y_1''(b) + \psi_4(0) + X_4(0) = 0 ; \\
& Y_2''(0) + \psi_3(a) + X_3(a) = 0 ; \quad Y_2''(b) + \psi_4(a) + X_4(a) = 0 ; \\
& Y_3''(0) + \psi_3''(0) + X_3''(0) = 0 ; \quad Y_3''(b) + \psi_4''(0) + X_4''(0) = 0 ; \\
& Y_4''(0) + \psi_3''(a) + X_3''(a) = 0 ; \quad Y_4''(b) + \psi_4''(a) + X_4''(a) = 0 .
\end{aligned}$$

Выражения  $X_i(x)$ ,  $Y_i(y)$  из (16) подставим в (12) для нахождения  $M_2$ :

$$\begin{aligned}
M_2(x, y) = & A_1(x) \varphi_1(y) + A_2(x) \varphi_2(y) + A_3(x) \varphi_3(y) + A_4(x) \varphi_4(y) + \\
& + B_1(y) \psi_1(x) + B_2(y) \psi_2(x) + B_3(y) \psi_3(x) + B_4(y) \psi_4(x) - \\
& - A_1(x) B_1(y) [\psi_1(0) + X_1(0) + \varphi_1(0) + Y_1(0)] - \\
& - A_1(x) B_2(y) [\psi_2(0) + X_2(0) + \varphi_1(b) + Y_1(b)] - \\
& - A_1(x) B_3(y) [\psi_3(0) + X_3(0) + \varphi_1''(0) + Y_1''(0)] - \\
& - A_1(x) B_4(y) [\psi_4(0) + X_4(0) + \varphi_1''(b) + Y_1''(b)] - \\
& - A_2(x) B_1(y) [\psi_1(a) + X_1(a) + \varphi_2(0) + Y_2(0)] - \\
& - A_2(x) B_2(y) [\psi_2(a) + X_2(a) + \varphi_2(b) + Y_2(b)] - \\
& - A_2(x) B_3(y) [\psi_3(a) + X_3(a) + \varphi_2''(0) + Y_2''(0)] - \\
& - A_2(x) B_4(y) [\psi_4(a) + X_4(a) + \varphi_2''(b) + Y_2''(b)] - \\
& - A_3(x) B_1(y) [\psi_1''(0) + X_1''(0) + \varphi_3(0) + Y_3(0)] - \\
& - A_3(x) B_2(y) [\psi_2''(0) + X_2''(0) + \varphi_3(b) + Y_3(b)] - \\
& - A_3(x) B_3(y) [\psi_3''(0) + X_3''(0) + \varphi_3''(0) + Y_3''(0)] - \\
& - A_3(x) B_4(y) [\psi_4''(0) + X_4''(0) + \varphi_3''(b) + Y_3''(b)] - \\
& - A_4(x) B_1(y) [\psi_1''(a) + X_1''(a) + \varphi_4(0) + Y_4(0)] - \\
& - A_4(x) B_2(y) [\psi_2''(a) + X_2''(a) + \varphi_4(b) + Y_4(b)] - \\
& - A_4(x) B_3(y) [\psi_3''(a) + X_3''(a) + \varphi_4''(0) + Y_4''(0)] - \\
& - A_4(x) B_4(y) [\psi_4''(a) + X_4''(a) + \varphi_4''(b) + Y_4''(b)] .
\end{aligned} \tag{19}$$

С помощью равенств (18) правая часть (19) существенно упрощается и для  $M_2(x, y)$  найдем выражение

$$\begin{aligned}
M_2(x, y) = & A_1(x) \varphi_1(y) + A_2(x) \varphi_2(y) + A_3(x) \varphi_3(y) + A_4(x) \varphi_4(y) + \\
& + B_1(y) \psi_1(x) + B_2(y) \psi_2(x) + B_3(y) \psi_3(x) + B_4(y) \psi_4(x) - \\
& - A_1(x) B_1(y) \varphi_1(0) - A_1(x) B_2(y) \varphi_1(b) - A_1(x) B_3(y) \varphi_3(0) - A_1(x) B_4(y) \varphi_4(0) - \\
& - A_2(x) B_1(y) \varphi_2(0) - A_2(x) B_2(y) \varphi_2(b) - A_2(x) B_3(y) \varphi_3(a) - A_2(x) B_4(y) \varphi_4(a) - \\
& - A_3(x) B_1(y) \varphi_3(0) - A_3(x) B_2(y) \varphi_3(b) - A_3(x) B_3(y) \varphi_3''(0) - A_3(x) B_4(y) \varphi_3''(b) - \\
& - A_4(x) B_1(y) \varphi_4(0) - A_4(x) B_2(y) \varphi_4(b) - A_4(x) B_3(y) \varphi_4''(0) - A_4(x) B_4(y) \varphi_4''(b) .
\end{aligned} \tag{20}$$

Функции  $A_i(x)$ ,  $B_i(y)$  могут быть выбраны произвольно с учетом условий (15) в зависимости от конкретного случая, свойств решения краевой задачи (1). Приведем наиболее простой их вид из класса полиномов наименьшей степени по переменным  $x, y$ :

$$\begin{aligned} A_1(x) &= 1 - \frac{x}{a}, \quad A_2(x) = \frac{x}{a}, \quad A_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}, \quad A_4(x) = \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}; \\ B_1(y) &= 1 - \frac{y}{b}, \quad B_2(y) = \frac{y}{b}, \quad B_3(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}, \quad B_4(y) = \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично можно строить граничную функцию и для условий Неймана, смешанного типа и т. д. С помощью правильно построенной граничной функции  $M_{2p}(x, y)$  и быстрых рядов Фурье можно решать многомерные задачи с подвижными границами в нелинейной постановке. Конкретное применение теории быстрых рядов Фурье для решения прикладных задач можно найти в работах [7, 8].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 1. – 448 с.
- [2] *Чернышов, А. Д.* Об одной задаче Стефана / А. Д. Чернышов // Инженерно-физический журнал. – 1964. – Т. 7, № 1. – С. 77–79.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [4] *Гринберг, Г. А.* Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях / Г. А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, № 2. – С. 393–403.
- [5] *Чернышов, А. Д.* Улучшенные ряды Фурье и граничные функции / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. Междунар. конф. – 2009. – Ч. 2. – С. 236–238.
- [6] *Толстов, Г. П.* Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – М. : Наука. – 1980. – 384 с.
- [7] *Чернышов, А. Д.* Решение задачи о кручении упругого стержня  $s$ -угольного сечения методом расширения границ / А. Д. Чернышов // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 193–200.
- [8] *Чернышов, А. Д.* Улучшение дифференцируемости решений краевых задач механики в форме обобщенных рядов Фурье с помощью граничных функций / А. Д. Чернышов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 1. – С. 174–192.



A. D. Chernyshov

**CONSTRUCTION OF TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY FUNCTION FOR  
THE FAST FOURIER SERIES**

*Voronezh State Technological Academy*

**Abstract.** Construction of two-dimensional boundary function for the fast Fourier series to determine the interface boundary.

**Keywords:** elasticity, plasticity, fast Fourier series, interface, boundary.

*Чернышов Александр Данилович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Воронежская государственная технологическая академия, г. Воронеж*

**e-mail:** chernyshovad@mail.ru

*Chernyshov Alexander Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State Technological Academy, Voronezh*

А. В. Чигарев, И. Н. Мелешко, С. А. Пронкевич

## ИЗГИБАНИЕ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОПЕРЕЧНОГО НАГРУЖЕНИЯ

*Белорусский национальный технический университет*

**Аннотация.** Разработан метод приближенного вычисления прогибов пластины. Рассмотрена деформация круговой пластины единичного радиуса при несимметричных граничных условиях и результаты сопоставлены с численными расчетами, полученными в программе ANSYS.

**Ключевые слова:** пластины, прогиб, деформация, численное решение, ANSYS.

УДК: 539.3

Изгибание тонких пластин за счет задания только кинематических граничных условий по контуру имеет практическое применение в технологиях получения пологих оболочек без приложения контактных воздействий непосредственно по поверхности исходной пластины. Теоретическое решение задачи сводится к бигармоническому уравнению, которое хорошо исследовано в теории упругости, математической физике.

Бигармоническая функция является производящей функцией для напряжений в плоской задаче теории упругости, а в теории изгиба тонких пластин является функцией прогиба пластины при решении широкого класса граничных задач [1]. Однако эффективное решение этих задач возможно, как правило, в случае простых геометрий для односвязных областей. Классическим подходом к решению упругих задач, сводимых к бигармоническому уравнению, является метод теории функций комплексного переменного. В случаях, когда для данной области удастся построить конформные преобразования, Н. И. Мухелишвили [2] показал, что можно получить в конечном виде решение для достаточно широкого класса основных граничных задач для случая односвязной области, ограниченной простым замкнутым контуром. Причем существует конформное отображение единичного круга на эту область. Таким образом, в качестве базовых задач можно рассматривать краевые задачи для круга единичного радиуса с достаточно произвольными граничными условиями. Традиционно краевые задачи рассматриваются аналитическими методами теории функций комплексного переменного с помощью интегралов Коши, вариационных методов, методов интегральных уравнений и рядов. В работе представлен метод суперпозиции, разработанный в [3], который позволяет получить решение в аналитическом виде, удобном для численных расчетов. Современный подход, базирующийся на методе конечных элементов и использования пакета ANSYS, позволяет рассмотреть круг задач, для которых результаты могут быть доведены до числа и визуализации, и сравнить результаты численного решения, проведенного методом конечных элементов и численно-аналитического.

Рассмотрим упругую изотропную пластину, срединная плоскость которой в плоскости  $Oxy$ , которая в общем случае находится под действием нагрузки  $g(x, y)$ , перпендикулярной срединной плоскости, а по контуру заданы кинематические граничные условия. На площадках, перпендикулярных к осям  $x$  и  $y$  вводятся изгибающие моменты  $(M_x, M_y)$ , крутящие моменты

$(M_{xy}, M_{yx})$ , поперечные силы  $(Q_x, Q_y)$ , приходящиеся на единицу длины срединной поверхности. Эти моменты и силы выражаются через напряжения по формулам [4]:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = -M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz, \\ Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz, \end{aligned} \quad (1)$$

и удовлетворяют уравнениям равновесия, имеющим вид

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g(x, y) = 0. \quad (2)$$

Как следует из гипотезы «прямых нормалей» Кирхгофа, напряжения выражаются через функцию  $W(x, y)$ , которая представляет собой перемещения точек срединной поверхности в направлении оси  $z$ , перпендикулярной срединной плоскости пластинки [4]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz} = -\frac{E(h^2-4z^2)}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W, \\ \tau_{yz} &= -\frac{E(h^2-4z^2)}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W, \quad \sigma_z = \frac{Ez_1(h^2-\frac{4}{3}z^2)}{8(1-\nu^2)} \nabla^4 W - \frac{1}{2}g(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $h$  – толщина пластинки,  $z$  – координата точки, отсчитываемая от срединной поверхности,  $g(x, y)$  – интенсивность нагрузки, распределяемой по поверхности, перпендикулярной срединной поверхности.

Подстановка (3) в (1) и интегрирование дают выражения для моментов и сил через прогиб срединной поверхности  $W(x, y)$  [4]:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{\eta(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластинки.

Из формул (3) и (4) следует

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x}{J} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{J}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{M_{xy}}{J} z, \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_x S_y}{J}, \quad \tau_{yz} = \frac{Q_y S_x}{J}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $J = \frac{h^3}{12}$  – момент инерции единичной площадки шириной  $h$  и с основанием, равным единице, относительно центральной оси, лежащей в срединной плоскости,  $S_x, S_y$  – статические моменты относительно осей  $y$  и  $x$ .

Первое и второе уравнения (2) при подстановке (4) удовлетворяются тождественно, а из третьего уравнения следует уравнение для  $W(x, y)$

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{q}{D}. \quad (6)$$

Зададим кинематические граничные условия:

по контуру заданы прогибы  $W(s)$  и углы поворота нормали  $\frac{dW}{dn}$  к границе срединной поверхности пластины. Требуется определить прогибы, деформации и напряжения в пластине.

Положим в уравнении (6)  $q = 0$  и рассмотрим решение задачи для круга  $S$  единичного радиуса, ограниченной окружностью  $L$ .

В полярных координатах  $r, \varphi$ :  $r_2 = x_2 + y_2$ ,  $\varphi = \arctg(y/x)$  бигармоническое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}\right) = 0. \quad (7)$$

Граничные условия для уравнения (7) в полярных координатах имеют вид:

$$u(r, \varphi)|_{r=1} = g(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = l(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (8)$$

Бигармоническое уравнение (7) при граничных условиях (8) имеет единственное решение, и искомая бигармоническая функция  $W=W(r, \varphi)$  может быть представлена в единичном круге с центром в начале координат с помощью двух гармонических функций  $u_1 = u_1(r, \varphi)$  и  $u_2 = u_2(r, \varphi)$  в виде [3]

$$W = (r^2 - 1)u_1 + u_2. \quad (9)$$

При этом из граничных условий (8) для бигармонической функции  $W$  следуют граничные условия для гармонических функций  $u_1$  и  $u_2$

$$u_2|_{r=1} = g(\varphi), \quad \left(2u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r}\right)\Big|_{r=1} = l(\varphi). \quad (10)$$

Гармонические в круге функции  $u_1$  и  $u_2$  при граничных условиях (10) могут быть найдены при помощи интеграла Пуассона

$$u_2(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau, \quad (11)$$

$$u_1(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau - r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r}. \quad (12)$$

Подставляя эти выражения для  $u_1$  и  $u_2$  в формулу (9), получаем точное решение задачи (7), (8) в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{r^2 - 1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau - r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \quad (13)$$

Для приближения интегралов Пуассона в представлении решения уравнения (7) воспользуемся полученной формулой. Имеют место приближенные равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau \approx \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) l(\varphi_k), \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau \approx \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) g(\varphi_k), \quad (15)$$

где коэффициенты

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[ h + 2 \operatorname{Im} \left( \ln \left( 1 - ze^{-i(\varphi_k + \frac{h}{2})} \right) - \ln \left( 1 - ze^{-i(\varphi_k - \frac{h}{2})} \right) \right) \right], \quad (16)$$

а узлы  $\varphi_k = kh$ ,  $k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ ,  $h = \frac{2\pi}{2n+1}$ . Квадратурные суммы в (15), (16) обладают следующим свойством: все коэффициенты  $A_k(r, \varphi)$  неотрицательны при всех  $r$  и  $\varphi$  и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) = 1. \quad (17)$$

Для того, чтобы получить приближение производной  $\frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r}$  в формуле (13), потребуется специальная приближенная формула.

Гармоническая функция  $u_2(r, \varphi)$  внутри единичного круга представима рядом

$$u_2(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{-n}^n r^k \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \cos(\tau - \varphi) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k r^k \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \cos(\tau - \varphi) d\tau = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k r^k \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d \sin(\tau - \varphi) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[ g(\tau) \sin k(\tau - \varphi) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \sin k(\tau - \varphi) d\tau \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \sin k(\tau - \varphi) d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[ \left( -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \sin k\tau d\tau \right) \cos k\varphi + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \cos k\tau d\tau \right) \sin k\varphi \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Заменяя последний ряд интегралом, получаем

$$r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \quad (19)$$

По системе точек (18) построим квадратурную формулу для интеграла в (19). Пусть

$$g'(\varphi) \approx \tilde{g}'(\varphi) = \sum_{-n}^n \theta_k(\varphi) g'(\varphi_k), \quad (20)$$

где

$$\theta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in \left[ \varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right], \\ 0, & \varphi \notin \left[ \varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]. \end{cases}$$

Тогда

$$r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau \approx \sum_{-n}^n B_k(r, \varphi) g'(\varphi_k). \quad (21)$$

Здесь коэффициенты  $B_k(r, \varphi)$  имеют вид

$$B_k(r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} g'(\tau) \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \quad (22)$$

Вычислим коэффициенты  $B_k(r, \varphi)$ . Разложив ядро под знаком интеграла в (19) в ряд

$$\begin{aligned} \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} &= -Im \frac{t+z}{t-z} = -Im \left( \frac{2t}{t-z} - 1 \right) = -2Im \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{t^m} \right) = \\ &= -2 \sum_{m=1}^{\infty} r^m \sin m(\tau - \varphi), \end{aligned}$$

найдем

$$\begin{aligned} B_k(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} g' \sin m(\tau - \varphi) d\tau = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{m} [\cos m(\varphi_k + \frac{h}{2} - \varphi) - \cos m(\varphi_k - \frac{h}{2} - \varphi)] = \\ &= -\frac{1}{\pi} Re \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m e^{im(\varphi_k - \frac{h}{2} - \varphi)}}{m} - \frac{r^m e^{im(\varphi_k + \frac{h}{2} - \varphi)}}{m} \right]. \end{aligned}$$

Заменяем ряды их суммами. Тогда коэффициенты  $B_k(r, \varphi)$  запишутся в виде:

$$B_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} Re \left[ \ln \left( 1 - ze^{-i(\varphi_k - \frac{h}{2})} \right) - \ln \left( 1 - ze^{-i(\varphi_k + \frac{h}{2})} \right) \right]. \quad (23)$$

Подставляя приближенные выражения интегралов (14), (15), (21) с коэффициентами (16), (23) в формулу (13), находим приближенное решение задачи (7), (8)

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) g(\varphi_k) - \frac{1-r^2}{2} \left[ \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) l(\varphi_k) - \sum_{-n}^n B_k(r, \varphi) g'(\varphi_k) \right]. \quad (24)$$

Полученное решение значительно проще, чем предложенное в [1] или [5], однако также довольно затруднительно и громоздко, поэтому при их решении целесообразно использовать современные системы компьютерной математики, например *Mathematica*, обладающими функциями для работы с комплексными числами [6].

2. В качестве примера рассмотрим круглую пластину единичного радиуса со следующими граничными условиями:

$$u(r, \varphi)|_{r=1} = 0.05 \cdot \sin(2\varphi), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (25)$$

Толщина пластины составляет 0,01 м, материал, из которого сделана пластина, – сталь со следующими физическими характеристиками:

модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  
коэффициент Пуассона  $\nu = 0.23$ .

На рис. 1 представлено распределение перемещений для пластины, соответствующее заданным граничным условиям, полученное в конечно-элементной программе ANSYS. Пластина моделировалась с использованием конечного элемента Shell63 из библиотеки конечных элементов данной программы, используемого при расчетах упругих деформаций пластин и оболочек.

На рис. 2 показаны поля перемещений, полученные для данной задачи в программе Mathematica. Прогибы контура изменяются от -5 до +5 см.

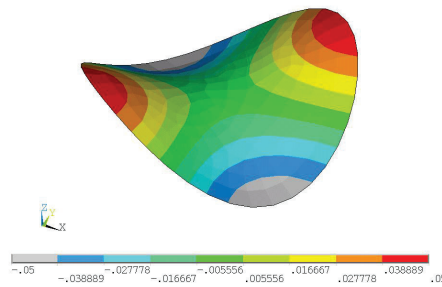


Рис. 1. Распределение перемещений  $W$  в пластине

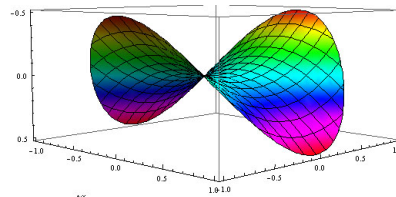


Рис. 2. Распределение перемещений  $W$  в пластине, полученное в программе Mathematica

В качестве примера пластины с заданием изгибания по контуру рассмотрим круглую пластину единичного радиуса со следующими граничными условиями:

$$u(r, \varphi)|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 0.1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (26)$$

Данным граничным условиям соответствует прогиб пластины на угол 0,1 рад. На рис. 3 представлена визуализация результатов расчета, полученного в программе Mathematica. На рис. 4 представлены результаты расчета, выполненные в программе ANSYS.

Максимальный прогиб, полученный в пакете Mathematica для задачи (26) с использованием формулы (24), составляет 0,04987 м. Максимальный прогиб, полученный в программе ANSYS, – 0,04055 м. Расхождение в результатах составляет менее 20 процентов, что можно считать приемлемым для данной задачи.

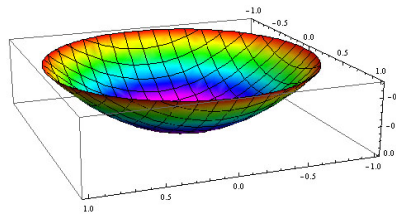


Рис. 3. Распределение перемещений  $W$  в пластине, полученное в программе Mathematica

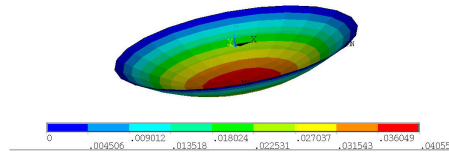


Рис. 4. Распределение перемещений  $W$  в пластине, полученное в программе ANSYS

Сравнение результатов, полученных на основе построения приближенного решения логарифмами и с использованием конечно-элементного моделирования, показывают, что результаты сопоставимы, а использование систем компьютерной математики (Mathematica, Maple, MathCAD и др.) для решения такого ряда задач значительно проще и не требует изучения таких громоздких систем, как ANSYS и дает результаты, точность которых не хуже, чем при решении их с помощью программы ANSYS или других, аналогичных, конечно-элементных пакетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко, С. П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко. – Киев : Наукова думка, 1972.
- [2] Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966.
- [3] Мелешко, И. Н. Деформация круговой пластины при несимметричных граничных условиях / И. Н. Мелешко, А. В. Чигарев. – Минск : Машиностроение, 2008. – Вып. 24.

[4] Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.

[5] Рекач, В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости / В. Г. Рекач. – М. : Высш. шк., 1977.

[6] Дьяконов, В. Mathematica 4 : учебный курс / В. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2001.

*A. V. Chigarev, I. N. Meleshko, S. A. Pronkevich*

## BENDING OF THIN PLATES IN THE ABSENCE OF CROSS-SECTION LOADING

*Belarussian National Technical University*

**Abstract.** The method of approached calculation of a plate deflections is developed. The deformation of a circular plate of individual radius is considered under asymmetrical boundary conditions and the results are compared with the numerical calculations received in program ANSYS.

**Keywords:** the plates, a deflection, deformation, numerical decision, ANSYS.

*Чигарев Анатолий Власович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск*

**e-mail:** [theormech@rambler.ru](mailto:theormech@rambler.ru)

*Мелешко Иван Николаевич*

*кандидат физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск*

**e-mail:** [MeleshkoIN@bntu.by](mailto:MeleshkoIN@bntu.by)

*Пронкевич Сергей Александрович*

*ассистент, Белорусский национальный технический университет, г. Минск*

**e-mail:** [ps\\_minsk@tut.by](mailto:ps_minsk@tut.by)

*Chigarev, Anatoliy Vlasovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Belarussian National Technical University, Minsk*

*Meleshko, Ivan Nikolaevich*

*Candidate Sci Phys. & Math., Professor, Belarussian National Technical University, Minsk*

*Pronkevich, Sergey Aleksandrovich*

*Assistant, Belarusian National Technical University, Minsk*



А. В. Чигарев, А. В. Борисов

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ В СУСТАВАХ ЧЕЛОВЕКА

*Белорусский национальный технический университет,  
Филиал Московского энергетического института (Технического университета) в  
г. Смоленске*

**Аннотация.** В процессе жизни происходит износ контактных соединений, которые находятся в суставах человека. Этот процесс проходит длительное время. Повреждения накапливаются постепенно и представляют большую опасность для практической деятельности. Исследование проведено аналитическими методами с привлечением аппарата теории вероятностей. Практическое применение возможно при лечении опорно-двигательного аппарата человека, расчета протезов, создания антропоморфных механизмов.

**Ключевые слова:** разрушение, деформация, пластичность, изменение модулей упругости, износ, скрытая стадия разрушения.

УДК: 612.76+539.37

**Введение.** Разрушение сустава человека редко бывает связано с его разрушением в буквальном смысле этого понятия. Обычно это бывает в результате постепенного накопления повреждений, износа, остаточных деформаций и т. п., которые, достигнув определенной величины, начинают препятствовать нормальной эксплуатации сустава. В течение жизни человека сустав работает в условиях повторно-переменного нагружения, представляющего собой некоторый случайный процесс. Накопление повреждений в суставе поэтому также является случайным процессом. Зная изменение вероятностных характеристик этого процесса со временем, можно судить о распределении повреждений в течение жизни человека, особенно во второй половине, так как именно в этот период наблюдается максимум заболеваний суставов. На первое место эта проблема выходит при создании протезов суставов, расчете формы, выбора материала, оценке их долговечности. У правильно спроектированного протеза сустава к концу прогнозируемого срока эксплуатации вероятность некоторой предельной величины повреждения не должна быть чрезмерно велика. Таким образом, проблема накопления повреждений при случайных нагрузках и перегрузках оказывается тесно связанной с основами расчета конструкций на надежность в технике [1].

При этом возникает проблема учета фактора времени, изменчивости и сочетания нагрузок.

В первом приближении внешние нагрузки можно рассматривать как совокупность некоррелирующих случайных величин. В действительности же изменение нагрузок представляет собой развертывающийся во времени процесс с учетом изменчивости и корреляции нагрузок. Но если внешние нагрузки являются случайным процессом, то и поведение суставов и их протезов является таковым. Следовательно, необходимо рассматривать процесс накопления повреждений.

Рассмотрим скрытую стадию разрушения опорно-двигательного аппарата человека. На этой стадии еще нет образования микротрещин в суставах, происходит только изменение

свойств материала из которого они состоят с течением времени. На начальной стадии, когда значительных нагрузок еще не было, а возможности к самовосстановлению у молодого организма велики, изменения упругих характеристик не происходит (рис. 1). На рисунке представлена двухкомпонентная модель сустава, например коллаген и эластин с упругими характеристиками  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно.

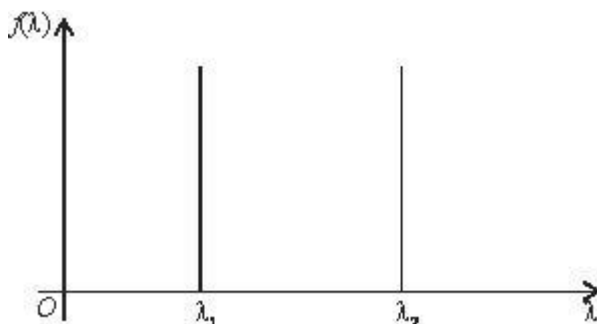


Рис. 1. Начальное состояние модулей упругости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

Плотность вероятности для рассмотренного случая имеет вид:

$$f(\lambda) = c_1\delta(\lambda - \lambda_1) + c_2\delta(\lambda - \lambda_2) = c\delta(\lambda - \lambda_1) + (1 - c)\delta(\lambda - \lambda_2). \tag{1}$$

Здесь  $c_1 + c_2 = \lambda$ . Значения

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 \text{ с вероятностью } c_1, \\ \lambda_2 \text{ с вероятностью } c_2. \end{cases} \tag{2}$$

После окончания развития организма, либо под действием значительных нагрузок на опорно-двигательный аппарат человека, например в спорте, начинается изменение упругих свойств упругих свойств материалов суставов (рис. 2). Происходит их разброс, размытие их значений в материале сустава.

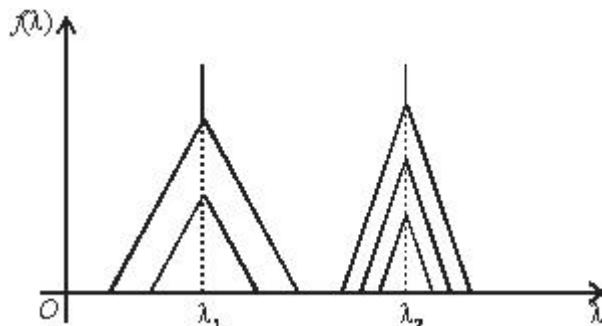


Рис. 2. Состояние модулей упругости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в процессе деградации материала

Если ввести параметр  $\varepsilon$  как степень разброса, то  $\varepsilon = \varepsilon(N)$ , где  $N$  – число циклов ходьбы, тогда:

$$f = f(\lambda, \varepsilon) = \frac{d\varepsilon}{dt} \Phi(\sigma) \varepsilon t, \quad (3)$$

где  $\Phi(\sigma)$  – функция от напряжений.

Если ввести безразмерный параметр  $\xi$ , являющийся безразмерным аналогом параметра степени разброса  $\varepsilon$ , то он изменяется в пределах:  $0 \leq \xi \leq 1$ . Случай  $\xi = 0$  соответствует отсутствию повреждений,  $0 < \xi < 1$  – скрытой фазе разрушения, а  $\xi = 1$  – началу образования пор, микротрещин и т. д. Для опорно-двигательного аппарата взрослого человека это означает следующее:  $\xi = 0$  – практически нереализуемый случай, возможный только при рождении и в раннем детстве, случай  $0 < \xi < 1$  – нормальное, здоровое состояние человека в процессе жизни, эта стадия неявного, скрытого разрушения никак не ощущается субъективно человеком,  $\xi = 1$  – начало явной стадии разрушения опорно-двигательного аппарата, когда уже возникают болевые ощущения.

На этой стадии неявного разрушения изменяются эффективные коэффициенты, т.е.  $\lambda = \lambda(\xi)$ ,  $\mu = \mu(\xi)$ . Качественно их изменение может быть отобразено следующей зависимостью (рис. 3).

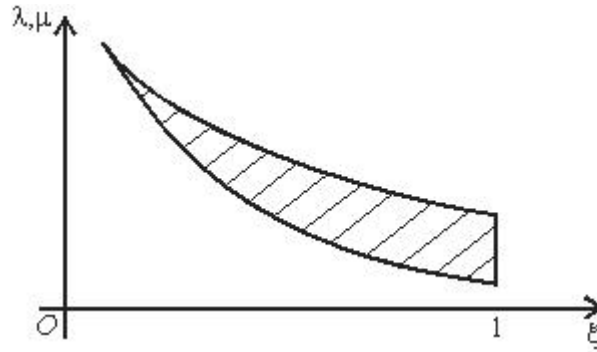


Рис. 3. Качественная зависимость эффективных модулей (упругости  $\lambda$  и коэффициента Пуассона  $\mu$ ) в процессе деградации материала

После первой, скрытой, стадии разрушения, следует вторая, явная, стадия. Хотя вначале поры распределены случайно, затем их распределение перестает быть случайным и поры сливаются в микротрещины и дальше идет процесс макроскопического разрушения.

На первой, скрытой, стадии разрушения, как показано выше, происходит изменение эффективных упругих модулей сустава, моделируемых в виде двухкомпонентного композита. Следовательно, материал сустава имеет разброс свойств его компонентов. В случае неоднородного материала эффективные модули упругости  $\lambda_{ijkl}^0$  вводятся соотношением [2]:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \lambda_{ijkl} e_{kl} \rangle = \langle \lambda_{ijkl}^0 e_{kl} \rangle, \quad (4)$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений;  $e_{kl}$  – тензор деформаций;  $\lambda_{ijkl}$  – тензор упругих модулей композита, зависящий от  $\bar{r}$  случайным образом. Тензор  $\lambda_{ijkl}^0$  определяется из условия

$$\langle \gamma_{ijkl} \rangle = 0, \quad (5)$$

где  $\gamma_{ijkl}$  – тензор упругой поляризуемости среды, связанный с  $\lambda_{ijkl}$  соотношением:

$$\gamma_{ijkl} = B_{ijmn}^{-1} \lambda'_{mnkl}, \quad (6)$$

при  $\lambda'_{mnkl} = \lambda_{mnkl} - \lambda^0_{mnkl}$ ,  $B_{ijmn} = I_{ijmn} + G^s_{ik,jl}\lambda'_{klmn}$ ,  $I_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ ,  $G^s_{ik,jl} = \left[ \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{3K_0 + \mu_0}{15K_0 + 20\mu_0} I_{ijkl} \right]$ ,

где  $G^s_{ik,jl}$  – сингулярная часть второй производной тензора Грина уравнения равновесия.

В случае изотропно-неоднородной среды

$$\lambda_{ijkl}(x) = K(x)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(x) \left( \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{3} \right). \quad (7)$$

Эффективная среда будет квазиизотропной:

$$\lambda^0_{ijkl} = K_0\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_0 \left( \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{3} \right). \quad (8)$$

Подставляя (6) в (4), получаем с учетом (5) уравнения для нахождения эффективных объемного  $K_0$  и сдвигового  $\mu_0$  модулей:

$$\begin{aligned} \langle \gamma \rangle &= \left\langle \frac{K'}{1-LK'} \right\rangle, \\ \langle \gamma_i \rangle &= \left\langle \frac{\mu'}{1-L^{(i)}\mu'} \right\rangle, \\ L &= \frac{1}{K_0 + \frac{4\mu_0}{3}}, L^{(i)} = \frac{2K_0 + 4\mu_0}{5K_0 + \frac{20\mu_0}{3}}, \\ K' &= K - K_0, \mu' = \mu - \mu_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть плотности распределения  $K$  и  $\mu$  имеют более сложный вид, чем в (1), использовавшийся для качественного рассмотрения.

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{2c_1}{\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}} + \frac{(-1)^{j-1}2c_2}{(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\varepsilon_{ij}}(\lambda - \lambda_i), & \text{при } \lambda \in \left[ \lambda_i - \frac{(1+(-1)^{j-1})\varepsilon_{ij}}{2}, \lambda_i + \frac{(1+(-1)^{j-1})\varepsilon_{ij}}{2} \right] \\ 0, & \text{для остальных } \lambda. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $\lambda = K, \mu; \lambda_1 = K_1, \mu_1; \lambda_2 = K_2, \mu_2$  соответственно,  $i, j = 1, 2$ ;  $c_1, c_2$  - концентрации компонентов, т. е.  $c_1 + c_2 = 1$ .

Вычисляя математическое ожидание в (8) с учетом (9), получаем систему уравнений, которой удовлетворяют  $K_0$  и  $\mu_0$ . Первое уравнение системы имеет вид:

$$L = C_1[(A_{01}\varepsilon_{11}^{-1} - 1)\ln(1 - \varepsilon_{11}A_{01}^{-1}) + (A_{01}\varepsilon_{12} + 1)\ln(1 + \varepsilon_{12}A_{01}^{-1})] + C_2[(A_{02}\varepsilon_{21}^{-1} - 1)\ln(1 - \varepsilon_{21}A_{02}^{-1}) + (A_{02}\varepsilon_{22} + 1)\ln(1 + \varepsilon_{22}A_{02}^{-1})], \quad (11)$$

где  $C_i = 2c_i(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})^{-1}$ ,  $A_{0i} = K_i - K_0 + L^{-1}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Заменив  $L$  на  $L^{(i)}$ ,  $A_{0i}$  на  $B_{0i} = \mu_i - \mu_0 + L^{-1}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  на  $\varepsilon^{(\mu)}$ , получим второе уравнение. Система [3] уравнений (10) при  $\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$  переходит в уравнения метода самосогласования [4], что соответствует переходу плотности распределения (4.3.9) в плотность распределения вида (1).

Переходя в уравнениях (10) к безразмерным величинам  $x = K_0K_1^{-1}$ ,  $y = \mu_0\mu_1^{-1}$ ,  $\delta_{ij} = \varepsilon_{ij}\lambda_i^{-1}$ , получаем систему уравнений, первое из которых имеет вид:

$$L' = h_1[(a_{01}\delta_{11}^{-1} - 1)\ln(1 - \delta_{11}a_{01}^{-1}) + (a_{01}\delta_{12} + 1)\ln(1 + \delta_{12}a_{01}^{-1})] + h_2[(a_{02}\delta_{21}^{-1} - 1)\ln(1 - \delta_{21}a_{02}^{-1}) + (a_{02}\delta_{22} + 1)\ln(1 + \delta_{22}a_{02}^{-1})], \quad (12)$$

где  $h_1 = \frac{2c_1}{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}}$ ,  $h_2 = \frac{2c_2}{\kappa(\delta_{21} + \delta_{22})}$ ,  $\delta = \delta^{(k)}$ ,  $a_{01} = 1 + \frac{4m_1y}{3}$ ,  $a_{02} = 1 + 4m_1\kappa y$ ,  $\kappa = K_2K_1^{(-1)}$ ,  $m_1 = \mu_1K_1^{(-1)}$ ,  $L' = (x + \frac{4ym_1}{3})^{-1}$ .

Второе уравнение получается при замене  $L'$  на  $L'^{(i)}$ ,  $a_{01}$  на  $b_{01}$ ,  $a_{02}$  на  $b_{02}$ , где  $L'^{(i)} = \frac{2x + 4m_1y}{5y(x + \frac{4m_1y}{3})}$ ,  $b_{01} = 1 - y + 5y\frac{x + \frac{4m_1y}{3}}{2x + 4m_1y}$ ,  $b_{02} = 1 + \frac{b_{01}-1}{m_2}$ ,  $\delta^{(k)}$  на  $\delta^{(\mu)}$ , а  $\kappa$  во втором слагаемом на  $m_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ .

Таким образом, создана модель, учитывающая изменения упругих модулей при разрушении опорно-двигательного аппарата человека.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Болотин, В. В.* Статистические методы в строительной механике / В. В. Болотин. – М., 1965. – 280 с.
- [2] *Чигарев, А. В.* Распространение волн в упругой микронеоднородной среде / А. В. Чигарев // Известия АН СССР. МТТ. – 1980. – № 4. – С. 128–135.
- [3] *Kroner, E.* Self-consistent scheme and graded disorder in polycrystal elasticity / E. Kroner // J. Phys. F. G. B. – 1978. – № 8. – P. 2261–2267.
- [4] *Hill, R.* A self-consistent mechanics of composite materials / R. Hill // J. Phys. Solids. – 1967. – Vol. 15. – P. 319–329.

*A. V. Chigarev, A. V. Borisov*

#### MAXIMUM LOADS IN THE PERSON'S JOINTS

*Belarussian National Technical University*

*Moscow Power Engineering Institute (Technical university), Branch, Smolensk*

**Abstract.** In the course of life the deterioration of contact connections which are in the person's joints happens. This process takes a long time. The damages are accumulated gradually and represent a big danger for practical activities. The research is made by analytical methods with the probability theory device. The practical application is possible when treating the person's locomotive system, calculating artificial limbs, creating the anthropomorphous mechanisms.

**Keywords:** destruction, deformation, plasticity, change of elasticity modules, deterioration, latent destruction stage.

*Чигарев Анатолий Власович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск*

**e-mail:** chigarev@rambler.ru

*Борисов Андрей Валерьевич*

*кандидат технических наук, доцент, Филиал Московского энергетического института (Технического университета) в г. Смоленске*

**e-mail:** BorisowAndrej@yandex.ru

*Chigarev, Anatoliy Vlasovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Belarussian National Technical University, Minsk*

*Borisov, Andrey Valeryevich*

*Candidate Eng. Sci., Assoc. Professor, Branch of Moscow Power Engineering Institute (Technical university), Smolensk*

А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев, С. А. Пронкевич

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЛИНИЙ ТОКА ЭНЕРГИИ В МЕХАНИКЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

*Белорусский национальный технический университет,  
Белорусский государственный аграрный технический университет*

**Аннотация.** В статье рассматриваются представление линий тока энергии в неоднородной упругой среде и влияние неоднородности на устойчивость или неустойчивость распространения энергии. Обсуждается влияние неоднородности материала тела на режимы распространения в нем трещин.

**Ключевые слова:** неоднородная среда, деформация, пластичность, линии тока, энергия, дифференциальные уравнения.

УДК: 539.37

Известно, что имеется связь между уравнениями, описывающими распространение волн в неоднородной среде, и уравнением Кортевега де Фриза (КдФ) [1]. Проявление нелинейных эффектов в линейных, но неоднородных средах обусловлено тем, что перенос энергии в них происходит по линиям тока, имеющим весьма сложную структуру, характерную для нелинейной динамики в случае возникновения явлений типа детерминированного хаоса [2] и самоорганизации. Как известно, исследование этих явлений связано с рассмотрением динамических систем с сосредоточенными параметрами, которые могут быть описаны обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями. Уравнения в частных производных, которые описывают процессы в различных разделах механики сплошных сред исследованы значительно меньше. Наиболее исследованы эти явления в гидродинамике. В механике деформируемого твердого тела исследование этих вопросов становится все более актуальным, вследствие чего разработка качественных методов исследования уравнений в частных производных, описывающих деформирование и разрушение твердых тел, должна быть основана на рассмотрении общего количества энергии, подводимого извне к телу, трансформации энергии в соответствии с характером распространения ее в объеме. В однородных средах линии тока энергии имеют достаточно простой вид. В неоднородных телах геометрия траекторий линий тока энергии существенно зависит от характера распределения неоднородности. В деформируемых твердых телах можно выделить три типа состояний, когда уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, описывающим траектории линий тока энергий и соотношения вдоль них.

Распространение волнового пакета в приближении геометрической акустики описывается как движение волнового фронта (волновой поверхности), на котором при стягивании волнового пакета в поперечной нулевой толщине могут терпеть разрыв полевые величины. Перенос скачков полевых величин рассматривается вдоль лучей, являющихся линиями тока упругой энергии. В однородных телах геометрия лучей прямолинейная, в неоднородных – имеет сложный характер, причем имеет место аналогия с движением частиц в потенциальных полях

или под действием внешних сил. Общей закономерностью зависимости геометрии линий тока энергии от распределения неоднородности является течение энергии в те места объема тела, где может быть совершена максимальная работа по деформированию среды. Эти слабые места обладают меньшей жесткостью, прочностью, содержат повреждения в виде микротрещин, пор и т. д.

Как правило, при определенных нагрузках в этих местах возникают линии скольжения, развиваются трещины. В однородных средах траектории линий скольжения и трещины имеют простую геометрию, при учете неоднородности их геометрия может становиться также непредсказуемой, хаотичной.

1. Представление о линиях тока энергии в неоднородной упругой среде определяется для упругой среды из выражения для работы  $\delta W$ , совершаемой внешними силами над объемом  $V_0$  [3]

$$\delta W = \int_{V_0} dT dv + \int_{V_0} d\Pi_0 w = \int_{V_0} d(T + \Pi) dv, \quad (1)$$

где  $d\Pi = \sigma_{ik} \cdot ds_{ik}$  - изменение потенциальной энергии единицы объема, т. е. внутренней энергии ( $dU$ ) при постоянной энтропии или свободной энергии при изотермических условиях.

Работа внешних сил  $\delta w$  увеличивает полную упругую энергию  $E_0 = \int_{V_0} (T + \Pi) dv$  на величину  $dE_0 = \delta w$ .

Изменение энергии  $E$ , содержащейся в объеме за единицу времени, определяется выражением

$$\frac{dE}{dt} = \int_S \sigma_{ik} \frac{du_i}{\partial t} ds, \quad (2)$$

где вектор

$$P_k = -\sigma_{ik} \frac{du_i}{\partial t} \quad (3)$$

является вектором Умова-Пойнтинга, направление которого определяет направление распространения энергии, его длина равна количеству энергии, переносимому через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению распространения энергии в единицу времени (плотность потока мощности).

Уравнения, которым удовлетворяют траектории линий тока энергии, получаются из принципа Ферма и могут быть записаны в виде [4]

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{\tau}, \quad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = g \operatorname{grad} c - \bar{\tau}(g \operatorname{grad} c \cdot \bar{\tau}). \quad (4)$$

Уравнения (4) нелинейные, так как скорость  $\dot{A}$  является функцией пространственных координат  $\bar{x}$ .

Пусть в рассматриваемой среде имеется волновод, определяемый условием, что вдоль его оси волновое сопротивление имеет минимум.

Пусть в однородной среде ось волновода совпадает с координатной осью, например  $OZ$ , тогда лучи будут параллельны оси  $Z$ .

Рассмотрение неоднородности может приводить к устойчивому и неустойчивому распространению энергии вдоль оси волновода [5]. В первом случае можно получить фокусировку луча, если в поперечных сечениях волновода жесткость к оси уменьшается и не возрастает вдоль оси. Эти условия оказываются недостаточными, чтобы обеспечить волноводный характер распространения энергии. Возможно такое изменение жесткости вдоль оси волновода, которое будет приводить к стохастизации луча, в результате чего возможно просачивание

энергии за границы волновода. В терминах частиц волновод является аналогом потенциальной ямы, а эффект просачивания соответствует появлению вероятности для частицы преодолеть потенциальный барьер. Для волн это означает выход линий тока энергии за границы волновода.

Гамильтониан, описывающий этот эффект, удобно представить в виде

$$H = H_0(q, p) + \varepsilon H_1(q, p),$$

где  $H_0(q_k, p_k)$  описывает траектории линии тока в однородной среде,  $H_1(q_k, p_k)$  при малом параметре  $\varepsilon$  характеризует возмущения траектории вследствие неоднородности среды,  $\bar{q}$  – координаты,  $\bar{p}$  – импульсы.

Функция Гамильтона для неоднородной среды имеет вид

$$H = - [h^2(\bar{\rho}, z) - \bar{p}^2],$$

где импульс  $\bar{p}$  имеет вид

$$\bar{p} = n\dot{\bar{\rho}}/(1 + \dot{\bar{\rho}}^2)^{1/2}; \quad \dot{\bar{\rho}} = d\bar{\rho}/dz = d\bar{\rho}/ds.$$

Здесь  $n = n(\bar{\rho}, z)$  – показатель преломления упругих волн в среде.

Заданием  $n(\bar{\rho}, z)$  можно получать различные гамильтонианы, для которых исследованы различные сценарии перехода детерминированного движения в хаотическое.

Общий результат состоит в том, что при  $H_1 > E_c$  ( $E_c$  – критический уровень) траектории линий тока становятся стохастическими [2] и должны исследоваться в рамках теории распространения волн в случайно неоднородных структурах [6-8].

Как известно [9], в идеальном случае при простом одноосном растяжении пластины из однородного упругого материала вдоль оси  $y$  начальная трещина  $-\varepsilon < x < \varepsilon$  будет распространяться вдоль оси  $x$  прямолинейно. Если нагружение сложное, то траектория будет зависеть от истории нагружения. При этом, в принципе можно, решая задачу последовательными малыми пересчетами, определить взаимовлияние напряженного состояния на траекторию трещины и наоборот. Эксплуатация многих изделий происходит в условиях достаточно стабильных граничных условий, однако траектория трещины при этом может быть криволинейной вследствие неоднородности материала, полей остаточных напряжений, более того, непредсказуемой, что не позволяет в детерминированной постановке решить вопрос о прогнозировании траектории трещины в композиционном материале.

Рассмотрим неограниченную пластину в плоскости  $XOY$ , которая состоит из двух жестко скрепленных полупластин:  $x \leq 0$  – однородная изотропная среда,  $x > 0$  – неоднородная изотропная среда. Пластина растягивается вдоль оси  $y$ , начальная трещина расположена вдоль оси  $x$ ,  $(-\varepsilon < x < \varepsilon) y = 0$ . Обозначим упругие модули однородной среды  $\lambda_0, \mu_0$ , неоднородной –  $\lambda(x, y), \mu(x, y)$ .

Траекторию трещины будем искать на основании вариационного принципа теории трещин в виде [9]

$$\delta \int_C^D (2\gamma - P_1 u_1) ds = 0, \quad (5)$$

где  $\gamma$  – плотность поверхностной энергии материала,  $P_i = \sigma_{ij} n_j$  – компоненты тензора напряжений на площадках, положение которых совпадает с поверхностью трещины,  $n_i$  – направляющий косинус внешней нормали к поверхности трещины,  $u_i$  – смещение берегов трещины,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений материала,  $C, D$  – начало, конец трещины соответственно. Уравнение траектории трещины ищется в виде  $y = y(x)$ . Так как в данном случае рассматриваем простое нагружение, то кривизна траектории в неоднородной пластине будет зависеть только от распределения неоднородности.

Уравнение Эйлера для сформулированной задачи имеет вид



$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \sqrt{1+y'^2}(2\gamma - P_i u_i) \right] \right) - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \sqrt{1+y'^2}(2\gamma - P_i u_i) \right] \right) = 0. \quad (6)$$

Из формулы можно получить уравнение для траектории  $y(x)$  в виде

$$\begin{aligned} & \frac{y''}{A} B + y' y'' \left( \frac{\partial}{\partial y'} B - \frac{\partial}{\partial y} B \right) + y' \frac{\partial}{\partial x} B + y'^2 B + \\ & + A \left[ -\frac{\partial}{\partial y} B + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} B + y' \frac{\partial^2}{\partial y^2} B + y'' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} B \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (7) введены обозначения  $A = 1 + y'^2$ ,  $B = 2\gamma - P_i u_i$ .

Если полагать функционал и траекторию трещины достаточно гладкой (без учёта фрактального характера траектории трещины), то можно выбрать шаг разбиения для расчета траектории достаточно малым. Тогда отклонения траектории трещины на следующем шаге от направления распространения на предыдущем будут малыми,  $y' \ll 1$ . В общем случае величина  $\gamma$  может зависеть от упругих свойств среды, но из-за выбранной малости шагов разбиения в первом приближении можно принять  $\gamma \approx const$ . Тогда уравнение (7) сводится [8] к существенно нелинейному уравнению вида

$$y'' - y' f_1(x, y)(1 + y'^2) + f_2(x, y)(1 + y'^2)^2 = 0, \quad (8)$$

где введены обозначения

$$f_1(x, y) = \frac{\partial \ln Q(x, y)}{\partial x}, \quad f_2(x, y) = \frac{\partial \ln Q(x, y)}{\partial y}, \quad Q = (\sigma_{ij} n_i u_j)^{-1}, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

В зависимости от конкретного вида неоднородности решения уравнения могут иметь различный характер: от периодического до хаотического [8]. Исследуем устойчивость решений уравнения (8).

Поскольку в данной задаче будем интересоваться реализацией, а не процессом, то временную зависимость не рассматриваем. Обозначим  $z = y'$ , тогда (8) переписывается в виде системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = z \\ z' = z f_1(1 + z^2) - f_2(1 + z^2)^2 \end{array} \right\}. \quad (9)$$

В общем виде второе уравнение системы (9) есть уравнение с разделяющимися переменными, но учёт сложной функциональной зависимости  $f_1$ ,  $f_2$  значительно усложняет ситуацию. Орбиты уравнения (9) в фазовой плоскости выражаются следующим образом

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z f_1(1 + z^2) - f_2(1 + z^2)^2}{z} = f_1(1 + z^2) - f_2 \frac{(1 + z^2)}{z}. \quad (10)$$

Если считать, что свойства среды гладко изменяются поперёк траектории распространения трещины, то при анализе можно пренебречь членами выше второго порядка. В этом случае имеем

$$\frac{dz}{dy} = f_1(1 + z^2) - f_2 \left( \frac{1}{z} + 4 + 6z \right). \quad (11)$$

Прямое аналитическое интегрирование уравнения (11) не приводит к обозримым результатам. Однако соответствующим подбором неоднородности (функции  $f_1$ ,  $f_2$ ) возможно регулировать тип критических точек в фазовой плоскости. С точки зрения технологии, более логичным представляется рассмотреть задание  $f_2$  (неоднородности вдоль оси Y). Так, при конструировании композиционного материала таким образом, что

$$f_2 = z^2 / (1 + 4z + 6z^2), \quad (12)$$

имеем положительный аттрактор, критической точкой является  $z = 0$  при условии  $f = 0$ .

Строго говоря, заключение о возможности линейного анализа критических точек нелинейной системы (9) требует дополнительных исследований. Так, например, для выполнения условия существования стабильных и нестабильных многообразий необходимо [12] удовлетворение дополнительных условий

$$\lim_{\|z \rightarrow 0\|} \left\| \frac{f_2 \left( \frac{1}{z} + 4 + 6z \right) + f_2}{\|z\|} \right\| = 0,$$

что налагает требование  $f_2 = 0(z^2)$ , которому условие (12) не удовлетворяет. В этом случае можем положить

$$f_2 = z^\xi / (1 + 4z + 6z^2),$$

где  $\xi = 2 - \varsigma$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varsigma = 0$ , при дополнительном условии  $f_2 = O(z)$ .

Проведенный анализ показывает, что при распространении трещины в неоднородных материалах на геометрию траектории трещины влияет закон изменения свойств материала вдоль и поперёк траектории распространения трещины. Это позволяет в значительной степени регулировать характеристики траектории путём создания композитов заданной детерминированной структуры.

Рассмотрим условия возникновения стохастических режимов при распространении трещины. Компоненты вектора перемещений  $u_i(x, y(x))$  в уравнении (8) разложим в ряд Тейлора по  $y$  и ограничимся линейным по  $y$  членом. Выражая коэффициент при линейном члене,  $\partial u_i / \partial y$  как упругие деформации через напряжения, получим

$$N = \sigma_{ij} n_i u_j = \sigma_{12} n_1 s_{22kl} \sigma_{kl} \tau_2 + \frac{1}{2} \sigma_{22} n_2 s_{22kl} \sigma_{kl} \tau_2 + \frac{1}{2} \sigma_{11} n_1 s_{12ik} \sigma_{kl} \tau_2 + \frac{1}{2} \sigma_{21} n_2 s_{12ik} \sigma_{kl} \tau_2,$$

где  $\tau$  есть единичный касательный вектор,  $s_{ijkl}$  – тензор модулей упругости. Полагая, что осуществляется и поддерживается такое напряжённо-деформированное состояние, что только  $\sigma_{22} \neq 0$ , преобразуется к виду

$$N = \frac{1}{4} \sigma_{22}^2 s_{2222} \frac{2tg\pi}{1 + tg^2\beta},$$

где  $\beta$  – угол касательной к трещине с осью  $OX$ . Выразим  $f_1, f_2$  через  $N$

$$f_1 = \frac{\partial N \sqrt{1 + y'^2}}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial N \sqrt{1 + y'^2}}{\partial y}. \tag{13}$$

В зависимости от вида функции  $s_{2222}(x, y)$  будем иметь различные варианты распространения трещины. Рассмотрим модель композита, для которого

$$f_{2,y}^0 = -\omega^2, \quad f_{2,y^2}^0 \equiv 0, \quad f_{2,y^3}^0 = -\alpha\omega^2, \quad f_1 = 0. \tag{14}$$

Это соответствует представлению  $\ln Q(x, y)$  в виде

$$\ln Q(x, y) = \ln Q(y) + v(x, y), \quad \ln Q(y) = -\omega^2 y^2 - \alpha\omega^2 y^4. \tag{15}$$

При  $f_1 = 0$  отсутствует непрерывное изменение неоднородности в направлении нормали к линии распространения трещины. Будем полагать, что вдоль оси  $OX$  свойства среды кусочно-постоянные (распространение трещины перпендикулярно границе слоев), тогда

$$v(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta(x - nX), \quad f_1 = \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX), \quad = \frac{2\pi}{\Omega}, \tag{16}$$

где  $\theta$  – функция Хевисайда. Полагая, что  $\Omega \ll \omega$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , получаем, что между точками  $x = nX$  ( $n = -\infty \dots \infty$ ) отклонение трещины  $y$  от оси  $x$  удовлетворяет уравнению типа Дуффинга [3]

$$\ddot{y} = \omega^2(1 + \alpha y^2)y = 0.$$

Тогда во всех точках оси  $x$  уравнение Дуффинга имеет вид

$$\ddot{y} + \omega^2(1 + \alpha y_1^2)y_1 = \varepsilon\omega \sum \delta(x - kX). \quad (17)$$

С точностью до членов порядка  $\alpha$  решение уравнения (13) запишем в виде [2]

$$y = A \cos[(\omega + \Delta\omega)x + \varphi], \quad \Delta\omega = \frac{3}{8}\alpha A^2\omega. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (38), для  $A$  и  $\varphi$  получим уравнения, которые запишем в конечных разностях в виде  $\varphi_{n+1} = \{\varphi_n + K_n \sin 2\varphi_n\}$ ,  $A_{n+1} = A(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \sin 2\varphi_n)$ ,  $K_n = \varepsilon\Delta\omega_n T = \frac{3}{8}\alpha A_n^2 \varepsilon \frac{\omega}{\Omega}$ . Выводим обычным образом корреляционную функцию  $R_m$  для  $\varphi_n$ :

$$R_m = \frac{\int_0^1 (\varphi_{n+m} - \langle \varphi_{n+m} \rangle)(\varphi_n - \langle \varphi_n \rangle) d\varphi_n}{\int_0^1 (\varphi_n - \langle \varphi_n \rangle)^2 d\varphi_n}. \quad (19)$$

С помощью корреляционной функции  $R_m$  находится условие стохастизации траектории трещины

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0. \quad (20)$$

При  $K \gg 1$  можно получить оценку

$$R_1 \approx \frac{1}{K_1}. \quad (21)$$

Следовательно, условие стохастизации траектории трещины сводится к условию расцепления фаз [2], т. е. фазы ведут себя некоррелированным хаотическим образом и для изучения поведения трещины необходимо переходить к вероятностному описанию. Условие (16) с учетом (21) запишем в виде

$$K_1 = \varepsilon \left\langle \frac{\Delta\omega}{\Omega} \right\rangle > 1. \quad (22)$$

Оценка длины траектории, начиная с которой поведение трещины становится стохастическим, имеет вид

$$x_* = \frac{X}{2 \ln K_1} = \frac{1}{2\Omega \ln K_1}. \quad (23)$$

Для больших  $K$  вероятность попадания траектории в фазовой плоскости в область устойчивости мала, а в случае попадания время пребывания в ней фазовой точки уменьшается.

Таким образом, имеем: при  $K \ll 1$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) распространение трещины устойчиво относительно  $y=0$ , при  $K \gg 1$  распространение стохастично, при  $K \approx 1$  – переходная область.

2. Стохастизация линий скольжения в неоднородной пластической среде.

Рассмотрим плоско-деформированное состояние для модели жестко-пластического неоднородного тела. В этом случае условие пластичности запишется в виде [10]

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2(x, y), \quad (24)$$

где  $k(x, y)$  – функция  $x, y$ .

Как известно, условие пластичности (24) удовлетворяется тождественно, если

$$\sigma_x = \sigma - k(x, y) \sin 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma + k(x, y) \cos 2\theta, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau_{xy} = k(x, y) \cos 2\theta, \quad (25)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – главные напряжения,  $\theta$  – угол между осью  $x$  и  $\alpha$  – линией скольжения, вторая линия скольжения –  $\beta$ .

Подставляя (25) в уравнения равновесия, получаем систему уравнений для  $\sigma$  и  $\theta$  [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k(x, y) \left( \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial k}{\partial x} \sin 2\theta + \frac{\partial k}{\partial y} \cos 2\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2k(x, y) \left( -2 \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial k}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial k}{\partial y} \sin 2\theta &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Система (26) нелинейная гиперболическая, её характеристики ортогональны и совпадают с линиями скольжения. В случае  $k = \text{const}$  получаем систему для однородной среды, которая обращением переменных приводится к линейной системе. Система (5) никакой заменой переменных к линейной системе не приводится, что эквивалентно тому, что уравнения характеристик (линий скольжения)

$$d\sigma - 2kd\theta - \frac{\partial k}{\partial x} dy + \frac{\partial k}{\partial y} dx = 0, \quad (27)$$

$dy = tg\theta dx$  вдоль  $\alpha$ -линий,

$$d\sigma - 2kd\theta - \frac{\partial k}{\partial x} dy - \frac{\partial k}{\partial y} dx = 0, \quad (28)$$

$dy = -ctg\theta dx$  вдоль  $\beta$ -линий,

не имеют интегрируемых комбинаций.

Для однородной среды  $k = \text{const} = k_0$  из (28) следует:

$$d\sigma_0 - 2k_0 d\theta_0 = 0 dy_0 = tg\theta_0 dx \quad (29)$$

вдоль  $\alpha_0$ -линий,

$$d\sigma_0 + 2k_0 d\theta_0 dy_0 = -ctg\theta_0 dx \quad (30)$$

вдоль  $\beta_0$ -линий,

Как известно, линии скольжения — это линии движения дислокаций, причем дислокационная структура в процессе нагружения проходит несколько стадий самоорганизации. Стадия сформированной сетки линий скольжения (29), (30), определяемой из уравнений идеальной пластичности однородной среды, соответствует состоянию высокой организации структуры среды. Неоднородность  $\kappa = \kappa(x, y)$  в уравнениях (24), (25), (26) играет роль возмущений, вносимых в эту упорядоченность пластического течения.

Рассмотрим условия на  $\kappa(x, y)$ , при которых уравнения (27), (28) описывают стохастизацию линий скольжения. Из уравнений (29), (30) видно, что в однородном случае на изменение угла  $\theta$  влияет  $\sigma$ , поэтому в случае уравнений (27), (28) на  $\theta$  влияют  $\sigma$  и  $\kappa$ . Для того, чтобы выявить только влияние неоднородности, будем считать, что нагружение ведется таким образом, что  $\sigma = \sigma_0$ , тогда изменение  $\theta$  и  $y$  в зависимости от неоднородности описывается уравнениями

$$-d\theta_1 + \frac{k_1}{k_0} d\theta + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial k_1}{\partial x} dy_0 - \frac{1}{2k_0} \frac{\partial k_1}{\partial y} dx = 0, \quad dy_1 = (tg\theta_0)' \theta_1 dx \quad (31)$$

вдоль  $\alpha$ -линий,

$$d\theta_1 + \frac{k_1}{k_0} d\theta_0 + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial k_1}{\partial x} dy_0 - \frac{1}{2k_0} \frac{\partial k_1}{\partial y} dx = 0, \quad dy_1 = -(ctg\theta_0)' \theta_1 dx \quad (32)$$

вдоль  $\beta$ -линий (32).

Записывая уравнения (31), (32) в конечных разностях, получим

$$\left| \frac{d\theta_1^{(n+1)}}{d\theta_1^{(n)}} - 1 \right| = \left| \frac{2k_1^{(n+1)} d\theta_0 - k_{1,x}^{(n+1)} dy_0 - k_{1,y}^{(n+1)}}{k_1^{(n)} d\theta_0 - k_{1,x}^{(n)} dy_0 - k_{1,y}^{(n)}} - 1 \right| \gg 1 \quad (33)$$

для  $\alpha$  и  $\beta$  линий.

Рассмотрим полуплоскость  $y \geq 0$ , при  $y = 0$  заданы граничные условия [8]

$$\sigma_y = -P_0, \tau_{xy} = \tau_0 \quad (34)$$

Предел пластичности зависит только от  $y$ , т. е.  $k = k(y)$ . Предполагаем, что  $|\tau_0| < k(0)$ . В этом случае для системы (28) имеем задачу Коши, решение которой имеет вид [10]

$$\sigma_y = -p_0, \tau_{xy} = -\tau_0, \sigma_x = -p_0 \pm \sqrt{k^2(y) - \tau_0^2}. \quad (35)$$

Линии скольжения из уравнений (26), (27) определяются соотношениями [10]

$$x - \mu \int_0^y \frac{k(y) + \tau_0}{k(y) - \tau_0} dy = const, x + \mu \int_0^y \sqrt{\frac{k(y) - \tau_0}{k(y) + \tau_0}} dy = const. \quad (36)$$

При  $\tau_0 = 0$  линии скольжения — прямые, наклоненные к границе под углом  $\pm\pi/4$ . При монотонном возрастании  $k(y)$  кривые (36) приближаются к прямолинейным асимптотам, а при убывании необходимо потребовать, чтобы внутри области  $y > 0$   $|\tau_0| < k_{min}$ , где  $k_{min}$  — наименьшее значение предела текучести в теле.

Пусть  $\tau_0 = 0$ ,  $k = k_0 + k_1(x, y)$ , тогда  $d\theta_0 = 0$ ,  $dy_0 = tg\theta_0$  и условие (33) имеет вид

$$|k_{1,x^2} dy_0 - k_{1,y^2}| |k_{1,x} dy_0 - k_{1,y}|. \quad (37)$$

На основе (37) получим более грубую оценку

$$|k_{1,x}| + |k_{1,y}| \geq |k_{1,x^2}| + |k_{1,y^2}|. \quad (38)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кунин, И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой / И. А. Кунин. — М. : Наука, 1975. — 416 с.
- [2] *Заславский, Г. М.* Введение в нелинейную физику / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. — М. : Наука, 1988. — 366 с.
- [3] *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. — М. : Наука, 1970. — 939 с.
- [4] *Бабич, В. М.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В. М. Бабич, В. С. Булдырев. — М. : Наука, 1972. — 456 с.
- [5] *Булдырев, В. С.* Асимптотика решений волнового уравнения, сосредоточенных вблизи оси плоского волновода в неоднородной среде / В. С. Булдырев // Проблемы математической физики. — Ленинград [СПб.], 1968. — Вып. 3. — С. 5–30.
- [6] *Палянов, В. С.* Распространение в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В. С. Палянов, А. В. Чигарев // ПММ. — 2010. — Т. 74. Вып. 2. — С. 276–283.
- [7] *Рытов, С. М.* Введение в статистическую радиофизику / С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский. — М. : Наука, 1978. — 463 с.
- [8] *Чигарев, А. В.* Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А. В. Чигарев. — Минск : Технопринт, 2000. — 425 с.
- [9] *Партон, В. З.* Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. — М. : Наука, 1974. — 416 с.
- [10] *Кузнецов, А. И.* Плоская деформация неоднородных пластических тел / А. И. Кузнецов // Вестник Ленинградского университета. — 1958. — № 13. Вып. 3. — С. 112–131.

A. V. Chigarev, Yu. V. Chigarev, S. A. Pronkevich

**NONLINEAR DYNAMICS OF ENERGY CURRENT LINES IN THE  
MECHANICS OF NON-UNIFORM ENVIRONMENTS**

*Belarussian National Technical University*

*Belarussian State Agrarian Technical University*

**Abstract.** The representation of energy current lines in the non-uniform elastic environment and the influence of heterogeneity on stability or instability of energy distribution are considered in the article. The influence of material heterogeneity of a body on modes of spreading cracks in it discussed.

**Keywords:** non-uniform environment, deformation, plasticity, current lines, energy, the differential equations.

*Чигарев Анатолий Власович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск*

**e-mail:** [theormech@rambler.ru](mailto:theormech@rambler.ru)

*Чигарев Юрий Власович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный аграрный технический университет, г. Минск*

**e-mail:** [theormech@rambler.ru](mailto:theormech@rambler.ru)

*Пронкевич Сергей Александрович*

*ассистент, Белорусский национальный технический университет, г. Минск*

**e-mail:** [ps\\_minsk@tut.by](mailto:ps_minsk@tut.by)

*Chigarev, Anatoliy Vlasovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Belarussian National Technical University, Minsk*

*Chigarev, Yuri Vlasovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Belarussian State Agrarian Technical University, Minsk*

*Pronkevich, Sergey Aleksandrovich*

*Assistant, Belarussian National Technical University, Minsk*

Р. И. Непершин

## ИДЕАЛЬНОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ

*Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”*

**Аннотация.** Рассматриваются осесимметричные процессы пластического деформирования толстостенных труб гладким криволинейным инструментом по наружной или внутренней границам. Принимается идеальное пластическое течение жесткопластического тела при совпадении главных напряжений с линиями тока. Задается свободная внутренняя или наружная граница пластической области, от которой численным методом рассчитываются линии тока, поля напряжений и скоростей и определяется профиль инструмента. Используется условие пластичности Мизеса с учетом упрочнения.

**Ключевые слова:** осесимметричная пластическая деформация, идеальное течение, толстостенная труба, гладкий криволинейный инструмент, упрочнение.

УДК: 539.374

Толстостенные трубы с криволинейным профилем осевого сечения могут применяться в конструкциях машин и энергетических установок с высокими нагрузками. Эффективными методами их изготовления являются процессы пластического деформирования жестким инструментом по наружной или внутренней границе. В первом случае происходит уменьшение наружного диаметра трубы (обжим) с образованием внутренней криволинейной свободной границы, зависящей от профиля рабочей поверхности инструмента. Во втором случае происходит увеличение внутреннего диаметра трубы (раздача) с образованием внешней криволинейной свободной границы.

Анализ напряженно-деформированного состояния толстостенных труб в процессах обжима и раздачи при заданной форме профиля рабочей поверхности инструмента представляет трудную задачу, так как свободные границы пластической области неизвестны. Анализ пластического деформирования сплошных заготовок матрицами различной формы при плоской и осесимметричной деформации и построение идеальных профилей, обеспечивающих однородную деформацию по сечению заготовки с минимальной работой пластического деформирования, приведен в работах [1-5].

В настоящей работе задача идеального стационарного пластического течения толстостенной трубы при обжиме и раздаче решается обратным методом. Задается внутренняя или внешняя граница пластической области в виде выпукло-вогнутой кривой при непрерывном изменении напряжений и скоростей перемещений на жесткопластических границах и в пластической области. Гладкий криволинейный профиль инструмента определяется как линия тока при расчетах напряженного состояния и поля скоростей с использованием граничных

условий для напряжений на известных свободных границах пластической области. Используются условие идеального пластического течения, при котором направления главных напряжений в меридиональной плоскости совпадают с линиями тока и нормальными к ним, и уравнения для напряжений и скоростей в криволинейных координатах, совпадающих с линиями тока.

На рис. 1а показано стационарное пластическое течение в цилиндрических координатах  $r, z, \theta$  при обжиме и на рис 2а – при раздаче толстостенной трубы инструментом с гладким криволинейным профилем с непрерывным распределением напряжений и скоростей перемещений. Пластическая область  $ABCD$  ограничена свободной границей  $AD$ , границей инструмента  $BC$  и прямолинейными границами  $DC$  и  $AB$  с жесткими зонами. Рассматривается идеальное пластическое течение, при котором направления главных напряжений в меридиональной плоскости  $\sigma_1, \sigma_2$  при обжиме и  $\sigma_2, \sigma_3$  при раздаче совпадают с касательной и нормалью к линиям тока. Главное напряжение  $\sigma_3 = \sigma_\theta$  при обжиме отрицательно, а при раздаче напряжение  $\sigma_1 = \sigma_\theta$  положительно. Условие пластичности Мизеса при идеальном пластическом течении жесткопластического тела с напряжением текучести  $\sigma_s$  имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (1)$$

при обжиме и

$$(\sigma_\theta - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_\theta)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (2)$$

при раздаче. Процессы обжима и раздачи металлических труб обычно выполняются в холодном состоянии, при котором существенно влияние деформационного упрочнения, которое учитываем степенной зависимостью напряжения текучести  $\sigma_s$  от накопленной пластической деформации  $e_p$  с параметрами  $C$  и  $n$  и начальным напряжением текучести  $\sigma_0$

$$\sigma_s = \sigma_0 (1 + Ce_p^n). \quad (3)$$

В случае отсутствия упрочнения, например, при изотермическом деформировании толстостенных труб из алюминиевых сплавов при повышенной температуре в формуле (3) принимается  $C = 0$  – модель идеальнопластического тела при  $\sigma_s = \sigma_0$ .

При известном значении  $\sigma_s$  напряжение  $\sigma_\theta$  выражается через главные напряжения в меридиональной плоскости из уравнений (1) и (2)

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} \left[ \sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{4\sigma_s^2 - 3(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \right] \quad (4)$$

при обжиме и

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} \left[ \sigma_2 + \sigma_3 + \sqrt{4\sigma_s^2 - 3(\sigma_2 - \sigma_3)^2} \right] \quad (5)$$

при раздаче.

Приращения главных деформаций вдоль линий тока и по нормали к ним при обжиме и раздаче определяются соотношениями закона пластического течения, ассоциированного с условиями пластичности (1) и (2)

$$de_1 = ade_2, \quad a = \frac{2\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_\theta)}{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_\theta)} \quad (6)$$

при обжиме и

$$de_2 = ade_3, \quad a = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_3 + \sigma_\theta)}{2\sigma_3 - (\sigma_2 + \sigma_\theta)} \quad (7)$$

при раздаче. Приращение накопленной деформации  $de_p$  определяется приращениями главных деформаций в меридиональной плоскости и с использованием пластической несжимаемости выражается через приращение окружной деформации  $dr/r$  по формуле



$$de_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+a+a^2}}{1+a} \left| \frac{dr}{r} \right|. \quad (8)$$

Накопленная деформация  $e_p$  определяется суммированием приращений  $de_p$  при движении материальной частицы вдоль линии тока при известном напряженном состоянии в пластической области, определяющем коэффициент  $a$  по формулам (6) или (7).

Скорости  $V_0$  и  $V_1$  жестких областей на входе и выходе из пластической области связаны интегральным условием несжимаемости

$$V_0 = V_1 \frac{(2r_B - h)h}{(2r_C - h_0)h_0} \quad (9)$$

при обжиме и

$$V_0 = V_1 \frac{(2r_B + h)h}{(2r_C + h_0)h_0} \quad (10)$$

при раздаче.

Равновесие элемента, ограниченного линиями тока, плоскостями, нормальными к линиям тока, и меридиональными плоскостями, по направлениям нормали и касательной к линиям тока приводит к дифференциальным уравнениям для главных напряжений при обжиме

$$\frac{d\sigma_1}{dl_1} = \chi(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_\theta \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \chi = 1/R \quad (11)$$

по нормали к линиям тока и

$$\frac{d\sigma_2}{dl_2} = (\sigma_\theta - \sigma_2) \frac{\sin \varphi}{r} \quad (12)$$

по касательной к линиям тока; где  $dl_2$  и  $dl_1$  – дифференциалы дуг линии тока и нормали к линии тока,  $\varphi$  – угол наклона касательной к линии тока с осью  $z$  (рис. 1а),  $\chi$  и  $R$  – кривизна и радиус кривизны линии тока. Аналогичные дифференциальные уравнения равновесия для главных напряжений при раздаче (рис. 2а) имеют вид

$$\frac{d\sigma_2}{dl_2} = \chi(\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_\theta \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \chi = 1/R \quad (13)$$

по нормали к линиям тока и

$$\frac{d\sigma_3}{dl_3} = (\sigma_\theta - \sigma_3) \frac{\sin \varphi}{r} \quad (14)$$

по касательной к линиям тока; где  $dl_2$  и  $dl_3$  – дифференциалы дуг линии тока и нормали к линии тока.

При решении задачи задается свободная граница  $AD$  пластической области и конечная толщина стенки  $h$  на границе  $AB$ . Профили инструмента  $BC$  и граница  $DC$  с начальной толщиной стенки  $h_0$  определяются расчетами напряженного состояния и линий тока численным интегрированием приведенных выше дифференциальных уравнений равновесия с граничными условиями для напряжений на свободных границах  $AD$  и  $AB$  пластической области.

Напряжения в регулярных узлах линий тока определяются интегрированием уравнений (11)-(14) с использованием известных значений напряжений на границах  $AD$  и  $AB$  и условия ортогональности линий сетки. При обжиме узловые точки сетки линий тока определяются с учетом изменения длин дуг  $dl_1$  и  $dl_2$  по соотношениям (6) ассоциированного закона течения, из которых находится расстояние по нормали к линиям тока

$$dl_1 = dl_1^0 \left( 1 - \frac{a}{1+a} \frac{dr}{r} \right) \quad (15)$$

где  $dl_1^0$  – известный шаг между узловыми точками по нормали к линиям тока для соседнего элемента сетки на линии тока и  $dr/r$  – приращение окружной деформации при перемещении частицы между соседними узловыми точками на линии тока. При раздаче узловые точки линий тока определяются с учетом изменения длин дуг  $dl_2$  и  $dl_3$  по соотношениям (7), из которых находится изменение длины дуги по нормали к линиям тока

$$dl_2 = dl_2^0 \left( 1 + \frac{a}{1+a} \frac{dr}{r} \right). \quad (16)$$

Скорости в пластической области вычисляются от границы  $AB$  с жесткой областью, модуль скорости которой принимается за единицу  $V_1 = 1$ . Модуль скорости в узловых точках линий тока находится из условия непрерывности потока скорости вдоль линий тока, пересекающих границу  $AB$

$$V = \frac{r_{AB}}{r} \frac{dh}{dl_1}, \quad V = \frac{r_{AB}}{r} \frac{dh}{dl_2} \quad (17)$$

при обжиме и раздаче соответственно, где  $r_{AB}$  и  $dh$  – координата  $r$  линии тока и шаг сетки по оси  $r$  на границе  $AB$ . Проекция вектора скорости на оси координат  $r$  и  $z$  определяются модулем  $V$  и углом наклона  $\varphi$  касательной к линии тока

$$V_r = -V \sin \varphi, \quad V_z = -V \cos \varphi; \quad V_r = V \sin \varphi, \quad V_z = V \cos \varphi \quad (18)$$

при обжиме и раздаче соответственно.

Условие положительности диссипативной функции, определяющее совместность полей напряжений и скоростей [6], с учетом пластической несжимаемости имеет вид неравенств

$$(\sigma_\theta - \sigma_1) \frac{V_r}{r} + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{dV}{dl_2} \geq 0 \quad (19)$$

при обжиме и

$$(\sigma_\theta - \sigma_2) \frac{V_r}{r} + (\sigma_3 - \sigma_2) \frac{dV}{dl_3} \geq 0 \quad (20)$$

при раздаче; где  $dV/dl_2$  и  $dV/dl_3$  – скорость деформации вдоль линий тока.

Сила  $P$  определяется интегрированием распределения нормальных напряжений на границе  $DC$ . Одноосные распределения напряжений  $\sigma_2$ ,  $\sigma_1 = 0$  при обжиме в жесткой области выше границы  $DC$  и  $\sigma_3$ ,  $\sigma_2 = 0$  при раздаче ниже границы  $DC$  являются статически допустимыми при  $|\sigma_2|_{\max} < \sigma_0$  и  $|\sigma_3|_{\max} < \sigma_0$ .

Приведенное ниже численное решение показано на примере косинусоидальной свободной границы  $AD$  с углом наклона  $\alpha$  касательной в точке перегиба

$$r = r_0 \{ 1 + (H_0/\pi) \operatorname{tg} \alpha [1 - \cos(\pi z/H_0)] \}.$$

Угол  $\varphi$  наклона касательной к границе  $AD$  и кривизна  $\chi$  определяются первой и второй производными функции  $r(z)$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha \sin(\pi z/H_0), \quad \chi = (\pi/H_0) \operatorname{tg} \alpha \cos(\pi z/H_0) (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-3/2}.$$

На границе  $AD$  задаются  $N$  точек с шагом  $\Delta z = H_0/N - 1$  и на границе  $AB$  –  $M$  точек с шагом  $\Delta h = h/M - 1$ . В точках границы  $AD$  вычисляются координаты  $r$ ,  $z$ , угол  $\varphi$ , кривизна  $\chi$ , пластическая деформация  $e_p = \ln(r_D/r)$  при обжиме или  $e_p = \ln(r/r_D)$  при раздаче, где  $r_D$  – координата  $r$  точки  $D$ , и по формуле (3) определяется напряжение текучести  $\sigma_s$ . При обжиме в точках границы  $AD$  вычисляются напряжения  $\sigma_2$  интегрированием уравнения (12) методом Рунге-Кутты второго порядка [7] от точки  $A$ , где  $\sigma_2 = 0$ , к точке  $D$  с использованием

граничного условия  $\sigma_1 = 0$  на  $AD$ . При раздаче в точках границы  $AD$  вычисляются напряжения  $\sigma_3$  интегрированием уравнения (14) от точки  $A$ , где  $\sigma_3 = 0$ , к точке  $D$  с использованием граничного условия  $\sigma_2 = 0$  на  $AD$ .

Так как при идеальном пластическом течении материальные элементы, нормальные к стенке трубы, совпадают с линиями криволинейной сетки, нормальными к линиям тока, то вдоль этих линий значения  $e_p$  и  $\sigma_s$  равны значениям этих величин в точках пересечения с границей  $AD$ . При обжиме в узловых точках границы  $AB$  кривизна  $\chi$  рассчитывается от точки  $A$  к точке  $B$  по формуле  $\chi = \chi_0/(1 - \Delta h\chi_0)$ , где  $\chi_0$  – известная кривизна линии тока в соседнем узле,  $e_p = \ln(r_D/r_0)$ , и  $\sigma_s$  определяется по формуле (3). Напряжение  $\sigma_1$  находится интегрированием уравнения (11) методом Рунге-Кутты второго порядка от точки  $A$ , где  $\sigma_1 = 0$ , к точке  $B$  с использованием граничного условия  $\sigma_2$  на  $AB$ . При раздаче в узловых точках границы  $AB$  кривизна  $\chi$  рассчитывается от точки  $A$  к точке  $B$  по формуле  $\chi = \chi_0/(1 + \Delta h\chi_0)$ ,  $e_p = \ln(r_A/r_0)$ . Напряжение  $\sigma_2$  находится интегрированием уравнения (13) от точки  $A$ , где  $\sigma_2 = 0$ , к точке  $B$  с использованием граничного условия  $\sigma_3 = 0$  на  $AB$ .

Напряжения и скорости пластического течения в регулярных узлах сетки находятся двумя циклами. Во внутреннем цикле выполняются расчеты  $M - 1$  узловых точек линий, ортогональных к линиям тока, от границы  $AD$  с использованием известных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на границе  $AB$  при обжиме или  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  при раздаче и возобновлением данных на этой границе в процессе выполнения цикла. Во внешнем цикле производится  $N - 1$  смещений по узлам границы  $AD$  с выполнением внутреннего цикла после каждого смещения. В результате определяется криволинейный профиль инструмента  $BC$  с распределением контактного напряжения  $\sigma_1$  или  $\sigma_2$  и жесткопластическая граница  $DC$  с распределением напряжения  $\sigma_2$  или  $\sigma_3$ , передаваемого на жесткую область при обжиме или раздаче соответственно. При идеальном пластическом течении граница  $DC$  должна быть горизонтальной прямой, перемещающейся с вертикальной скоростью  $V_0$ .

При вычислениях координат  $r$ ,  $z$  угла  $\varphi$ , кривизны  $\chi$  и напряжений в регулярных узлах линий тока используются конечно-разностные соотношения для дифференциальных уравнений (11)–(14) и применяется численный метод с двумя приближениями по аналогии с методом Рунге-Кутты второго порядка. При этом учитывается изменение длины нормали к линиям тока по формулам (15), (16) в зависимости от напряженного состояния, и напряжение  $\sigma_\theta$  вычисляется по формулам (4), (5) с учетом упрочнения материала в зависимости от накопленной деформации  $e_p$  материальных точек, перемещающихся по линиям тока. Затем по формулам (17)–(20) вычисляются скорости и диссипативная функция в узловых точках линий тока.

Расчет идеальных процессов обжима и раздачи толстостенных трубных труб выполнен для стали 10, экспериментальная кривая упрочнения которой при пластической деформации  $e_p$  до 0.35 аппроксимирована уравнением (3) с параметрами  $\sigma_0 = 300 \text{ Н/мм}^2$ ,  $C = 1.45$  и  $n = 0.79$ .

На рис. 1а показана сетка линий тока, вычисленная при обжиме трубы с параметрами  $e_p = 15 \text{ мм}$ ,  $H_0 = 24 \text{ мм}$ ,  $\alpha = 0.562$ ,  $h = 5 \text{ мм}$ . Профиль инструмента  $BC$  является внешней линией тока. Линии сетки, ортогональные к линиям тока, практически прямолинейны. Граница  $DC$  с жесткой областью также близка к прямой в соответствии с теорией идеального течения. Значения координаты  $r$  точек  $D$  и  $C$  определяют начальную толщину стенки трубы  $h_0 = 3.86 \text{ мм}$ .

На рис. 1б показано поле скоростей на плоскости годографа  $V_r$ ,  $V_z$  для обжима трубы, показанной на рис. 1а, где скорость жесткой зоны ниже границы  $AB$  принята за единицу. Скорости узловых точек на линиях, ортогональных к линиям тока, практически постоянны в пластической области от границы  $AB$  до зоны перегиба линий тока, где модуль скорости  $V_r$  имеет максимальное значение. При приближении к жесткопластической границе изменение вектора скорости в точках линий, ортогональных к линиям тока, увеличивается, но остается малым по сравнению с модулем вектора скорости  $V_0 = 0.845$ , определяемым по формуле (9). Диссипативная функция, определяемая левой частью неравенства (19), положительна.

На рис. 2а показана сетка линий тока, вычисленная при раздаче трубы с параметрами  $r_0 = 20$  мм,  $H_0 = 25$  мм,  $\alpha = 20^\circ$  при конечной толщине стенки  $h = 5$  мм на границе  $AB$ . Профиль инструмента  $BC$  совпадает с внутренней линией тока. Линии сетки, ортогональные к линиям тока, как и при обжиге, практически прямолинейны, и граница  $DC$  также близка к прямой в соответствии с теорией идеального течения. Координаты  $r$  в точках  $D$  и  $C$  определяют начальную толщину стенки трубы  $h_0 = 5.76$  мм.

На рис. 2б показано поле скоростей на плоскости годографа  $V_r, V_z$  при раздаче трубы. Скорости узловых точек на линиях, ортогональных к линиям тока, практически постоянны в пластической области от границы  $AB$  до зоны перегиба линий тока, где модуль скорости  $V_r$  имеет максимальное значение. При приближении к жесткопластической границе  $DC$  изменение вектора скорости в точках линий, ортогональных к линиям тока, увеличивается, но остается малым по сравнению с модулем вектора скорости  $V_0 = 1.181$  жесткой области ниже границы  $DC$ , определяемым по формуле (10). Диссипативная функция, определяемая левой частью неравенства (20), положительна во всей пластической области.

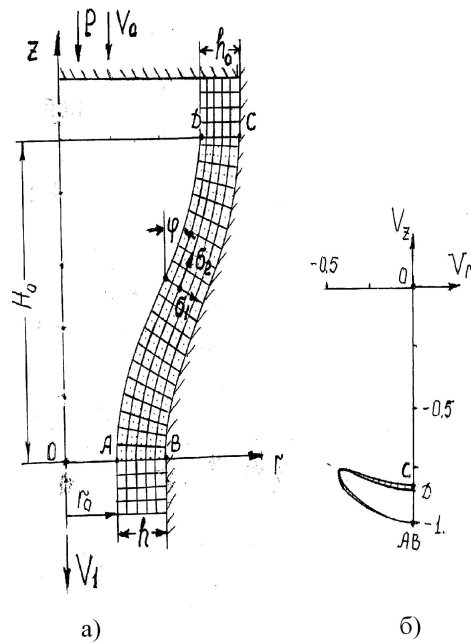


Рис. 1.

На рис. 3 показаны распределения напряжений  $\sigma_1/\sigma_0, \sigma_2/\sigma_0$ , накопленной деформации  $\epsilon_p$  и напряжения текучести  $\sigma_s/\sigma_0$  на профиле инструмента  $BC$  при обжиге трубы, показанной на рис. 1а. На том же рисунке приведено распределение напряжения  $\sigma_2/\sigma_0$  на свободной границе  $AD$ . Напряжения  $\sigma_2$  на линиях сетки, ортогональных к линиям тока, изменяются в узком интервале между кривыми  $AD$  и  $BC$ , показанными на рис. 3. На границе  $DC$  величина  $|\sigma_2/\sigma_0|$  изменяется от 0.612 до 0.528 и определяет силу  $P = 107.8$  кН. Контактное давление  $|\sigma_1/\sigma_0|$  на границе инструмента  $BC$  возрастает от 0.3 в точке  $C$  до 0.768 в точке  $B$  при минимальном значении 0.271 в середине профиля. Высокие значения давления в нижней части профиля матрицы вызваны интенсивным упрочнением материала в этой зоне с возрастанием пластической деформации до 0.495 на выходе из пластической области.

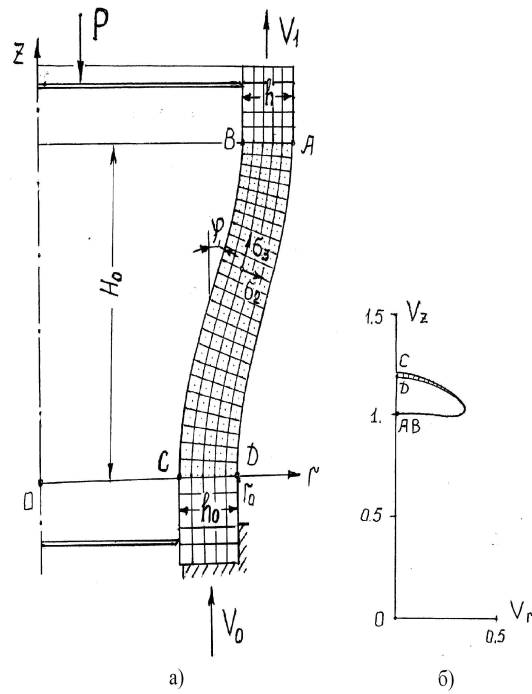


Рис. 2.

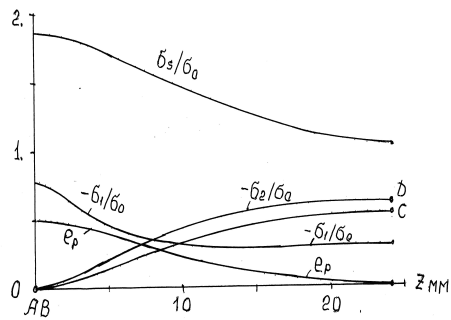


Рис. 3.

На рис. 4 показаны распределения  $\sigma_2/\sigma_0$  и  $\sigma_3/\sigma_0$ ,  $e_p$  и  $\sigma_s/\sigma_0$  на профиле  $BC$  и  $\sigma_3/\sigma_0$  на свободной границе  $AD$  при раздаче трубы, показанной на рис. 2а. Напряжения  $\sigma_3$  на линиях сетки, ортогональных к линиям тока, изменяются в узком интервале между кривыми  $AD$  и  $BC$ . На границе  $DC$  величина  $|\sigma_3/\sigma_0|$  изменяется от 0.514 до 0.570 и определяет силу  $P = 96.67$  кН.

В табл. 1 приведены радиусы  $r_D$ ,  $r_C$  точек  $D$  и  $C$  (мм), контактные давления  $p = -\sigma_1$  (Н/мм<sup>2</sup>) в точках  $B$  и  $C$  профиля инструмента, сила обжима  $P$  (кН) и конечная пластическая деформация  $e_p$  для свободной границы  $AD$  с углами наклона  $\alpha = 10^\circ$ ,  $20^\circ$  и  $30^\circ$  в точке перегиба. В табл. 2 приведены радиусы  $r_B$ ,  $r_C$  (мм) точек  $B$  и  $C$  профиля инструмента,

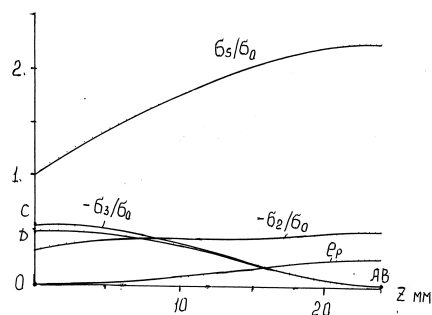


Рис. 4.

контактные давления  $p = -\sigma_2$  (Н/мм<sup>2</sup>) в этих точках, сила раздачи  $P$  (кН) и конечная пластическая деформация  $\epsilon_p$  для свободной границы  $AD$  с углами наклона  $\alpha = 10^\circ, 20^\circ$  и  $30^\circ$  в точке перегиба. Наибольшее влияние на напряженно-деформированное состояние трубы и форму профиля инструмента оказывают угол  $\alpha$  и конечная толщина стенки  $h$ .

Таблица 1. Профили инструмента при обжиме трубы

$\alpha$	$r_D$	$r_C$	$p_B$	$p_C$	$P$	$\epsilon_p$
$10^\circ$	17.69	22.39	132.4	82.0	29.49	0.165
$20^\circ$	20.56	24.91	169.2	81.8	63.41	0.315
$30^\circ$	23.82	27.78	216.7	87.9	99.74	0.462

Таблица 2. Профили инструмента при раздаче трубы

$\alpha$	$r_B$	$r_C$	$p_B$	$p_C$	$P$	$\epsilon_p$
$10^\circ$	17.81	14.55	141.8	87.5	41.45	0.131
$20^\circ$	20.79	14.24	155.3	104.9	96.67	0.254
$30^\circ$	24.19	14.05	167.6	134.2	164.9	0.378

Применение криволинейных профилей инструмента для обжима и раздачи толстостенных труб, рассчитываемых по теории идеального пластического течения, обеспечивает однородное распределение деформации по толщине стенки при минимальной нагрузке на инструмент по сравнению с традиционно применяемым коническим профилем. Практическая реализация идеальных профилей инструмента возможна при использовании современных станков с ЧПУ и эффективных смазочных покрытий.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Томленов, А. Д.* Теория пластического деформирования металлов / А. Д. Томленов. – М. : Metallurgy, 1972. – 408 с.
- [2] *Джонсон, У.* Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор. – М. : Машиностроение, 1979. – 576 с.
- [3] *Друянов, Б. А.* Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.
- [4] *Druyanov, B. A.* Problems of Technological Plasticity / B. F. Druyanov, R. I. Nepershin. – Amsterdam : Elsevier, 1994. – 426 p.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин. – М. : Физматлит, 2008. – 832 с.
- [6] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
- [7] *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука ; Физматлит, 1965. – 704 с.

*Nepershin R. I.*

## IDEAL PLASTIC DEFORMATION OF THICK-WALLED PIPES

*Moscow State Technological University "Stankin"*

**Abstract.** The axially symmetric processes of plastic deformation of thick-walled pipes by the smooth curvilinear tool on external or internal borders are considered. The ideal plastic current of the stiff-plastic body is accepted at coincidence of the main pressure to the current lines. It is defined the free internal or external border of plastic area from which the current lines, the fields of pressure and speeds are calculated by a numerical method and the tool profile is set. The condition of plasticity of Mises is used taking hardening into account.

**Keywords:** axially symmetric plastic deformation, an ideal current, a thick-walled pipe, the smooth curvilinear tool, hardening.

*Непершин Ростислав Иванович*

*доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет "СТАНКИН", г. Москва*

*e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru*

*Nepershin Rostislav Ivanovich*

*Dr. Eng. Sci., Professor, Moscow State Technological University "Stankin", Moscow*

Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова

## ОБ УСЛОВИЯХ АНИЗОТРОПИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического  
университета в г. Чебоксары

**Аннотация.** В работе рассматриваются условия анизотропии идеальнопластических тел в случае кручения, плоской и пространственной задачи.

**Ключевые слова:** напряжение, идеальная пластичность, предел текучести, кручение, плоская деформация, полная пластичность.

УДК: 539.374

1. Исходные соотношения для напряжений в случае кручения призматических стержней для изотропного идеальнопластического материала имеют вид

Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  – касательные напряжения в плоскости сечения призматического стержня с образующими, направленными вдоль оси  $z$ .

Условие пластичности или предельного состояния

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_0^2, \quad k_0 = \text{const}, \quad (1.2)$$

где  $k_0$  – предел текучести.

Условие пластичности (1.2) удовлетворяется при замене переменных

$$\tau_{xz} = k_0 \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k_0 \sin \theta. \quad (1.3)$$

Из (1.1), (1.3) имеет место уравнение

$$-\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (1.4)$$

хорошо изученное в литературе [1, 2] и др.

В случае анизотропии обычно используется условие пластичности [3]

$$A\tau_{xz}^2 + B\tau_{yz}^2 = k_0^2, \quad A, B - \text{const} > 0. \quad (1.5)$$

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и все компоненты, имеющие размерность напряжений, отнесем к величине  $k_0$ , при этом сохраним обозначения для  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ . Условие (1.5) примет вид

$$A\tau_{xz}^2 + B\tau_{yz}^2 = 1. \quad (1.6)$$

Поступила 02.07.2010



Очевидно, (1.6) представляет уравнение эллипса (рис. 1) с полуосями  $1/\sqrt{A}$ ,  $1/\sqrt{B}$

$$\frac{\tau_{xz}^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{A}}\right)^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{B}}\right)^2} = 1. \quad (1.7)$$

Положим

$$\tau_{xz} = K(\theta) \cos \theta, \quad \tau_{yz} = K(\theta) \sin \theta. \quad (1.8)$$

Из (1.6), (1.8) получим

$$K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\theta}}. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.6) согласно (1.8) может быть переписано в виде

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = K^2(\theta), \quad (1.10)$$

где  $K(\theta)$  определяется согласно (1.9).

Обратный переход от формы записи условия пластичности (1.10), (1.9) к форме (1.6) может быть осуществлен путем замены переменных (1.8)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}. \quad (1.11)$$

Вообще, если условие пластичности идеальнопластического анизотропного тела определено в виде (1.10), то в переменных  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  условие пластичности (1.10) имеет вид

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = K^2 \left( \operatorname{arctg} \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} \right). \quad (1.12)$$

Рассмотрим пример. Предположим, что условие пластичности определено в виде (1.10), где

$$K(\theta) = \sqrt{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\theta}. \quad (1.13)$$

Выражение (1.13) может быть переписано в виде

$$K(\theta) = \sqrt{A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta}. \quad (1.14)$$

Имеет место

$$\cos^2 \theta = \frac{\tau_{xz}^2}{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{\tau_{yz}^2}{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}. \quad (1.15)$$

Согласно (1.13), (1.15) условие пластичности (1.10) примет вид

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - \sqrt{A\tau_{xz}^2 + B\tau_{yz}^2} = 0. \quad (1.16)$$

**2.** Рассмотрим случай плоской деформации. Условие пластичности предельного состояния для изотропного тела имеет вид

$$\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = k_0^2, \quad k_0 - \text{const}. \quad (2.1)$$

В безразмерном виде условие (2.2) принимает вид

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = 1. \quad (2.2)$$

Условие пластичности для идеальнопластического изотропного тела обычно записывается в виде [3]

$$A \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + B\tau_{xy}^2 = 1, \quad A, B - \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

В переменных  $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ ,  $\tau_{xy}$  уравнение (2.3) представляет эллипс, вполне аналогичный изображенному на рис. 1, но в случае плоской деформации условие (2.3) определяет характер анизотропии, принципиально отличный от характера анизотропии при кручении.

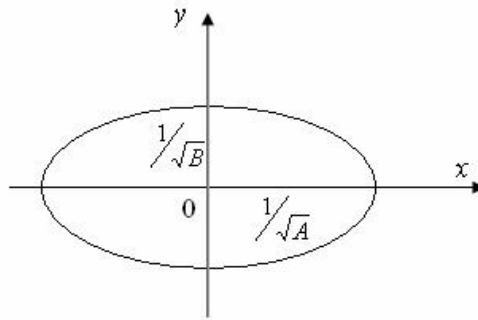


Рис. 1.

Суть дела связана с заменой переменных

$$\sigma_x = \sigma + K(\theta) \cos 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma - K(\theta) \cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = K(\theta) \sin 2\theta, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad (2.4)$$

в которой, в отличие от (1.3), (1.8), в выражениях синусов и косинусов входит двойной угол  $2\theta$ , где  $\theta$  – определяет направление главного растягивающего или сжимающего напряжения.

Из (2.3), (2.4) получим

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = K^2(\theta), \quad (2.5)$$

где

$$K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta}}. \quad (2.6)$$

Согласно (2.5), (2.6) условие пластичности (2.3) определяет четырехлепестковую кривую, определяемую совокупностью пределов текучести при одноосном растяжении по всем возможным направлениям.

Из (2.4) следует

$$\text{tg } 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad \theta = \frac{1}{2} \text{arctg } \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (2.7)$$

Вообще, если условие пластичности идеальнопластического анизотропного тела определено в виде (2.5), то в переменных  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  условие пластичности (2.5) имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = K^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right). \quad (2.8)$$

3. Рассмотрим условие пластичности Хилла [3]

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(F\tau_{xy}^2 + G\tau_{yz}^2 + H\tau_{xz}^2) = 6k_0^2, \quad k_0 - \text{const.} \quad (3.1)$$

В дальнейшем будем считать все компоненты напряжений безразмерными, отнесенными к величине  $k_0$ . Воспользуемся соотношениями полной пластичности [1]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3}k + kn_1^2, & \tau_{xy} &= kn_1n_2 \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3}k + kn_2^2, & \tau_{yz} &= kn_2n_3 \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3}k + kn_3^2, & \tau_{xz} &= kn_1n_3 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, & k &= k(n_1, n_2, n_3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.1), (3.2) получим

$$k(n_1, n_2, n_3) = \sqrt{6} [A(n_1^2 - n_2^2) + B(n_2^2 - n_3^2) + C(n_3^2 - n_1^2) + 6(Fn_1^2n_2^2 + Gn_2^2n_3^2 + Hn_1^2n_3^2)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.3)$$

Условие пластичности (3.1) может быть переписано в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = k^2(n_1, n_2, n_3), \quad (3.3)$$

где  $k(n_1, n_2, n_3)$  определяется согласно (3.3), причем имеют место соотношения (3.2).

Из (1.2) следует

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x - \sigma}{\sigma_y - \sigma} &= \frac{1 - 3n_1^2}{1 - 3n_2^2}, & \frac{\tau_{xy}}{\tau_{yz}} &= \frac{n_1}{n_2} \\ \frac{\sigma_y - \sigma}{\sigma_z - \sigma} &= \frac{1 - 3n_2^2}{1 - 3n_3^2}, & \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} &= \frac{n_2}{n_1} \\ \frac{\sigma_z - \sigma}{\sigma_x - \sigma} &= \frac{1 - 3n_3^2}{1 - 3n_1^2}, & \frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} &= \frac{n_3}{n_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) получим

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\sqrt{3}\tau_{xz}}{3} \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{(\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_{xz}^2} \right)^{1/2} \\ n_2 &= \frac{\sqrt{3}\tau_{xy}}{3} \left( \frac{\sigma_y - \sigma_z}{(\sigma_y - \sigma)\tau_{xz}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2} \right)^{1/2} \\ n_{31} &= \frac{\sqrt{3}\tau_{yz}}{3} \left( \frac{\sigma_z - \sigma_x}{(\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если условие пластичности для анизотропного тела определено в виде

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.6)$$

и при замене переменных (3.2) может быть преобразовано к виду

$$\varphi(\sigma_{ij}) = k(n_1, n_2, n_3), \quad (3.7)$$

то выражение условия пластичности (3.7) в компонентах напряжений и сведение его к виду (3.6) может быть осуществлено переходом от  $n_i$  к  $\sigma_{ij}$  согласно (3.5).

Отметим, что свойства уравнений анизотропного тела при условии полной пластичности (3.2) рассмотрены в [1].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.  
[2] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969.  
[3] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1956. – 407 с.

*D. D. Ivlev, L. A. Maksimova*

## ABOUT CONDITIONS OF ANISOTROPY OF IDEALLY PLASTIC BODIES

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

*Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch*

**Abstract.** In work conditions of anisotropy of ideally plastic bodies in case of torsion, a flat and spatial problem are considered.

**Keywords:** pressure, ideal plasticity, fluidity limit, torsion, the flat deformation, full plasticity.

*Ивлев Дюис Данилович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** ivlev21@mail.ru

*Максимова Людмила Анатольевна*

*доктор физико-математических наук, Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары*

**e-mail:** maximova\_ng@mail.ru

*Ivlev, Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Maksimova, Ludmila Anatolievna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch, Cheboksary*

Д. Д. Ивлев, Б. Г. Мионов

## О СООТНОШЕНИЯХ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** Рассматриваются соотношения теории трансляционной анизотропии при кручении. Исходные уравнения проинтегрированы, показано, что характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательные напряжения сохраняют постоянное значение.

**Ключевые слова:** напряжение, идеальная пластичность, кручение, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Предельное условие для напряжений в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии запишем в виде

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k^2, \quad k_1, k_2, k - \text{const}, \quad (1)$$

где  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  – касательные напряжения.

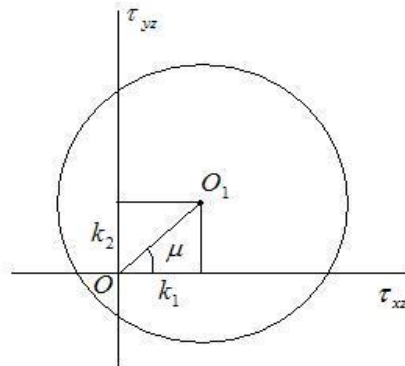


Рис. 1.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине  $k$ . Сохраним обозначения для  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ . Условие (1) примет вид

Поступила 02.07.2010

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = 1. \quad (2)$$

На рис. 1 показана предельная кривая, соответствующая условию (2). Центр окружности (2) смещен в точку  $O_1(k_1, k_2)$  (рис. 1).

Соотношение (2) перепишем в виде

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - 2(k_1\tau_{xz} + k_2\tau_{yz}) - T^2 = 0, \quad (3)$$

где

$$T^2 = 1 - k_1^2 - k_2^2, \quad k_1^2 + k_2^2 < 1, \quad T = \text{const}. \quad (4)$$

Положим

$$\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta, \quad \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \text{tg} \theta. \quad (5)$$

Из (3), (5) найдем

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) - T^2 = 0. \quad (6)$$

В дальнейшем положим

$$\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \frac{k_1}{\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_2}{\rho} = \sin \mu, \quad \text{tg} \mu = \frac{k_2}{k_1}. \quad (7)$$

Согласно (7) соотношение (6) примет вид

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)\rho \cos(\theta - \mu) - T^2 = 0, \quad T^2 = 1 - \rho^2. \quad (8)$$

Из (8) найдем

$$k(\theta)_{1,2} = \rho \cos(\theta - \mu) \pm \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}. \quad (9)$$

В (9) следует ограничиться верхним знаком, таким образом, величина  $k(\theta)$ , характеризующая анизотропию материала, принимает вид

$$k(\theta) = \rho \cos(\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}. \quad (10)$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

и выражений (5) получим

$$(k' \cos \theta - k(\theta) \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k' \sin \theta + k(\theta) \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad k' = \frac{dk}{d\theta}, \quad (12)$$

где согласно (10)

$$k'(\theta) = \frac{dk}{d\theta} = -\rho \sin(\theta - \mu) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\rho^2 \sin 2(\theta - \mu)}{\sqrt{2 - \rho^2(1 - \cos 2(\theta - \mu))}}. \quad (13)$$

Уравнение (12) имеет решение [1]

$$y = \frac{k' \sin \theta + k(\theta) \cos \theta}{k' \cos \theta - k(\theta) \sin \theta} x + C, \quad \theta, C = \text{const}. \quad (14)$$

Рассмотрим контур  $L$  призматического стержня в плоскости поперечного сечения  $xy$  (рис. 2).

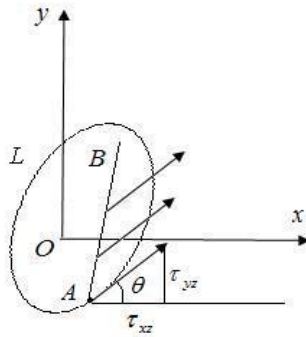


Рис. 2.

Если боковая поверхность стержня свободна от усилий, то результирующее касательное напряжение  $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$  должно быть направлено по касательной к контуру  $L$ . В точке  $A$  контура  $L$  (рис. 2) известны координаты  $x_A, y_A$  для характеристики (13), проходящей через точку  $A$ , и угол  $\theta_A$ , следовательно, из (14) может быть определена константа  $C = C_A$ . Таким образом, характеристика  $AB$  (14), показанная на рис. 2, — прямая, проходящая через точку  $A$ , определена. Вдоль характеристики, согласно (5), (10), касательное напряжение  $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = k(\theta)$  постоянно и полностью определено по величине и направлению. Далее, по процедуре решения, если в этом есть необходимость, строятся линии разрыва напряжений, причем линия разрыва напряжений проходит по биссектрисе между пересекающимися характеристиками.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М. : Наука, 1966. — 231 с.

*D. D. Ivlev, B. G. Mironov*

**ABOUT PARITIES OF THE THEORY TRANSMITTING IDEALLY PLASTIC ANISOTROPIES IN CASE OF FLAT DEFORMATION**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** Parities of the theory of transmitting anisotropy are considered at torsion. The initial equations it are integrated, shown that characteristics are straight lines along which pressure tangents keep constant value.

**Keywords:** pressure, ideal plasticity, torsion, transmitting anisotropy.

*Ивлев Дюис Данилович*

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ivlev21@mail.ru

*Миронов Борис Гурьевич*

доктор физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

*Ivlev, Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Mironov, Boris Guryevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*



Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Мионов

## О СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического  
университета в г. Чебоксары

**Аннотация.** Рассматриваются соотношения теории трансляционной анизотропии в случае плоской деформации. Установлены свойства решений исходных уравнений, определены уравнения для определения характеристик, соотношения вдоль характеристик.

**Ключевые слова:** напряжение, идеальная пластичность, плоская деформация, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Предельное условие для напряжений в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии для случая плоской деформации имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{c_1 - c_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - c_3)^2 = k^2, \quad k, c_1, c_2, c_3 - const, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине  $k$ , сохраним обозначение для компонент напряжений и постоянных  $c_i$ . Условие (1) примет вид

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{c_1 - c_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - c_3)^2 = 1. \quad (2)$$

Соотношения (2) перепишем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 - 2\left(\left(\frac{c_1 - c_2}{2}\right) \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + c_3 \tau_{xy}\right) - P^2 = 0 \quad (3)$$

$$\rho^2 = \left(\frac{c_1 - c_2}{2}\right)^2 + c_3^2 < 1 \quad (4)$$

$$P^2 = 1 - \rho^2.$$

В дальнейшем положим

$$\frac{c_1 - c_2}{2\rho} = \cos \mu, \quad \frac{c_3}{\rho} = \sin \mu. \quad (5)$$

Положим

Поступила 02.07.2010

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma + k(\theta) \cos 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma - k(\theta) \cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= k(\theta) \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{6}$$

Из (3–6) найдем

$$k^2(\theta) - 2k(\theta) [\cos(\theta - \mu)] - P^2 = 0.\tag{7}$$

В дальнейшем следует ограничиться решением уравнения (7)

$$k(\theta) = \rho \cos(2\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(2\theta - \mu)}, \quad \rho, \mu - const.\tag{8}$$

$$k'(\theta) = \frac{dk}{d\theta} = -2\rho \cos(2\theta - \mu) - \frac{\rho^2 \cos(2\theta - \mu)}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(2\theta - \mu)}}.\tag{9}$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.\tag{10}$$

Уравнения (10) при условиях (6) исследованы в [1].

Характеристики системы уравнений (6), (9) имеют вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{k' \sin 2\theta - 2k \cos 2\theta \pm \sqrt{k'^2 + 4k^2}}{k' \cos 2\theta - 2k \sin 2\theta}, \quad k' = \frac{dk}{d\theta}\tag{11}$$

Характеристики (11) взаимно ортогональны. Соотношения вдоль характеристик, обобщающие интегралы Генки, имеют вид

$$\sigma \pm F(\theta) = const, \quad F(\theta) = \int \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\theta.\tag{12}$$

В рассматриваемом случае в соотношениях (11), (12) следует использовать выражения  $k(\theta)$ ,  $k'(\theta)$ , определяемые согласно (8), (9).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

*D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov*

**ABOUT PARITIES OF THE THEORY TRANSMITTING IDEALLY PLASTIC  
ANISOTROPIES IN CASE OF FLAT DEFORMATION**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

*Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch*

**Abstract.** Parities of the theory of transmitting anisotropy in case of flat deformation are considered. Properties of decisions of the initial equations are established, the equations for definition of characteristics, parities along characteristics are defined.

**Keywords:** pressure, ideal plasticity, flat deformation, transmitting anisotropy.

*Ивлев Дюис Данилович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: ivlev21@mail.ru*

*Максимова Людмила Анатольевна*

*доктор физико-математических наук, Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары*

*e-mail: maximova\_ng@mail.ru*

*Миронов Борис Гурьевич*

*доктор физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: strangcheb@mail.ru*

*Ivlev, Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Maksimova, Ludmila Anatolievna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch, Cheboksary*

*Mironov, Boris Guryevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова

## О СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** Рассматриваются соотношения пространственной задачи теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при условии полной пластичности на основе условия пластичности Мизеса.

**Ключевые слова:** напряжение, идеальная пластичность, полная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Условие пластичности Мизеса имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6k_0^2, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  – компоненты напряжения,  $k_0$  – const.

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать отнесенными к величине  $k_0$ .

Обобщенное условие пластичности (1) в случае трансляционной анизотропии запишем в виде

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma_y - (c_1 - c_2))^2 + (\sigma_y - \sigma_z - (c_2 - c_3))^2 + (\sigma_z - \sigma_x - (c_3 - c_1))^2 + \\ &+ 6[(\tau_{xy} - c_4)^2 + (\tau_{yz} - c_5)^2 + (\tau_{xz} - c_6)^2] = 6, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_i$  – const.

Предположим, что имеет место условие полной пластичности [1]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3}k + kn_1^2, & \tau_{xy} &= kn_1n_2, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3}k + kn_2^2, & \tau_{yz} &= kn_2n_3, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3}k + kn_3^2, & \tau_{xz} &= kn_1n_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ ,  $k = k(n_1, n_2, n_3)$ .

Из (2), (3) получим

$$k^2 - 2k \cdot Q - P^2 = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}[(n_1^2 - n_2^2)(c_1 - c_2) + (n_2^2 - n_3^2)(c_2 - c_3) + \\ &+ (n_3^2 - n_1^2)(c_3 - c_1)] + 6(c_4n_1n_2 + c_5n_2n_3 + c_6n_1n_3), \end{aligned} \quad (5)$$

$$P = 3 \left[ 1 - \frac{(c_1 - c_2)^2 + (c_2 - c_3)^2 + (c_3 - c_1)^2}{6} - (c_4^2 + c_5^2 + c_6^2) \right]. \quad (6)$$

Из (4) получим

$$k_{1,2} = Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2}. \quad (7)$$

В выражении (7) в дальнейшем ограничимся верхним знаком.

Согласно (5), (6), (7) величина  $k(n_1, n_2, n_3)$  определена.

Свойства уравнений теории идеальной пластичности при условии полной пластичности для анизотропного тела (3) исследованы в [1].

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

*D. D. Ivlev, L. A. Maksimova*

### ABOUT PARITIES OF THE THEORY OF TRANSMITTING IDEALLY PLASTIC ANISOTROPY AT GENERALIZATION OF A CONDITION OF PLASTICITY OF MISES

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

*Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch*

**Abstract.** Parities of a spatial problem of the theory of transmitting ideally plastic anisotropy under condition of full plasticity on the basis of a condition of plasticity of Mises are considered.

**Keywords:** pressure, the ideal plasticity, full plasticity, transmitting anisotropy.

*Ивлев Дюис Данилович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: ivlev21@mail.ru*

*Максимова Людмила Анатольевна*

*доктор физико-математических наук, филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары*

*e-mail: maximova\_ng@mail.ru*

*Ivlev, Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Maksimova, Ludmila Anatolievna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch, Cheboksary*

## О СДАВЛИВАНИИ АНИЗОТРОПНОГО ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** В работе рассматривается сжатие пластического слоя в случае идеальной трансляционной анизотропии [1].

**Ключевые слова:** напряжение, идеальная пластичность, слой, сжатие, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

1. Условие пластичности в случае идеальной трансляционной анизотропии для случая плоской деформации запишем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_0^2, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения,  $k_0, k_1, k_2, k_3$  – const, определяющие предел текучести и параметры анизотропии.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, все величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к величине предела текучести  $k_0$  и сохраним обозначения напряжений  $\sigma_{ij}$  и констант  $k_1, k_2, k_3$ .

Условие пластичности (1.1) примет вид

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = 1. \quad (2)$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Предположим, что толщина пластического слоя равна  $2h$  (рис. 1).

Величины, имеющие размерность длины, будем считать безразмерными, отнесенными к  $h$ .

При условии пластичности (2) возможны два предположения о характере изменения касательного напряжения  $\tau_{xy}$  по толщине слоя:

$$1. \tau_{xy} = y \quad (4)$$

$$2. \tau_{xy} = y + k_3 \quad (5)$$

В случае (4) согласно (3) найдем

$$\sigma_x = -x + f_1(y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x). \quad (6)$$

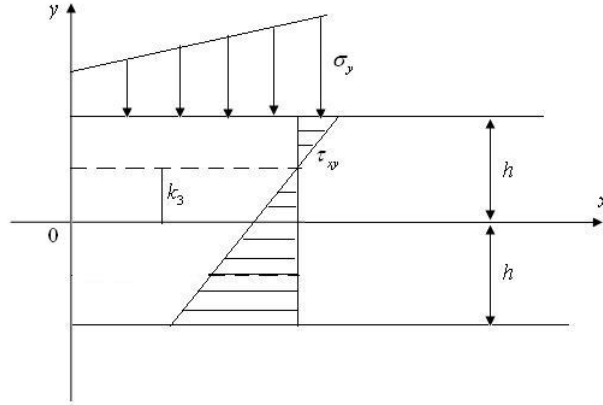


Рис. 1.

Из (2), (4), (6) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -x \pm 2\sqrt{1 - (y - k_3)^2} + (k_1 - k_2) + C_1, \quad C_1 - \text{const}, \\ \sigma_y &= -x + C_1, \quad \tau_{xy} = y\end{aligned}\quad (7)$$

Постоянная  $C_1$  может быть определена, например, из условия отсутствия суммарных усилий вдоль оси  $x$  при  $x = 0$  по свободному краю полосы

$$\int_{-1}^1 \sigma_x dy = 0. \quad (8)$$

Имеет место

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin x. \quad (9)$$

Согласно (9) определенный интеграл (8) не берется, т. к. одно из подкоренных выражений является отрицательным. Следовательно, предложенное (4), справедливое для изотропной полосы, не имеет места для случая трансляционной анизотропии.

В случае (5), согласно (3), найдем

$$\sigma_x = -x + f_2(y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x). \quad (10)$$

Из (2), (5), (10) получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -x \pm 2\sqrt{1 - y^2} + (k_1 - k_2) + C_2, \quad C_2 - \text{const}, \\ \sigma_y &= -x + C_2, \quad \tau_{xy} = y + k_3.\end{aligned}\quad (11)$$

Согласно (8), (9), (11) получим

$$C_2 = \mp \frac{\pi}{2} + (k_2 - k_1). \quad (12)$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -x \pm 2\sqrt{1-y^2} \mp \frac{\pi}{2}, \\ \sigma_y &= -x \mp \frac{\pi}{2} - (k_1 - k_2), \quad \tau_{xy} = y + k_3.\end{aligned}\tag{13}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С.580–582.

*T. I. Ribakova*

#### ABOUT SQUEEZING OF ANISOTROPIC IDEALLYPLASTIC LAYER

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work compression of a plastic layer in case of ideal transmitting anisotropy [1] is considered.

**Keywords:** pressure, ideal plasticity, layer, compression, transmitting anisotropy.

*Рыбакова Татьяна Ивановна*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** rib2112@mail.ru

*Ribakova, Tatyana Ivanovna*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*



Ю. Н. Радаев, Р. А. Ревинский, М. В. Таранова

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ТЕПЛОПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКОЙ

*Самарский государственный университет,*

*Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского,*

*Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского*

**Аннотация.** Работа посвящена изучению распределения на комплексной плоскости волновых чисел обобщенных связанных термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе. Предполагается, что стенка волновода свободна от нагрузок и является проницаемой для тепла. Исследование проводится, следуя теории связанной обобщенной GNIII-термоупругости, согласованной с основными принципами термодинамики. Данная теория сочетает оба известных типа распространения тепла: термодиффузионный и волновой. Предельными случаями обобщенной термоупругости типа III являются классическая термоупругость (GNI/СТЕ) и гиперболическая термоупругость (GNII), которая может быть сформулирована в терминах классической теории поля [1-3]. Дифференциальные уравнения поля в этом случае принадлежат гиперболическому аналитическому типу. Методом разделения переменных найдено замкнутое решение уравнений связанной GNIII-термоупругости, которое удовлетворяет необходимым краевым условиям на стенке волновода, в том числе и условию конвективного теплообмена с окружающей средой. Проведен численный анализ частотного уравнения. Описана схема локализации корней частотного уравнения и найдены волновые числа связанных термоупругих волн, в частности, первого и седьмого азимутального порядка. Приведены результаты численного анализа в случае связанной волны достаточно высокого азимутального порядка  $n = 70$ .

**Ключевые слова:** термоупругость, GNIII-термоупругость, частотное уравнение, волновод, волновое число, форма волны, азимутальный порядок, теплообмен.

УДК: 539.374

### 1. Вводные замечания и основные уравнения.

В начале 90-х гг. XX в. Грином и Нахди (A.E. Green, P.M. Naghdi) [4], [5] была разработана теория обобщенной термоупругости (GN-theory). Предложенная теория сочетает в себе как свойства классической термоупругости СТЕ, выстроенной согласно закону теплопроводности Фурье, так и свойства недиссипативной термоупругости, предполагающей отсутствие производства энтропии и волновой характер распространения теплового сигнала. GN-теория была сформулирована в трех различных термодинамически корректных вариантах: GNI, GNII и

---

Поступила 01.08.2010

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00184-а “Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости”)

GNIII. Классическая связанная термоупругость (GNI/CTE) и гиперболическая термоупругость (GNII) являются предельными случаями наиболее общего из трех вариантов GNIII.

Целью настоящей работы является изучение распространения обобщенных связанных GNIII-термоупругих волн вдоль цилиндрического волновода со свободной теплопроницаемой стенкой. Одной из задач исследования является определение влияния теплообмена через стенку цилиндрического волновода на величину волновых чисел распространяющихся в волноводе нормальных волн. В рассматриваемой линейной постановке принимается определяющий закон Дюгамеля—Неймана

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha\theta)\mathbf{I}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор малых деформаций;  $\mathbf{I}$  — единичный тензор;  $\lambda$ ,  $\mu$  — упругие постоянные Ламе;  $\alpha$  — термомеханическая постоянная ( $\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$ );  $\beta^*$  — коэффициент объемного теплового расширения;  $\theta$  — превышение температуры над отсчетной (равновесной) температурой  $\theta_0$ . (Следует отметить, что при температуре, равной  $\theta_0$ , отсутствуют деформации и напряжения.)

Линейная теория GNIII-термоупругости характеризуется тем, что вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  линейно зависит как от градиента температуры, так и от градиента температурного смещения

$$\mathbf{h} = -\Lambda_*\nabla\theta - \Lambda\nabla\vartheta, \quad (2)$$

где  $\vartheta$  ( $\dot{\vartheta} = \dot{\theta}$ ) — температурное смещение (thermal displacement),  $\Lambda_*$  — коэффициент теплопроводности (thermal conductivity),  $\Lambda$  — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate),  $\nabla$  — трехмерный оператор Гамильтона.

Условие конвективного теплообмена с окружающей средой через поверхность с единичной нормалью  $\mathbf{n}$  в линейном приближении имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} = \sigma(\theta - \theta_{\text{env}}), \quad (3)$$

где  $\sigma$  — коэффициент теплообмена,  $\theta_{\text{env}}$  — температура окружающей среды. В дальнейшем будем полагать, что температура окружающей среды совпадает с отсчетной  $\theta_{\text{env}} = \theta_0$ .

Заключая введение, приведем линейные связанные уравнения движения и теплопроводности GNIII-термоупругости в той форме, в которой они используются в настоящей работе (см. также [1]):

$$\begin{cases} \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda\Delta\theta + \Lambda_*\Delta\vartheta - \kappa\ddot{\theta} - \alpha\theta_0\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\Delta$  — трехмерный оператор Лапласа,  $\kappa$  — (specific heat) теплоемкость (на единицу объема) при нулевой постоянной деформации.

## 2. Разделение пространственных переменных в уравнениях GNIII-теории.

Будем рассматривать гармоническую зависимость перемещений и температуры от времени:  $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{-i\omega t}$ ,  $\theta = \Theta e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — циклическая частота;  $\mathbf{U}$ ,  $\Theta$  — комплексные амплитуды.

Представим вектор комплексной амплитуды  $\mathbf{U}$  в виде разложения Гельмгольца

$$\mathbf{U} = \nabla\Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}, \quad (5)$$

где  $\Phi$  — скалярный потенциал,  $\boldsymbol{\Psi}$  — векторный потенциал. При этом необходимо учесть условие калибровки векторного потенциала

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0. \quad (6)$$

Потенциал  $\boldsymbol{\Psi}$  удовлетворяет независимому уравнению, векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\boldsymbol{\Psi} + k_{\perp}^2\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где  $k_{\perp}^2$  — квадрат волнового числа чисто упругой поперечной волны [1].

В цилиндрической системе координат в векторном уравнении (7) удается разделить пространственные переменные.

Окончательно компоненты  $\Psi_r$ ,  $\Psi_\varphi$ ,  $\Psi_z$  принимают вид:

$$\begin{aligned}\Psi_r(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_\varphi(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_z(r, \varphi, z) &= C_5 I_n(q_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},\end{aligned}\quad (8)$$

где  $I_n(\xi)$  — модифицированная функция Бесселя целого порядка  $n$ ;  $q_2^2 = k^2 - k_\perp^2$ ;  $C_3, C_4, C_5$  — произвольные постоянные.

Скалярный потенциал  $\Phi$  и комплексная амплитуда  $\Theta$  связываются потенциалом  $\Omega$  (см. [1]) согласно

$$\Phi = a\Omega, \quad \Theta = b\Omega, \quad (9)$$

при этом постоянные  $a$  и  $b$  могут принимать в точности два различных значения

$$\begin{aligned}a_j &= p_j^2 - g^2, \quad b_j = h \frac{\omega\alpha}{\Lambda_*} \gamma_j^2, \quad p_j^2 = k^2 - \gamma_j^2, \quad g^2 = k^2 - hh_2^2 h_3^{-2} k_\parallel^2, \\ h &= h_3^2 \frac{1 + ih_3^2}{1 + h_3^4}, \quad h_2^2 = \frac{c_l^2}{l^2}, \quad h_3^2 = \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda}, \quad j = 1, 2,\end{aligned}$$

где постоянные  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) имеют смысл волновых чисел и определяются в дальнейшем,  $k_\parallel^2$  — квадрат волнового числа чисто упругой продольной волны. Потенциал  $\Omega$  удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Omega + \gamma^2\Omega = 0 \quad (\gamma = \gamma_1, \gamma_2), \quad (10)$$

где (см. [1]) квадраты волновых чисел плоской гармонической волны вычисляются в виде

$$\frac{2\gamma^2}{k_\parallel^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + \sqrt{(h_1^2 - ih_3^2)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)}}{ih_3^2 - 1}, \quad h_1^2 = 1 + h_2^2 + \frac{\alpha^2}{\rho\Lambda}.$$

Следует отметить, что квадратный корень является двузначным, и поэтому из приведенной выше формулы, можно извлечь выражения для  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Скалярный потенциал  $\Phi$  и комплексная амплитуда  $\Theta$  получаются в форме

$$\begin{aligned}\Phi &= (C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Theta &= h \frac{\omega\alpha}{\Lambda_*} (C_1 \gamma_1^2 I_n(p_1 r) + C_2 \gamma_2^2 I_n(p_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},\end{aligned}\quad (11)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

### 3. Граничные условия на боковой поверхности волновода и частотное уравнение.

В рассматриваемой задаче предполагается, что боковая поверхность волновода свободна от нагрузок, с окружающей средой через стенку волновода происходит конвективный теплообмен

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=R} = 0, \quad \left( \Lambda \frac{\partial\theta}{\partial r} + \Lambda_* \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial r} + \sigma\dot{\theta} \right) \Big|_{r=R} = 0, \quad (12)$$

где  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}$  — физические компоненты тензора напряжений,  $\sigma$  — коэффициент теплообмена, отнесенный к отсчетной температуре  $\theta_0$ .

Далее, удовлетворяя граничным условиям и условию конвективного теплообмена (12), а также калибровочному условию (6), приходим к линейной однородной алгебраической системе уравнений относительно пяти постоянных  $C_j$ :

$$D_{ij}C_j = 0 \quad (i, j = \overline{1, 5}). \quad (13)$$

Приравнивая нулю определитель системы (13), который мы в дальнейшем будем обозначать через  $D$ , получаем частотное уравнение  $D = 0$ . В случае теплоизолированного цилиндрического волновода элементы частотного определителя приведены в [1], [6]. В рассматриваемой задаче с конвективным теплообменом через боковую поверхность волновода элементы частотного определителя  $D_{41}$  и  $D_{42}$  будут отличаться от приведенных в указанных работах и принимают вид

$$\begin{aligned} D_{41} &= (k^2 - p_1^2) (nI_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1)) + h_7 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1), \\ D_{42} &= (k^2 - p_2^2) (nI_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2)) + h_7 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2), \end{aligned}$$

где введены следующие безразмерные величины:  $h_5^2 = h_6^2 \tilde{k}_\parallel$ ,  $h_6^2 = \frac{\sigma c_l}{\Lambda}$ ,  $h_7 = \frac{ih_5^2}{1 + ih_3^2}$ ,  $\tilde{k} = kR$ ,  $\tilde{k}_\parallel = k_\parallel R$ ,  $\tilde{p}_j = p_j R$  и символ волны, указывающий на отсутствие физической размерности, для краткости опущен.

#### 4. Визуальная локализация корней частотного уравнения.

Переходя к анализу частотного уравнения, отметим, что в рассматриваемой задаче всего имеется пять независимых безразмерных материальных постоянных, не зависящих от частоты:  $h_0$ ,  $h_2$ ,  $h_4$ ,  $h_6$ ,  $\tilde{k}_\perp/\tilde{k}_\parallel = c_l/c_t$ . Изменение частоты будет определяться варьированием еще одного (шестого) безразмерного параметра  $\tilde{k}_\parallel$ .

Для отыскания решений частотного уравнения и анализа полученных данных применялась система символьных вычислений Mathematica 6.0. С ее помощью численно исследовалось уравнение  $D = 0$  в случае различных азимутальных чисел  $n$  и осуществлялся поиск безразмерных волновых чисел  $\tilde{k} = kR$  при заданных значениях пяти независимых безразмерных определяющих постоянных и различных значениях волнового числа чисто упругой продольной волны  $\tilde{k}_\parallel$ ; проводилась визуальная локализация на комплексной плоскости  $(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  корней частотного уравнения  $D = 0$  и были построены соответствующие графические образы, иллюстрирующие процесс локализации волновых чисел.

Далее остановимся на процедуре визуальной локализации корней частотного уравнения. Для определенности выберем один из корней частотного уравнения  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$ . Этот корень вычислялся для волны первого азимутального порядка при следующих значениях безразмерных определяющих постоянных:  $h_0 = \sqrt{\Lambda_* c_l / (\Lambda R)} = 0.1$ ,  $h_2 = c_l/l = 100.0$ ,  $h_4 = \alpha \sqrt{R / (\rho \Lambda_* c_l)} = 0.01$ ,  $h_6 = \sqrt{\sigma c_l / \Lambda} = 1.1$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ . Для безразмерной постоянной  $\tilde{k}_\parallel$  принималось значение 0.1.

Сначала построим кривые нулевого уровня значений  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ . Линии уровня  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  выстраиваются совместно с помощью стандартных процедур Mathematica 6.0 по четырёмстам пятидесяти точкам. На рис. 1, 2 совместно представлены нулевые линии уровня  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  в окрестности волнового числа  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$ . Рис. 2 дает наиболее детальную картину. Точки, в которых пересекаются указанные линии уровня, и являются корнями частотного уравнения  $D = 0$ . После чего, собственно говоря, процесс визуальной локализации волнового числа  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$  можно считать завершённым.

Остановимся также на локализации волновых чисел связанной термоупругой волны седьмого азимутального порядка. Численно можно определить следующие два корня частотного уравнения:  $\tilde{k} = 0.358136 + 0.139953i$ ,  $\tilde{k} = -0.330000113 + 0.149999995i$ . По-прежнему задаются следующие значения безразмерных определяющих постоянных:  $h_0 = \sqrt{\Lambda_* c_l / (\Lambda R)} = 0.1$ ,  $h_2 = c_l/l = 100.0$ ,  $h_4 = \alpha \sqrt{R / (\rho \Lambda_* c_l)} = 0.01$ ,  $h_6 = \sqrt{\sigma c_l / \Lambda} = 1.1$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ . Для безразмерной постоянной  $\tilde{k}_\parallel$  принято значение 0.1. Совместное изображение нулевых линий уровня вещественной и мнимой части частотного определителя  $D$  в зоне локализации указанных выше корней частотного уравнения представлено на рис. 3. На рис. 4 приводится более детальное изображение этой же зоны.

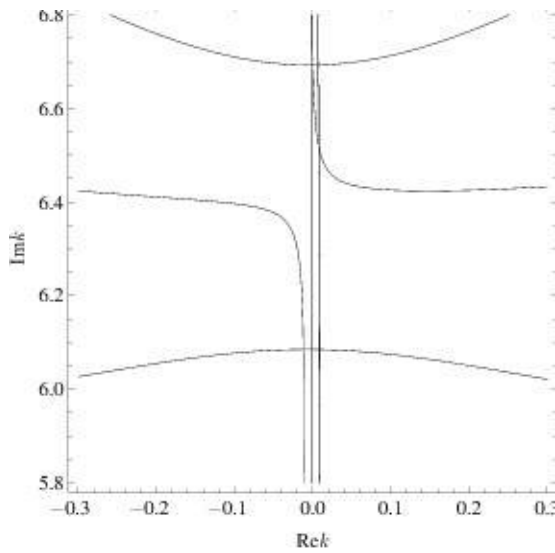


Рис. 1. Нулевые линии уровня вещественной и мнимой части частотного определителя  $D$  в окрестности волнового числа  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$ .

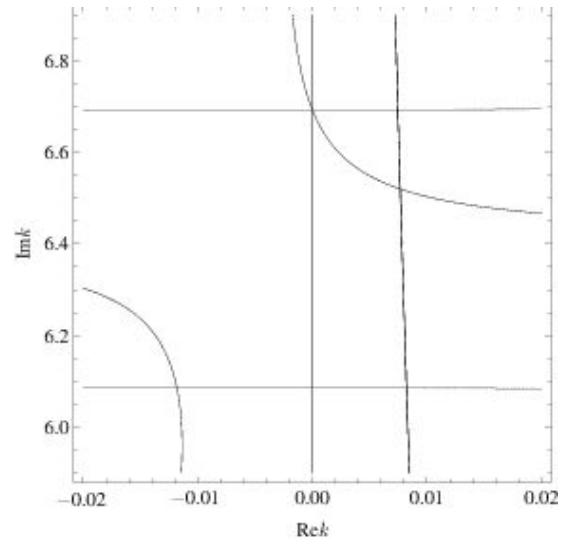


Рис. 2. Нулевые линии уровня вещественной и мнимой части частотного определителя  $D$  в окрестности волнового числа  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$ . Более детальное изображение.

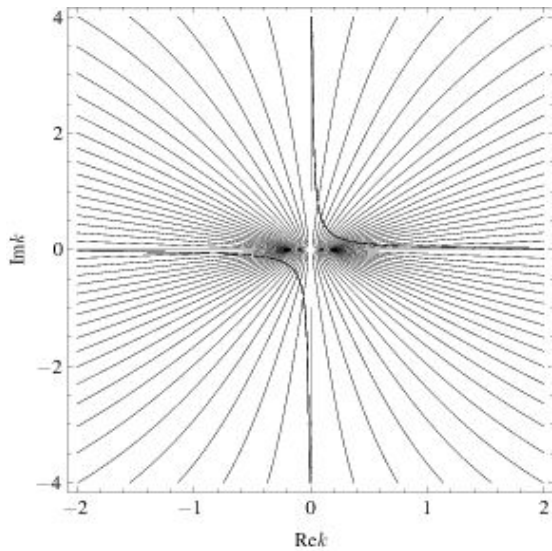


Рис. 3. Нулевые линии уровня вещественной и мнимой части частотного определителя  $D$  в зоне локализации волновых чисел  $\tilde{k} = 0.358136 + 0.139953i$ ,  $\tilde{k} = -0.330000113 + 0.149999995i$  волны седьмого азимутального порядка  $n = 7$ .

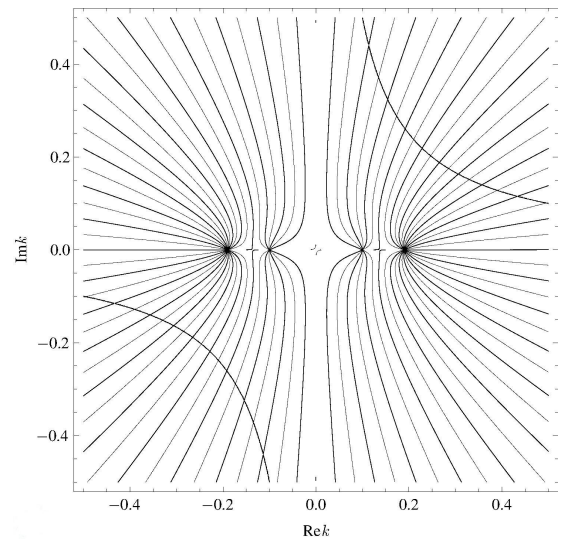


Рис. 4. Нулевые линии уровня вещественной и мнимой части частотного определителя  $D$  в зоне локализации волновых чисел  $\tilde{k} = 0.358136 + 0.139953i$ ,  $\tilde{k} = -0.330000113 + 0.149999995i$  волны седьмого азимутального порядка. Более детальное изображение.

С ростом азимутального числа  $n$  связанной термоупругой волны процесс локализации волновых чисел существенно усложняется. Это обстоятельство прекрасно иллюстрируется картиной (см. рис. 5) совместно построенных изолиний  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  для волны достаточно высокого азимутального порядка  $n = 70$ . Указанные изолинии в выбранном масштабе представления графических данных практически сплошь заполняют плоскость  $(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ , не проникая, однако, внутрь четко обозначенной на рис. 5 “окружности”, действительная геометрия которой оказывается весьма сложной. Графические построения проводились при следующих значениях безразмерных определяющих постоянных:  $h_0 = \sqrt{\Lambda_* c_l / (\Lambda R)} = 0.1$ ,  $h_2 = c_l / l = 100.0$ ,  $h_4 = \alpha \sqrt{R / (\rho \Lambda_* c_l)} = 0.01$ ,  $h_6 = \sqrt{\sigma c_l / \Lambda} = 2.0$ ,  $c_l / c_t = 1.9$ . Для безразмерной постоянной  $\tilde{k}_{||}$  по-прежнему принято значение 0.1.

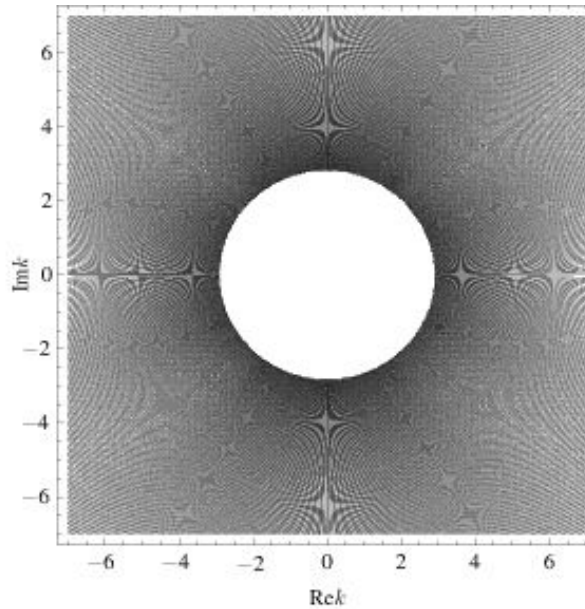


Рис. 5. Нулевые линии уровня вещественной и мнимой части частотного определителя  $D$  на комплексной плоскости  $(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ . Волна азимутального порядка  $n = 70$ . Значения определяющих безразмерных постоянных приняты равными  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $h_6 = 2.0$ ,  $c_l / c_t = 1.9$ ,  $\tilde{k}_{||} = 0.1$ .

Полученные численные и графические данные позволяют также заключить, что при фиксированной частоте в волноводе не могут распространяться волны, которым соответствуют волновые числа, имеющие модуль, меньший некоторого порогового значения  $\lambda^*$ :

$$|\tilde{k}| \leq \lambda^*.$$

Это значение  $\lambda^* = 2.9342$ , оцениваемое численно, представляет собой характерный радиус “окружности” (см. рис. 5), внутри которой нет линий нулевого уровня вещественной и мнимой части частотного определителя.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковалев, В. А. Волновые задачи теории поля и термомеханика / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. – 328 с.
- [2] Ковалев, В. А. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 156 с.
- [3] Ковалев, В. А. Волновые задачи теории поля и термомеханика / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев // Вторая международная конференция “Математическая физика и ее приложения” : материалы межд. конференции (под ред. чл.-корр. РАН И.В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. Ю.Н. Радаева). – Самара : Изд-во “Книга”, 2010. – С. 165–166.
- [4] Green, A. E. On undamped heat waves in an elastic solid / A. E. Green, P. M. Naghdi // J. Thermal Stresses. – 1992. – Vol. 15. – P. 253–264.
- [5] Green, A. E. Thermoelasticity without energy dissipation / A. E. Green, P. M. Naghdi // J. Elasticity. – 1993. – Vol. 31. – P. 189–208.
- [6] Ковалев, В. А. Распространение связанных GNIII-термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). – С. 207–255.

*Y. N. Radayev, R. A. Revinsky, M. V. Taranova*

**LOCALIZATION OF WAVENUMBERS OF THERMOELASTIC WAVES IN A CYLINDRICAL WAVEGUIDE UNDER SIDEWALL HEAT INTERCHANGING**

*Samara State University*

*N. Chernyshevsky Saratov State University*

*N. Chernyshevsky Saratov State University*

**Abstract.** The article is devoted to the study of cross-coupled type-III generalized thermoelastic waves propagation via a long cylindrical waveguide. The sidewall of the waveguide is assumed free from tractions and permeable to heat. The analysis is carried out in the framework of coupled generalized theory of GNIII-thermoelasticity consistent with the basic thermodynamic principles. The theory combines both possible mechanisms of heat transfer: thermodiffusion and wave. Type-III generalized thermoelasticity includes classical thermoelasticity (GNI/CTE) and the theory of hyperbolic thermoelasticity (GNII) as limiting cases. The GNII-theory can be formulated as a field theory [1-3] and differential field equations are of hyperbolic analytical type. Closed solution of the coupled GNIII-thermoelasticity equations satisfying the required boundary conditions on the surface of waveguide including convective heat interchanging condition is obtained. For a given azimuthal number a numerical analysis of frequency equation is given. A scheme of frequency equation roots localization is proposed and wavenumbers of the coupled thermoelastic waves of the first and seventh azimuthal numbers are computed. A numerical study of the coupled thermoelastic waves of the 70th azimuthal number is also discussed.

**Keywords:** thermoelasticity, type-III thermoelasticity, frequency equation, waveguide, wavenumber, wave mode, azimuthal number, heat interchanging.

*Радаев Юрий Николаевич*

доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет,  
г. Самара

e-mail: radayev@ssu.samara.ru

*Ревинский Роман Александрович*

соискатель кафедры теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный универ-  
ситет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов

e-mail: rvskra@gmail.com

*Таранова Маргарита Владимировна*

соискатель кафедры теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный универ-  
ситет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов

e-mail: taranova.mv@gmail.com

*Radayev, Yuri Nickolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Samara State University, Samara*

*Revinsky, Roman Alexandrovich*

*Postgraduate Student of Dept. of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics,  
N. Chernyshevsky Saratov State University, Saratov*

*Taranova, Margarita Vladimirovna*

*Postgraduate Student of Dept. of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics,  
N. Chernyshevsky Saratov State University, Saratov*



Т. В. Митрофанова

## ОБ УСЛОВИЯХ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** В работе, следуя идеям [1], рассматриваются различные условия трансляционной анизотропии при кручении тел. Предполагается, что боковая поверхность свободна от усилий. Получены уравнения для определения характеристик. Показано, что характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательные напряжения сохраняют постоянное значение.

**Ключевые слова:** напряжение, кручение, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия, характеристики.

УДК: 539.374

1. Предельное условие в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии запишем в виде

$$(\tau_{xz} - c_1\tau - k_1)^2 + (\tau_{yz} - c_2\tau - k_2)^2 = 1, \quad k_1, k_2, c_1, c_2 - \text{const}, \quad (1)$$

где  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  – компоненты касательных напряжений,  $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$ .

Положим

$$\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta, \quad \tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = k(\theta). \quad (2)$$

Соотношение (1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) + \tau^2 (c_1^2 + c_2^2) + k_1^2 + k_2^2 - \\ & - 2\tau (c_1 k_1 + c_2 k_2) - 2\tau (c_1 \tau_{xz} + c_2 \tau_{yz}) - 2(k_1 \tau_{xz} + k_2 \tau_{yz}) = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2), (3) найдем

$$\begin{aligned} & k^2 [1 + (c_1^2 + c_2^2) - 2(c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta)] - \\ & - 2k [(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) - (c_1 k_1 + c_2 k_2)] - [1 - (k_1^2 + k_2^2)] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем положим

$$\begin{aligned} \sqrt{k_1^2 + k_2^2} &= \rho_1, \quad \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \cos \mu, \quad \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \sin \mu, \quad \text{tg } \mu = \frac{k_2}{k_1}, \\ \sqrt{c_1^2 + c_2^2} &= \rho_2, \quad \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \nu, \quad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin \nu, \quad \text{tg } \nu = \frac{c_2}{c_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно (5) соотношение (4) примет вид

$$\begin{aligned} & k^2 [1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 (\cos \nu \cos \theta + \sin \nu \sin \theta)] - \\ & - 2k [\rho_1 (\cos \mu \cos \theta + \sin \mu \sin \theta) - \rho_1 \rho_2 (\cos \nu \cos \mu + \sin \nu \sin \mu)] - [1 - \rho_1^2] = 0 \end{aligned}$$

или

Поступила 11.05.2010

$$k^2 [1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(\theta - \nu)] - 2k [\rho_1 \cos(\theta - \mu) - \rho_1 \rho_2 \cos(\nu - \mu)] - [1 - \rho_1^2] = 0. \quad (6)$$

Дискриминант уравнения (6):

$$D_1 = \rho_1^2 \cos^2(\theta - \mu) + \rho_1^2 \rho_2 \cos(\theta - \nu) - \rho_1^2 \rho_2 \cos(\theta + \nu - 2\mu) + \rho_1^2 \rho_2^2 \cos^2(\nu - \mu) + 1 - \rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_1^2 \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(\theta - \nu). \quad (7)$$

Из (6) и (7) найдем

$$k(\theta) = \frac{\rho_1 \cos(\theta - \mu) - \rho_1 \rho_2 \cos(\nu - \mu) \pm \sqrt{D_1}}{1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(\theta - \nu)}. \quad (8)$$

В (8) следует ограничиться верхним знаком, таким образом, величина  $k(\theta)$ , характеризующая анизотропию материала, принимает вид

$$k(\theta) = \frac{\rho_1 \cos(\theta - \mu) - \rho_1 \rho_2 \cos(\nu - \mu) + \sqrt{D_1}}{1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(\theta - \nu)}. \quad (9)$$

Будем иметь

$$\frac{dk}{d\theta} = k' = \frac{(-\rho_1 \sin(\theta - \mu) + (\sqrt{D_1})') - 2\rho_2 \sin(\theta - \nu) (\rho_1 \cos(\theta - \mu) - T + \sqrt{D_1})}{(1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(\theta - \nu))^2}, \quad (10)$$

где

$$\frac{d\sqrt{D_1}}{d\theta} = (\sqrt{D_1})' = \frac{-\rho_1^2 \sin 2(\theta - \mu) + 2\rho_1^2 \rho_2 \sin(\nu - \mu) \cos(\theta - \mu) + 2\rho_2 \sin(\theta - \nu)}{2\sqrt{D_1}},$$

$$T = \rho_1 \rho_2 \cos(\nu - \mu).$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

и выражений (2) получим

$$\left( \frac{dk}{d\theta} \cos \theta - k(\theta) \sin \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left( \frac{dk}{d\theta} \sin \theta + k(\theta) \cos \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Из (12) следует [2]

$$y = \frac{\frac{dk}{d\theta} \cdot \sin \theta + k(\theta) \cos \theta}{\frac{dk}{d\theta} \cdot \cos \theta - k(\theta) \sin \theta} x + C, \quad C, \theta = \text{const}. \quad (13)$$

Согласно (13) характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательные напряжения (2) сохраняют постоянное значение.

Предположим, что  $L$  – внешний контур стержня (рис. 1). Если боковая поверхность стержня свободна от напряжений, касательное напряжение  $\tau$  направлено по касательной к контуру  $L$ . Согласно (2)

$$\text{tg } \theta_0 = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}.$$

Угол  $\theta_0$  известен, следовательно, в точках  $x_0, y_0$  согласно (2), (9), (10), (13) определены величины  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  и характеристика, вдоль которой касательное напряжение сохраняет свое значение.

**2.** Предельное условие в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии запишем в виде

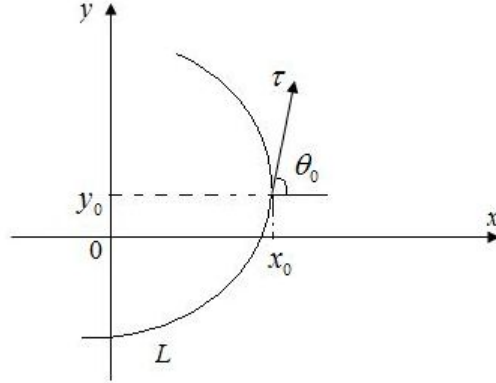


Рис. 1.

$$[\tau_{xz} - f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) - k_1]^2 + [\tau_{yz} - f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) - k_2]^2 = 1, \quad (14)$$

где  $k_1, k_2, c_1, c_2 - \text{const}$ ,  $f$  – однородная функция:  $f(\lambda\tau_{xz}, \lambda\tau_{yz}) = \lambda f(\tau_{xz}, \tau_{yz})$ .

Положим

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= k(\theta) \cos \theta, \\ \tau_{yz} &= k(\theta) \sin \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношение (14) перепишем в виде

$$[k \cos \theta - kf(\cos \theta, \sin \theta) - k_1]^2 + [k \sin \theta - kf(\cos \theta, \sin \theta) - k_2]^2 = 1. \quad (16)$$

Из (15), (16) найдем

$$\begin{aligned} &k^2 [(\cos \theta - f)^2 + (\sin \theta - f)^2] - \\ &- 2k[k_1(\cos \theta - f) + k_2(\sin \theta - f)] - [1 - (k_1^2 + k_2^2)] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В дальнейшем положим

$$\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \frac{k_1}{\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_2}{\rho} = \sin \mu, \quad \text{tg } \mu = \frac{k_2}{k_1}. \quad (18)$$

Согласно (18) соотношение (17) примет вид

$$\begin{aligned} &k^2 [(\cos \theta - f)^2 + (\sin \theta - f)^2] - \\ &- 2k\rho [\cos \mu (\cos \theta - f) + \sin \mu (\sin \theta - f)] - [1 - \rho^2] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Дискриминант уравнения (19):

$$\begin{aligned} D_2 &= \rho^2 [\cos^2(\theta - \mu) + 2\sqrt{2}f \cos(\theta - \mu) \cos(\frac{\pi}{4} - \mu) + \\ &+ 2f^2 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \mu) - 1 + 2\sqrt{2}f \cos(\frac{\pi}{4} - \theta) - 2f^2] + \\ &+ 1 - 2\sqrt{2}f \cos(\frac{\pi}{4} - \theta) - 2f^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) и (20) найдем

$$k(\theta) = \frac{\rho [\cos(\theta - \mu) - f \cos(\frac{\pi}{4} - \mu)] \pm \sqrt{D_2}}{1 + 2f^2 - \sqrt{2}f \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}. \quad (21)$$

В (21) следует ограничиться верхним знаком, таким образом, величина  $k(\theta)$ , характеризующая анизотропию материала, принимает вид

$$k(\theta) = \frac{\rho [\cos(\theta - \mu) - f \cos(\frac{\pi}{4} - \mu)] + \sqrt{D_2}}{1 + 2f^2 - \sqrt{2}f \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}. \quad (22)$$

Получено

$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{D_2}}{d\theta} = (\sqrt{D_2})' = & \frac{\rho^2 [-\sin 2(\theta - \mu) - 2\sqrt{2}f \cos(\frac{\pi}{4} - \mu) \sin(\theta - \mu) + 2\sqrt{2}f' \cos(\theta - \mu) \cos(\frac{\pi}{4} - \mu)]}{2\sqrt{D_2}} + \\ & + \frac{\rho^2 [4ff' \cos(\frac{\pi}{4} - \mu) + 2\sqrt{2}f \sin(\frac{\pi}{4} - \theta) + 2\sqrt{2}f' \cos(\frac{\pi}{4} - \theta) - 4ff']}{2\sqrt{D_2}} - \\ & - \frac{2\sqrt{2}f \sin(\frac{\pi}{4} - \theta) - 2\sqrt{2}f' \cos(\frac{\pi}{4} - \theta) - 4ff'}{2\sqrt{D_2}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dk}{d\theta} = & \frac{[-\rho \sin(\theta - \mu) + (\sqrt{D_2})'] \cdot [1 + 2f^2 - \sqrt{2}f \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)]}{[1 + 2f^2 - \sqrt{2}f \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)]^2} - \\ & - \frac{[\rho(\cos(\theta - \mu) - f \cos(\frac{\pi}{4} - \mu)) + \sqrt{D_2}] \cdot [4ff' - \sqrt{2}f \sin(\frac{\pi}{4} - \theta) - \sqrt{2}f' \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)]}{[1 + 2f^2 - \sqrt{2}f \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)]^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

и выражений (15) получим

$$\left( \frac{dk}{d\theta} \cos \theta - k(\theta) \sin \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left( \frac{dk}{d\theta} \sin \theta + k(\theta) \cos \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \quad (25)$$

Уравнение характеристик имеет вид

$$y = \frac{\frac{dk}{d\theta} \cdot \sin \theta + k(\theta) \cos \theta}{\frac{dk}{d\theta} \cdot \cos \theta - k(\theta) \sin \theta} x + C, \quad \theta, C - \text{const}. \quad (26)$$

Согласно (26) характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательные напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  сохраняют постоянное значение.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2(8). – С. 576–579.

[2] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

T. V. Mitrofanova

**ABOUT CONDITIONS OF TRANSMITTING ANISOTROPY OF  
IDEALLYPLASTIC BODIES AT TORSION**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work the various conditions of transmitting anisotropy are considered at bodies' torsion. It is supposed that lateral surface is free from efforts. The equations for characteristics' definition are received. It is shown that the characteristics are straight lines along which pressure tangents keep constant value.

**Keywords:** transmitting anisotropy, torsion, characteristics, ideal plasticity, pressure.

*Митрофанова Татьяна Валерьевна*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: mitrofanova\_tv@mail.ru*

*Mitrofanova Tatyana Valeryevna*

*Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

## О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** В работе рассматривается предельное состояние анизотропных стержней при кручении. Показано, что грани поверхностей напряжений, примыкающие к полигональному контуру стержня, являются поверхностями постоянного ската со своим углом ската. Показано также, что тангенс угла наклона частей поверхности напряжения численно равен касательному напряжению в соответствующей части стержня. Линии разрыва напряжений совпадают с проекциями ребер поверхности напряжения на плоскость поперечного сечения стержня.

**Ключевые слова:** кручение, касательное напряжение, анизотропия, поверхность напряжений, скат, линии разрыва напряжений, предельное состояние.

УДК: 539.374

1. Условие пластичности для анизотропного идеальнопластического материала при кручении может быть записано в виде [1]

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2(\psi), \quad (1)$$

где

$$\tau_{xz} = k(\psi) \cos \psi, \quad \tau_{yz} = k(\psi) \sin \psi, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}. \quad (2)$$

В дальнейшем будем предполагать компоненты  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $k(\psi)$  безразмерными величинами, отнесенными к величине  $k_0 = k(0)$ .

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Уравнениям (3) удовлетворим, полагая

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (4)$$

Из (1), (4) будем иметь

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = k^2(\psi). \quad (5)$$

В случае кручения стержня полигонального сечения (рис. 1) величина  $\psi$  в областях, примыкающих к контуру призматического стержня, сохраняет постоянное значение [1]

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 - \text{const}. \quad (6)$$

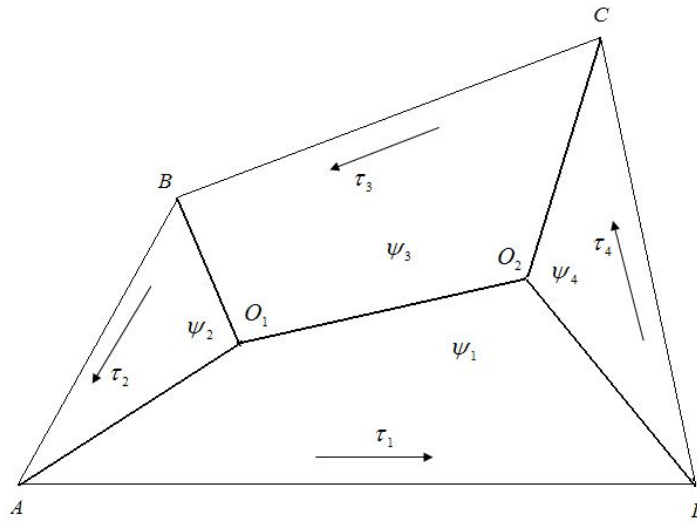


Рис. 1.

Следовательно, согласно (5) поверхность напряжений

$$z = U(x, y) \quad (7)$$

является поверхностью постоянного ската со своим углом ската для каждой из областей, указанных на рис. 1.

Положим

$$F = U(x, y) - z = 0, \quad (8)$$

тогда

$$\text{grad } F = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k}. \quad (9)$$

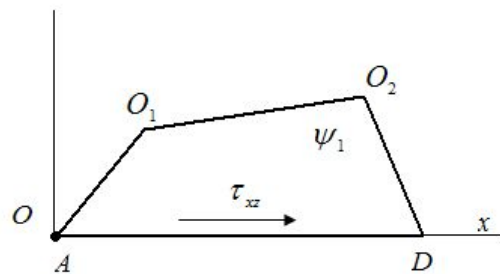


Рис. 2.

Рассмотрим область  $AO_1O_2D$ , и направим ось  $x$  вдоль  $AD$  (рис. 2). Предполагая, что боковая поверхность стержня свободна от усилий, для области  $AO_1O_2D$ , изображенной на рис. 2, согласно (1) получим

$$\tau_{xz} = k(\psi_1), \quad \tau_{yz} = 0. \quad (10)$$

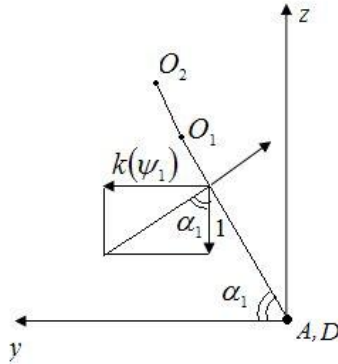


Рис. 3.

Из (4), (9), (10) получим

$$\text{grad } F = \tau_{xz} \mathbf{j} - \mathbf{k} = k(\psi_1) \mathbf{j} - \mathbf{k}. \quad (11)$$

Угол наклона поверхности постоянного ската к оси  $y$  (рис. 3) согласно (11) определится из соотношения

$$\text{tg } \alpha_1 = k(\psi_1). \quad (12)$$

Согласно (10), (12) получим

$$\text{tg } \alpha_1 = \tau_{xz}, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (13)$$

Боковая поверхность стержня свободна от напряжений, результирующее касательное напряжение постоянно и направлено вдоль отрезка контура стержня (рис. 1). Перенумеруем области постоянного ската (рис. 1), обозначим касательное напряжение в соответствующих областях  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ . Тогда

$$\text{tg } \alpha_1 = k(\psi_1) = \tau_1, \quad \text{tg } \alpha_2 = k(\psi_2) = \tau_2, \quad \dots \quad (14)$$

Ребра  $AO_1, BO_1, CO_2, DO_2, O_1O_2$  являются пересечениями плоскостей постоянного ската (рис. 1).

Рассмотрим ребро  $AO_1$  (рис. 4а). Отрезок  $MN$  ортогонален плоскости  $xy$ , отрезок  $NP$  ортогонален  $AD$ , отрезок  $NQ$  ортогонален  $AB$ .

Имеет место

$$\frac{MN}{NP} = \text{tg } \alpha_1 = \tau_1, \quad \frac{MN}{NQ} = \text{tg } \alpha_2 = \tau_2. \quad (15)$$

Далее следует (рис. 4б)

$$NP = AN \sin \beta_1, \quad NQ = AN \sin \beta_2. \quad (16)$$

Согласно (15), (16) получим

$$\text{tg } \alpha_1 \sin \beta_1 = \text{tg } \alpha_2 \sin \beta_2. \quad (17)$$



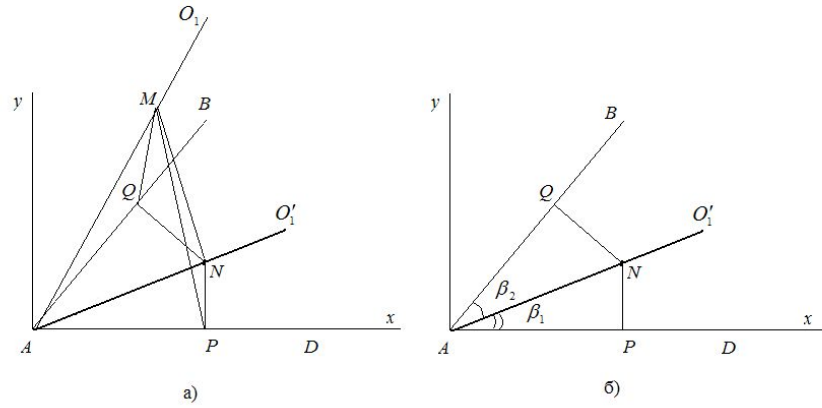


Рис. 4.

Обозначим угол раствора  $BAD$  через  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  (рис. 4б). Тогда согласно (14), (17)

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 \sin \beta}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cos \beta}. \quad (18)$$

При переходе через линию  $AO_1'$  (рис. 4б), согласно (17), проекции касательных напряжений на нормаль к линии  $AO_1'$  равны между собой

$$\tau_1 \sin \beta_1 = \tau_2 \sin \beta_2. \quad (19)$$

Соотношения (17), (19) согласно (14) эквивалентны. Следовательно, проекции ребер поверхности напряжения на плоскость  $xy$  являются линией разрыва касательных напряжений.

**2.** Рассмотрим анизотропию вида [2]

$$A\tau_{xz}^2 + B\tau_{yz}^2 = 1. \quad (20)$$

Условие (20) перепишем в виде

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{B}}. \quad (21)$$

Условию пластичности соответствует эллипс, указанный на рис. 5.

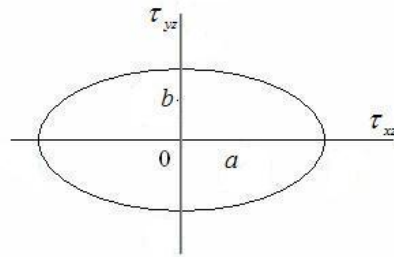


Рис. 5.

Из (2), (20), (21) получим

$$k(\psi) = \frac{1}{\sqrt{A \cos^2 \psi + B \sin^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\psi}} \quad (22)$$

или

$$k(\psi) = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2} \cos 2\psi}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}}. \quad (23)$$

Рассмотрим стержень прямоугольного сечения, поперечное сечение которого представлено на рис. 6.

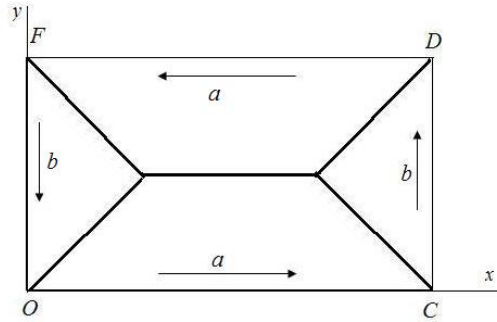


Рис. 6.

Вдоль границы  $OC$  величина  $\psi = 0$ ,  $\tau_{xz} = a$ ,  $\tau_{yz} = 0$ .  
 Вдоль границы  $DC$  величина  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = b$ .  
 Вдоль границы  $DF$  величина  $\psi = \pi$ ,  $\tau_{xz} = -a$ ,  $\tau_{yz} = 0$ .  
 Вдоль границы  $FO$  величина  $\psi = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = -b$ .  
 На рис. 6 указаны линии разрыва напряжений.

Рассмотрим случай трансляционной анизотропии [3]

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = 1, \quad k_1, k_2 = \text{const.} \quad (24)$$

Из (2), (24)

$$k(\psi) = \rho \cos(\psi - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\psi - \mu)}, \quad (25)$$

где

$$\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \frac{k_1}{\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_2}{\rho} = \sin \mu, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{k_2}{k_1}. \quad (26)$$

Рассмотрим различные случаи кручения прямоугольных стержней при трансляционной анизотропии, указанные на рис. 7.

При  $\mu = 0$ :

вдоль границы  $OC$  величина  $\psi = 0$ ,  $\tau_{xz} = \rho + 1$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;  
 вдоль границы  $DC$  величина  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \sqrt{1 - \rho^2}$ ;  
 вдоль границы  $DF$  величина  $\psi = \pi$ ,  $\tau_{xz} = -\rho + 1$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;  
 вдоль границы  $FO$  величина  $\psi = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \sqrt{1 - \rho^2}$ .

При  $\mu = \frac{\pi}{4}$ :

вдоль границы  $OC$  величина  $\psi = 0$ ,  $\tau_{xz} = \frac{\sqrt{2}(\rho + \sqrt{2 - \rho^2})}{2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

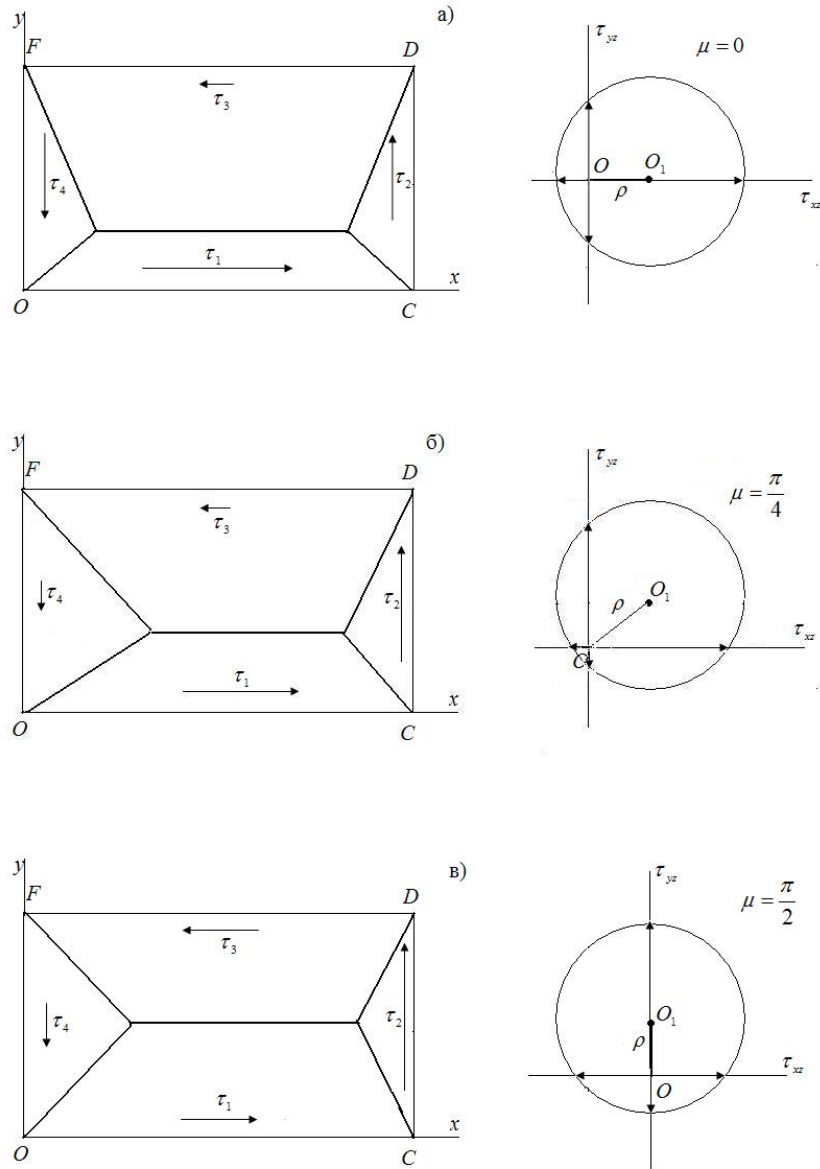


Рис. 7.

вдоль границы  $DC$  величина  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \frac{\sqrt{2}(\rho + \sqrt{2 - \rho^2})}{2}$ ;

вдоль границы  $DF$  величина  $\psi = \pi$ ,  $\tau_{xz} = \frac{\sqrt{2}(-\rho + \sqrt{2 - \rho^2})}{2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $FO$  величина  $\psi = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \frac{\sqrt{2}(-\rho + \sqrt{2 - \rho^2})}{2}$ .

При  $\mu = \frac{\pi}{2}$ :

вдоль границы  $OC$  величина  $\psi = 0$ ,  $\tau_{xz} = \sqrt{1 - \rho^2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $DC$  величина  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \rho + 1$ ;

вдоль границы  $DF$  величина  $\psi = \pi$ ,  $\tau_{xz} = \sqrt{1 - \rho^2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ;

вдоль границы  $FO$  величина  $\psi = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = -\rho + 1$ .

Рассмотрим кручение стержня с анизотропией вида (20), поперечное сечение которого есть правильный треугольник, представленный на рис. 8. На рис. 8 показаны линии разрыва напряжений.

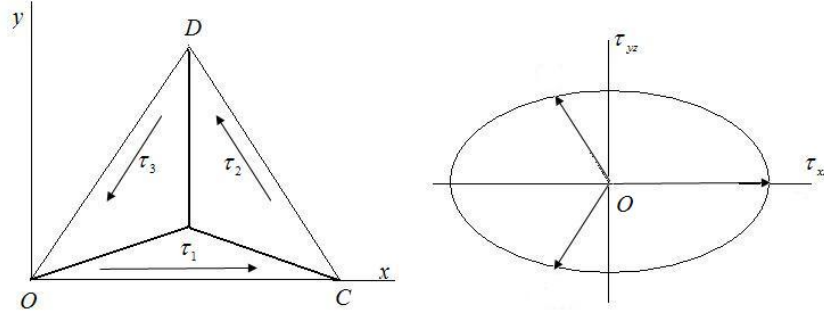


Рис. 8.

Вдоль границы  $OC$  величина  $\psi = 0$ ,  $\tau_{xz} = a$ ,  $\tau_{yz} = 0$ .

Вдоль границы  $DC$  величина  $\psi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\tau_{xz} = -\frac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$ ,  $\tau_{yz} = \frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$ .

Вдоль границы  $OD$  величина  $\psi = \frac{4\pi}{3}$ ,  $\tau_{xz} = -\frac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$ ,  $\tau_{yz} = -\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$ .

Рассмотрим различные случаи кручения треугольных стержней при трансляционной анизотропии, указанные на рис. 9.

При  $\mu = 0$ :

вдоль границы  $OC$  величина  $\psi = 0$ ,  $\tau_{xz} = \rho + 1$ ,  $\tau_{yz} = 0$ .

вдоль границы  $DC$  величина  $\psi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\tau_{xz} = \frac{\rho - \sqrt{4-3\rho^2}}{4}$ ,  $\tau_{yz} = \frac{\sqrt{3}(-\rho + \sqrt{4-3\rho^2})}{4}$ .

вдоль границы  $OD$  величина  $\psi = \frac{4\pi}{3}$ ,  $\tau_{xz} = \frac{\rho - \sqrt{4-3\rho^2}}{4}$ ,  $\tau_{yz} = -\frac{\sqrt{3}(-\rho + \sqrt{4-3\rho^2})}{4}$ .

При  $\mu = \frac{\pi}{4}$ :

вдоль границы  $OC$  величина  $\psi = 0$ ,  $\tau_{xz} = \frac{\sqrt{2}(\rho + \sqrt{2-\rho^2})}{2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ .

вдоль границы  $DC$  величина  $\psi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\tau_{xz} = -\frac{1}{2} \left( \rho \cos \frac{5\pi}{12} + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \left( \frac{5\pi}{12} \right)} \right)$ ,  
 $\tau_{yz} = \frac{\sqrt{3} \left( \rho \cos \frac{5\pi}{12} + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \left( \frac{5\pi}{12} \right)} \right)}{2}$ .

вдоль границы  $OD$  величина  $\psi = \frac{4\pi}{3}$ ,  $\tau_{xz} = \frac{1}{2} \left( \rho \cos \frac{\pi}{12} - \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{12} \right)} \right)$ ,  
 $\tau_{yz} = -\frac{\sqrt{3} \left( -\rho \cos \frac{\pi}{12} + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{12} \right)} \right)}{2}$ .

При  $\mu = \frac{\pi}{2}$ :

вдоль границы  $OC$  величина  $\psi = 0$ ,  $\tau_{xz} = \sqrt{1 - \rho^2}$ ,  $\tau_{yz} = 0$ .

вдоль границы  $DC$  величина  $\psi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\tau_{xz} = -\frac{\rho\sqrt{3} + \sqrt{4-\rho^2}}{4}$ ,  $\tau_{yz} = \frac{\sqrt{3}(\rho\sqrt{3} + \sqrt{4-\rho^2})}{4}$ .

вдоль границы  $OD$  величина  $\psi = \frac{4\pi}{3}$ ,  $\tau_{xz} = \frac{\rho\sqrt{3} - \sqrt{4-\rho^2}}{4}$ ,  $\tau_{yz} = -\frac{\sqrt{3}(-\rho\sqrt{3} + \sqrt{4-\rho^2})}{4}$ .

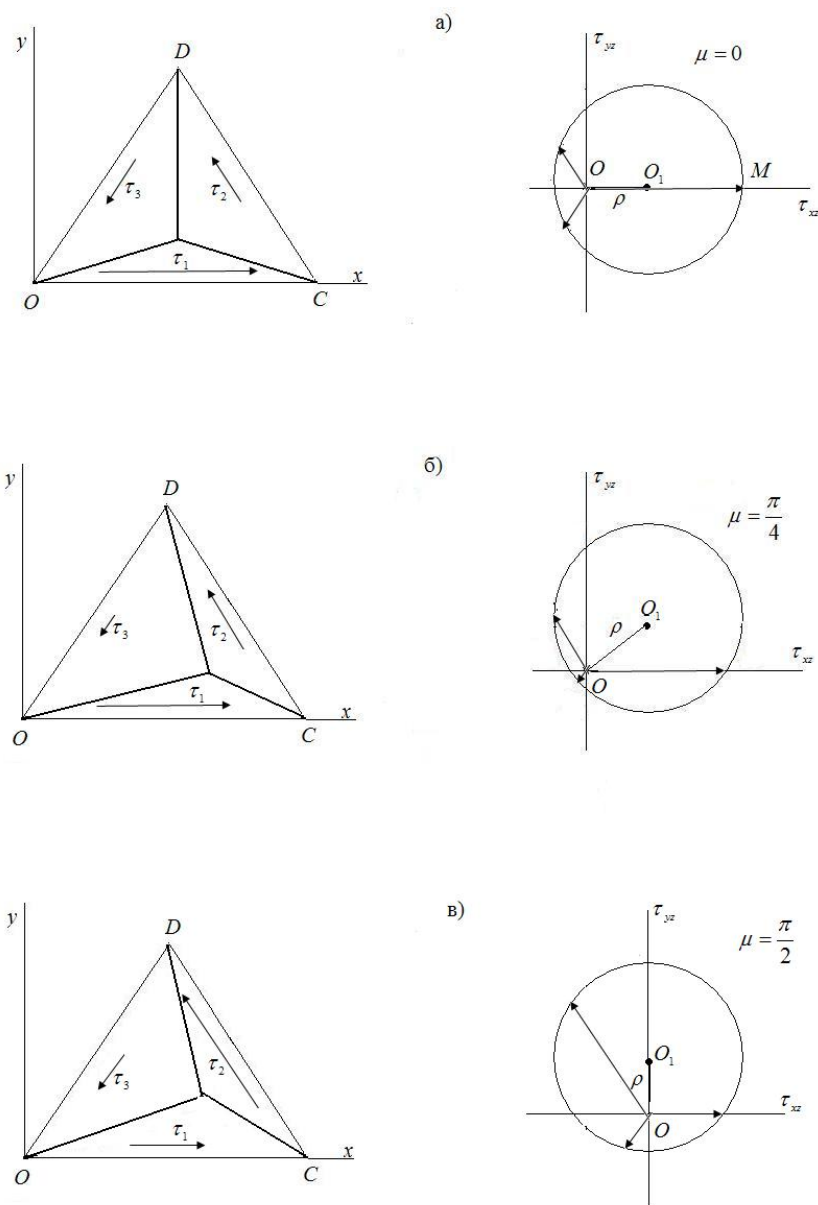


Рис. 9.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИИТЛ, 1965. – 407 с.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2(8). – С. 576–579.

[4] *Быковцев, Г. И.* О кручении призматических стержней из анизотропного идеально пластического материала / Г. И. Быковцев // Известия АН СССР. ОНТ. Механика и машиностроение. – 1961. – № 3. – С. 151–157.; Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред : сб. статей / Г. И. Быковцев. – Владивосток : Дальнаука, 2002. – 566 с.

*T. V. Mitrofanova*

## ABOUT LIMITING CONDITION OF ANISOTROPIC PRISMATIC CORES AT TORSION

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work the limiting condition of anisotropic prismatic cores is considered at torsion. It is shown that sides of surfaces of the pressure, adjoining a polygonal contour of a core, are the surfaces of a constant slope with their own corner of a slope. It is also shown that the tangent of angle of an inclination of parts of a loading surface is numerically equal tangential to pressure in a corresponding part of a core. Lines of rupture of pressure coincide with projections of edges of a loading surface on a plane of cross-section of a core.

**Keywords:** torsion, tangential pressure, anisotropy, a loading surface, a slope, lines of rupture of pressure, a limiting condition.

*Митрофанова Татьяна Валерьевна*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: mitrofanova\_tv@mail.ru*

*Mitrofanova Tatyana Valeryevna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

## ДВУОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** Рассматривается двuosное растяжение пластины, ослабленной круговым отверстием. Материал предполагается упругоидеальнопластическим. Рассматривается случай пластической трансляционной анизотропии. В первом приближении определены компоненты напряжений в упругой и пластической областях. Определена граница между упругой и пластической областями.

**Ключевые слова:** напряжение, перемещение, упругость, пластичность, идеальная, изотропия, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.3

### 1. Определение напряженного состояния в упругой и пластической областях в анизотропной идеальнопластической пластине с круговым отверстием.

Предельное условие для напряжений в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии для случая плоской деформации имеет вид [1]

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_0^2, \quad k_0, k_1, k_2, k_3 - const, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения в декартовой системе координат,  $k_0$  – предел текучести.

В дальнейшем отнесем компоненты напряжения  $\sigma_{ij}$  к величине предела текучести  $k_0$ , при этом для безразмерных величин сохраним обозначения.

Условие (1) примет вид

$$\left(\frac{\sigma_x^{(p)} - \sigma_y^{(p)}}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}^{(p)} - k_3)^2 = 1, \quad (2)$$

индекс “p” наверху приписан компонентам в пластической области.

Согласно (2) анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат  $x, y$ .

Связь между напряжениями в декартовой системе координат  $x, y$  и напряжениями в полярной системе координат  $\rho, \theta$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta.$$

Из (2), (3) получим условие пластичности в полярных координатах

$$\left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2}\right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2}\right) \{\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta\} - 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} R \{\cos \mu \sin 2\theta + \sin \mu \cos 2\theta\} + R^2 - 1 = 0, \quad (4)$$

где

$$R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2},$$

$$\frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{R} = \sin \mu.$$

Решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру  $\delta_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(o)} + \delta_1 \sigma_{ij}^{(I)} + \delta_1^2 \sigma_{ij}^{(II)} + \dots, \\ e_{ij} &= e_{ij}^{(o)} + \delta_1 e_{ij}^{(I)} + \delta_1^2 e_{ij}^{(II)} + \dots, \\ u &= u^{(0)} + \delta_1 u^{(I)} + \delta_1^2 u^{(II)} + \dots, \\ v &= v^{(0)} + \delta_1 v^{(I)} + \delta_1^2 v^{(II)} + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $e_{ij}$  – компоненты деформации,  $u, v$  – компоненты перемещения.

Индекс “0” наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при  $\delta_1 = 0$ .

Предположим

$$k_1 = \delta_1 k'_1, \quad k_2 = \delta_1 k'_2, \quad k_3 = \delta_1 k'_3. \quad (6)$$

Обозначим

$$R = \delta_1 R', \quad R' = \sqrt{\left(\frac{k'_1 - k'_2}{2}\right)^2 + k'_3}. \quad (7)$$

В дальнейшем положим  $\delta_1 = d_1 \delta$ , где  $0 \leq d_1 \leq 1$ .

В нулевом исходном осесимметричном состоянии положим

$$\sigma_\rho^{(0)} = \sigma_\rho^{(0)}(\rho), \quad \sigma_\theta^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)}(\rho), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (8)$$

В исходном нулевом приближении согласно (4), (7), (8) при растяжении пластины  $\sigma_\theta^{(0)} > \sigma_\rho^{(0)}$  имеет место

$$\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = -2. \quad (9)$$

Для определения компонент напряжений в пластической области в нулевом приближении используем уравнение равновесия в полярной системе координат

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (10)$$

Из (9), (10) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)} &= 2 \ln \rho + C_1, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= 2(1 + \ln \rho) + C_1, \quad C_1 - const. \end{aligned} \quad (11)$$



Границу упругой и пластической областей обозначим

$$\rho_s = \rho_s^0 + \delta \rho_s' + \delta^2 \rho_s'' \dots$$

В дальнейшем отнесем все величины, имеющие размерность длины к величине  $\rho_s^0$  – радиусу упругопластической зоны в исходном нулевом приближении.

Рассмотрим трубу радиусов  $a, b$  (рис. 1), положим

$$\alpha = \frac{a}{\rho_s^0}, \quad \beta = \frac{b}{\rho_s^0}.$$

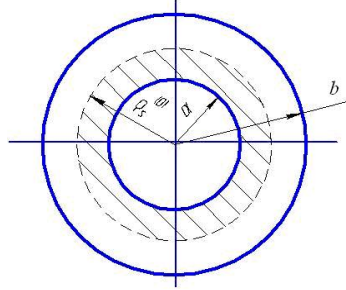


Рис. 1.

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление  $-q_0$

$$\sigma_\rho^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = -q_0. \quad (12)$$

Напряжения в пластической зоне имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -q_0 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -q_0 + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha}\right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (13)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$\sigma_\rho^{(0)e} = A - B \cdot \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = A + B \cdot \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (14)$$

Условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\theta^{(0)e} \Big|_{\rho=1}. \quad (15)$$

Удовлетворяя граничному условию  $\sigma_\rho^{(0)e} = -q$  при  $\rho = \beta$ , получим

$$-q = A - B. \quad (16)$$

Из (15), (16) следует

$$B = \frac{1}{\beta^2}. \quad (17)$$

Используя условия сопряжения и (16), получим трансцендентное уравнение для нулевого приближения

$$-q = -q_0 + 1 - 2 \ln \alpha - \frac{1}{\beta^2}. \quad (18)$$

Удовлетворяя граничному условию  $\sigma_\rho^{(0)e} = -q$  при  $\rho = \infty$ , получим

$$A = -q. \quad (19)$$

Напряжения в упругой области имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)e} = -q - \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = -q + \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (20)$$

Из (4) в первом приближении имеет место

$$\sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} = 2R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta). \quad (21)$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнения равновесия удовлетворим

$$\begin{cases} \sigma_\rho^{(I)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta^{(I)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta} \right). \end{cases} \quad (23)$$

Из (22), (23) найдем уравнение для определения функции напряжения  $\Phi^{(I)}$

$$\rho^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2} = -\rho^2 \cdot [2R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta)]. \quad (24)$$

Решение уравнения представим в виде суммы однородного и неоднородного решений

$$\Phi = \Phi_{\text{Одн}} + \Phi_{\text{Неодн}}. \quad (25)$$

Тогда имеет место

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_{\text{Одн}}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi_{\text{Одн}}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi_{\text{Одн}}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (26)$$

1. Решение (26) будем искать в виде

$$\Phi_{\text{Одн } 1} = Q_1(\rho) \cos 2\theta. \quad (27)$$

Из (26), (27) получим уравнение Эйлера

$$\rho^2 \frac{d^2 Q_1}{d\rho^2} - \rho \frac{dQ_1}{d\rho} + 4Q_1 = 0, \quad (28)$$

откуда

$$Q_1 = \rho \cdot [C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)]. \quad (29)$$

Тогда

$$\Phi_{\text{Одн } 1} = \rho \cdot [C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)] \cos 2\theta. \quad (30)$$

2. Решение (26) будем искать в виде

$$\Phi_{\text{Одн } 2} = Q_2(\rho) \sin 2\theta. \quad (31)$$

Из (26), (31) получим уравнение Эйлера

$$\rho^2 \frac{d^2 Q_2}{d\rho^2} - \rho \frac{dQ_2}{d\rho} + 4Q_2 = 0, \quad (32)$$

откуда

$$Q_2 = \rho \cdot \left[ C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right]. \quad (33)$$

Тогда

$$\Phi_{\text{Одн } 2} = \rho \cdot \left[ C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin 2\theta. \quad (34)$$

Из (30), (34) получим

$$\Phi = \Phi_{\text{Одн } 1} + \Phi_{\text{Одн } 2} = \rho \cdot \left[ C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos 2\theta + \rho \cdot \left[ C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin 2\theta. \quad (35)$$

Из (23), (35) следуют решения для однородного уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho \text{ Одн}}^{(I)p} &= -\frac{3}{\rho} \left( C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left( C_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta - \\ &- \frac{3}{\rho} \left( C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \sin 2\theta + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left( C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \sin 2\theta, \\ \sigma_{\theta \text{ Одн}}^{(I)p} &= -\frac{3}{\rho} \left( C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left( C_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta - \\ &- \frac{3}{\rho} \left( C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left( C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \sin 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta \text{ Одн}}^{(I)p} &= 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left( C_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta - \\ &- 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left( C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  – некоторые постоянные.

Из (24) определим неоднородные решения для функции напряжений

$$\Phi_{\text{неоднор}}^{(I)} = -\frac{1}{2} \rho^2 R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta). \quad (37)$$

Из (23), (37) получим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho \text{ неоднор}}^{(I)} &= R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta), \\ \sigma_{\theta \text{ неоднор}}^{(I)} &= -R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\tau_{\rho\theta \text{ неоднор}}^{(I)} = -R' (\cos \mu \sin 2\theta + \sin \mu \cos 2\theta).$$

Общее решение определяется суммой решений (36), (38)

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)p} &= \sigma_{\rho \text{ одн}}^{(I)p} + \sigma_{\rho \text{ неодн}}^{(I)p} \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= \sigma_{\theta \text{ одн}}^{(I)p} + \sigma_{\theta \text{ неодн}}^{(I)p} \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= \tau_{\rho\theta \text{ одн}}^{(I)p} + \tau_{\rho\theta \text{ неодн}}^{(I)p}\end{aligned}\quad (39)$$

В первом приближении граничные условия согласно [1] имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при } \rho = \alpha, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при } \rho = \alpha, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при } \rho = \alpha.\end{aligned}\quad (40)$$

Коэффициенты  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  определим из (39), (40) и граничных условий при  $\rho = \alpha$ .

$$\begin{aligned}C_{11} &= \frac{R'\alpha}{6} \cos \mu \left( 3 \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right), \\ C_{12} &= \frac{R'\alpha}{6} \cos \mu \left( \sqrt{3} \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) + 3 \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right), \\ C_{21} &= -\frac{R'\alpha}{6} \sin \mu \left( 3 \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right), \\ C_{22} &= -\frac{R'\alpha}{6} \sin \mu \left( \sqrt{3} \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) + 3 \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right).\end{aligned}\quad (41)$$

Решение в пластической зоне будет определяться из (23), (36), (38), (41)

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{R'\alpha}{\rho} \cos \mu \left[ \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] + R' \cos \mu \right\} d_1 \cos 2\theta + \\ &+ \left\{ \frac{R'\alpha}{\rho} \sin \mu \left[ \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] - R' \sin \mu \right\} d_1 \sin 2\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{R'\alpha}{\rho} \cos \mu \left[ \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] - R' \cos \mu \right\} d_1 \cos 2\theta + \\ &+ \left\{ \frac{R'\alpha}{\rho} \sin \mu \left[ \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] + R' \sin \mu \right\} d_1 \sin 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= \left\{ \frac{R'\alpha}{\rho} \cos \mu \left[ \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] - R' \cos \mu \right\} d_1 \sin 2\theta + \\ &+ \left\{ \frac{R'\alpha}{\rho} \sin \mu \left[ \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] - R' \sin \mu \right\} d_1 \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (42)$$

Граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде

$$\sigma_{\rho}^e \Big|_{\rho=\infty} = q - \delta_2 \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta}^e \Big|_{\rho=\infty} = q + \delta_2 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^e \Big|_{\rho=\infty} = \delta_2 \sin 2\theta, \quad (43)$$

где  $\delta_2 = \frac{p_1 - p_2}{2}$ ,  $\delta_2 = d_2 \delta$  и  $0 \leq d_2 \leq 1$ .

На упругопластической границе согласно (42) имеет место

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)p} &= a_2'' \cos 2\theta + a_4'' \sin 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= b_2''' \sin 2\theta + b_4''' \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (44)$$

где

$$\begin{aligned}a_2'' &= -R'\alpha \cos \mu \left[ \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right] + R' \cos \mu, \\ a_4'' &= R'\alpha \sin \mu \left[ \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right] - R' \sin \mu,\end{aligned}\quad (45)$$

$$b_2''' = R' \alpha \cos \mu \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \cos \mu,$$

$$b_4''' = R' \alpha \sin \mu \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \sin \mu.$$

1) На границе упругопластической области согласно (44) имеет место при  $\rho = 1$

$$b_2''' = b_4''' = 0,$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{\rho^4} + \frac{4}{\rho^2} \right] \left\{ (-R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \right. \\ &+ (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta \left. \right\}, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= \frac{1}{\rho^4} \left\{ (-R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \right. \\ &+ (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta \left. \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right] \left\{ (-R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta - \right. \\ &- (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta \left. \right\}. \end{aligned}$$

2) На границе упругопластической области согласно (44) имеет место при  $\rho = 1$

$$a_2'' = a_4'' = 0,$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right] \left\{ -(R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta + \right. \\ &+ (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta \left. \right\}, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= -\frac{2}{\rho^4} \left\{ -(R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta + \right. \\ &+ (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta \left. \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right] \left\{ (R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \right. \\ &+ (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta \left. \right\}. \end{aligned}$$

3) На бесконечности согласно (44) имеет место при  $\rho = \infty$

$$a_0'' = a_2'' = a_4'' = b_2''' = b_4''' = 0,$$

на бесконечности заданы усилия

$$\sigma_\rho^{(I)e} \Big|_{\rho=\infty} = a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta,$$

где  $a_2 = -1$ ,  $b_2 = 0$ .

Тогда напряжения в упругой области имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= - \left( 1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) d_2 \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= - \left( 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) d_2 \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left( -1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) d_2 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (48)$$

Результирующее напряжение в упругой области определяется как сумма напряжений (46)–(48)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho}^{(I)e} &= \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_2 \cos 2\theta + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{\rho^4} + \frac{4}{\rho^2}\right] \{(-R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \\
 &+ (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta\} + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2}\right] \{-(R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta + \\
 &\quad + (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta\}, \\
 \sigma_{\theta}^{(I)e} &= -\left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) d_2 \cos 2\theta + \\
 &+ \frac{1}{\rho^4} \{(-R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \\
 &+ (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta\} - \\
 &- \frac{2}{\rho^4} \{-(R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta + \\
 &\quad + (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta\}, \\
 \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(-1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_2 \sin 2\theta + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2}\right] \{(-R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta - \\
 &- (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta\} + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2}\right] \{(R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \\
 &\quad + (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta\}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Из (13), (20) получим

$$\left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 2, \quad \left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -2, \tag{50}$$

тогда для определения границы раздела упругопластической области в первом приближении будем иметь

$$\rho_s^{(I)} \Big|_{\rho=1} = \frac{\sigma_{\theta}^{(I)p} - \sigma_{\theta}^{(I)e}}{\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho}} \Big|_{\rho=1} = \frac{1}{4} \left( \sigma_{\theta}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)p} \right) \Big|_{\rho=1}, \tag{51}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 \rho_s^{(I)} &= \frac{1}{4} \left( \sigma_{\theta}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)p} \right) = -\frac{1}{4} d_2 \cos 2\theta - \\
 &- \frac{1}{2} \{-(R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta\} - \\
 &- \frac{1}{2} \{(R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta\}.
 \end{aligned} \tag{52}$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической (42) и упругой (49) полностью определено, изменение границы раздела упругой и пластической областей определяется из соотношений (52).

## 2. Определение перемещений в пластической и упругой областях в анизотропной идеальнопластической пластине с круговым отверстием.

Определим перемещение в пластической и упругой областях.

В исходном нулевом приближении в упругих и пластических областях имеет место условие несжимаемости

$$e_{\rho}^0 + e_{\theta}^0 = 0. \tag{53}$$

Согласно (53) перемещения и деформации в упругой и пластической областях примут вид

$$u^{(0)e} = \frac{1}{2G\rho}, \quad v^{(0)e} = 0, \quad e_{\rho}^{(0)e} = \frac{du_{\rho}^{(0)e}}{d\rho} = \frac{1}{2G\rho^2}, \quad e_{\theta}^{(0)e} = -e_{\rho}^{(0)e} = -\frac{1}{2G\rho^2}. \quad (54)$$

В упругой области компоненты деформации определены согласно (44) и формулам (V), (VI), (VIII), приведенных в монографии [2].

1) На границе упругопластической области согласно (44) имеет место при  $\rho = 1$

$$\begin{aligned} a_2'' &= -R'\alpha \cos \mu \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] + R' \cos \mu, \\ a_4'' &= R'\alpha \sin \mu \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \sin \mu, \\ b_2''' &= b_4''' = 0, \end{aligned}$$

тогда в упругой области будем иметь

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{1+\mu}{3\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right] \left\{ (-R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \right. \\ &\quad \left. + (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta \right\} \\ v^{(I)e} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{1+\mu}{3\rho^3} + \frac{2-\mu}{2\rho} \right] \left\{ (-R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta - \right. \\ &\quad \left. - (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

2) На границе упругопластической области согласно (44) имеет место при  $\rho = 1$

$$\begin{aligned} b_2''' &= R'\alpha \cos \mu \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \cos \mu, \\ b_4''' &= R'\alpha \sin \mu \left[ \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \sin \mu. \\ a_2'' &= a_4'' = 0, \end{aligned}$$

тогда в упругой области имеет место

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= \frac{1}{E} \left[ -\frac{2(1+\mu)}{3\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right] \times \\ &\quad \times \left\{ - (R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta + \right. \\ &\quad \left. + (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta \right\}, \\ v^{(I)e} &= \frac{1}{E} \left[ -\frac{2(1+\mu)}{3\rho^3} - \frac{1-\mu}{\rho} \right] \times \\ &\quad \times \left\{ (R'\alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \right. \\ &\quad \left. + (R'\alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

3) На бесконечности согласно (44) имеет место при  $\rho = \infty$

$$a_2'' = a_4'' = b_2''' = b_4''' = 0.$$

На бесконечности заданы усилия

$$\sigma_{\rho}^{(I)e} \Big|_{\rho=\infty} = a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta,$$

где  $a_2 = -1$ ,  $b_2 = 0$ ,

тогда перемещения будут определяться

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= -\frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \left( \rho - \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{4}{\rho} \right] \cos 2\theta \\ v^{(I)e} &= \frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \left( \rho + \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{2(1 - \mu)}{\rho} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (57)$$

Результирующее перемещение в упругой области определяется как сумма перемещений (55) – (57)

$$\begin{aligned} u^{(I)e} &= -\frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \left( \rho - \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{4}{\rho} \right] \cos 2\theta + \\ &+ \frac{1}{E} \left[ \frac{1 + \mu}{3\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right] \{ (-R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \\ &+ (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta \} + \\ &+ \frac{1}{E} \left[ -\frac{2(1 + \mu)}{3\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right] \times \\ &\times \{ - (R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta + \\ &+ (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta \}, \\ v^{(I)e} &= \frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \left( \rho + \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{2(1 - \mu)}{\rho} \right] \sin 2\theta + \\ &+ \frac{1}{E} \left[ \frac{1 + \mu}{3\rho^3} + \frac{2 - \mu}{2\rho} \right] \{ (-R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + R' \cos \mu) d_1 \sin 2\theta - \\ &- (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \cos 2\theta \} + \\ &+ \frac{1}{E} \left[ -\frac{2(1 + \mu)}{3\rho^3} - \frac{1 - \mu}{\rho} \right] \times \\ &\times \{ (R' \alpha \cos \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \cos \mu) d_1 \cos 2\theta + \\ &+ (R' \alpha \sin \mu [\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] - R' \sin \mu) d_1 \sin 2\theta \}. \end{aligned} \quad (58)$$

В пластической зоне согласно (4) и ассоциированному закону имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} e_\rho &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\rho} = \lambda \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) - R \cdot (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta) \right\}, \\ e_\theta &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta} = \lambda \left\{ -\frac{1}{2} (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) + R \cdot (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta) \right\}, \\ 2e_{\rho\theta} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{\rho\theta}} = \lambda \left\{ 2\tau_{\rho\theta}^p - 2R \cdot (\cos \mu \sin 2\theta + \sin \mu \cos 2\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Из (59) следует

$$e_\rho^{(I)} + e_\theta^{(I)} = 0. \quad (60)$$

Из (60) получим

$$e_\rho^{(I)} + e_\theta^{(I)} = e_\rho^{(I)e} + e_\theta^{(I)e} + e_\rho^{(I)p} + e_\theta^{(I)p} = 0. \quad (61)$$

Согласно [2] запишем соотношения для деформаций

$$e_\rho = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \rho}, \quad e_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(n)}}{\rho}, \quad e_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{v^{(n)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \theta} \right]. \quad (62)$$

С учетом (59) найдем

$$\begin{aligned} e_{\rho\theta}^{(I)} &= \left( \frac{1}{2G\rho^2} \right) \left\{ \frac{R' \alpha}{\rho} \cos \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})) \sin 2\theta + \right. \\ &+ \left. \frac{R' \alpha}{\rho} \sin \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})) \cos 2\theta \right\}. \end{aligned} \quad (63)$$



Согласно (62), (63) с учетом условия несжимаемости дифференциальные уравнения для определения перемещения в пластической области в первом приближении примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} = 0, \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} = & \left( \frac{1}{2G\rho^2} \right) \left\{ \frac{R'\alpha}{\rho} \cos \mu \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \sin 2\theta + \right. \\ & \left. + \frac{R'\alpha}{\rho} \sin \mu \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \cos 2\theta \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

Из уравнения (64), (65) получим

$$\begin{aligned} u^{(I)p} = & -2 \left\{ [C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)] \sin 2\theta + \right. \\ & + \frac{1}{\rho} [A_1 \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) + B_1 \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})] \sin 2\theta - \\ & - [C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)] \cos 2\theta - \\ & \left. - \frac{1}{\rho} [A_2 \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) + B_2 \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})] \cos 2\theta \right\}, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} v^{(I)p} = & [C_{11} (\cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) + \\ & + C_{12} (\sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho))] \sin 2\theta - \\ & - \frac{1}{\rho} [A_1 (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) + \sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})) - \\ & - B_1 (\sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \sqrt{3} \alpha \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}))] \sin 2\theta + \\ & + [C_{21} (\cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) + \\ & + C_{22} (\sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho))] \cos 2\theta - \\ & - \frac{1}{\rho} [A_2 (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) + \sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})) - \\ & - B_2 (\sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \sqrt{3} \alpha \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}))] \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (67)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{R'\alpha \cos \mu}{2G\rho} \cdot \left( \frac{-3\alpha^2 + 6\alpha + 4}{9\alpha^4 - 12\alpha^2 + 16} \right), \\ B_1 &= -\frac{\sqrt{3}R'\alpha \cos \mu}{2G\rho} \cdot \left( \frac{3\alpha^2 + 2\alpha - 4}{9\alpha^4 - 12\alpha^2 + 16} \right), \\ A_2 &= \frac{R'\alpha \sin \mu}{2G\rho} \cdot \left( \frac{-3\alpha^2 + 6\alpha + 4}{9\alpha^4 - 12\alpha^2 + 16} \right), \\ B_2 &= -\frac{\sqrt{3}R'\alpha \sin \mu}{2G\rho} \cdot \left( \frac{3\alpha^2 + 2\alpha - 4}{9\alpha^4 - 12\alpha^2 + 16} \right). \end{aligned}$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$u^p|_{\rho=1} = u^e|_{\rho=1}; \quad v^p|_{\rho=1} = v^e|_{\rho=1}. \quad (68)$$

Из (55) и условий сопряжения (68) найдем коэффициенты  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$ .

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{2}{E} d_2 - \frac{1}{2E} (K_1 + K_2) - \frac{1}{\rho^2} L_1, \\ C_{12} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{\rho^2} (M_1 + M_2) + \frac{2(1-\mu)}{E} d_2 + \frac{1}{E} (S_1 + S_2) - \frac{2}{E} d_2 + \frac{1}{2E} (K_1 + K_2) + \frac{1}{\rho^2} L_1 \right\}, \\ C_{21} &= \frac{1}{2E} (K_3 + K_4) - \frac{1}{\rho^2} L_2, \\ C_{22} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{\rho^2} (M_3 + M_4) + \frac{1}{E} (S_3 + S_4) - \frac{1}{2E} (K_3 + K_4) + \frac{1}{\rho^2} L_2 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \left[ \frac{1+\mu}{3} - 2 \right] \left( -\frac{2R'\alpha}{\sqrt{3}} \cos \mu \cdot \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - R' \cos \mu \right), \\
 K_2 &= \left[ -\frac{2(1+\mu)}{3} - 2 \right] \left( -\frac{R'\alpha}{\sqrt{3}} \sin \mu (\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) + R' \sin \mu \right), \\
 K_3 &= \left[ \frac{1+\mu}{3} - 2 \right] \left( -\frac{2R'\alpha}{\sqrt{3}} \sin \mu \cdot \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + R' \sin \mu \right), \\
 K_4 &= \left[ -\frac{2(1+\mu)}{3} - 2 \right] \left( \frac{R'\alpha}{\sqrt{3}} \cos \mu (\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) - R' \cos \mu \right), \\
 L_1 &= -A_1 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + B_1 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha), \\
 L_2 &= -A_2 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + B_2 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha), \\
 \\
 S_1 &= \left[ \frac{1+\mu}{3} + \frac{2-\mu}{2} \right] \left( -\frac{2R'\alpha}{\sqrt{3}} \cos \mu \cdot \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - R' \cos \mu \right), \\
 S_2 &= \left[ -\frac{2(1+\mu)}{3} + 1 - \mu \right] \left( -\frac{R'\alpha}{\sqrt{3}} \sin \mu (\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) + R' \sin \mu \right), \\
 S_3 &= \left[ \frac{1+\mu}{3} - \frac{2-\mu}{2} \right] \left( \frac{2R'\alpha}{\sqrt{3}} \sin \mu \cdot \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - R' \sin \mu \right), \\
 S_4 &= \left[ -\frac{2(1+\mu)}{3} + 1 - \mu \right] \left( -\frac{R'\alpha}{\sqrt{3}} \cos \mu (\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) + R' \cos \mu \right), \\
 \\
 M_1 &= A_1 (-\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)), \\
 M_2 &= B_1 (-\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)), \\
 M_3 &= A_2 (-\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)), \\
 M_4 &= B_2 (-\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)).
 \end{aligned}$$

Таким образом, в первом приближении определены компоненты напряжений и перемещений в упругой и пластической областях при двuosном растяжении на бесконечности при трансляционной анизотропии. Определена упругопластическая граница.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). Ч.3. – С. 583–584
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

S. O. Fominykh

**BIAxIAL STRETCHING OF ELASTOPLASTIC PLATES WITH A CIRCULAR HOLE IN CASE OF TRANSMITTING ANISOTROPY**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** The biaxial stretching of the plate weakened by a circular hole is considered. The material is supposed to be elastoidealplastic. The case of plastic transmitting anisotropy is considered. The components of pressures in elastic and plastic areas are defined in first approximation. The border between elastic and plastic areas is defined.

**Keywords:** pressure, movement, elasticity, plasticity, ideal, isotropy, transmitting anisotropy.

*Фоминых Светлана Олеговна*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: ermakovaso@rambler.ru*

*Fominykh Svetlana Olegovna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

## УПРУГОИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ТРУБЫ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** В работе рассматривается упругоидеальнопластическое состояние анизотропной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Условие предельного состояния включает в себя как частный случай анизотропию по Хиллу [4] и трансляционную анизотропию [1]. Показано, что в первом приближении вклады условия пластической анизотропии по Хиллу и трансляционной анизотропии независимы. Указано принципиальная разница распределения напряжений в рассматриваемых случаях анизотропии.

**Ключевые слова:** труба, напряжение, изотропия, идеальная, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

1. Условие пластичности примем в виде

$$A \cdot \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B \cdot (\tau_{xy} - k_3)^2 = 1, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Будем считать компоненты напряжений безразмерными, отнесенными к величине  $k_0$ .

Согласно (1) анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат  $x, y$ .

При  $A, B \neq 1, k_1 = k_2 = k_3$  имеет место анизотропия по Хиллу [4]; при  $A, B = 1, k_1, k_2, k_3 \neq 0$  имеет место трансляционная анизотропия [1].

Связь между напряжениями в декартовой систем координат  $x, y$  и напряжениями в полярной системе координат  $\rho, \theta$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1), (2) получим условие пластичности в полярных координатах

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 \left[ \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \left( \tau_{\rho\theta}^p \right)^2 \left[ \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] - \\ & - \left( \sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p \right) \left[ A \cdot \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \cos 2\theta - B \cdot k_3 \sin 2\theta \right] - \\ & - 2\tau_{\rho\theta}^p \left[ A \cdot \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \sin 2\theta + B \cdot k_3 \cos 2\theta \right] + \\ & + \left( \frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right) \tau_{\rho\theta}^p [A - B] \sin 4\theta + A \cdot \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B \cdot k_3^2 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру  $\delta_1$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)}. \quad (4)$$

Индекс "0" наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при  $\delta = 0$ .

Предположим

$$A = 1 + d_1 \delta, \quad B = 1 - d_1 \delta, \quad 0 \leq d_1 \leq 1. \quad (5)$$

Обозначим

$$\frac{k_1 - k_2}{2} = \delta d_2 \frac{k'_1 - k'_2}{2}, \quad k_3 = \delta d_2 k'_3, \quad (6)$$

где  $0 \leq d_2 \leq 1$ .

В нулевом исходном осесимметричном состоянии положим

$$\sigma_\rho^{(0)} = \sigma_\rho^{(0)}(\rho), \quad \sigma_\theta^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)}(\rho), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (7)$$

В исходном нулевом приближении согласно (3), (6), (7) имеет место  $\sigma_\rho^{(0)P} - \sigma_\theta^{(0)P} = \pm 2$ .

При растяжении пластины  $\sigma_\theta^{(0)} > \sigma_\rho^{(0)}$ ,

$$\sigma_\rho^{(0)P} - \sigma_\theta^{(0)P} = -2. \quad (8)$$

Для определения компонент напряжений в пластической области в нулевом приближении используем уравнение равновесия в полярной системе координат

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (9)$$

Из (8), (9) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)} &= 2 \ln \rho + C_1, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= 2(1 + \ln \rho) + C_1. \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем отнесем все величины, имеющие размерность длины, к величине  $\rho_s^0$  – радиусу упругопластической зоны в исходном нулевом приближении.

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление  $-q_0$

$$\sigma_\rho^{(0)P} \Big|_{\rho=\alpha} = -q_0, \quad \alpha = \frac{a}{\rho_s^0}. \quad (11)$$

Напряжения в пластической зоне имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)P} = -q_0 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)P} = -q_0 + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha}\right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)P} = 0. \quad (12)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$\sigma_\rho^{(0)E} = A - B \cdot \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)E} = A + B \cdot \frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)E} = 0, \quad (13)$$

где  $\beta = \frac{b}{\rho_s^0}$ .

Условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)P} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{(0)E} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_\theta^{(0)P} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\theta^{(0)E} \Big|_{\rho=1}. \quad (14)$$

Удовлетворяя граничному условию  $\sigma_\rho^{(0)E} = -q$  при  $\rho = \beta$ , получим

$$-q = A - B. \quad (15)$$

Согласно (14)

$$A = -q_0 + 1 - 2 \ln \alpha, \quad B = \frac{1}{\beta^2}. \quad (16)$$

Используя условия сопряжения и (15), получим трансцендентное уравнение для нулевого приближения

$$-q = -q_0 + 1 - 2 \ln \alpha - \frac{1}{\beta^2}. \quad (17)$$

Напряжения в упругой области имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)e} = -q_0 + 1 - 2 \ln \alpha - \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = -q_0 + 1 - 2 \ln \alpha + \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (18)$$

Из (3) в первом приближении имеет место

$$\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = d_1 \cos 4\theta + 2d_2 \left( \frac{k'_1 - k'_2}{2} \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta \right). \quad (19)$$

Т.к.  $R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2}$ ,  $\frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu$ ,  $\frac{k_3}{R} = \sin \mu$ , тогда

$$\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = d_1 \cos 4\theta + 2d_2 R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta), \quad (20)$$

где  $R' = d_2 \sqrt{\left(\frac{k'_1 - k'_2}{2}\right)^2 + k'_3^2}$ .

$$1. \quad \sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = d_1 \cos 4\theta. \quad (21)$$

Компоненты напряжения в упругой и пластической областях в случае (21) получены в [2].

$$2. \quad \sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = 2d_2 R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta). \quad (22)$$

Компоненты напряжения в пластической области в первом приближении в случае (22) определены в [3].

На границе пластической зоны при  $\rho = 1$  из [4] имеет место

$$\sigma_\rho^{(I)p} = \left\{ -3C_{11} + \sqrt{3}C_{12} \right\} \cos 2\theta + \left\{ -3C_{21} + \sqrt{3}C_{22} \right\} \sin 2\theta - R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta), \quad \rho = 1,$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = 2\sqrt{3}C_{12} \sin 2\theta - 2\sqrt{3}C_{22} \cos 2\theta + R' (\cos \mu \sin 2\theta + \sin \mu \cos 2\theta), \quad \rho = 1, \quad (23)$$

где

$$C_{11} = \frac{R' \cos \mu \cdot \alpha}{\Delta} \left| \begin{array}{cc} 1 & \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \end{array} \right| \quad (24)$$

$$C_{12} = \frac{R' \cos \mu \cdot \alpha}{\Delta} \left| \begin{array}{cc} (-3) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & 1 \\ -\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{array} \right| \quad (25)$$

$$C_{21} = -\frac{R' \sin \mu \cdot \alpha}{\Delta} \left| \begin{array}{cc} 1 & \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \end{array} \right| \quad (26)$$

$$C_{22} = -\frac{R' \sin \mu \cdot \alpha}{\Delta} \left| \begin{array}{cc} (-3) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & 1 \\ -\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{array} \right| \quad (27)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-3) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \\ -\sin(\sqrt{3} \ln \alpha) & \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \end{vmatrix} \quad (28)$$

В дальнейшем запишем соотношения (23) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= a_4'' \cos 2\theta + b_4'' \sin 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= a_4''' \cos 2\theta + b_4''' \sin 2\theta, \quad \rho = 1, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} a_4'' &= C_{11}(-3) + \sqrt{3}C_{12} - R' \cos \mu, \\ b_4'' &= C_{21}(-3) + \sqrt{3}C_{22} + R' \sin \mu, \\ a_4''' &= -2\sqrt{3}C_{22} + R' \sin \mu, \\ b_4''' &= 2\sqrt{3}C_{12} + R' \cos \mu. \end{aligned} \quad (30)$$

Внешняя часть трубы свободна от усилий

$$\sigma_{\rho}^{(I)e} = \tau_{\rho\theta}^{(I)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta. \quad (31)$$

На границе пластической зоны компоненты напряжения  $\sigma'_{\rho}, \tau'_{\rho\theta}$  равны между собой

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = \sigma_{\rho}^{(I)e}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta}^{(I)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (32)$$

Из условий (29), (30) согласно (23) определяются компоненты напряжения в упругой области.

В рассматриваемом случае имеют место формулы раздела (VI) и (VIII) приведенных в [1]. Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{\beta^4} + \frac{4}{\beta^2} \right] (\{C_{11}(-3) + \sqrt{3}C_{12} - R' \cos \mu\} \cos 2\theta + \\ &+ \{C_{21}(-3) + \sqrt{3}C_{22} + R' \sin \mu\} \sin 2\theta) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{\beta^4} - \frac{4}{\beta^2} \right] (\{2\sqrt{3}C_{22} - R' \sin \mu\} \sin 2\theta + \\ &+ \{2\sqrt{3}C_{12} + R' \cos \mu\} \cos 2\theta), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{\beta^4} (\{C_{11}(-3) + \sqrt{3}C_{12} - R' \cos \mu\} \cos 2\theta + \\ &+ \{C_{21}(-3) + \sqrt{3}C_{22} + R' \sin \mu\} \sin 2\theta) + \\ &- \frac{2}{\beta^4} (\{2\sqrt{3}C_{22} - R' \sin \mu\} \sin 2\theta + \\ &+ \{2\sqrt{3}C_{12} + R' \cos \mu\} \cos 2\theta), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{\beta^4} + \frac{2}{\beta^2} \right] (\{C_{11}(-3) + \sqrt{3}C_{12} - R' \cos \mu\} \sin 2\theta - \\ &- \{C_{21}(-3) + \sqrt{3}C_{22} + R' \sin \mu\} \cos 2\theta) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{\beta^4} - \frac{2}{\beta^2} \right] (\{-2\sqrt{3}C_{22} + R' \sin \mu\} \cos 2\theta + \\ &+ \{2\sqrt{3}C_{12} + R' \cos \mu\} \sin 2\theta). \end{aligned} \quad (35)$$

2. Граница упругопластической зоны  $\rho_s$  представляется в виде ряда

$$\rho_s = 1 + \delta\rho'_s + \delta^2\rho''_s + \dots + \delta^n\rho_s^{(n)}. \quad (36)$$

Условия сопряжения компонентов напряжения  $\sigma_{\theta}$  в первом приближении имеют вид [1]

$$\sigma_{\theta}^{(I)p} + \frac{d\sigma_{\theta}^{(I)p}}{d\rho} \rho'_s = \sigma_{\theta}^{(I)e} + \frac{d\sigma_{\theta}^{(I)e}}{d\rho} \rho'_s \quad \text{при} \quad \rho = 1 \quad (37)$$

Соотношения (35) запишем в виде

$$\rho_s^{(I)} \Big|_{\rho=1} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}} \Big|_{\rho=1} \quad (38)$$

Согласно (12), (18), (32), [3] получим

$$\rho'_s = \frac{1}{2(\alpha + 1)} \left[ \left( \left\{ 2\sqrt{3}C_{12} + R' \cos \mu \right\} \cos 2\theta - \left\{ 4\sqrt{3}C_{22} - 2R' \sin \mu \right\} \sin 2\theta \right) \right] \quad (39)$$

Отметим, что правая часть (21), соответствующая анизотропии (5), содержит член  $\cos 4\theta$ .

Правая часть (22), соответствующая трансляционной анизотропии, содержит члены  $\sin 2\theta$ ,  $\cos 2\theta$ . В этом состоит принципиальная разница в распределении напряжений в рассмотренных двух видах анизотропии.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Леденев, А. П.* Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из анизотропного идеальнопластического материала / А. П. Леденев. // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 2 (49). – С. 16–21.
- [3] *Фоминых, С. О.* Двуосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8), Т.3. – С. 610–622.
- [4] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.

*S. O. Fominykh*

### ELASTOIDEALPLASTIC CONDITION OF ANISOTROPIC PIPE

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

**Abstract.** In work the elastoidealplastic condition of the anisotropic thick-walled pipe influenced by internal pressure is considered. The condition of the limit state includes anisotropy on Hill [1] and transmitting anisotropy [2] as a special case. It is shown that at first approximation contributions of a condition of plastic anisotropy on Hill and transmitting anisotropy are independent. Fundamental difference of stress distribution in these cases of anisotropy is indicated.

**Keywords:** a pipe, pressure, isotropy, ideal, transmitting anisotropy.

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: ermakovaso@rambler.ru*

*Fominykh Svetlana Olegovna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*



80.,...

Прошла встреча с восьмидесятилетием. Я благодарен всем, кто отозвался на юбилей.

Моей работе, результатам посвящена передовая, обзорная статья в Ч. 1 этого журнала. Статья написана высококвалифицированными уважаемыми специалистами, я признателен им за большой труд.

Статья посвящена, в основном, общим вопросам теории пластичности, хочу высказать несколько соображений на этот счет. Речь, разумеется, идет о квазистатических процессах деформирования твердых тел.

Сен-Венан (1872 г.) сформулировал соотношения плоской задачи теории идеальной пластичности для изотропного, несжимаемого тела.

Соотношения Сен-Венана – простейший, основной, становой вариант теории. Все дальнейшее: исследование свойств уравнений, замечательные результаты Прандтля, интегралы Генки и т.д., учет сжимаемости, анизотропии, мощное развитие теории и приложений – все это заслуживает глубокого уважения, но, скажем так, все это вторично по отношению к результатам Сен-Венана.

В основу своих построений Сен-Венан положил условие пластичности максимального касательного напряжения

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2, \quad k - const, \quad (1)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  - компоненты напряжения,  $k$  - предел текучести при сдвиге.

На использование условия пластичности (1) Сен-Венана натолкнули результаты опытов Треска, из которых следовало, что пластическое течение свинца происходит при достижении максимальным касательным напряжением некоторого предельного значения.

Условие пластичности для плоской задачи может быть записано в виде

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0. \quad (2)$$

Важно отметить, что любое условие пластичности (2) для несжимаемого изотропного материала сводится к условию (1).

Для изотропного материала условие пластичности (2) должно зависеть только от инвариантов напряжений. В качестве инвариантов используем величины главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , условие пластичности (2) примет вид

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = 0. \quad (3)$$

Условие (3) можно переписать в виде

$$f(\sigma, \tau) = 0, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (4)$$

Предположим, что для несжимаемого тела величина среднего давления  $\sigma$  не оказывает влияния на пластические свойства материала<sup>1</sup>, условие пластичности (4) принимает вид

$$f(\tau) = 0, \quad \tau - const. \quad (5)$$

Из (5) следует (1).

В случае плоской задачи имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Соотношения (1), (6) образуют замкнутую статически определимую систему трех уравнений относительно трех неизвестных  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ .

Компоненты напряжения могут быть определены независимо от компонент, характеризующих деформированное состояние.

Сен-Венан установил уравнения для определения компонент приращений деформаций на основе условий несжимаемости и изотропии. Компоненты приращений деформации или компоненты скорости деформации определяются согласно независимо найденному полю напряжений.

Было установлено, что уравнения плоской задачи теории изотропного несжимаемого тела (1), (6) принадлежат к гиперболическому типу, а ортогональные характеристики совпадают с линиями действия максимальных касательных напряжений. Оказалось далее, что уравнения для приращений перемещений или для компонент скорости перемещений также принадлежат к гиперболическому типу и характеристики для полей напряжений и скорости перемещений совпадают между собой.

Позднее было установлено, что соотношения теории идеальной пластичности Сен-Венана могут рассматриваться как соотношения теории предельного состояния материала.

Предельное состояние тел рассматривалось Кулоном (1773), Ренкиным и др. задолго до Сен-Венана. В основу были положены наблюдаемые явления оползней. Были сформулированы представления о поверхностях скольжения. Пирамида Кулона, интерпретирующая условие предельного состояния в пространстве главных напряжений, включает в себя как частный случай призму Сен-Венана.

Но до уравнений Сен-Венана замкнутой системы уравнений теории предельного состояния не было. Уравнения предельного состояния грунтов, статики сыпучей среды, основанные на условии предельного состояния Кулона, сформулированы как обобщение уравнений Сен-Венана на случай зависимости свойств материала от гидростатического давления.

Простейший пример предельного состояния представлен на рис. 1. Тело  $Q$  находится под действием сдвигающего усилия  $P$ . Максимальное значение силы трения –  $T$ . Предельное состояние имеет место при  $P = T$ . Квазистатическое перемещение тела  $Q$  возможно при затрате работы  $A = T \cdot s$ , где  $A$  – величина работы,  $s$  – длина пути перемещения  $Q$ . Очевидно, работа диссипируется. Если к телу  $Q$  приложить силу  $P > T$ , возникают силы инерции, процесс перестает быть квазистатическим.

Собственно, модель, изображенная на рис. 1, наглядно поясняет суть явлений, происходящих при предельном состоянии в идеальнопластическом теле: при достижении максимальным касательным напряжением предельного значения (5) тело перестает “держаться”, вдоль линий максимальных касательных напряжений начинает иметь место проскальзывание. Линии скольжения совпадают с линиями действия максимальных касательных напряжений.

<sup>1</sup>В принципе можно предположить, что при (4), условие несжимаемости имеет место, но это из области не вполне корректных обобщений теории. Отметим, что условие (4) используется при исследовании общей плоской задачи теории идеальной пластичности, куда входит плоское напряженное состояние.

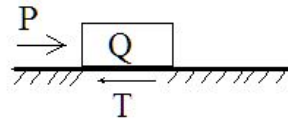


Рис. 1.

Итак, особенности соотношений теории идеальной пластичности или теории предельного состояния в случае плоской задачи для несжимаемого изотропного материала:

1. Единственно возможное условие пластичности или условие предельного состояния (1).
2. Статически определяемый характер определяющих уравнений.
3. Независимое определение поля напряжений и предельной нагрузки от поля скоростей перемещений.
4. Гиперболический характер уравнений для определения компонент напряжений и компонент скорости перемещений, причем ортогональные характеристики являются линиями действия максимальных касательных напряжений и линиями скольжения.

На замечательных результатах по определению статически допустимых полей напряжений, кинематически допустимых полей скоростей перемещений, определению верхних и нижних оценок предельных нагрузок и т.д. - на этом останавливаться не будем.

Перейдем к определению общих уравнений теории предельного состояния для простейшего, основного, станového варианта.

Уравнения равновесия в общем случае имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (7)$$

Система трех уравнений равновесия (7) относительно шести компонент напряжений  $\sigma_{ij}$  является статически неопределимой.

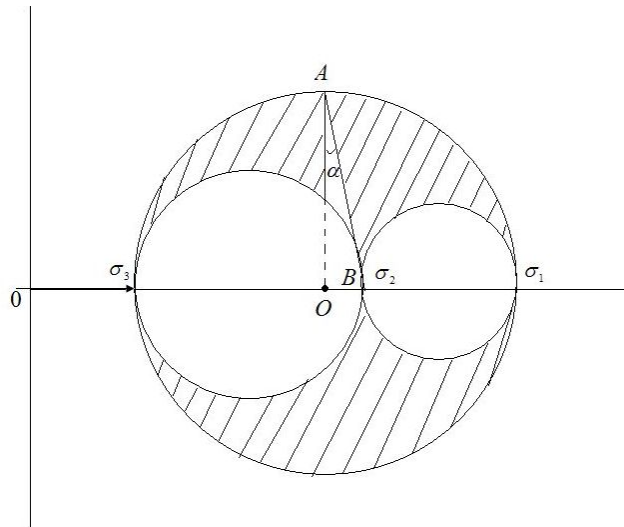


Рис. 2.

Рассмотрим главные напряжения

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (8)$$

и соответствующие круги Мора (рис. 2).

Состоянию статической неопределимости соответствует область внутри большого круга Мора и вне малых кругов Мора, заштрихованная на рис. 2. Положение малых кругов Мора может быть охарактеризовано параметром Лоде  $\lambda$ , характеризующем положение промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$  относительно точки О - центра большого круга Мора (рис. 2).

$$\lambda = \frac{OB}{OA} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (9)$$

Положение малых кругов Мора может быть охарактеризовано также коэффициентом интенсивности статической неопределимости напряженно-деформированного состояния материала  $\Delta$ , введенного в [3]. Величина коэффициента интенсивности статической неопределимости  $\Delta$  определяется отношением

$$\Delta = \frac{S_{13} - S_{12} - S_{23}}{S_{13}} = \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2 - \tau_3^2}{\tau_2^2}, \quad (10)$$

где  $S_{ij}$  - площадь круга с диаметром  $\sigma_i - \sigma_j$  (рис. 2),

$$\tau_i = \frac{\sigma_j - \sigma_k}{2}, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0. \quad (11)$$

Согласно (10), (11) найдем

$$\Delta = \frac{2\tau_1\tau_3}{\tau_2^2}. \quad (12)$$

Связь между параметрами  $\lambda$  (9),  $\Delta$  (12) определяется соотношениями

$$\lambda^2 = 1 - 2\Delta, \quad \Delta = \frac{1}{2}(1 - \lambda^2). \quad (13)$$

В теории предельного состояния по определению необходимо ввести некоторое предельное условие для напряжений. Рассмотрим случай изотропного, несжимаемого тела, свойства которого не зависят от величины среднего давления  $\sigma$ .

Условие предельного состояния может быть записано в виде

$$f(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) = 0, \quad \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0, \quad (14)$$

где  $\sigma'_i = \sigma_i - \sigma$  - главные компоненты девиатора напряжений.

Выражение (14) можно записать в виде

$$f(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3) = 0. \quad (15)$$

Хаар и Карман (1907 г.) ввели условие полной пластичности, соответствующее исчезновению зоны статической неопределимости (рис. 3).

В случае полной пластичности

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{либо} \quad \sigma_2 = \sigma_3. \quad (16)$$

Согласно (9), (12), (16) состоянию полной пластичности соответствуют

$$\lambda = \pm 1; \quad \Delta = 0 \quad \text{при} \quad \tau_1 = 0 \quad \text{или} \quad \tau_3 = 0. \quad (17)$$

Условие (15) согласно (16) примет вид

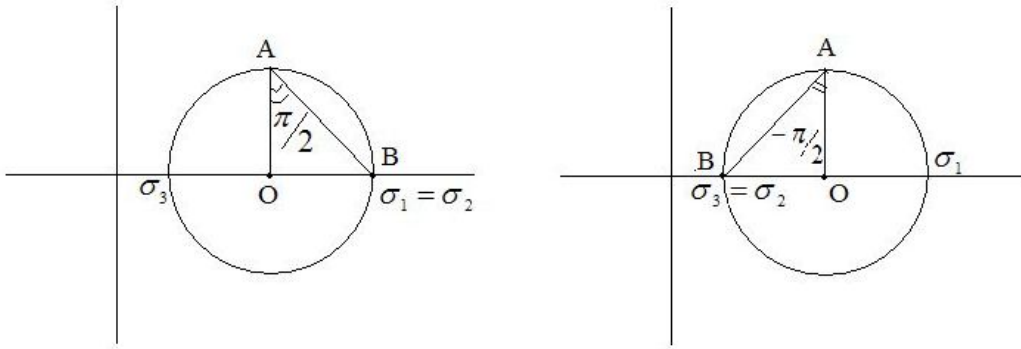


Рис. 3.

$$f(\sigma_1 - \sigma_3) = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{либо} \quad \sigma_2 = \sigma_3, \quad (18)$$

откуда

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2k, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{либо} \quad \sigma_2 = \sigma_3, \quad k - const, \quad (19)$$

где  $k$  - предел текучести при сдвиге.

В работах [1], [2] показано, что при условии полной пластичности (19) соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности для несжимаемого изотропного идеальнопластического тела являются статически определяемыми, уравнения для компонент напряжений и скорости перемещения принадлежат к гиперболическому типу, имеют совпадающие характеристические поверхности, причем характеристические поверхности совпадают с поверхностями действия максимальных касательных напряжений и являются поверхностями скольжения.

Другими словами, соотношения Сен-Венана можно рассматривать как частный случай соотношений [1], [2].

Итак, особенности соотношений теории предельного состояния для несжимаемого изотропного материала:

1. Единственно возможное условие пластичности или условие предельного состояния (19), определяющее выход на предельное состояние способности сопротивления нагрузке при определенном пределе текучести на сдвиг  $k$ .

2. Статически определяемый характер уравнений.

3. Независимое определение поля напряжений и предельной нагрузки от поля скорости перемещения.

4. Гиперболический характер уравнений для определения компонент напряжений и компонент скорости перемещений. Причем характеристические поверхности для полей напряжений и скоростей перемещений совпадают между собой, являются поверхностями действия максимальных касательных напряжений и поверхностями скольжения.

В каждой точке тела нормали к элементам характеристических поверхностей образуют конус с осью вдоль направления третьего главного напряжения  $\sigma_3$  (19), с углом раствора  $\frac{\pi}{4}$  (рис. 4).

Таким образом, в [1], [2] сформулирован простейший, основной, становой вариант пространственной задачи теории предельного состояния. В рамках принятых предположений другого здесь не дано, вариантов нет. Остальное в пространственной задаче – развитие этих результатов.

В своих работах я уделил достаточно внимания обобщениям теории на случай сжимаемости, различных видов анизотропии, определению соотношений теории идеальной пластичности на основе диссипативной функции, различным пространственным задачам и т.д. Все это заслуживает внимания, представляет интерес, но все это вторично по отношению к результатам [1], [2].

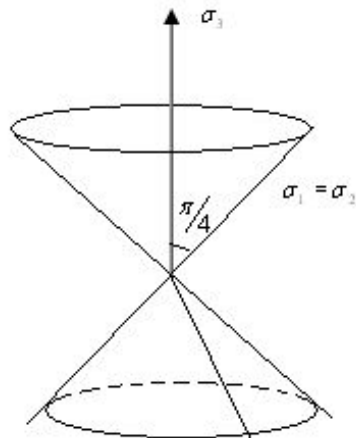


Рис. 4.

Фундаментальная роль условия полной пластичности или полного предельного состояния состоит в том, что оно определяет предел возможного сопротивления внешним нагрузкам, соответствует достижению предельного возможного сопротивления телом внешней нагрузке, соответствует переходу статически неопределимого состояния в качественно новое предельное статически определимое состояние. А отсюда все остальное – смена типа определяющих уравнений и т. д.

Условие полной пластичности, введенное Хааром и Карманом в 1907 г., получало различные оценки в литературе, в основном неверные, неполные, неглубокие и поверхностные. Конечно, есть ученые, которые в полной мере понимают значение и роль условия полной пластичности, к их числу принадлежали А. Ю. Ишпинский и Е. И. Шемякин.

Иногда особую роль в оценке условия полной пластичности придают тому, что оно соответствует пересечению двух граней призмы Треска, её ребру. Но это ребро с таким же успехом может быть пересечением двух плоскостей в пространстве главных компонент девиатора напряжений, не связанных с призмой Треска.

Изложу свою точку зрения на статически неопределимое состояние. Некоторые термины, которые я использую для себя, возможно, помогут пояснить мои соображения.

Рассмотрим линейно упругое тело. Согласно закону Гука имеет место линейная зависимость между компонентами напряжений и деформаций, система соотношений статически неопределимая. Приращения напряжений соответствуют приращениям деформаций. Приращение внешней нагрузки ведет к приращениям напряжений и деформаций. Способность тела сопротивляться приращениям внешних нагрузок я определяю для себя “способностью жить”.

Итак, упругое тело – “живое”. Любое изменение внешней нагрузки отзывается во всех точках тела, “нервная система” в отличном состоянии. Уравнения “живого” упругого тела принадлежат к эллиптическому типу. Уравнения теории упругости не предусматривают достижения какого-либо предельного состояния.

Статически неопределимые состояния характеризуются связью между приращениями напряжений и приращениями деформаций, тело способно сопротивляться приращениям внешних нагрузок, тело “живет”. Все качественные особенности поведения, так наглядно проявляющиеся у упругого тела, имеют место, уравнения “живого” статически неопределимого состояния принадлежат к эллиптическому типу.

При достижении состояния полной пластичности, полного предельного состояния, когда все возможности тела к сопротивлению исчерпаны, тело перестает “держаться”, образуются внутренние поверхности скольжения, вдоль которых имеет место предельное значение сдвиговых напряжений, которое не может быть превзойдено.

Уравнения гиперболического типа полностью соответствуют характеру предельного состояния тела, когда имеют место характеристические поверхности, являющиеся поверхностями скольжения или проскальзывания, не допускающие приращения внешней нагрузки.

Меня всегда восхищал гиперболический тип уравнений теории идеальной пластичности в полной мере адекватный предельному сдвиговому характеру пластического деформирования. Мы с Геннадием Ивановичем Быковцевым решили исследовать всевозможные уравнения теории течения с тем, чтобы “отыскать” варианты теории, в том числе для упрочняющегося тела, для которых система определяющих уравнений принадлежала бы к гиперболическому типу. Основные работы в этом направлении выполнены Г. И. Быковцевым. К нашему удивлению, даже, если угодно, сожалению и разочарованию, ничего подобного обнаружено не было. К этим выводам независимо пришел и Томас. Г. И. проделал громадную работу. Исследование свойств нелинейных статически неопределимых уравнений теории идеальной пластичности в общем случае очень непростая задача. В процессе этой работы Г. И. сформировался как ученый, высококлассный специалист в области математической теории пластичности. Результат есть результат. Свои исследования Г. И. блестяще защитил в качестве докторской диссертации на мехмате МГУ. В 1971 г. мы издали книгу “Теория упрочняющегося пластического тела”.

Если бы я тогда понимал, что “живые” статически неопределимые соотношения, особенно такие, как для упрочняющегося пластического тела, содержащие явную связь между компонентами напряжений и деформаций, никогда не могут привести к уравнениям гиперболического типа, возможно, мы занялись бы другими вопросами.

Рассмотрим условие пластичности

$$-2\tau_2 = \sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1, \quad k - const, \quad (20)$$

соответствующее грани призмы Треска, или отрезку  $AA_1$ , шестиугольника Треска в девиаторной плоскости (рис. 5а).

При условии пластичности Треска (20) напряженное состояние является статически неопределимым, следовательно тело способно выдерживать приращение внешних нагрузок за счет изменения величины  $\sigma_2$ .

Рассмотрим второй инвариант девиатора напряжений

$$\Sigma'_2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2. \quad (21)$$

Согласно (10), (11) запишем соотношение (21) в виде

$$\Sigma'_2 = k^2(2 - \Delta), \quad \Delta = \frac{\Sigma'_2}{k^2} - 2. \quad (22)$$

Для меня параметр  $\Delta$  предпочтителен тем, что значение  $\Delta = 0$  соответствует исчезновению зоны статической неопределимости (рис. 1, 2).

В процессе приращения внешних нагрузок величина  $\Delta$  уменьшается, изменение  $\Delta$  может быть связано с изменением  $\Sigma'_2$  (22).

Рассмотрим (22) в качестве условия пластичности и присоединим (22) к (21), другими словами, рассмотрим условие пластичности как совокупность двух условий

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad \Sigma'_2 = 2 - \Delta. \quad (23)$$

Точки  $B, B_1$  соответствуют в девиаторной плоскости ребру пересечения призмы Треска и цилиндра Мизеса (23) (рис. 5а).

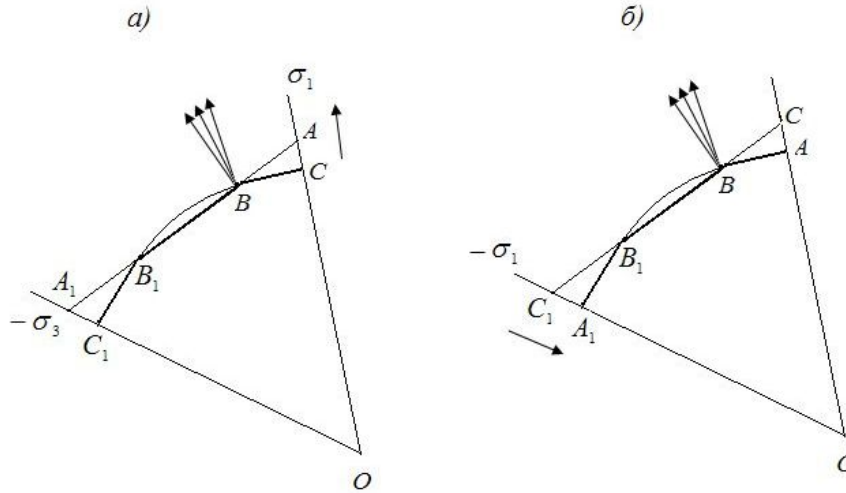


Рис. 5.

Сингулярное условие пластичности (23) является статически неопределимым, при  $\Delta \rightarrow 0$  точки  $B, C$  смещаются к точке  $A$ , соответствующей условию полной пластичности (рис. 5а). При  $\Delta = 0$ , при совпадении точек  $A, B, C$  статически неопределимое состояние переходит в статически определенное.

Рассмотрим условие пластичности Мизеса

$$\Sigma'_2 = 2k^2, \quad k - \text{const}. \quad (24)$$

Из (10), (11), (24) следует

$$\tau_2^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \frac{2k^2}{2 - \Delta}, \quad \Delta = 2 \left( 1 - \frac{k^2}{\tau_2^2} \right). \quad (25)$$

В процессе приращения внешних нагрузок величина  $\Delta$  уменьшается, изменение  $\Delta$  может быть связано с изменением  $\tau_2$  (25).

Рассмотрим (25) в качестве условия пластичности и присоединим (25) к (24)

$$\Sigma'_2 = 2k^2, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{2 - \Delta}}. \quad (26)$$

Сингулярное условие пластичности (26) является статически неопределимым, при  $\Delta \rightarrow 0$  точки  $B, C$  смещаются к точке  $A$ , соответствующей условию полной пластичности (рис. 5б). При  $\Delta = 0$  статически неопределимое состояние переходит в статически определенное.

В теории плоской задачи теории идеальной пластичности условие пластичности (1) замыкает систему уравнений (6). В пространственной задаче одно условие пластичности

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (27)$$



естественно, накладывает ограничения на напряженное состояние, но система уравнений (7), (27) является статически неопределимой.

Более того, два предельных условия

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_2(\sigma_{ij}) = 0 \quad (28)$$

образуют с уравнениями (7) систему шести уравнений относительно пяти неизвестных  $\sigma_{ij}$  и, следовательно, уравнения (7), (28) являются статически неопределимыми и тело остается “живым”, способным выдержать приращение внешней нагрузки. “Разложение” материала происходит при достижении состояния полной пластичности, когда внутренние скольжения не позволяют выдерживать приращения внешней нагрузки.

В передовой статье упоминается обзорная статья по теории пластичности, опубликованная в сборнике “Механика в СССР за 50 лет”, изданного в 1972 г. Статья была заказана Августу Алексеевичу Вакуленко и Лазарю Марковичу Качанову. Первый вариант обзора был прислан редакцией мне на рецензирование. Я с большим удивлением, трудно подобрать слово, увидел, что весь обзор, по существу посвящен теориям процессов пластического деформирования, а о фундаментальных достижениях в области модельных представлений теории пластичности практически ничего нет. Очевидно, что первую скрипку играл А. А., он увлекался новациями.

Я написал так, как считал нужным. Обзор был быстро переделан, время подбирало, и принял вид, который был опубликован. Вскоре на каком-то докладе я встретил Вакуленко, отношения у нас были достаточно простые, на *ты*. Он сказал: Дюис, что ты на нас так ополчился. Я ответил. С Л. М. на эту тему мы не разговаривали.

А то, что они написали, что условие полной пластичности годно лишь на то, чтобы легче решать задачи, то, по-видимому, они так и думали. Моя оценка подобных высказываний дана выше.

Возвращаюсь к передовой статье. Мне кажется, что несколько затуманена роль Прандтля в развитии теории идеальной пластичности.

В статье: *если еще учесть, что характеристическое поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.*

И с физической, и с математической точки зрения суть состоит в том, что при условии пластичности Мизеса, как и при любом другом условии пластичности  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , общие соотношения теории идеальной пластичности являются статически неопределимыми, уравнения принадлежат к эллиптическому типу, действительных характеристик не имеют. Более того, если к условию пластичности Мизеса добавить дополнительные ограничения на напряжения (26), статически неопределимая система уравнений (7), (26) будет также принадлежать к эллиптическому типу.

Мне кажется, что статья содержит несколько категоричные оценки степени ценности решений теории предельного состояния или идеальной пластичности: *... нетрудно заключить, что по большому счету неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют.* Правда, далее отмечается, что, практическая ценность таких решений может быть очень высокой и т.д.

При определении статически допустимых решений теории идеальной пластичности требуется, чтобы во всей области определения решения предел текучести не был бы превзойден. Требования естественные. Появилось понятие “полного решения”, когда следует доказать, что при данном решении вне области решения предел текучести не превзойден. Доказательство полноты решения обычно проводят используя теорему Бишопа о продолжении решения на пределе текучести в жесткую область. Обычно, скажем, для полупространства область продолжения решения занимает ограниченную часть и большая часть жесткого материала является избыточной.

Речь идет о статически допустимых напряжениях. В качестве статически допустимого может быть использовано упругое поле напряжений в области вне зоны решения задачи идеальной пластичности при усилиях, действующих на границе жесткой зоны. Очевидно, что такие решения существуют, максимальные значения напряжений для упругого тела достигаются на границе, следовательно, внутри сплошного тела предел текучести превзойден не будет. Но если удалять жесткий материал, то в конце концов можно прийти к тому, что при данном решении предел текучести в жесткой области может быть превзойден. Но в таких случаях надо искать другое решение задачи предельного состояния, которое приводит к меньшей предельной нагрузке.

Чтобы доказывать полноту решения, надо сначала получить решение, которое может быть связано с очень высокой техникой и остроумными соображениями, которые сами по себе имеют практическую и теоретическую ценность.

Частую решения, не удовлетворяющие условиям статической допустимости напряжений, могут быть использованы в качестве кинематически допустимых для определения верхнего значения предельной нагрузки.

Не буду продолжать тему, как видно, есть что обсудить.

Сергей Иванович Сенашов написал лестные для меня слова, которые при всем желании я не могу отнести на свой счет.

В пластичности работали такие гениальные люди, как Сен-Венан, Прандтль, Мизес, такие гиганты как Соколовский, Ильюшин, Ишлинский, Прагер, Койгер, Хилл и др. Безусловно, мои определения и набор имен субъективны, список справедливо может быть продолжен и продолжен. Просто я хочу сказать, что если я что-то и получил, то только потому, что шел по следам гигантов.

Когда Хаар и Карман в своей великой работе 1907 г. ввели понятие полной пластичности, им было достаточно половины страницы, чтобы получить статически определимую систему уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности, и без всякого ассоциированного закона пластического течения только из условия изотропии получить уравнения для поля скоростей перемещений.

Другой половины страницы хватило бы для того, чтобы показать, что именно условие полной пластичности соответствует достижению телом предельной способности к сопротивлению. Вот и все.

Но до этого *вот и все* оказался долгий путь.

Ингемар Бергман: *“У меня бывает ощущение, что все мы – частицы бесконечного, огромного целого, которое не надо анализировать, его не дано понять, невозможно потрогать. Его иногда можно только ощутить”*.

Карл Фридрих Гаусс: *Мы должны признаться честно и откровенно, что в существенном мы нисколько не ушли в две тысячи лет дальше Эвклида. Такое откровенное и лишенное всяких обиняков признание кажется нам более соответствующим достоинству науки, чем тщетное старание скрыть пробел, который мы не можем наполнить под не выдерживающую критику сетью видимых доказательств*.

В сущности, мне кажется, что мы все-таки ушли от Эвклида, но Гаусс – это Гаусс.

Мне нравится у Зощенко:

*Итак, книга кончена. Последние страницы я дописываю в Сестрорецке 9 августа 1933 года.*

*Я сижу на кровати у окна. Солнце светит в мое окно. Темные облака плывут. Собака лает. Детский крик раздается. Футбольный мяч взлетает в воздух. Красавица в пестром халате, играя глазами, идет купаться.*

*Кашкин попевает за ней, поглядывая на ее пышные плечи.*

*Он поигрывает прутиком и насвистывает победный марш.*

*В саду скрипнула калитка. Маленькая девчушка, как говорит мой друг Олеша – похожая на веник, идет в гости к моему сыну.*

*Благополучие и незыблемость этих вечных картин меня почему-то радует и утешает. Я не хочу больше думать и на этом прерываю свою повесть.*

Я за городом. За окном белый, пушистый, глубокий снег. Деревья в снегу. Особенно красивы заснеженные ели. Тишина.

Прилетела сорока. Вспархивает с ветки на ветку, проверяет свои владения. Кот сидит на столе на моих бумагах, внимательно смотрит в окно. Лева вносит дрова, пора топить печь.

21.01.2011

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1958. – Т. 22, Вып. 1. – С. 90–96.

[2] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях / Д. Д. Ивлев // ДАН СССР. – 1959. – Т. 124. – № 3. – С. 546–549.

[3] *Ивлев, Д. Д.* Коэффициент интенсивности статической неопределенности и достижения состояния полной пластичности / Д. Д. Ивлев // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2009. – № 1. – С. 76–80.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.

**Варданян Седрак Ваникович (vardanyan\_s@yahoo.com)** – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone\_mail.ru)** – доктор физ-мат наук, профессор, Московский государственный университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

**Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – Академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

**Кулиев Валех Джафарович** ([pmdekanat@rambler.ru](mailto:pmdekanat@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

**Ломакин Евгений Викторович** ([lomakin@nw.math.msu.su](mailto:lomakin@nw.math.msu.su)) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Максимова Людмила Анатольевна** ([maximova\\_ng@mail.ru](mailto:maximova_ng@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары, г. Чебоксары.

**Манжиров Александр Владимирович** ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Маркин Алексей Александрович** ([markin@tsu.tula.ru](mailto:markin@tsu.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Матченко Николай Михайлович** ([ekc\\_05@mail.ru](mailto:ekc_05@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Миронов Борис Гурьевич** ([prorektor@chdpu.edu.ru](mailto:prorektor@chdpu.edu.ru)) – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([irakon63@hotmail.com](mailto:irakon63@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

**Михайлов Глеб Константинович** ([gkmikh@mail.ru](mailto:gkmikh@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

**Немировский Юрий Владимирович** ([nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет “СТАНКИН”, г. Москва.

**Победря Борис Ефимович** ([rob@mail.ru](mailto:rob@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ssu.samara.ru](mailto:radayev@ssu.samara.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара.

**Ревуженко Александр Филиппович** ([revuzhenko@yandex.ru](mailto:revuzhenko@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

**Редкозубов Сергей Алексеевич** ([marucbka434@yandex.ru](mailto:marucbka434@yandex.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

**Сенашов Сергей Иванович** ([sen@sibsau.ru](mailto:sen@sibsau.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

**Спорыхин Анатолий Николаевич** ([shashkin@amm.vsu.ru](mailto:shashkin@amm.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

**Тамуж Витаутас Петрович** ([tamuza@pmi.lv](mailto:tamuza@pmi.lv)) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

**Тихонов Сергей Владимирович** ([strangcheb@mail.ru](mailto:strangcheb@mail.ru)) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Трещев Александр Анатольевич** ([taa58@yandex.ru](mailto:taa58@yandex.ru)) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Хромов Александр Игоревич** ([khromovai@list.ru](mailto:khromovai@list.ru), [khromov@ssau.ru](mailto:khromov@ssau.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

**Чигарев Анатолий Власович** ([chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

**Шашкин Александр Иванович** ([shashkin@amm.vsu.ru](mailto:shashkin@amm.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния» издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.



## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Плаксина И. В.</i> Численное моделирование свободноконвективного пограничного слоя в пористой среде при заданной теплоотдаче на вертикальной поверхности	405
<i>Потянихин Д. А.</i> Алгоритм решения автомодельных задач динамики ударного деформирования твердого тела	413
<i>Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.</i> Эволюционные уравнения для одномерных ударных волн в несжимаемых твердых телах	424
<i>Ревуженко А. Ф.</i> Об использовании в теории пластичности методов неархимедова анализа	439
<i>Северин Г. Ю., Шашкин А. И.</i> Ортогональные финитные функции для нелинейного пространственного уравнения состояния плазмы	452
<i>Семенов К. Т., Герасименко Е. А.</i> Диссипативные разрывы при кусочно-линейных условиях пластичности	459
<i>Сенашов С. И., Яхно А. Н., Яхно Л. В.</i> Построение новых решений и их характеристик для двумерной идеальной пластичности с помощью симметрий	473
<i>Сильвестров В. В., Васильева Ю. О.</i> Полубесконечная трещина с жесткой накладкой на берегу	492
<i>Сумин А. И.</i> Возникновение стохастической неустойчивости в нелинейных колебаниях упругих тел	501
<i>Трещев А. А., Теличко В. Г.</i> Расчет напряженно-деформированного состояния железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны	506
<i>Трещев А. А., Рыбальченко С. А.</i> Решение задачи пластического изгиба тонкой круглой пластины из дилатирующих материалов	513
<i>Хромов А. И., Патлина О. В.</i> Пластические течения в окрестности скругленных угловых вырезов	521
<i>Цвелодуб И. Ю.</i> Об обратном тензоре Эшелби	530
<i>Чернышов А. Д.</i> Построение двумерной граничной функции для быстрых рядов Фурье	535
<i>Чигарев А. В., Мелешко И. Н., Пронкевич С. А.</i> Изгибание тонких пластин при отсутствии поперечного нагружения	541
<i>Чигарев А. В., Борисов А. В.</i> Предельные нагрузки в суставах человека	548

<i>Чигарев А. В., Чигарев Ю. В., Пронкевич С. А.</i> Нелинейная динамика линий тока энергии в механике неоднородных сред .....	553
<i>Непершин Р. И.</i> Идеальное пластическое деформирование толстостенных труб	562
<i>Ивлев Д. Д., Максимова Л. А.</i> Об условиях анизотропии идеальнопластических тел .....	571
<i>Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г.</i> О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении .....	576
<i>Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г.</i> О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации ...	580
<i>Ивлев Д. Д., Максимова Л. А.</i> О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса ..	583
<i>Рыбакова Т. И.</i> О сдавливании анизотропного идеальнопластического слоя ...	585
<i>Радаев Ю. Н., Ревинский Р. А., Таранова М. В.</i> Локализация волновых чисел связанной термоупругой волны в цилиндрическом волноводе с теплопроницаемой стенкой .....	588
<i>Митрофанова Т. В.</i> Об условиях трансляционной анизотропии идеальнопластических тел при кручении .....	596
<i>Митрофанова Т. В.</i> О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении .....	601
<i>Фоминых С. О.</i> Двусное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии .....	610
<i>Фоминых С. О.</i> Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной трубы .	623
<i>Ивлев Д. Д.</i> 80.,.....	628
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	639
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	642
СОДЕРЖАНИЕ .....	644

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2010. № 2(8). Ч. 3**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** Л. Н. Улюкова, И. А. Федянина

**Компьютерная верстка:** Т. В. Митрофанова, С. О. Фоминых

**Макет:** Т. В. Митрофанова, С. О. Фоминых

---

Подписано в печать 26.11.2010. Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.  
Усл. печ. л. 30,4. Тираж 400 экз. Цена свободная. Заказ №2183

---

Отпечатано в отделе полиграфии ГОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38