

ББК 95.4; 22.251
Ч-823

Подписной индекс в каталоге Роспечать: 33285
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
№ 1(9). 2011

Учредитель: ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор: Г. Н. Григорьев

Учредители серии: Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

Редакционная коллегия: Ивлев Д. Д. (ответственный редактор), Максимова Л. А., Матченко Н. М., Миронов Б. Г. (зам. ответственного редактора), Тихонов С. В. (ответственный секретарь), Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победра Б. Е., Радаев Ю. Н., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Хромов А. И., Шашкин А. И.

Международный совет: Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2011

К 80-летию

Зубчанинова Владимира Георгиевича,

доктора технических наук, профессора,

заслуженного деятеля науки и техники Российской Федерации

К 80-ЛЕТИЮ ВЛАДИМИРА ГЕОРГИЕВИЧА ЗУБЧАНИНОВА

Зубчанинов Владимир Георгиевич (р. 1930) – крупный ученый в области механики деформируемого твердого тела и сплошных сред, автор фундаментальных теоретических и экспериментальных исследований по теории пластичности, прочности и устойчивости упругопластических конструкций. В. Г. Зубчанинов – заслуженный деятель науки и техники РФ, член национального комитета Российской Академии наук (РАН) по теоретической и прикладной механике, почетный работник высшего профессионального образования РФ, почетный профессор Тверского государственного технического университета (ТГТУ), доктор технических наук, профессор, академик ряда российских академий.

Работает в ТГТУ с 1959 г. С 1973 г. по настоящее время является заведующим кафедрой “Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности”. С 1975 по 1976 г. – декан инженерно-строительного факультета ТГТУ, в 1977–1987 гг. – ректор ТГТУ, в 1978–1987 гг. – председатель Совета ректоров вузов г. Калинина (ныне г. Тверь).

В. Г. Зубчанинов закончил с отличием физико-математический факультет Ростовского-на-Дону государственного университета по специальности “Механика” (1954), аспирантуру института механики РАН по специальности “Теория упругости и пластичности” (1958). В 1960 г. защитил в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (научный руководитель – член-корр. РАН Ильюшин А.А.), а в 1972 г. – в Московском инженерно-строительном институте диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук, которую подготовил на кафедре теории упругости Московского государственного университета под руководством члена-корреспондента АН СССР и РАН, академика российской академии ракетных и артиллерийских наук, профессора А. А. Ильюшина.

В. Г. Зубчанинов своими фундаментальными исследованиями в области прочности и пластичности конструкционных материалов, устойчивости конструкций и их элементов внес выдающийся вклад в науку (механику деформируемого твердого тела) и техническое образование. Созданные им научные концепции, теории и математические модели, экспериментальные методы в сопротивлении материалов, теории упругости и пластичности, устойчивости конструкций эффективно используются в различных областях науки и техники, опубликованы в энциклопедии РАН “Машиностроение” (1995), в серии его научных монографий “Устойчивость и пластичность”, “Механика процессов пластических сред”, изданных издательством “Физматлит” РАН (2007–2009) при поддержке РФФИ, а также в известной монографии “Математическая теория пластичности” (2000).

В. Г. Зубчанинов – создатель и руководитель Тверской научной школы в области механики деформируемого твердого тела, которая занимается общими вопросами прочности и пластичности конструкций в машиностроении и строительстве в условиях

их сложного напряженного и деформированного состояния и сложного нагружения, построением математических моделей упругопластических тел и конструкций и современными методами их расчета. В этой области под руководством В. Г. Зубчанинова достигнуты впечатляющие фундаментальные результаты: разработаны общая теория определяющих законов процессов пластического деформирования сплошных сред и материалов, концепция устойчивости упруговязкопластических систем и конструкций, общая теория устойчивости оболочек, пластин и стержневых систем за пределом упругости при сложном нагружении, метод управляемых процессов упругопластического деформирования конструкций с целью повышения их прочности и устойчивости и уменьшения их материалоемкости, совместно с А.А. Ильюшиным разработана теория устойчивости разгружающих упругопластических систем, разработаны новые инженерные практические методы расчета конструкций на прочность и устойчивость в условиях их сложного нагружения, разработан и создан автоматизированный испытательный комплекс СН-ЭВМ на сложное нагружение материалов в лаборатории механических испытаний кафедры для исследования закономерностей механического поведения конструкционных материалов. Этот комплекс уникален по своим возможностям и полученным новым фундаментальным научным результатам мирового уровня.

Кафедра СМТУиП, которую возглавляет профессор В. Г. Зубчанинов, является не только общетехнической, но и выпускающей по подготовке магистров по направлению “Расчет и проектирование зданий и сооружений в строительстве”, аспирантов и докторантов по специальности “Механика деформируемого твердого тела”.

В. Г. Зубчаниновым написаны для студентов и аспирантов такие известные в стране учебники и учебные пособия, как “Основы теории упругости и пластичности” (М.: Высшая школа, 1990), “Устойчивость” (1995), “Механика сплошных деформируемых сред” (2000), “Сопrotивление материалов” (2005) и др. Им опубликовано более 300 научных трудов, в т.ч. за последние пять лет (2005–2010) – 42 научных труда, в т.ч. – 6 научных монографий, 2 учебника и 2 учебных пособия. Под его научной редакцией вышло более 30 сборников научных трудов, в т.ч. по заданию Минвуза РФ и Минвуза СССР.

Профессор В. Г. Зубчанинов организовал и провел в Твери на базе ТГТУ 7 всесоюзных и международных симпозиумов по прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела (1981, 1986, 1992, 1997, 2000, 2005, 2010), многие республиканские межвузовские научные семинары, которые сыграли большую роль в развитии этих направлений в нашей стране. В развитии этих научных направлений в координационном плане Минвуза СССР (1982, 1985–90 гг) ТГТУ был признан как головной вуз по проблеме устойчивости и пластичности и вошел в восьмерку ведущих вузов СССР, таких как Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургский государственный университет, МГТУ им. Баумана, Московский авиационный институт, Казанский государственный университет и др. По итогам этой работы ТГТУ по приказу Минвуза СССР издал 8 межвузовских сборников научных трудов по различным научным направлениям координационного плана вузов страны, согласованного с АН СССР, были проведены всесоюзные конференции. ТГТУ как головной вуз и признанный научный центр по проблеме устойчивости и пластичности традиционно проводит международные симпозиумы через каждые 5 лет. В последующие годы (1990–1992 гг) ТГТУ в составе 50 ведущих вузов СССР был включен в научно-техническую программу “Механика деформируемых тел и сред”

и кафедры успешно работала над проблемой “Модели и определяющие соотношения пластического и сверхпластического деформирования”.

С 1997 г. на кафедре СМТУиП ТГТУ под руководством В. Г. Зубчанинова ежегодно проводится межвузовский научный семинар “Тверские научные чтения в механике деформируемого твердого тела” для аспирантов и молодых ученых, который играет большую роль в подготовке кадров высшей квалификации (кандидатов и докторов наук) для ТГТУ и Верхневолжского региона. На чтениях в разное время выступали с проблемными докладами выдающиеся ученые страны, такие как академик РАН, член-корр. РАН А.А. Ильющин, академики РАН Е.И. Шемякин, Н.Ф. Морозов, И.Г. Горячева, И.И. Ворович, профессора А.А. Толоконников, А.М. Жуков, Д.Д. Ивлев, А.Р. Ржаницын, Ю.Р. Лепик и многие другие. За свою многолетнюю научно-педагогическую деятельность профессор В. Г. Зубчанинов подготовил более 40 докторов и кандидатов наук. С 1982 г. он бессменный председатель кандидатского, а затем докторского диссертационных советов по аттестации и присуждению ученых степеней при ТГТУ по специальностям 01.02.04 и 05.02.04 (технические науки). За это время диссертационный совет присудил ученые степени кандидата и доктора наук многим десяткам сотрудников ТГТУ и других вузов и НИИ страны и региона. За большие заслуги в работе по аттестации научных и научно-педагогических кадров президиум ВАК России наградил В.Г. Зубчанинова почетной грамотой в 1996 году.

Профессор В. Г. Зубчанинов ведет активную общественную научно-педагогическую деятельность. Он является членом Российского национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, членом научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела, председателем докторского диссертационного совета при ТГТУ по специальностям 01.02.04 (механика деформируемого твердого тела), 05.02.04 (трение и износ в машинах), долгое время (1982–2007) был членом экспертного Совета по машиностроению Высшей аттестационной комиссии (ВАК) Министерства науки и образования РФ по аттестации научных кадров, он избран действительным членом ряда общественных академий, таких как “Академия проблем качества” РФ, “Петровская (Санкт-Петербургская) академия наук и искусств”, “Верхневолжская инженерная академия”, “Российская академия естественных наук” (РАЕН). Он является членом НТС университета и ученого Совета ИСФ ТГТУ, членом ряда редколлегий рецензируемых ВАК РФ научных журналов (“Проблемы прочности и пластичности” при институте механики Нижегородского государственного университета, “Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Механика предельного состояния” и др.).

В различные годы он был членом научного Совета АН СССР и РАН по проблеме прочности и пластичности, членом научно-методического Совета по сопротивлению материалов, теории упругости и пластичности, строительной механике, научно-методического совета Минвуза СССР, членом НТС Госстандарта СССР, заместителем председателя секции математики, механики и астрономии НТС Минвуза СССР, членом экспертного совета по механике Госкомвуза СССР, членом ВАК СССР и РФ более 25 лет и др.

Профессор В. Г. Зубчанинов – заслуженный деятель науки и техники РФ, награжден орденом “Знак почета” (1981) за подготовку высококвалифицированных инженерных и научно-педагогических кадров, знаком Минвуза СССР “За отличные успехи в работе” (1982), знаком Минвуза РФ “Почетный работник высшего профобразования

РФ” (2000), медалью академика М. Келдыша “За заслуги перед отечественной космонавтикой” (2005), медалью АН СССР “За развитие фундаментальных и прикладных наук” (1990), почетным знаком губернатора Тверской области “Крест святого Михаила Тверского” (2000), серебряной медалью Российского общества инженеров строительства “За особые заслуги в строительстве в Тверской области” (2001), медалью “Ветеран труда” (1990), почетным знаком РАЕН “За заслуги в развитии науки и экономики России” (2005), почетными грамотами Минвуза РФ, ВАК Минвуза РФ, отраслевых министерств, губернатора Тверской области, мэра г. Твери, ректора ТГТУ и др.

Редколлегия и редакция журнала, друзья и коллеги сердечно поздравляют Владимира Георгиевича с юбилеем, от души желают крепкого здоровья, счастья, успехов на благо нашей науки.

Александров А. А., Алексеева Е. Г., Баженов В. Г., Бондарь В. С., Васин Р. А., Володин В. П., Гаврюшин С. С., Георгиевский Д. В., Гордон В. А., Горячева И. Г., Гудрамович В. С., Гультаев В. И., Дегтярёв В. П., Ивлёв Д. Д., Ильюшина Е. А., Кадашев Ю. И., Каюмов Р. А., Кийко И. А., Климов Д. М., Колесников К. С., Коноплёв Ю. Г., Коротких Ю. Г., Кудинов А. Н., Кукса Л. В., Лебедев А. А., Локощенко А. М., Майборода В. П., Максимова Л. А., Малинин В. Г., Малинина Н. А., Марголин Б. З., Маркин А. А., Матченко Н. М., Мельников Б. Е., Мирсалимов В. М., Михайлов Г. К., Морозов Н. Ф., Муравлёв А. В., Немировский Ю. В., Охлопков Н. Л., Пальмов В. А., Петров В. В., Победря Б. Е., Поспелов И. И., Радаев Ю. Н., Рашидов Т. Р., Темис Ю. М., Тихонов С. В., Трещев А. А., Трусов П. В., Тутышкин Н. Д., Чубариков В. Н., Чумаченко Е. Н., Шевченко Ю. Н.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ В.Г. ЗУБЧАНИНОВА**1960**

Устойчивость стержней как элементов конструкций за пределом упругости // Инженерный сб. М.: Изд-во института механики АН СССР. Т.27. - С.101-113.

Устойчивость стержней за пределом упругости в некоторых конструкциях // Инженерный сб. М.: Изд-во института механики АН СССР. Т.28. - С.204-211.

1961

К вопросу об упругопластической устойчивости стержней // Инженерный журнал. М.: Наука. Т.1. Вып.3. - С.139-145.

Осесимметричная форма потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки за пределом упругости // Изв. АН СССР. ОТН. №5. - С.131-132.

1963

Об устойчивости пластинки, сжатой в одном направлении // Труды Калининского торф. ин-та. М.-Л.: Госэнергоиздат. - С.264-266.

1965

Упругопластическая устойчивость стержней // Инженерный журнал. М.: Наука. Т.5. Вып.5. - С.983-991.

Об упругопластической устойчивости пластин // Инженерный журнал. М.: Наука. Т.5. Вып.2. - С.299-305.

Экспериментальное исследование процесса потери устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Инженерный журнал. М.: Наука. Т.5. Вып.3. - С.583-586.

1969

Упругопластическая устойчивость пластин, подкрепленных металлическим слоем // Механика полимеров. №5. - С.909-915.

К проблеме неустойчивости упругопластических систем // Изв. АН СССР, МТТ. №2. - С.109-115.

1970

Об устойчивости стержней в разгружающих системах за пределом упругости // Изв. вузов. Строительство и архитектура. №2. - С.61-66.

Об упругопластической устойчивости слоистых стержней // Прикл. механика. Т.6. Вып.2. - С.127-129.

О влиянии сложного нагружения на выпучивание цилиндрической оболочки при одновременном действии внутреннего давления и осевого сжатия // Изв. вузов. Строительство и архитектура. №9. - С.25-27. (совм. с В.Н.Лотовым).

К теории устойчивости пластин за пределом упругости // Изв. АН СССР, МТТ. №4. - С.172-175.

Послебифуркационное поведение пластин за пределом упругости с учетом возникновения разгрузки и вторичных пластических деформаций // Труды VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука. - С.235-239.

1971

Упругопластическая устойчивость стержней в разгружающих системах // Упругость и неупругость. М.: МГУ. Вып.1. - С.146-158.

О неустойчивости упругопластических стержней в разгружающих системах // Вопросы механики. Калинин: КПИ. Вып.9. - С.101-111.

Об устойчивости пластин за пределом упругости // Упругость и неупругость. М.: МГУ. Вып.2. - С.145-157.

К вопросу об упругопластической устойчивости стержней // Прочность и пластичность. М.: Наука. - С.149-154.

Послебифуркационное поведение прямоугольной пластинки за пределом упругости // Теория пластин и оболочек. М.: Наука. - С.85-89.

Выпучивание замкнутой цилиндрической оболочки при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления // Вопросы механики. Калинин: КПИ. Вып.9. - С.154-168 (совм. с В.Н.Лотовым).

Об устойчивости стержня сжатого внецентренно приложенной следящей силой // Вопросы механики. Калинин: КПИ. Вып.9. - С.140-149 (совм. с Л.Н.Шиманской).

1972

О процессе выпучивания цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Вопросы механики. Калинин: КПИ. Вып.15. - С.91-99.

Об использовании временных поддерживающих связей для повышения устойчивости конструкций // Вопросы механики. Калинин: КПИ. Вып.15. - С.140-142.

К вопросу об устойчивости слоистых элементов конструкций // Вопросы механики. Калинин: КПИ. Вып.15. - С.99-103.

1973

Сложное нагружение в пластинах при выпучивании за пределом упругости // Теория оболочек и пластин. Труды VIII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука. С.130-133.

О понятии пластической устойчивости и неустойчивости и некоторые проблемы неупругой устойчивости конструкций // Механика сплошных сред. Тула. ТПИ. С.61-72.

К вопросу о сложном нагружении в пластинах при выпучивании за пределом упругости // Механика сплошных сред. Тула. ТПИ. - С.72-83. (совм. с В.Н.Лотовым).

Об условии пластичности изотропных материалов // Сб. научн. трудов. Калинин: КПИ. - С. 22-26.

Экспериментальное исследование упругопластической устойчивости рам // Там же. - С. 27-36.

1974

Обзор исследований по устойчивости элементов конструкций за пределом упругости // Вопросы механики. Калинин: КПИ. Вып.26. - С.3-14.

1975

Квазипростой образ процесса нагружения в задачах устойчивости пластин и оболочек // Вопросы механики. Калинин: КПИ. 1975. - С.3-14.

Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при сложном нагружении за пределом упругости // Теория пластин и оболочек. Труды IX Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Л.: Судостроение. - С.367-369 (совм. с В.Н.Лотовым).

Исследование процесса выпучивания цилиндрических оболочек при нагружении их по траектории в виде двузвенных ломаных // Теория пластин и оболочек. Труды X

Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси: Мецниереба. Т.1. - С.424-434 (совм. с В.Н.Лотовым).

Об устойчивости стержней в рамах за пределом упругости // Вопросы механики. Калинин: КПИ. Вып.3. - С.4-17.

О концепции неупругой устойчивости // Упругость и неупругость. М.: МГУ. №4. - С. 240.

1977

Неупругое выпучивание сжато-изогнутых стержней // Прикл. механика. Т.13. №12. - С.90-94.

1980

Основные уравнения процесса выпучивания упругопластических стержней // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ. - С.98-104. (совм. с В.Ф.Зубовичем).

Влияние докритического пути нагружения на устойчивость упругопластических пластин // Теория пластин и оболочек. Труды XII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: ЕрГУ. - С.25-30 (совм. с В.В.Гараниковым и В.Н.Лотовым).

1981

О выпучивании и устойчивости стержней за пределом упругости в условиях ползучести // Прочность и надежность элементов конструкций. Киев: Наукова Думка. - С. 76-81.

О современных проблемах неупругой устойчивости // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Мат-лы Всесоюзн. симпозиума. Калинин: КГУ. - С.12-60, 139-165.

Устойчивость и пластичность цилиндрических оболочек при сжатии с кручением в условиях сложного докритического нагружения // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Мат-лы Всесоюзн. симпозиума. Калинин: КГУ. - С.126-133, 173-180 (совм. с М.Ш.Мошковым).

1982

К вопросу использования общей математической теории пластичности в теории устойчивости // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Мат-лы Всесоюзн. симпозиума. Калинин: КГУ. - С.100-117.

Экспериментальное исследование влияния упругопластической тренировки сжатия стержней на их несущую способность // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Мат-лы Всесоюзн. симпозиума. Калинин: КГУ. - С.19-25 (совм. с А.П.Воронцовым).

1983

Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение. Гл.5. Расчеты на устойчивость элементов конструкций из полимерных материалов. - 239с. (совм. с М.А.Колтуновым и В.П.Майбородой).

Пластичность и устойчивость. // Механика деформированного твердого тела. Тула: ТПИ. - С.8-21 (совм. с А.А.Ильюшиным).

1984

Результаты экспериментального исследования сплава В-95 // Пластичность и устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Калинин: КГУ. - С.57-66. (совм. с М.Ш.Мошковым).

Повышение несущей способности сжатых стержней путем снижения степени начальных несовершенств // Пластичность и устойчивость в механике деформ. твердого тела. Калинин: КГУ. С.19-26 (совм. с А.П.Воронцовым).

1985

Модифицированная теория устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости // Актуальные проблемы механики оболочек: сб. научн. трудов. – Казань: КАИ. – С. 20–29.

Нелинейная теория выпучивания и устойчивости оболочек и пластин при сложном нагружении // Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика. Труды Всесоюзн. симпозиума. Тбилиси: Изд-во Тбил. гос. ун-та - С. 211-218.

Термонапряженное состояние при препарировании зубов человека // Там же. – С. 219-222 (совм. с В.Н. Лотовым, С.Б.Ивановой).

Влияние кругового выреза на несущую способность цилиндрических оболочек // Там же. – С. 223-226 (совм. с В.Н. Лотовым, В.Н.Ведерниковым).

Устойчивость неупругих пластин с вырезами // Там же. – С. 107-110. (совм. с В.В.Гараниковым, В.Н.Лотовым).

1986

О законах теории упругопластических процессов при сложном нагружении в плоских задачах // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наукова Думка. – С. 110–117.

Влияние сложного нагружения на пластические свойства сплава В-95 // Там же. – С. 110-117 (совм. с М.Ш.Мошковицем).

Устойчивость и выпучивание упругопластических систем при сложном нагружении // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Материалы 2 Всес. симп. Калинин: КГУ. - С. 10–54.

Теория устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости при сложном нагружении. Мат-лы VIII Всесоюзн. конф. по прочности и пластичности. Пермь. 1983. // Свердловск: УНЦ АН СССР. - С.40-48.

О некоторых фундаментальных идеях А.А.Ильюшина в теории устойчивости упругопластических систем // Проблемы механики деформ. твердого тела. Калинин: КГУ. - С.9-16.

Температурные напряжения и оценка усталостной прочности твердых тканей интактных маляров // Медицинская биомеханика. Рига: Ин-т биомеханики. Т.1. – С.522-527 (совм. с А.С.Щербаковым, В.Н.Лотовым, С.Б.Ивановой).

1987

Выпучивание и устойчивость прямоугольных пластин // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Калинин: КГУ. - С. 24–31 (совм. с В.П.Володиным).

Локально-простые процессы деформирования // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: Материалы 2 Всесоюзн. симп. Калинин: КГУ. - С. 24–31.

Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости прямоугольных упругопластических пластин // Труды XIV Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси: ТбГУ. Т.1. – С.309-314 (совм. с В.П.Володиным, В.В.Гараниковым).

1988

Влияние локального нагрева кругового выреза на устойчивость упругопластических цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Докл. АН УССР. Серия: Физико-математ. и техн. науки. № 5. - С.29-31 (совм. с В.Н.Ведерниковым, В.С.Гудрамовичем, В.Н.Лотовым).

Использование связи между скоростями напряжений и деформаций для исследования устойчивости прямоугольных пластин // Проблемы механики оболочек. Калинин: КПИ. - С. 71–79 (совм. с В.П.Володиным).

1989

Устойчивость цилиндрических оболочек из стали 45 за пределом упругости // Проблемы нелинейной теории упругости. Калинин: КПИ. - С. 72–76 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов // Прикл. мех. 1989. Т. 25. № 5. - С. 3–12.

Исследование ползучести сплавов АМГ-6, О1570 и металлокомпозита А1-В в интервале температур $\pm 50^\circ\text{C}$ // Проблемы прочности. № 9. - С. 27-30 (совм. с В.В.Гараниковым и А.С.Камышковым).

Нелинейная микроползучесть сплавов А1-19, АМГ-6, О1570 // Проблемы нелинейной теории упругости. Калинин: КПИ. - С. 64-72 (совм. с В.В.Гараниковым, Ю.А.Котенковым).

1990

Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990. - 368 с.

Устойчивость цилиндрических оболочек при сложном нагружении // Труды XV Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Казань: КГУ. - С. 426–431 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

Влияние разгрузки материала на ползучесть сплавов О1570 и АМГ-6 // Проблемы прочности. № 9. - С. 33–34 (совм. с В.В.Гараниковым).

Математические основы механики деформируемого твердого тела. Тверь: ТвПИ. - 59с.

1991

Определяющие соотношения теории упругопластических процессов // Прикл. мех. Т. 27. № 12. - С. 3–13.

Силовой датчик. Авт. св. № 1624284. // Бюл. изобр. 1991. № 4. (совм. с Д.Е.Ивановым, А.П.Андреевым).

Расчеты и испытания на прочность. Методы испытаний стержней, пластин и оболочек на устойчивость // Рекомендация Р-54-314-91 Госстандарта СССР. М.: 1991. - 77 с.

1992

Определяющие соотношения теории неупругих процессов в пространстве напряжений. Сообщение 1: Теоретические основы // Проблемы прочности. № 5. - С. 3–13.

Определяющие соотношения теории неупругих процессов. Сообщение 2: Экспериментальные основы // Проблемы прочности. № 6. - С. 24–26.

Актуальные проблемы теории пластичности и устойчивости // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: Материалы 3 симп. Ч. 1. Тверь: ТвПИ. - С. 10–94.

1993

Лекции по механике деформированного твердого тела (в трех частях). Тверь: ТвПИ. - 441с.

Постулат физической определенности // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: Материалы 3 симпозиума. Ч. 3. Тверь: ТвПИ. - С 4-21.

Экспериментальное исследование упругопластического деформирования сталей 40 и 40Х при сложном нагружении по плоским траекториям // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела. Материалы 3 симп. Ч. 3. Тверь: ТвПИ. - С. 44-93 (совм. с А.В.Акимовым и Д.Е.Ивановым).

Экспериментальное исследование пластических свойств стали 45 на многосвязных пространственных траекториях деформаций // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела. Материалы 3 симп. Ч. 3. Тверь: ТвПИ. - С. 164-177 (совм. с А.В.Акимовым, Н.Л.Охлопковым, В.Дабулем).

Экспериментальное исследование устойчивости круговых цилиндрических оболочек при сложном нагружении в пространстве деформаций // Там же. - С. 177-185 (совм. с Н.Л.Охлопковым и Ч.Т. Джоном).

Теория выпучивания и устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости при сложном нагружении // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела. Материалы 3 симп. Ч. 2. Тверь: ТвПИ. - С. 3-33.

Устойчивость внецентренно сжатых стержней, подвергнутых предварительному упругопластическому деформированию // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела. Материалы 3 симпозиума. Ч. 2. Тверь: ТвПИ. 1993. - С. 33-41 (совм. с С.А.Кульковым и А.П.Воронцовым).

К вопросу опытной проверки физической достоверности частных теорий пластичности // Там же. - С. 105-122.

Экспериментальное исследование процессов сложного нагружения стали 45 по двузвенным траекториям // Там же. - С. 136-144 (совм. с М.Ш. Мошковичем).

Влияние предварительного сложного нагружения на ползучесть сплава АМГ-6 // Там же. - С. 161-163. (совм. с А.Саади, В.В.Гараниковым).

Локально-простые процессы нагружения сплава АМГ-6 в (Р+р) опытах // Там же. - С. 163-166 (совм. с А. Саади).

Экспериментальное исследование процессов упругопластического деформирования по плоским траекториям // Там же. С. 174-179. (совм. с А.В.Акимовым, Н.Л.Охлопковым).

Экспериментальное исследование процесса сложного нагружения сплава 01570 по траекториям в виде двузвенных ломаных при различных температурах // Проблемы прочности. № 3. - С. 35-39 (совм. с В.В.Гараниковым и Д.Саади).

Экспериментальное исследование процессов сложного нагружения сплава АМГ-6 // Проблемы прочности. №5. - С. 36-42.

1994

О напряженно-деформированном состоянии пространственного чистого сдвига // Устойчивость и пластичность при сложном нагружении. Межвуз. сб. научн. трудов. Тверь: ТГТУ. - С. 3-13.

Определяющие соотношения общей теории пластичности // Там же. - С. 14-37.

К вопросу о физической достоверности гипотезы компланарности // Там же. – С. 38-45.

Проверка физической достоверности частных теорий пластичности на многозвенных траекториях деформации // Там же. - С. 112–121.

Некоторые результаты экспериментальных исследований сложного деформирования трубчатых образцов из стали 45 по многозвенным пространственным траекториям // Там же. – С. 80-85 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.Дабулем).

Численная реализация алгоритма определения бифуркационной нагрузки плоской формы изгиба двутавровой балки за пределом упругости // Там же. - С. 86–102 (совм. с С.Л.Субботиным).

Развитие проблем нелинейной механики деформируемого твердого тела в трудах Тульской школы // Механика деформируемого твердого тела. Сб. научн. трудов. Тула: ТГГУ. - С.15-27.

1995

Устойчивость. Ч.1. Тверь: ТвеПИ. - 200 с.

Устойчивость тонкостенных элементов конструкций за пределом упругости с учетом сложного нагружения // Изв. вузов. Строительство. № 11. - С. 26–32 (совм. с Н.Л.Охлопковым и С.Л.Субботиным).

Процессы сложного деформирования материалов за пределом упругости // Тез. докл. IX междунар. конф. по проблемам прочности и пластичности. Москва-Киев: РАН, НАН Украины. - С.17-18.

Исследование процессов сложного деформирования материалов на криволинейных траекториях постоянной кривизны и кручения // Тез. докл. IX междунар. конф. по проблемам прочности и пластичности. Москва-Киев: РАН, НАН Украины. - С.18-20 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

1996

Устойчивость. Ч.2. Тверь: ТГТУ. 1996. – 192 с.

Определяющие соотношения теории процессов пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Прочность и пластичность. Труды IX конф. М.: Ин-т проблем механики РАН. Т.1. - С.80-85.

Экспериментальное исследование процессов пластического деформирования металлов при сложном нагружении // Труды IX международной конференции по прочности и пластичности. М.: ИПМ РАН. Т.1. - С.86-91 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

О некоторых особенностях упрочнения конструкционных сталей при деформировании по замкнутым криволинейным траекториям // Проблемы прочности. № 5. - С.17-22 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

Пластическое деформирование стали по замкнутым криволинейным траекториям // Проблемы прочности. № 4. - С.19-26 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

1997

Экспериментальное исследование закономерностей пластического деформирования металлов по плоским криволинейным траекториям // Прикладная механика. Т.33. № 7. - С.65-71 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

Упрочнение конструкционных материалов при сложном деформировании по замкнутым плоским траекториям // Проблемы прочности. № 3. - С.19-29 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

Об устойчивости тонкостенных оболочек при сложном докритическом нагружении // Изв. вузов. Строительство. № 6. - С. 27-34 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

Сложное нагружение при выпучивании тонкостенных стержней с начальными несовершенствами // Изв. вузов. Строительство. № 4. - С.24-29 (совм. с С.Л.Субботиным).

Автоматизированный комплекс для исследования упруговязкопластических свойств материалов при сложном нагружении. Свид. на полезную модель № 97108023/20 (008702) (совм. с А.В.Акимовым, Н.Л.Охлопковым).

Экспериментальное исследование закономерностей пластического деформирования металлов по плоским криволинейным траекториям // Прикладная механика. Том 33. № 7. - С. 65-71 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

1998

Постулат локальной размерности образа процесса и определяющие соотношения в теории пластичности // Прикладная механика. Том 34. № 5. - С. 86-96.

О деформировании конструкционных сталей по замкнутым траекториям непропорционального нагружения // Математическое моделирование систем и процессов. Пермь: ПГТУ. № 6. - С. 30-37 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

Расчет процессов сложного деформирования по многозвенным ломаным траекториям // Изв. вузов. Строительство. № 9. - С.9-15 (совм. с Н.Л.Охлопковым и В.В.Гараниковым).

Развитие механики деформируемого твердого тела в Тверском государственном техническом университете // Материалы Юбилейной конференции ученых и преподавателей ТГТУ. Тверь: ТГТУ. - С. 49.

Экспериментальное исследование поверхностей текучести стали 45 при некоторых траекториях сложного нагружения // Там же. - С. 50-51 (совм. с В.Н.Ведерниковым и В.В.Гараниковым).

Исследование векторных и скалярных свойств стали 9Х2 при деформировании по траекториям в виде логарифмической спирали // Международная конференция "Итоги развития механики в Туле". Тула: ТГУ. - С. 32-33 (совм. с Н.Л.Охлопковым и В.В.Гараниковым).

Упругопластическая устойчивость цилиндрических оболочек при сложном докритическом нагружении // Актуальные проблемы механики оболочек. Труды междунар. конф. Казань: КГУ. - С. 91-93 (совм. с В.Н.Ведерниковым, В.В.Гараниковым, В.И.Гультияевым, А.В.Акимовым).

Автоматизированный комплекс для исследования упругопластических свойств материалов при сложном нагружении. Свидетельство Роспатента N 7202 // Бюллетень Роспатента № 7 от 16.07.98г. (совм. с Н.Л.Охлопковым, А.В.Акимовым).

Об определяющих функциях процессов пластического деформирования // Устойчивость, пластичность и ползучесть при сложном нагружении: сб. научн. трудов. Тверь. - С. 3-26.

О некоторых соотношениях теории упругопластических процессов для трехмерных траекторий деформирования // Там же. - С. 27-40 (совм. с Н.Л.Охлопковым).

Устойчивость и выпучивание нелинейно-упругих сжатых стержней при ползучести // Там же. - С. 76-87 (совм. с О.Е.Софьиным, С.Л.Субботиным).

Экспериментальное исследование процессов сложного активного и пассивного деформирования металлов по траекториям в виде архимедовых спиралей // Там же. - С.103-114 (совм. с А.В.Акимовым, Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

К вопросу об устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек при сложном докритическом нагружении // Изв. вузов. Строительство. № 11-12. – С. 268-274 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

1999

Устойчивость при ползучести // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела. Материалы IV международного научного симпозиума (Тверь, 16 – 19 июня 1998 г.). Тверь: ТГТУ. – С. 3-62.

Сложное деформирование металлов по плоским криволинейным траекториям переменной кривизны // Там же. – С.77-87 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

О деформировании металлов по плоским криволинейным траекториям. Сообщение 1. Векторные и скалярные свойства // Проблемы прочности. № 4. – С. 5-11 (совм. с В.В.Гараниковым, Н.Л.Охлопковым).

О деформировании металлов по плоским криволинейным траекториям переменной кривизны. Сообщение 2. Функции процессов // Проблемы прочности. № 4. – С.12-18 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Экспериментальное исследование векторных и скалярных свойств стали 9Х2 при деформировании по плоским криволинейным траекториям. Сообщение 1: траектории вида логарифмических спиралей // Проблемы прочности. № 5. – С.36-41 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Экспериментальное исследование векторных и скалярных свойств стали 9Х2 при деформировании по плоским криволинейным траекториям. Сообщение 2: траектории вида астроида // Проблемы прочности. № 5. – С. 50-55 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Экспериментальное исследование процессов деформирования металлов при сложном нагружении // Научные труды 3 международного семинара “Современные проблемы прочности”. Т 2. Новгород: НГУ им. Ярослава Мудрого. – С. 59-65 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В. Гараниковым).

2000

Механика сплошных деформируемых сред. Тверь: ТГТУ. – 703 с.

Проблемы математической теории пластичности // Проблемы прочности. № 1. – С. 22-41.

Общая теория устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при сложном нагружении // V Международный научный симпозиум “Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости”. Тверь, 14-16 декабря 2000г. Тезисы докладов. Тверь: ТГТУ. – С. 4-5.

Экспериментальное исследование пластичности и ползучести сплава АК-8 при сложном нагружении // Изв. вузов. Строительство. № 2-3. – С. 130-135 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Сложное деформирование металлов по плоской криволинейной траектории вида архимедовой спирали // Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении. Тверь: ТГТУ. – С. 78-84 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Сложное деформирование металлов по плоской криволинейной траектории в виде астроида // Прикл. механика. Т.36. № 7. – С. 130-136 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Устройство для измерения деформации при сложном нагружении // Свид-во Роспатента на полезную модель №13092. Бюллетень № 8. - С. 309 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Исследование процессов упругопластического деформирования оболочек при сложном нагружении // Актуальные проблемы механики оболочек. Казань: Новое знание. 2000. - С. 161-166 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Исследование процессов деформирования материалов на криволинейных траекториях переменной кривизны // Проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. - С. 93-97 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Расчеты процессов сложного нагружения материалов по многозвенным ломаным траекториям в девиаторном пространстве напряжений // Научные труды IV международного семинара "Современные проблемы прочности". Т. 1. Новгород.: НГУ. - С. 189-194 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Сложное нагружение при чистом формоизменении // Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении: сб. научн. трудов. Вып. 2. Тверь: ТГТУ. - С. 13-20 (совм с Д.В.Зубчаниновым).

2001

Общая теория устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при сложном нагружении // Современные проблемы прочности и пластичности. Материалы V Международного научного симпозиума. Тверь, 14-16 декабря 2000 г. Тверь: ТГТУ. - С. 3-18.

Предел устойчивости сжатых элементов конструкций при ползучести // Там же. - С. 19-23 (совм. с С.Л.Субботиным).

Проверка физической достоверности гипотезы компланарности на многозвенных ломаных траекториях в пространстве напряжений // Там же. - С. 55-61 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Экспериментальное исследование искусственного старения материала // Там же. - С.61-62 (совм. с В.И.Гультияевым).

К основам общей математической теории пластичности // Упругость и неупругость. МГУ. - С. 139-145.

Экспериментальное обоснование теории процессов пластического деформирования материалов на криволинейных траекториях // Там же. - С. 203-205 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Искусственное старение материала // Научные труды 5 международного семинара "Современные проблемы прочности" – Великий Новгород: НГУ. - С. 17-20 (совм. с В.И.Гультияевым).

Сложное нагружение при чистом формоизменении // Проблемы механики неупругих деформаций. К 75-летию Д.Д.Ивлева. М.: Физматлит. - С.143-149.

Проблемы математической теории пластичности // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. М.: МГГУ. - С. 219-242.

Закономерности сложного упруговязкопластического деформирования стали 12Х18Н10Т на винтовых пространственных траекториях нагружения // Труды 4 Международной конференции "Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения". Санкт-Петербург: СПбГТУ. - С. 133 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Устойчивость упругопластических пластин при сложном нагружении в условиях ползучести // Там же. - С.134 (совм. с С.Л.Субботиным).

Сложное нагружение металлов по плоской криволинейной траектории // Известия вузов. Строительство. № 6 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

2002

Математическая теория пластичности. Тверь, ТГТУ. - 300 с.

Общие соотношения связи между напряжениями и деформациями в теории пластичности // Вестник Тверского гос. техн. ун-та. № 1. - С.35-39.

О процессах сложного нагружения материалов // Сб. мат-лов III Междунар. конф. "Актуальные проблемы строительства. Тула: ТГУ. - С. 29-31 (совм. с Д.В.Зубчаниновым).

Общая теория устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при сложном нагружении // Механика оболочек и пластин. Сб. докл. XX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Нижний Новгород: ННГУ. - С. 39-41.

Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния оболочек при сложном нагружении за пределом упругости // Там же. - С. 146-150 (совм. с Д.В.Зубчаниновым, В.И.Гультияевым).

Экспериментальное исследование закономерностей сложной разгрузки стали 45 и 9Х2 // Там же. - С. 142-146 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Гипотеза ортогональности в теории пластичности // Проблемы механики деформ. твердого тела. С.-Петербург: СПбГУ. - С. 137-140.

Предел устойчивости сжатых элементов пластин за пределом упругости при ползучести // Проблемы прочности и пластичности. Н.Новгород: ННГУ. № 64. - С. 10-14 (совм. с С.Л.Субботиным).

2003

Закономерности пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Труды 5 Международной конференции. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский гос. техн. ун-т. - С. 198.

Исследование закономерностей изменения скалярных и векторных свойств материалов на плоских многозвенных траекториях нагружения // Там же. - С.198-199 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

О влиянии сложного нагружения-разгрузки на закономерности пластического деформирования материалов // Научно-технические ведомости СПбГТУ. Санкт-Петербург: СПбГПИ. № 3. - С. 64-67 (совм. с Д.В.Зубчаниновым).

Исследование закономерностей деформирования по криволинейным траекториям постоянной кривизны с изменяющимся направлением процесса // Научные труды VI Международного симпозиума "Современные проблемы прочности" им. Лихачева. Великий Новгород: Новгородский госуниверситет. - С. 47-54 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Выпучивание пологих цилиндрических панелей за пределом упругости при ползучести // Там же. - С. 62-67 (совм. с С.Л.Субботиным).

Экспериментальное исследование закономерностей процессов сложного нагружения-разгрузки // Там же. - С. 68-73 (совм. с Д.В.Зубчаниновым и В.И.Гультияевым).

Экспериментальное исследование влияния неполной пластичности на сложное нагружение-разгружение материалов // Сб. материалов 4 Междунар. научно-технической конференции “Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии”. Тула: ТГУ. - С. 23-25 (совм. с Д.В.Зубчаниновым и В.И.Гультяевым).

Устойчивость сжатых прямоугольных пластин за пределом упругости // Там же. - С. 5 (совм. с М.Ю.Александровым).

Процессы и состояния полного и неполного пластического деформирования при сложном нагружении // Современные проблемы математики, механики и информатики: тезисы докладов Международной научной конференции. Тула: Изд-во ТулГУ. - С.140-141.

О влиянии состояний полной и неполной пластичности материалов на их глобальную диаграмму деформирования и векторные свойства // Там же. - С.141-142 (совм. с Д.В.Зубчаниновым и В.И.Гультяевым).

Расчет сжатых пластин при неупругих деформациях с позиций современной концепции устойчивости // Там же. - С.142-145 (совм. с С.Л.Субботиным).

Проблемы теории пластичности // Проблемы механики. Сб. статей к 90-летию А.Ю.Ишлинского. М.: Физматлит. - С. 394-405.

Об активных и пассивных процессах, полной и неполной пластичности при сложном нагружении // Проблемы нелинейной механики. Тула: ТулГУ. - С. 164-177.

К теории пластичности для траекторий малой кривизны и локально простых процессов // Современные проблемы механики и прикладной математики: материалы международной конференции. Воронеж: ВорГУ. - С. 123-126 (совм. с Д.В.Зубчаниновым).

Экспериментальное обоснование трехчленных определяющих соотношений теории процессов для пространственных траекторий нагружения // Там же. - С. 127-132 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования. Тверь: ТГТУ. – 170 с.

Сопrotивление материалов. Кн. 1. Тверь: ТГТУ. – 224 с.

2004

Экспериментальная пластичность. Книга 2. Процессы сложного нагружения. Тверь: ТГТУ. - 184 с. (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гараниковым).

Бифуркационное и критическое время упругопластических пластин // Известия Тульского гос. ун-та. Серия Строительные материалы, конструкции и сооружения. Вып. 6. Тула. - С. 36-41 (совм. с С.Л.Субботиным).

Нагрузка надежности сжатых пластин за пределом упругости. Там же. - С. 41-44 (совм. с С.Л.Субботиным).

О влиянии состояний полной и неполной пластичности материала на их глобальную диаграмму деформирования и векторные свойства // Механика материалов и прочность конструкций. Труды С.-Петербургского гос. политехн. ун-та. № 489. С.-Петербург: СПбГПУ. - С.136-140 (совм. с Д.В.Зубчаниновым и В.И.Гультяевым).

Процессы и состояния полного и неполного пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Там же. - С.141-152.

Процессы и состояния полного и неполного пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Изв. Тульского гос. ун-та. Серия: Математика, механика, инф-ка. Т.10. Вып.3. – С.82-97.

2005

Сопротивление материалов. Книга 2. Тверь: ТвГТУ. - 350 С.

Общая математическая теория пластичности и её конкретизация в форме теории процессов и течения // Материалы школы-семинара "Современные модели термовязкопластичности" М.: МГТУ МАМИ. Часть 1. - С. 3-37.

Математическая модель пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Нижний Новгород: ННГУ. Вып. 67. - С. 5-13

Экспериментальные исследования процессов сложного пластического деформирования материалов по траекториям типа веера // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Нижний Новгород: ННГУ. Вып. 67. - С. 14-19 (совм. с В.И. Гультияевым и Д.В. Зубчаниновым).

Структурные изменения стали 45 в процессе деформирования // Изв. Тульского гос. ун-та: Тула: ТГУ. - С. 26-29 (совм. с В.И. Гультияевым и Д.В. Зубчаниновым).

Экспериментальное исследование процессов пластического деформирования цилиндрических оболочек при сложном нагружении // Изв. Тульского гос. ун-та: Тула: ТГУ. - С. 29-37 (совм. с М.Ю. Александровым, Д.А. Ханьгиным).

О стабилизации процессов пластического деформирования цилиндрических оболочек при сложном нагружении // Актуальные проблемы строительства. Сб. мат-лов VI Междунар. конф. Тула: ТГУ. - С. 23-24.

2006

Устойчивость и пластичность. Т. 3 Доклады и выступления. Тверь: ТГТУ. - 446с.

К модели неполной пластичности материалов Е. И. Шемякина // Проблемы механики деформируемых твёрдых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е.И.Шемякина. М.: Физматлит. - С. 284-287.

Математические модели полного и неполного пластического деформирования сплошных сред // Труды VI международного научного симпозиума "Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела". Тверь: ТГТУ. - С. 4-13.

Устойчивость сжатых элементов конструкций за пределом упругости при ползучести // Там же. - С. 14-30 (совм. с С.Л. Субботиным).

Экспериментальное исследование сложного деформирования стали 45 по траекториям типа "плоский винт" // Изв. Тульского гос. ун-та. Серия Строительные материалы, конструкции и сооружения. Выпуск 9. Тула: ТГУ - С. 77-83 (совм. с В.И. Гультияевым и Д.В. Зубчаниновым).

Математические модели полного и неполного пластического деформирования сплошных сред // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова. С. 130-138.

Современное состояние математической теории процессов пластической деформации сплошных сред // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Том III. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородского гос. ун-та им. Лобачевского. - С. 98.

Образ процесса нагружения в девиаторном пространстве деформаций для плоской многозвенной траектории. Вестник Тверского государственного технического университета: Научный журнал. Вып. 8. Тверь: ТГТУ. - С. 13-17. (совм. с М.Ю. Александровым, Д.А. Ханьгиным).

Сложное нагружение и разгружение конструкционных материалов // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов международной научной конференции. Тула: Изд-во ТулГУ. - С. 133-135 (совм. с В.И. Гулятьевым и Д.В. Зубчаниновым).

2007

Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость. М.: Физматлит. - 446 с.

О гипотезе ортогональности, принципе градиентальности и постулате пластичности // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости. Сб. статей к 75-летию В.Г.Зубчанинова – Тверь: ТГТУ. – С. 24-31.

Математические модели полного и неполного пластического деформирования сплошных сред // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости. Сб. статей к 75-летию В.Г.Зубчанинова. – Тверь: ТГТУ. – С. 32-43.

Экспериментальное исследование стали 45 по траекториям типа “плоский винт” // Сб. статей к 75-летию В.Г.Зубчанинова. – Тверь: ТГТУ. – С. 104-109 (совм. с В.И.Гулятьевым, Д.В.Зубчаниновым).

Построение образа процесса нагружения материала на пространственных винтовых траекториях деформации // Сб. статей к 75-летию В.Г.Зубчанинова. – Тверь: ТГТУ. – С.110-114 (совм. с Н.Л.Охлопковым, В.В.Гаранниковым).

Об активных и пассивных процессах сложного нагружения-разгружения в теории пластичности // Современные проблемы термовязкопластичности. М.: МГТУ МАМИ. – С. 3-18.

Экспериментальное исследование процессов сложного нагружения материалов на многозвенных траекториях // Современные проблемы термовязкопластичности. – М.:ТГТУ “МАМИ”. – С. 19-24 (совм. с В.И.Гулятьевым, Д.В.Зубчаниновым).

Экспериментальное исследование предельной поверхности материала // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. – Нижний Новгород: ННГУ. Вып 69.- С.90-94.

Экспериментальное исследование сложного деформирования материала сталь 45 на многозвенных траекториях // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Нижний Новгород: ННГУ, Вып 69. – С. 95-98.

Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов. – Тверь: ТвГТУ. Часть 1. – 152 с. (совм. с В.Н.Ведерниковым, Е.Г.Алексеевой).

2008

Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. - М.: Физматлит. - 336 с.

Гипотеза ортогональности, принцип градиентальности в теории пластичности // Изв. РАН. МТТ. №5. – С.68-73.

Закон сложной разгрузки материалов в теории пластичности // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. – Нижний Новгород: ННГУ. Вып 70. – С.7-17.

О проверке постулата изотропии в теории процессов сложного пластического деформирования // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз.сб. - Нижний Новгород: ННГУ. Вып 70. – С.18-23 (совм. с В.И.Гулятьевым).

Экспериментальное исследование сложного нагружения материалов на траектории типа веера // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения. Сб. докладов. – С.Петербург: СПбГПУ. Т.2. – С.142-145 (совм. с В.И.Гулятьевым, В.Н.Ведерниковым).

Некоторые проблемы современной теории пластичности // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения. Сб. докладов. – С.Петербург: СПбГПУ. Т.2. – С.136-138.

О достоверности постулата изотропии в теории пластичности // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения. Сб. докладов. – С.Петербург: СПбГПУ. Т.2. – С.138-142.

2009

Модифицированная теория течения // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та. Серия: Механика предельных состояний. Чебоксары: ЧГПУ. – С.81-97.

Модифицированная теория течения и математические модели процессов и течений пластического деформирования // Современные проблемы ресурса материалов и конструкций. М.: МГТУ “МАМИ”. – С.119-133.

Модифицированная теория течения и математические модели процессов и течений пластического деформирования // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Нижний Новгород: ННГУ. Вып. 71 – С.20-25 (совм. с В.И.Гультияевым, Д.В.Зубчаниновым).

Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов. Часть 2. Тверь: ТГТУ. – 208 с. (совм. с В.Н.Ведерниковым, Е.Г.Алексеевой).

2010

Механика процессов пластических сред (к 100-летию А.А.Ильюшина). М.: Физматлит. – 352 с.

Обобщенный критерий полной и неполной пластичности сплошных сред // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та. Серия: Механика предельного состояния. Чебоксары: ЧГПУ. №2 (8) – С.161-171.

Моделирование процессов сложного упругопластического моделирования материалов // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та. Серия: Механика предельного состояния. Чебоксары: ЧГПУ. №2 (8) – С.172-181 (совм. с Е.Г.Алексеевой).

Моделирование процессов сложного пластического деформирования материалов по сложным многозвенным траекториям с участками постоянной кривизны // Краевые задачи и математическое моделирование: тематич. сб. науч. ст.: в 3 т. Т.1. НФИ ГОУ ВПО “КемГУ”. – Новокузнецк, 2010. – С. 15-23 (совм. с Е.Г.Алексеевой).

Моделирование процессов сложного пластического деформирования материалов по траекториям типа смещенного веера // Современные проблемы математики и механики. Материалы Всероссийской конференции ТГУ - Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2010. – С. 6-8 (совм. с Е.Г.Алексеевой).

Пластическое деформирование материалов по криволинейным траекториям переменной кривизны // Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности и строительная механика. Тверь: ТвГТУ. – С. 141-144 (совм. с Е.Г.Алексеевой).

Методики проведения лекционно-практических занятий и экзаменационных сессий // Там же. – С. 60-64.

Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Там же. – С. 104-116.

Учет упрочнения в расчетах процессов сложного упругопластического нагружения // Известия ТулГУ. Технические науки. 2010. Вып. 3. – С. 207-212 (совм. с А.А.Алексеевым, С.Л.Субботиным).

О запаздывании векторных свойств материалов // Сборник материалов XI Международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии”. – Тула: Издательство ТулГУ, 2010. – С. 24 (совм. с Е.Г.Алексеевой).

2011

Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Известия РАН. МТТ. №1 – С. 27-37.

Теория процессов и постулат изотропии А.А.Ильюшина // Упругость и неупругость. М.: МГУ им. М.В.Ломоносова. – С. 73-79.

Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат изотропии А.А.Ильюшина // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. Тверь: ТвГТУ. – С. 30-49.

В. Г. Зубчанинов

О МОИХ УЧИТЕЛЯХ

Тверской государственной технической университет

После окончания средней школы на Дальнем Востоке в 1949 г. я выбрал физико-математический факультет Ростовского-на-Дону государственного университета (бывшего Варшавского университета), выдержав конкурс 4 человека на место. Ростов произвёл на меня громадное впечатление: такой крупный, красивый и оживлённый город я видел впервые в своей жизни. Там было всегда тепло. Город всегда благоухал белой акацией. В день открытых дверей при поступлении в университет вместе с толпой абитуриентов я посетил лабораторию механических испытаний на кафедре теоретической механики, созданную ранее известным профессором Коробовым. Эта лаборатория была оснащена оборудованием и испытательными машинами гораздо богаче, чем во многих технических вузах. Нас встретил высокий, интеллигентный, похожий на гвардейца Семёновского или Преображенского полка времён Петра Первого преподаватель в очках – Леонид Александрович Толоконников, доцент кафедры теоретической механики. Он продемонстрировал одну из работ по устойчивости упругого сжатого двутаврового стержня трёхметровой длины. При достижении критического значения силы Л.А. Толоконников, почему-то выделив меня из других абитуриентов, предложил слегка толкнуть стержень пальцем. Я выполнил это указание, а стержень неожиданно для меня и для всех стал колебаться как гибкий пруттик. Опыт произвёл на меня колоссальное впечатление и определил всю мою дальнейшую научную творческую жизнь. Проблема устойчивости гибких элементов конструкций стала для меня одним из главных направлений научной деятельности. Леонид Александрович стал моим первым учителем. Он приехал работать в Ростовский университет по распределению после окончания аспирантуры на кафедре теории упругости Московского государственного университета в 1949 г. у члена-корр. АН СССР Алексея Антоновича Ильюшина. Леонид Александрович был замечательным, обаятельным человеком и учёным. Вместе с ним в 1950 г. к нам на физмат приехали работать будущие академики РАН Никита Николаевич Моисеев и Иосиф Израилевич Ворович. Это были друзья по жизни. Они вместе учились в МГУ на мехмате. Моисеев окончил университет в 1940 году, на два года раньше Воровича, а затем один год учился в Военно-воздушной академии им. Н.Е.Жуковского. Затем воевал с немцами. Ворович, успешно сдав летнюю сессию за 4-й курс, был призван в армию. Воевал на Волховском фронте. Продолжил образование также в Военно-воздушной академии, которую окончил в 1944 году, аспирантуру – в 1950 году, и вместе с Моисеевым был направлен в Ростовский-на-Дону университет.

Молодые доценты Л.А.Толоконников, Н.Н.Моисеев и И.И.Ворович очень быстро сплотили вокруг себя способных студентов. В их числе оказался и я. Это была настоящая университетская школа! Они внесли свежую струю мехмата МГУ в образование и научную работу Ростовского-на-Дону университета, что оставило у нас, студентов,

неизгладимый след на всю жизнь. Запомнился организованный этой великолепной тройкой научный семинар, посвященный математическим проблемам механики: теории упругости, пластичности, аэро- и гидродинамики. Этот семинар сыграл значительную роль в моем становлении как ученого механика. Благодаря ему я на 3-м курсе перешел со специальности “Математика” на специальность “Механика”. Главными в работе семинара были конкретные задачи механики и прикладной математики. Мы, студенты, обожали своих учителей и подражали им. Они разворошили спокойную, классическую университетскую жизнь. Они умели и отдыхать. По их примеру с тех пор я люблю сухое виноградное вино, особенно “Хванчкару”, “Оджалеш”, “Каберне”. Л.А.Толоконников стал моим научным руководителем по курсовым работам и диплому, который был посвящен проблеме устойчивости цилиндрических оболочек за пределом упругости. Леонид Александрович и Иосиф Израилевич написали прекрасные отзывы о моей дипломной работе. В нашей стране Л.А.Толоконников явился основоположником нелинейной теории упругости. Он читал нам авторский курс по этой дисциплине, а также по теории упругих оболочек, теоретической механике и некоторым другим дисциплинам. Познакомившись в университете, мы дружили с Леонидом Александровичем всю жизнь. Я был его первым учеником и очень горжусь этим. Однажды, уже на 5-м курсе, он пригласил меня к себе домой отобедать, по дороге купил вино “Три семерки”. За стаканом доброго вина мы долго и от души разговаривали на разные и не только профессиональные темы. Это были моменты нашего откровения и доверия.

В 1958 году Л.А. Толоконников переехал в Тулу и основал там известную в стране школу в области нелинейной теории упругости и пластичности применительно к технологическим процессам обработки металлов давлением и к другим важным практическим проблемам машиностроения и оборонной промышленности. В 1958 году Толоконников защитил в МГУ докторскую диссертацию. Его научным руководителем был А.А. Ильющин. А я в том же году поступил к А.А. Ильющину в аспирантуру в институт механики АН СССР по рекомендации Леонида Александровича.

За годы своей насыщенной жизни Леонид Александрович Толоконников подготовил более 100 кандидатов наук и несколько десятков докторов наук. Он говорил: “Мои ученики – мои студенты”. Среди них ныне известные ученые профессора Н.М. Матченко, А.А. Маркин, А.А. Трещев, С.П. Яковлев и другие, рано ушедшие из жизни Г.С.Тарасьев, Г.В. Бригадиров и В.Г. Громов. Леонид Александрович помогал и поддерживал меня всю свою жизнь. Он был моим оппонентом на защите кандидатской диссертации и вообще наставником всей моей научной деятельности. Он подарил мне свою книгу “Механика деформируемого твердого тела”, на титульном листе которой надпись: “Дорогому Володе, а теперь – Владимиру Георгиевичу!!! Человек получает совершенное удовлетворение, когда ученики превосходят породившего их” (11 сентября 1979 года, г.Калинин). Как дороги для меня эти слова близкого и любимого человека, талантливого и крупнейшего ученого!

Леонид Александрович был яркой личностью, сочетавшей в себе качества ученого, педагога, воспитателя молодежи, спортсмена и другие дарования. В пять утра каждый день он уже бегал для профилактики инфаркта в известном в г.Туле парке, зимой ходил на лыжах, очень любил свою жену Марию Васильевну и сына Олега. В жизни он успел сделать чрезвычайно много, всегда спешил жить, двигался по жизни на повышенной скорости, несмотря на плохое зрение, на больших скоростях водил свою автомашину.



Н. Н. Моисеев, Л. А. Толоконников, И. И. Ворович

Иосиф Израилевич Ворович (1920–2001) был великолепным ученым и педагогом. Его лекции по теории упругости, прикладной теории упругости и сопротивлению материалов поражали своей глубиной и фундаментальностью. По окончании университета Иосиф Израилович предлагал мне остаться в университете, но у меня в Ростове не было жилья, и я поехал в г.Красногорск под Москву в специальное конструкторское бюро при механическом заводе. В 1958 году И.И.Ворович, защитив докторскую диссертацию, стал заведующим кафедрой теории упругости, а после открытия при университете НИИ механики и прикладной математики – директором этого НИИ. В 2001 году я подарил Иосифу Израиловичу свою новую книгу “Механика сплошных

деформируемых сред” и получил от него телеграмму следующего содержания: “Сердечно поздравляю Вас со славным 70-летием и выходом в свет прекрасного труда. К моему поздравлению присоединяются механики Ростова-на-Дону и члены Ростовского математического общества. Желаю долгих лет жизни и плодотворной работы на благо отечественной науки”. Еще раньше, когда мне исполнилось лишь 50 лет, он писал мне: “Мы рады, что на всех этапах своей деятельности Вы остаетесь верным лучшим традициям университетской науки – в точности и общности постановки и решения задач, в требовательности к студентам и преподавателям, а прежде всего – к себе!” Мы, студенты, глубоко уважали И.И.Воровича за его доброжелательность и интеллект. Этот неординарный ученый и обаятельный человек был женат на моей однокурснице по университету Любе Коган.

Ровесник Октября Никита Николаевич Моисеев (1917–2000) был очень энергичным, увлекающимся человеком, из потомственных русских интеллигентов, настоящий москвич. Его отец был приват-доцентом Московского университета. В 1941 году он окончил мехмат Московского государственного университета по специальности “Функциональный анализ” и в том же году, призванный в Красную Армию, был направлен на учебу в Военно-воздушную академию им. Н.Е.Жуковского, где уже в 1942 году получил диплом инженера. Воевал на Волховском фронте старшим техником по обслуживанию самолетов. В 1948–1950 годах работал в МВТУ им. Баумана и одновременно в НИИ-2, затем в 1950–1955 годах – в Ростовском-на-Дону университете, с 1956 года – в Московском физтехе. Сочетание университетского фундаментального и прикладного технического образования ему очень помогло. Он читал нам курс аэродинамики. Лекции проходили очень интересно. Сам он увлекался во время повествования, делал много описок на доске, но окончательный результат всегда был верным. Он часто, опаздывая на занятия, висел на подножках трамвая и вообще был большим демократом и “своим парнем”. На экзаменах он выходил из аудитории, спускался на первый этаж, на кафедру, давая возможность желающим воспользоваться шпаргалками. А чтобы не застать студентов во время списывания, медленно поднимаясь по лестнице с первого этажа, громко разговаривал со своими спутниками, предупреждая об опасности своего появления. Меня он называл всегда “Зубом” и говорил мне: “Тебе надо было поступать учиться в МВТУ им. Баумана, у тебя отличное инженерное мышление”. В 1955 году, когда я учился в аспирантуре института механики АН СССР, он пригласил меня на защиту своей докторской диссертации в Стекловку. Защита прошла блестяще. После он стал деканом аэродинамического факультета физтеха, затем организовал там факультет прикладной математики и управления. Его огромной заслугой является разработка и компьютерный расчет последствий одновременного взрыва нескольких водородных бомб. Он показал, что такой взрыв приведет к явлению, называемому теперь “ядерной зимой”, которая будет иметь роковые последствия для человечества.

Никита Николаевич был хорошим спортсменом. В Ростовском-на-Дону университете он организовал секцию альпинизма. В результате я также увлекся этим видом спорта: был несколько раз на Домбае в студенческом лагере “Алибек”, ходил с друзьями через Клухорский перевал в Сухуми и получил 3-й разряд по альпинизму. Узнав, что я лыжник-перворазрядник, Никита Николаевич хотел непременно посостязаться со мной. В школьные годы я в 1946 и 1947 годах был чемпионом Кировской области по лыжам и слалому, а в 1948 и 1949 годах – чемпионом Амурской железной дороги от Читы до Хабаровска. Такой случай представился зимой 1957 года, когда мы

поехали на дачу к его родителям на станцию Сходня под Москвой. Это была увлекательная гонка. Победила дружба. Никита Николаевич часто приезжал в Тверь в “космический” НИИ-2. Когда ему сказали, что я работаю ректором политеха, воскликнул: “Хочу видеть Зуба!”. И он был моим гостем, ночевал у меня дома на ул. Коноплянниковой. Я показывал ему центральный корпус вуза, нашу кафедру и лабораторию. Он был очень интересным собеседником, всегда в движении, не терявший зря ни одной минуты.

Вот что я могу рассказать о моих первых учителях в науке – замечательных людях, талантливейших ученых и педагогах. Это от них я узнал, что любовь к науке должна сочетаться с педагогической деятельностью и любовью к своим ученикам. Узнал, что педагогика – это ты сам, твое сердце, твой разум и интеллект, твой личный пример, а не формальные учебники и скучные лекции по педагогике и организации научной работы, которыми теперь пичкают студентов и магистрантов.

Алексея Антоновича Ильюшина я впервые увидел в 1955 году на кафедре теории упругости МГУ на Моховой. В это время я уже работал инженером-исследователем в специальном конструкторском бюро Красногорского механического завода, где меня многое не устраивало, в том числе отсутствие постоянного жилья. Я попросил совета у Л.А.Толоконникова и приехал на встречу с ним на кафедру теории упругости, где он консультировался у Алексея Антоновича по своей докторской диссертации. Это была судьбоносная встреча.

Еще в Ростове-на-Дону я приобрел книгу А.А.Ильюшина “Пластичность” 1948 года издания. И уже тогда он в моих глазах был корифеем науки. По совету Л.А.Толоконникова я поступил в 1955 году в аспирантуру института механики АН СССР. Директором этого института был сам А.А.Ильюшин! Я с успехом выдержал конкурс 10 человек на одно место при поступлении, набрав столько баллов, что стал вторым по счету в списке на зачисление. Это давало право выбирать себе научного руководителя. И я выбрал – Алексея Антоновича Ильюшина.

На предварительной беседе в директорском кабинете в здании на Ленинградском проспекте у Белорусского вокзала он спросил меня: “Чем Вы хотите заниматься?” Я уже знал ответ на этот вопрос, поэтому сказал: “Пластической устойчивостью, как Вы и Толоконников”. Тогда Алексей Антонович дал мне первое задание: “Посмотрите книгу Прагера и Ходжа “Теория идеально пластических тел”. Там в приложении есть обзор Прагера, где он что-то ворчит по поводу Шенли и пересмотра основных принципов теории пластической устойчивости”.

Шенли (США) в 1946 г. рассмотрел задачу о выпучивании центрально сжатого стержня в условиях непрерывного нагружения и обнаружил, что его выпучивание может начаться при касательно-модульной нагрузке, меньшей приведено-модульной нагрузки Кармана. Это нарушение единственности процесса деформирования при касательно-модульной нагрузке сам Шенли не связывал с потерей устойчивости, так как выпучивание происходило в условиях возрастания нагрузки и не приводило к катастрофическому развитию деформации. Неустойчивость наступала в предельной точке (точке бифуркации Пуанкере). Тем не менее, концепция Шенли дала повод к полемике по вопросу об истинном значении критической силы за пределом упругости. Так, Дуберг и Уайлдер определили критическую силу как силу, при которой стержень начнет изгибаться. Любому инженеру или экспериментатору ясно, что определить этот момент практически для идеально прямого стержня невозможно, а при наличии начальных несовершенств этот момент совпадает с нулевым значением сжимающей

нагрузки. Тем не менее, определение Дюберга дало повод Ю.Н. Работнову, Пфлюгеру, а затем В.Д. Ключникову и Э.И. Григолюку трансформировать концепцию Шенли в “концепцию Дюберга, Работнова”, в которой касательно-модульная нагрузка принималась за критическую. А истина была проста: нарушение единственности истории деформирования и потеря устойчивости процесса деформирования могут не совпадать; единственность решения предполагает устойчивость, но утверждение о том, что устойчивость предполагает единственность решения, может быть неверным. Неверная оценка концепции Шенли сторонниками касательного модуля сыграла с ними злую шутку.



В. Г. Зубчанинов, А. А. Ильюшин

С этого началась моя научная работа с великим ученым-механиком XX века Алексеем Антоновичем Ильюшиным и борьба с любителями касательно-модульного подхода в теории устойчивости брать в запас. Будучи директором института механики (1954–1960 годы), Алексей Антонович был чрезвычайно загружен работой. Поэтому встречался я с ним нечасто. После успешной сдачи мною кандидатского минимума, состоявшего из 6 предметов (философии, английского языка, теории упругости, теории пластичности, уравнений математической физики и их приложения в механике, теории функций комплексного переменного и ее приложения в механике), состоялся наш разговор, во время которого Алексей Антонович поставил передо мной задачу на год вперед: мы обсудили постановку новой проблемы устойчивости неупругих

стержней, входящих в состав догружающих и разгружающих конструкций. Эта новая постановка задач устойчивости упругопластических конструкций учитывала взаимодействие их элементов при выпучивании. Выявилась особая роль вариаций усилий и перемещений узлов элементов, которая оказалась весьма существенной для оценки критического состояния конструкций и их элементов за пределом упругости. Но как это взаимодействие учесть – оставалось загадкой.

Следующая встреча состоялась после года моего упорного труда. Она происходила дома у Алексея Антоновича на Чистых прудах и длилась 12 часов – с 8 утра до 20 часов вечера. Это было поразительно! У меня сохранились конспекты этой уникальной консультации, исписанные вдоль и поперек листы. Однако проблема оставалась нерешённой. В заключение нашей встречи Алексей Антонович с огорчением сказал мне: “Я не знаю сейчас, как решить эту проблему. Давайте поменяем тему. Через три месяца Вы сделаете работу”. Он предложил мне решить задачу по устойчивости треугольной пластины по его классической теории. Но я настолько влез в уже предложенную проблему, что сразу отказался от новой темы и попросил дать мне подумать еще один месяц. Я чувствовал, что решение проблемы где-то близко и оно уже в моей голове, на выходе. Решение, как в сказке, пришло ко мне во сне. Я жил тогда в общежитии аспирантов АН СССР на Академической улице. Посреди ночи я встал, сел за стол и начал работать. К утру проблема была решена, а диссертация завершена. Так бывает. После этого Алексей Антонович снова на Чистых прудах дал мне “добро” на оформление и защиту кандидатской диссертации. Оказалось, что пластически деформируемый стержень в конструкции имеет целый спектр критических состояний в зависимости от того – догружает или разгружает вариация нагрузки элемент конструкции. Это был прорыв в теории пластической устойчивости систем. Это была новая теория устойчивости стержней за пределом упругости, которая поставила точку в полувековом споре ученых об истинной критической нагрузке в задачах пластической устойчивости элементов конструкций. Работу я назвал “Устойчивость стержней как элементов конструкций за пределом упругости”. Она уместилась на 47 страницах. Это было в 1958 г., а соответствующая статья была опубликована в инженерном сборнике, в томе 27 за 1960 год.

На защите в Московском государственном университете в 1960 году работа была поддержана единогласно. По окончании защиты Дима Быков, аспирант А.А.Ильюшина, а ныне известный ученый, профессор, подошел ко мне и сказал: “Володя, все было ясно и понятно в твоём докладе. Но когда ты зачитал выводы, меня от неожиданности словно обухом по голове ударили”. Может быть, из-за этой неожиданности полученного фундаментального результата никто после моего доклада на защите не задавал вопросов. Один единственный вопрос поступил от легендарного профессора МГУ, генерала М.М.Филоненко-Бородича, автора знаменитых учебников по сопротивлению материалов и теории упругости. Вместе с Алексеем Антоновичем мы открыли в теории устойчивости совершенно новое направление – устойчивость элементов конструкций догружающих и разгружающих систем, практическое значение которого не понято многими исследователями до сих пор. Эта теория открывает огромные возможности по снижению материалоемкости конструкций, по повышению их устойчивости и несущей способности с использованием управляемых процессов пластически допускаемого деформирования систем и предложенного мной метода упругопластической тренировки элементов конструкций с использованием временных поддерживающих систем. За этой теорией – будущее в ракетостроении, в строительстве,

машиностроении и других областях техники. Как это часто бывает, время, видимо, еще не пришло. А из числа тех, кто оценил это научное достижение одним из первых, необходимо назвать имена великолепного историка механики, члена-корреспондента АН СССР, профессора Э.И. Григолюка и профессора А.С. Вольмира, крупного специалиста в области устойчивости, автора знаменитой монографии “Устойчивость деформируемых систем” (1967 г.)

Э.И. Григолюк в 1972 г. в книге, посвящённой механике в СССР за 50 лет, отметил, что вывод о касательно-модульной и приведено-модульной нагрузках, ограничивающих интервал действительных критических усилий, был бы весьма привлекателен. Однако А.А. Ильюшин и В.Г. Зубчанинов (1960 г.) разработали теорию, в которой стержни в разгружающих конструкциях теряют устойчивость выше приведено-модульного значения. А.С. Вольмир (1967 г.) поддержал новую теорию в его книге, а В.Д. Ключенков в 1976 г. в обзорной статье сборника “Механика. Новое в зарубежной науке”, №7 недалековидно отметил, что в рамках критерия о бифуркации процесса проблемы догружающих и разгружающих систем не существует. Это была грубая ошибка, которая похоронила критерий касательного модуля как концепцию бифуркационной неустойчивости.

Я продолжил свои исследования в области упругопластической устойчивости элементов конструкций и к 1972 году подготовил докторскую диссертацию. Результатом этой работы было второе мое детище – концепция устойчивости упругопластических систем, которая, благодаря поддержке академика К.С. Колесникова и упорному сопротивлению академика В.В. Болотина, вошла в энциклопедию РАН “Машиностроение”. Я уважал Владимира Васильевича Болотина за его прекрасную книгу “Неконсервативные задачи теории устойчивости”, но в теории пластической устойчивости он не смог мне ничего возразить и противопоставить. Я защитил докторскую диссертацию на тему “Вопросы устойчивости упругопластических систем” в Московском инженерно-строительном институте в 1972 году на совете, который возглавлял заведующий кафедрой сопротивления материалов этого института Иван Иванович Цурков – замечательный человек, талантливый ученый, ученик А.А. Ильюшина. После успешной защиты он сказал мне: “Ну теперь, Владимир Георгиевич, у тебя будет множество учеников, поскольку из твоей диссертации уже потекло много живительных ручейков”. Так оно и случилось. Это было началом возникновения тверской научной школы механиков-прочнистов и ее истоком. В следующем, 1973, году я был избран заведующим кафедрой сопротивления материалов и остаюсь на этой работе до сих пор.

На защиту моей докторской диссертации Алексей Антонович приехал поддержать меня прямо с общего собрания АН СССР и выступил с положительной оценкой выполненной работы. Мне стало известно, что по поручению Ю.Н. Работнова на мою защиту должен был приехать В.Д. Ключников. Однако до открытого противостояния дело не дошло в силу слабой позиции сторонников концепции касательного модуля. По поводу моих исследований А.А. Ильюшин как-то в шутку сказал мне: “Ненавижу Зубчанинова! Он все перевернул в этой устойчивости!” Дело в том, что в основу своей концепции устойчивости наряду с исследованием процессов и ползучести я стал рассматривать начальные несовершенства конструкций как возмущающие факторы, а университетская классика этого не допускала. Инженерам это было понятно, экспериментаторам – понятно. А математикам и университетским механикам – нет. Алексей Антонович в

конце концов это принял, поскольку обладал удивительным физическим чутьем. Когда я на диспутах и семинарах приводил свои знаменитые графики, иллюстрирующие мою концепцию устойчивости, то он говорил: “Это твое и только тебе принадлежит”. Он был доволен, что теория течения в теории устойчивости крупно проиграла его теории.

В 1960 году А.А.Ильюшин оставил пост директора института механики и сосредоточился на научной и учебной работе в МГУ на кафедре “Теория упругости”, которой заведовал с 1942 года, сменив на этой должности А.С.Лейбензона, своего учителя. А.С.Лейбензон так охарактеризовал своего ученика: “Он (А.А.Ильюшин) представляет собой счастливое сочетание гениального теоретика, прекрасного конструктора и искусного экспериментатора, проникающего в самую суть исследуемых им технических проблем”. А.А.Ильюшин спас своего учителя, вытащив его из застенков сталинских лагерей.



В. Г. Зубчанинов, А. А. Ильюшин

А.А.Ильюшин окончил мехмат МГУ в 23 года, в 25 лет он защитил в МГУ кандидатскую диссертацию, а в 27 лет – докторскую, в 30 лет он – профессор, в 32 года – член-корреспондент АН СССР, в 36 лет – действительный член Российской академии ракетных и артиллерийских наук, в 37 лет – лауреат Сталинской премии 1-й степени за цикл работ по пластичности, с 29 лет – консультант наркомата боеприпасов, в 36 лет – заместитель директора ракетного НИИ-88 (ныне ЦНИИМАШ в г.Королеве Московской области), в 49 лет – ректор Ленинградского университета, в 51

год – заместитель главного конструктора в Арзамасе-16. И еще следует отметить, что он некоторое время работал заместителем председателя Верховного Совета РСФСР. Алексей Антонович – это явление XX века, глыба в науке, это истинный ученый, инженер, человек.

Особо хочу подчеркнуть, что в 1935 году в МГУ А.А.Ильюшин для своих студентов, аспирантов и преподавателей не только создал лабораторию динамических испытаний вязкопластических свойств материалов, но и был ее заведующим. Пусть нынешние аспиранты подумают о роли эксперимента в научных исследованиях и обучении и не чуждаются работы в лаборатории. А.А.Ильюшин писал о себе: “Я больше теоретик, хотя все годы занимался экспериментами”. То же самое я могу сказать про себя. Хочу, чтобы мои ученики сочетали в себе эти качества, так как без эксперимента в теории пластичности и вообще в механике деформируемого твердого тела делать нечего.

Классическая деформационная теория пластичности была создана А.А.Ильюшиным в 1941 году за два месяца. Она принесла ему мировую славу. В ноябре-декабре 1941 года, когда шли бои под Москвой, наши войска испытывали “снарядный голод” и вся артиллерия становилась бессильной. Дело было также в том, что в условиях войны половина всего производимого в стране черного металла расходовалась не на корпуса танков, самолетов и кораблей, а на артснаряды. Проектирование и расчеты снарядов в то время во всем мире велись методами теории упругости, а сам снаряд в стволе испытывал пластическое деформирование. А.А.Ильюшин с помощью созданной им деформационной теории пластичности разработал новую методику, нормы и технологию производства артснарядов. Их могли производить на заводах даже подростки. В 1942 году новые взгляды на выстрел были очень быстро приняты военными, промышленниками, министерством боеприпасов и стали законом для всех. “Снарядный голод” резко пошел на убыль и сменился даже изобилием. Это был огромный вклад А.А.Ильюшина в Победу нашего народа в Великой Отечественной войне, без этого вклада были бы невозможны военные операции типа Сталинградской битвы. Один умный генерал Н.Д.Иванов сказал Алексею Антоновичу в середине 1942 года: “Вы сами не представляете, что сделали для войны и Победы”.

Далее в 1947 году А.А.Ильюшина приглашают в организованный ракетный НИИ-88 в подмосковном Калининграде (ныне г.Королев) научным руководителем (заместителем начальника по науке). Заведующим конструкторским отделом был С.П.Королев, отделом прочности – А.В.Кармишин, отделом аэродинамики – Х.А.Рахматулин. Перед НИИ стоял один главный вопрос: как определить давление на самолеты и ракеты при больших сверхзвуковых скоростях полета? Алексей Антонович в 1947 году сформулировал и доказал закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, сводящий пространственную задачу к плоской. Академики М.В.Келдыш, Л.И.Седов утверждали, что такого закона быть не может. Однако закон был принят в ракетном ЦАГИ как ничему не противоречащий. На его основе была разработана теория панельного флаттера. Это было научное достижение колоссального практического и оборонного значения. Казалось бы, за все это Алексею Антоновичу следовало дать звание Героя Социалистического Труда. Но увы! Почему?! Алексей Антонович рассказывал мне, что закон плоских сечений пришел ему в голову ночью, когда он отдыхал у себя дома на Чистых прудах и смотрел на занавеси и отражающиеся на них полосы огней проезжающих машин.

В 1952 году А.А.Ильюшина по приказу И.В.Сталина назначают в Арзамас-16 заместителем генерального конструктора Ю.Б.Харитона по разработке атомной и водородной бомб. Вместе с ним туда были направлены известные ученые-академик М.А.Лаврентьев, организатор Сибирского отделения АН СССР, а также академик Н.Боголюбов. Они выполняли роль экспертов во всех решениях И.В.Курчатова, Зельдовича и Ю.Б.Харитона. Как вспоминал сам Алексей Антонович, своих экспертов “курчатовцы” невзлюбили и относились к ним враждебно.

А.А.Ильюшин сыграл решающую роль в создании водородной бомбы, поддержав идею А.Д.Сахарова об использовании термоядерного заряда. Однако награда его и здесь миновала. Неясно, почему история умалчивает на сей счет, хотя догадаться можно. Алексей Антонович неоднократно выдвигался в действительные члены АН СССР и РАН, но каждый раз некая группа академиков “проваливала” его при голосовании, они даже каким-то образом уговорили Л.И.Брежнева не подписывать указ о присвоении ему звания Героя Социалистического Труда, а наградить лишь орденом Октябрьской революции. А.А.Ильюшина выдвигали в действительные члены Академии наук СССР такие крупные таланты нашей науки, виднейшие ученые страны, как академики Л.Лейбензон, С.Христианович, Н.Мухелишвили, А.Некрасов, Б.Юрьев, М.Лаврентьев, Н.Боголюбов, А.Ишлинский, И.Артоболевский, А.Благонравов, Ю.Работнов и другие. И к их мнению не прислушались! Обидно за Отечество! И все же А.А.Ильюшин был гением, талантищем в науке, но, подобно Д.И.Менделееву, он также совершенно несправедливо не стал действительным членом РАН. Обидно за Державу. Лично для меня он остается глыбой в науке, Человеком с большой буквы. Не каждую сотню лет такие люди рождаются на Земле. Академия наук в долгу перед этим великим ученым, научное наследие которого вошло в сокровищницу мировых достижений XX века. В музее МГУ он навечно занесен на доску почета.

У Алексея Антоновича была замечательная семья: жена Ольга Константиновна, дочь Елена, сын Алексей, внуки. Он любил свою семью. Из каждой своей командировки он всегда привозил для них какие-нибудь небольшие подарки. Жил он скромно, без излишеств. Я нечасто бывал у него дома на Чистых прудах, но всегда поражался его доброжелательности и гостеприимству. Таким был мой учитель Алексей Антонович Ильюшин, оказавший огромное влияние на мою деятельность в науке. Запомнились наши совместные поездки к нам в Тверь на Селигер, на конференции в Ташкент к Т.Рашидову и К.Бабамуратову, в Тбилиси, в Киев к Ю.Н.Шевченко, А.А.Лебедеву и Г.С.Писаренко, в Пермь к А.Поздееву, в Нижний Новгород к А.Г.Угодчикову, в Тулу к Л.А.Толоконникову. Однажды мы вместе отдыхали в Кисловодске. И всюду на прогулках нам удавалось обсуждать с Алексеем Антоновичем наши общие проблемы в теории пластичности и устойчивости. И везде он это охотно делал. Он был щедрым и доброжелательным человеком.

Созданная им в МГУ кафедра “Теория упругости” имела уникальный по своему составу коллектив. В 60-е годы на кафедре работали такие известные ученые, профессора, как В.С.Ленский, В.А.Ломакин, М.А.Колтунов, В.В.Москвитин, П.М.Огибалов, В.М.Панферов, М.Р.Короткина, доценты Б.П.Кишкин, И.В.Кеппен. В институте механики МГУ были созданы первые в стране лаборатории по пластичности материалов при сложном нагружении и по испытаниям полимерных материалов. Кафедра стала мне родной. Я часто по средам приезжал в Москву и посещал лекции Алексея Антоновича и известный всем механикам страны научный семинар на кафедре.

Сам сделал на нем несколько докладов. Оценка заслушиваемых на семинаре докладов была очень важна тогда для каждого ученого-механика. Состав кафедры теперь другой, и, к сожалению, подобных семинаров вселенского масштаба больше уже нет. Печально, но факт. Помню, как мы вместе с Б.Победрей докладывали свои докторские диссертации сначала на семинаре, а затем в кабинете у декана мехмата. Нас слушали А.А.Ильюшин и П.М.Огибалов. На доклад нам отвели всего по 10 минут каждому. Представьте, как нелегко было за это время, да еще только с мелом в руке у доски, рассказать о работе, над которой трудился много лет. Но мы справились и оба получили “добро” на защиту.

У Алексея Антоновича было много учеников. Он подготовил более 100 кандидатов и несколько десятков докторов наук. Среди них хочу отметить наиболее талантливых: Л.А.Толоконникова, А.С.Кравчука, Р.А.Васина, Д.Л.Быкова, В.И.Малого, Б.Е.Победрю, И.А.Кийко, Ю.Р.Лепика, И.И.Поспелова, В.П.Дегтярева и др. Я имею полное моральное право к этому перечню добавить и себя самого. На подаренной мне Алексеем Антоновичем монографии “Пластичность” можно прочесть написанные им слова: “Проф. В.Г.Зубчанинову. Здесь начала (1948 г.) нашей с Вами пластичности. 20.07.91. Ильюшин”. Такая оценка дорогого стоит. Он признал меня своим учеником.

Алексей Антонович часто бывал в Твери, на нашей кафедре сопротивления материалов, теории упругости и пластичности. В 1977 году при первом посещении Твери он подарил мне книгу “Пластичность” (1963 год), на которой оставил надпись: “Для руководства к действию”. Результатом этого действия стали разработанные мной концепция устойчивости и общая теория устойчивости вязкоупругих систем при сложном нагружении, ряд частных теорий пластичности, обоснование соотношений его знаменитой гипотезы компланарности в теории пластических процессов, разработка автоматизированного испытательного комплекса СН-ЭВМ, работающего и сегодня на благо науки, построение общей теории определяющих соотношений теории процессов и др.

А.А.Ильюшин был председателем и сопредседателем всех проводившихся в Твери при его жизни научных симпозиумов по устойчивости и пластичности. Первый симпозиум состоялся в 1981 году. Я очень волновался, так как противников его проведения было достаточно, в т.ч. сторонников касательно-модульников во главе с В.Д.Клюшниковым и др. До этого было проведено несколько конференций по устойчивости в строительной механике академиком В.В.Болотиним. Алексей Антонович сказал тогда мне: “Что Вы так волнуетесь? Симпозиум по устойчивости уже вошел в историю!” После этого симпозиума наш Тверской государственный технический университет стал ведущим центром в стране в области упруго-пластической устойчивости конструкций и остается таковым по сей день. Более того, в решении одного из симпозиумов было записано, что лабораторная база кафедры – лучшая в России и в Тверском государственном техническом университете необходимо открыть подготовку специалистов-экспериментаторов. Это предложение внес великий экспериментатор российской механики XX века профессор А.М.Жуков. Однако Минвуз и обком остались глухи к этому призыву, и Тверь упустила уникальную возможность стать научно-экспериментальным центром России мирового уровня. Хотя это возможно реализовать и сейчас. До сих пор ни один вуз страны не готовит механиков-экспериментаторов и строителей-экспериментаторов. А о прочности материалов нужно знать все в любой

отрасли промышленности и строительства. Что касается конференций по устойчивости в строительной механике, то они более не проводились, а симпозиум по устойчивости проводился каждые пять лет в г.Твери.

А.А.Ильюшин – основоположник теории устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости (1946-1948 годы). Благодаря разработанной им теории процессов пластического деформирования при сложном нагружении (1954–1983 годы), мне удалось обобщить теорию устойчивости Ильюшина для процессов докритического и послекритического сложного нагружения, и в результате, скажу без лишней скромности, я стал основоположником теории устойчивости тонкостенных элементов конструкций при сложном нагружении за пределом упругости. На этом научном направлении защитились почти все мои ученики, которые вместе со мной и составляют костяк тверской научной школы в области механики деформируемого твердого тела. Роль моего учителя А.А.Ильюшина в становлении этой школы безусловно велика.

В последние десятилетия XX века значение региональных научных школ значительно возросло. Необходимо отметить такие крупные научные центры в Туле, Перми, Нижнем Новгороде, Чебоксарах, Казани, Ростове-на-Дону, Твери, Самаре, Воронеже. Москва постепенно передала им свое ведущее положение во многих областях механики. Видимо, это естественный процесс. Московский государственный университет существенно ослабил свои исследования в области пластичности и прочности. В РАН был ликвидирован научный Совет по проблемам прочности и пластичности, который бессменно возглавлял А.А.Ильюшин. Смею утверждать, что “ильюшинское” направление в теории пластичности с конца 80-х годов прошлого столетия сместилось в Тверь, в технический университет, а также в ряд других научных центров страны. В Твери продолжают интенсивно вестись фундаментальные теоретические и экспериментальные исследования в области теории процессов пластического деформирования материалов при сложном нагружении с учетом их ползучести, деформационной анизотропии, влияния изменений структуры и др. Построенную мною общую теорию определяющих соотношений в теории пластичности можно отнести к моему третьему самому крупному достижению мирового уровня в этой области познания. Такая самооценка достигнутого может показаться нескромной. Но мне уже 80, а признание и понимание научных достижений всегда, как известно, приходит с запозданием. И это естественно для тех, кто, работая в науке, намного опережает свое время.

Пластичников высокого мирового уровня в стране осталось мало, а безответственности за судьбу инженерных сооружений, аппаратов и машин – много. Для подтверждения этого можно привести достаточное количество примеров. Для меня дорога высокая оценка моей научной деятельности выдающимся ученым-механиком современности академиком РАН Евгением Ивановичем Шемякиным и академиком Национальной академии наук и искусств Чувашии Ивлевым Дюисом Даниловичем. Это замечательные люди, гордость нашей науки! Евгений Иванович – сибиряк. Одно время он был заместителем председателя Сибирского отделения АН СССР, а затем – председателем ВАК. Он долгое время заведовал кафедрой волновой и газовой динамики МГУ, друг Алексея Антоновича Ильюшина. Ему он часто говорил: “Алексей Антонович! Займитесь горной механикой”. Евгений Иванович был моим большим другом. Это очень доброжелательный и отзывчивый человек, большой ученый с удивительным научным чутьем, физическим воображением и интуицией. И, что надо подчеркнуть, он умел находить общий язык с молодежью, со своими учениками.

Дюис Данилович Ивлев уже в 29 лет был доктором наук. Это одаренный, талантливый ученый, умный человек. А на Руси издавна получается так, что умных людей не жалуют, им завидуют. Может быть поэтому он махнул рукой на Москву и создал сильные научные школы в Самаре, Воронеже, Чебоксарах. Он крупнейший специалист в области теории пластических течений сплошных сред. Его книга “Математическая теория пластичности”, написанная в соавторстве с академиком А.Ю.Ишлинским, уникальна.



В. Г. Зубчанинов, Д. Д. Ивлев. Чебоксары. Волга.

Для меня было большой честью, что ряд университетов приобрел мою книгу “Механика сплошных деформируемых сред”. Особенно приятна мне была просьба академика РАН Никиты Федоровича Морозова прислать ее для использования в Санкт-Петербургском государственном университете. Никита Федорович – очень приятный в общении, энергичный в делах и ясно мыслящий человек. Сейчас он достойно возглавляет научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела. В 2000 году он приезжал ко мне на 70-летний юбилей и впервые познакомился с Тверью и нашим университетом. Затем повторил такие поездки в 2005 и 2010 годах. Удивительная стабильность.

В 2005 году в Твери состоялось совещание, которое, можно сказать, имело историческое значение для нашей науки. На него собрались видные российские ученые: Е.И.Шемякин, В.Г.Зубчанинов, Д.Д.Ивлев, Р.А.Васин, В.Г.Баженов, В.Г.Малинин, Н.М.Матченко, А.А.Маркин, Н.Л.Охлопков, И.Г.Горячева – словом, пластичники.

Были обсуждены насущные проблемы науки и сотрудничества ученых. Затем последовало совещание-семинар в Москве у профессора В.С.Бондаря. Таким образом, встречи и совместная работа ученых страны продолжаются. В 2007 году мы провели научный семинар ведущих ученых прочнистов-пластичников снова у нас в Твери, в ТГТУ. Приятно осознавать, что благодаря нашим исследованиям Тверь стала одним из признанных научных центров России. Важная и очень нужная людям наука о прочности развивается, впереди – новые достижения на благо нашего Отечества.

В январе 2011 г. моему учителю исполнилось 100 лет со дня рождения. К этому событию я опубликовал в 2010 г. монографию “Механика процессов пластических сред” в издательстве “Физматлит” и посвятил памяти Алексея Антоновича Ильюшина. Это первая книга, которая посвящена теории процессов в XXI веке.

На симпозиуме в МГУ 20 января 2011 года во время своего пленарного доклада “Теория процессов, полная и неполная пластичность и постулат изотропии” я с удовольствием вручил эту книгу дочери Алексея Антоновича – Елене Алексеевне Ильюшиной – удивительной женщине, от которой сегодня мы узнали много нового о творческом наследии Алексея Антоновича Ильюшина.

Я благодарен своим родителям Георгию Владимировичу и Марии Петровне, подарившим мне жизнь, своим учителям, научившим меня творчески познавать жизнь в науке и во всех ее проявлениях.

Зубчанинов Владимир Георгиевич

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ, ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ ПЛАСТИЧНОСТЬ СПЛОШНЫХ СРЕД И ПОСТУЛАТ ИЗОТРОПИИ А. А. ИЛЬЮШИНА

Тверской государственный технический университет

Аннотация. Механика процессов упругопластического деформирования сплошных сред и материалов была создана на рубеже 50-х годов XX столетия в трудах выдающегося ученого-механика, члена-корреспондента АН СССР и РАН, заведующего кафедрой теории упругости Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, профессора Ильюшина Алексея Антоновича и развивалась в трудах учеников его научной школы в 90-е и последующие годы. В работе обсуждается современное состояние теории процессов и пути развития этой важной фундаментальной проблемы теории пластичности.

Ключевые слова: пластичность, полная и неполная пластичность, сложное нагружение, постулат изотропии.

УДК: 539.3

1. Векторные и скалярные свойства сплошных сред.

Постулат изотропии в теории процессов является основным законом, связывающим напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) друг с другом. Он относится к любой начально-изотропной среде в физическом пространстве и рассматривает процессы нагружения и деформирования в них произвольного вида. При сложных процессах нагружения материалы обнаруживают не только скалярные, но и векторные свойства. Отобразить последние наглядно в геометрической форме при тензорном подходе не представляется возможным. А.А.Ильюшин в работе [1] представил тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в виде

$$S_{ij} = (\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S_{ij}^*), \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + \Theta(\Theta_{ij}^*), \quad (1.1)$$

где σ_0, ε_0 – средние напряжения и деформации (первые инварианты шаровых тензоров), δ_{ij} – символ Кронекера,

$$S_{ij} = \sigma S_{ij}^*, \quad \Theta_{ij} = \Theta \Theta_{ij}^*, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}}, \quad (1.2)$$

– компоненты девиаторов напряжений и деформаций и их модули σ и Θ (вторые инварианты тензоров-девиаторов); S_{ij}^*, Θ_{ij}^* – компоненты направляющих тензоров, связанные соотношениями

$$S_{ii}^* = 0, \quad S_{ij}^* S_{ij}^* = 1, \quad \Theta_{ii}^* = 0, \quad \Theta_{ij}^* \Theta_{ij}^* = 1. \quad (1.3)$$

Каждый из направляющих тензоров, с учетом (1.3), определяется четырьмя независимыми из S_{ij}^*, Θ_{ij}^* величинами. Они определяют три главных направления тензоров и углы вида напряженно-деформированного состояния (НДС) φ и ψ соответственно согласно формулам

Поступила 16.02.2011

Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-06072-г).

$$\cos 3\varphi = \frac{|S_{ij}^*|}{3\sqrt{6}}, \quad \cos 3\psi = \frac{|\Theta_{ij}^*|}{3\sqrt{6}}. \quad (1.4)$$

Углы φ и ψ являются третьими инвариантами тензоров [2].

Главные нормальные напряжения σ_k ($k = 1, 2, 3$) определяются формулами [2-4]

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sqrt{2/3} \cos \varphi, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \sqrt{2/3} \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right), \quad \sigma_3 = \sigma_0 + \sqrt{2/3} \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right), \quad (1.5)$$

а главные касательные – формулами [3]

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right), \\ T_{23} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin \varphi, \\ T_{13} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Модуль девиатора напряжений

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{T_{12} + T_{23} + T_{13}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (1.7)$$

Таким образом, соотношение (1.1) четко разделяет векторные и скалярные свойства материалов в тензорном изложении НДС. Объемная деформация сред в теории пластичности считается упругой. Поэтому упругопластическое деформирование носит сдвиговый характер.

Наиболее известными критериями пластичности являются критерии:

а) Мизеса

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{T_{12} + T_{23} + T_{13}} = R = \sqrt{2/3} \sigma_T, \quad (1.8)$$

б) Треска – Сен-Венана

$$T_{max} = \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} = \begin{cases} k \\ k_0 \end{cases}, \quad (m < n, \quad m, n = 1, 2, 3), \quad (1.9)$$

где σ_T – предел текучести при растяжении материала, k – предел текучести при чистом пространственном сдвиге, k_0 – предел текучести при чистом плоском сдвиге [2-4].

Карман и Хаар ввели в теорию пластичности понятия полной и неполной пластичности [5]. При переходе из упругого начально-изотропного состояния материала в упругопластическое он становится квазиизотропным. Полная пластичность материала характеризуется тем, что в состоянии *пространственного* чистого сдвига частицы тела ($\sigma_{ij} = \tau$ при $i \neq j$, $\sigma_1 = 2\tau$; $\sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$) напряжения $\tau = k_*$ достигают некоторого предельного значения k_* , а главные касательные напряжения

$$T_{max} = T_{12} = T_{13} = \frac{3k_*}{2}, \quad T_{23} = 0. \quad (1.10)$$

В этом случае модуль девиатора $\sigma = \sqrt{6}k_*$. При наложении всестороннего растяжения напряжениями $\sigma_0 = k_*$ мы приходим к чистому растяжению и в предельном состоянии $\sigma_1 = 3k_* = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, причем соотношение (1.10) сохраняется, а модуль девиатора становится равным $\sigma = \sqrt{2/3}\sigma_T$. Это приводит нас к соотношению

$$\sigma = \sqrt{2/3}\sigma_T = \sqrt{6}k_* \quad (k_* = \sigma_T/3). \quad (1.11)$$

Сам Мизес считал, что критерий Треска физически точный и, с учетом гипотезы Хаара и Кармана, пояснил $T_{max} = T_{12} = T_{13} = k$, $T_{23} = 0$, что привело его к критерию

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} k = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T, \quad \left(k = \frac{\sigma_T}{2}\right). \quad (1.12)$$

При сравнении (1.11), (1.12) получаем

$$\sigma_T = 3k_*, \quad k = \sigma_T/2. \quad (1.13)$$

На рис. 1а в девиаторной плоскости *пространства главных нормальных напряжений* σ_k ($k = 1, 2, 3$) Хейга критерий Мизеса изображается окружностью радиуса $R = \sqrt{2/3} \sigma_T$. Однако не во всех точках окружности достигается полная пластичность материала.

Хаар и Карман представили критерии Треска – Сен-Венана (1.9) в общем виде [3–5]

$$(T_{12}^2 - k^2)(T_{23}^2 - k^2)(T_{13}^2 - k^2) = 0. \quad (1.14)$$

Заменяя T_{ij} в (1.13) их выражениями (1.6) получим

$$\sin^2 3\varphi - 18k^2 \left[\sigma^2 - \left(\sqrt{\frac{8}{3}} k \right)^2 \right]^2 = 0. \quad (1.15)$$

В состоянии полной пластичности согласно (1.12), $\sigma = \sqrt{8/3} k$ и поэтому $\sin^2 3\varphi = 0$, откуда углы $\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ$. Данные углы определяют на окружности Мизеса особые точки полной пластичности. Во всех других точках мы имеем состояние неполной пластичности материала.

Интересно высказывание Хилла [6] об опытах Треска при установлении им своего критерия пластичности (1.9): “Распределение напряжений при выдавливании металлов через матрицы различных форм было далеко от равномерного и попытки Треска его проанализировать были очень грубыми”. Это высказывание Хилла об опытах Треска и гипотеза Хаара и Кармана навели нас на мысль, что условие Треска (1.9) должно зависеть от вида напряженно-деформированного состояния НДС, что по существу до настоящего времени не принималось во внимание. Поэтому в критерии Треска (1.9) для T_{max} мы ввели два обозначения для пределов пластичности: k – предел текучести для пространственного напряженного состояния, k_0 – предел текучести для плоского чистого сдвига.

При плоском чистом сдвиге ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, и $T_{max} = T_{13} = \tau$, $T_{12} = T_{13} = \tau/2$) в предельном состоянии при $T_{max} = k_0$ получаем $\sigma = \sqrt{2} k_0$, а при растяжении ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$, и $T_{max} = T_{12} = T_{13} = \sigma/2$, $T_{23} = 0$) в предельном состоянии при $\sigma_1 = \sigma_T$ находим $\sigma = R = \sqrt{2/3} \sigma_T$. Следовательно,

$$\sigma_T = \sqrt{3} k_0, \quad k_0 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}. \quad (1.16)$$

На рис. 1а в девиаторной плоскости критерий Треска изображен в виде двух правильных шестиугольников. Внутренний многоугольник, вписанный в окружность Мизеса, соответствует критерию Треска для состояний неполной пластичности для пространственных напряженных состояний при $k = \sigma_T/2$. Внешний, описанный около окружности Мизеса – состояниям неполной пластичности при $k_0 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$ для плоских напряженных состояний. Заменяя в (1.14) k на k_0 получаем

$$\sin^2 3\varphi - 18k_0^2 \left[\sigma^2 - \left(\sqrt{\frac{8}{3}} k_0 \right)^2 \right]^2 = 0. \quad (1.17)$$

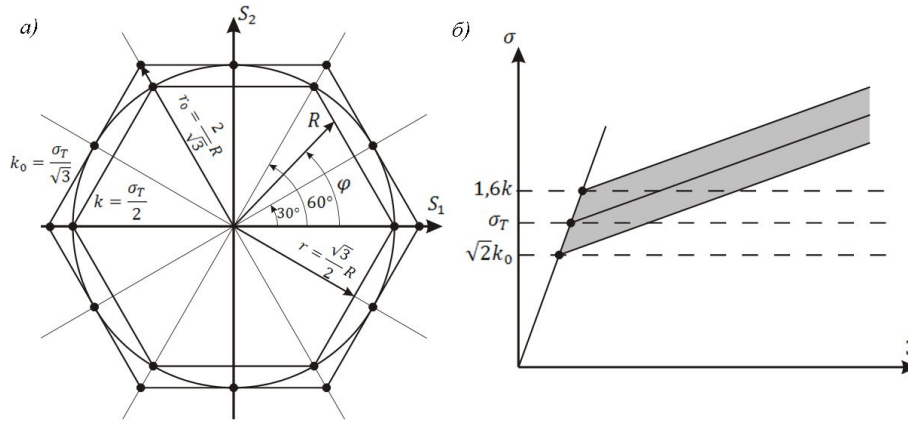


Рис. 1.

Назовем точки на окружности Мизеса, в которых внешний многоугольник и окружность касаются друг друга особыми точками неполной пластичности. В этих точках при

$$\varphi = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 300^\circ \tag{1.18}$$

модуль $\sigma = R$ и реализуется плоский чистый сдвиг, а во всех других точках $\sigma > R$. Отклонение окружности Мизеса от многоугольника Треска не превышает $15,5^\circ$. Эту окружность можно принять за “осредненную”.

Таким образом, при переходе начально изотропного материала от упругого состояния в пластическое при различных направлениях под углом φ , он становится квазиизотропным. Поэтому вполне естественно возникает здравая мысль при решении краевых задач заменить различные критерии пластичности некоторым “осредненным” приближенным и более простым критерием типа критерия Мизеса, что и было сделано в работах А.А.Ильюшина [7].

А.А.Ильюшин в работе [7] отметил: “Общая математическая теория пластичности (теория процессов) разрабатывается для твердых тел, материал которых в недеформированном состоянии является изотропным или квазиизотропным (поликристаллическим), подчиняется закону Гука в области упругих деформаций, и появление пластических деформаций в них характеризуется условиями пластичности с достаточной степенью точности совпадающими с условием Губера-Мизеса (как, например, условием Треска) и другими, заменяющими поверхность Мизеса к ней многоугольниками. Для краткости такие тела будем называть изотропными” [7].

Рош и Эйхингер [8] и Одквист [9] распространили осредненный критерий Мизеса на упрочняющиеся среды для определения новых пределов текучести после их разгрузок и повторных догрузок и выдвинули гипотезу о универсальной “единой” осредненной кривой (рис 1б) при простом и “слабом” сложном нагружениях в виде

$$\sigma = \Phi(\varepsilon), \quad \sigma = \Phi(S). \tag{1.19}$$

Обвинения в адрес теории процессов в дискуссии 1960-1961 годов о том, что это теория относится только к узкому кругу конструкционных материалов, подчиняющихся критерию Мизеса, оказались абсолютно неуместными и граничащими с полным непониманием сути вопроса. Это замечание можно было отнести и к любой другой теории пластичности, включая теорию течения.

2. Постулат изотропии.

В основе механики сплошной среды лежит постулат макроскопической определенности, согласно которому макроскопическое состояние среды в каждой ее частице и в любой момент времени t в условиях сложного НДС однозначно определяется процессом [10–12]. Из этого постулата вытекает, что возникающие в процессе напряжения σ_{ij} либо σ_0 , S_{ij} являются функциями ε_{ij} либо $\varepsilon_0, \Theta_{ij}$, а также температуры T и нетермофизических параметров β . Следовательно, для начально изотропных сред при любом сложном НДС и сложном процессе нагружения $S_{ij}^* \neq \Theta_{ij}^*$ функционалы

$$\sigma_0 = F_0 \{ \varepsilon_0, \Theta_{ij}, T, \beta \}_t, \quad S_{ij} = \Phi_{ij} \{ \varepsilon_0, \Theta_{ij}, T, \beta \}_t. \quad (2.1)$$

Должны быть инвариантны относительно ортогональных преобразований поворота координатных осей x_k ($k = 1, 2, 3$) в физическом пространстве. В [1] А.А.Ильюшин предложил представить эти соотношения в виде

$$\sigma_0 = K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = A_k \frac{d^k \Theta_{ij}}{ds^k} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5), \quad (2.2)$$

где второе тензорное соотношение он назвал *постулатом изотропии* в физическом пространстве.

Известно, что любой тензор 2-го ранга после операции симметрирования может быть представлен шестичленной формулой [13,14]

$$(p_{ij}) = p_{ij} D_{ij}, \quad D_{ij} = (\hat{e}_i \hat{e}_j), \quad (2.3)$$

где D_{ij} – базисные тензоры второго ранга, называемые диадами; $\{e_i\}$ – ортонормированный базис физического пространства.

Если разложить тензор (p_{ij}) на шаровой и девиатор, то получим

$$(p_{ij}) = Z_0 i_0 + Z_k i_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (2.4)$$

где компоненты $p_{ij} = p_0 \delta_{ij} + d_{ij}$, p_0 – модуль шарового тензора, d_{ij} – компоненты девиатора,

$$i_0 = \frac{D_{ii}}{\sqrt{3}}, \quad i_k = \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_k^{ij} D_{ij} \quad (2.5)$$

– базисные тензоры А.А.Ильюшина, β_k^{ij} – коэффициенты преобразования,

$$Z_0 = \sqrt{3} p_0, \quad \sqrt{\frac{3}{2}} Z_k = \beta_k^{ij} d_{ij} \quad (2.6)$$

– компоненты преобразованного тензора (p_{ij}) [11].

В соотношении (2.2) А.А.Ильюшин использовал в качестве естественного переменного базиса δ_{ij} и пять линейно-независимых тензоров-девиаторов с компонентами [17]

$$\Theta_{ij}^{(k)} = \frac{d^k \Theta_{ij}}{ds^k} \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (2.7)$$

Компоненты этих базисных тензоров находятся из рекуррентных формул [15]

$$\frac{d^k \Theta_{ij}^{(k)}}{ds} = -\varkappa_{k-1} \Theta_{ij}^{(k-1)} + \varkappa_k d \Theta_{ij}^{(k+1)}. \quad (2.8)$$

По заданному девиатору с компонентами $\Theta_{ij}^{(1)} = \frac{d \Theta_{ij}}{ds}$ параметры \varkappa_k в (2.8) подбираются так, чтобы базисные девиаторы были нормированными. Можно показать, что (2.7) также ортогональны $\Theta_{ij}^{(m)} \cdot \Theta_{ij}^{(n)} = \delta_{mn}$. Разложение S_{ij} по базису (2.7) приводит к соотношению (2.1), названному *постулатом изотропии*. К сожалению, этого доказательства в работах

[10, 16] нет, хотя в работе [17] отмечено, что доказательства формулы (2.2) удобнее было выполнить в пятимерном координатном векторном пространстве E_5 .

3. Векторное представление тензоров и процессов в линейном евклидовом координатном пространстве E_6 .

Геометрическое представление векторных свойств материалов в процессах сложного нагружения и деформирования в теории пластичности имеет принципиальное значение. В линейной алгебре [14] множество элементов любой природы, в том числе тензоров второго ранга (p_{ij}) , называется линейным (аффинным) пространством Π , а сами элементы *векторами*. Для векторов вводятся правила сложения и умножения на скаляр. Если в качестве элементов векторов взять тензоры (p_{ij}) , то пространство Π носит название *конкретного тензорного пространства*. Сами компоненты тензоров называют их *координатами*. Упорядоченную совокупность координат тензоров

$$X_1 = p_{11}, X_2 = p_{22}, X_3 = p_{33}, X_4 = p_{12}, X_5 = p_{23}, X_6 = p_{13} \quad (3.1)$$

записывают в виде

$$\bar{p} = (X_1, X_2, \dots, X_n) = X_k \hat{e}_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (3.2)$$

где совокупность n линейно-независимых элементов пространства Π

$$\hat{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \hat{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \hat{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0), \dots, \hat{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \quad (3.3)$$

называют базисом этого пространства.

Если для элементов-векторов координатно-тензорного пространства каким-либо способом определено правило *скалярного произведения*, то такое пространство называют *евклидовым* [14].

Пусть мы имеем два тензора 2-го ранга $A(a_{ij})$, $B(b_{ij})$. Их скалярное произведение производится по известному правилу перемножения квадратных матриц [13,14]

$$A \cdot B = a_{ik} b_{kj} D_{ij}. \quad (3.4)$$

Элементарные примеры показывают, что произведение двух квадратных матриц одного порядка, вообще говоря, не обладают перестановочным свойством, т.е. $B \cdot A \neq A \cdot B$. Двойное скалярное произведение матриц [18]

$$A \cdot \cdot B = a_{ij} b_{ji}, \quad A \cdot \cdot A = a_{ij} a_{ji} \quad (3.5)$$

приводит к свертыванию их скалярного произведения по индексам $i = j$. Однако, из (3.5) для несимметричного тензора не следует, что их можно представить векторами, компонентами которых будут координаты этих тензоров. Для симметричных тензоров $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$ и вместо (3.5) получаем

$$A \cdot \cdot B = a_{ij} b_{ij} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \quad A \cdot \cdot A = \bar{a} \cdot \bar{a} = a^2, \quad (3.6)$$

где

$$\bar{a} = a_k \hat{e}_k, \quad \bar{b} = b_k \hat{e}_k \quad (3.7)$$

– векторы с упорядоченной совокупностью координат

$$\begin{cases} a_1 = a_{11}, a_2 = a_{22}, a_3 = a_{33}, a_4 = \sqrt{2}a_{12}, a_5 = \sqrt{2}a_{23}, a_6 = \sqrt{2}a_{13}, \\ b_1 = b_{11}, b_2 = b_{22}, b_3 = b_{33}, b_4 = \sqrt{2}b_{12}, b_5 = \sqrt{2}b_{23}, b_6 = \sqrt{2}b_{13}, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$a = \sqrt{a_k a_k} = \sqrt{a_{ij} a_{ij}}, \quad b = \sqrt{b_k b_k} = \sqrt{b_{ij} b_{ij}}. \quad (3.9)$$

Таким образом, для симметричных тензоров (p_{ij}) конкретное координатно-тензорное пространство является *евклидовым*, так как для него введено с помощью тензорной операции свертки правило скалярного умножения.

Идею представления тензоров в девятимерном координатно-тензорном пространстве Π_9 предложил В. Прагер. Но для несимметричных тензоров такое пространство не является евклидовым [19].

В теории процессов рассматриваются совмещенные шестимерные и пятимерные линейные евклидовы координатно-тензорные пространства деформаций E_6 и E_5 и напряжений Σ_6 и Σ_5 соответственно. Тензорам напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ε_{ij}) поставлены в соответствие векторы

$$\bar{S} = S_0 \hat{i}_0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \Theta_0 \hat{i} + \bar{\Theta}, \quad (3.10)$$

где векторы $\bar{\sigma}$, $\bar{\Theta}$, связанные с формоизменением в пятимерных подпространствах Σ_5 , E_5 , будут равны

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (3.11)$$

Компоненты векторов (3.10), (3.11) при $d_{ij} = S_{ij}$ либо $d_{ij} = \Theta_{ij}$ определяются согласно формулам (2.6) либо в развернутом виде

$$\begin{cases} Z_0 = \sqrt{2}p_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(p_{11} + p_{22} + p_{33}), & Z_1 = \sqrt{2}[d_{11} \cos(\beta_0 + \frac{\pi}{6}) - d_{22} \sin \beta_0], \\ Z_2 = \sqrt{2}[d_{11} \sin(\beta_0 + \frac{\pi}{6}) + d_{22} \cos \beta_0], & \{\hat{i}_0, \hat{i}_k\}, \\ Z_3 = \sqrt{2}d_{12}, & Z_4 = \sqrt{2}d_{23}, & Z_5 = \sqrt{2}d_{13}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Тензорному базису i_0, i_k ($k = 1, 2, \dots, 5$) соответствует векторный ортонормированный базис $\{\hat{i}_0, \hat{i}_k\}$.

$$\begin{cases} \hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3), & \hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}[\cos \beta_0 \hat{\varepsilon}_1 - \sin(\beta_0 + \frac{\pi}{6}) \hat{\varepsilon}_2 + \sin(\beta_0 - \frac{\pi}{6})], \\ \hat{i}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}[\cos \beta_0 \hat{\varepsilon}_1 + \cos(\beta_0 + \frac{\pi}{6}) \hat{\varepsilon}_2 - \cos(\beta_0 - \frac{\pi}{6})], \\ \hat{i}_3 = \hat{\varepsilon}_4, & \hat{i}_4 = \hat{\varepsilon}_5, & \hat{i}_5 = \hat{\varepsilon}_6. \end{cases} \quad (3.13)$$

В частном случае при угловом параметре $\beta_0 = 0$, получаем

$$\begin{cases} Z_0 = \sqrt{3}p_0, & Z_1 = \sqrt{3/2}d_{11}, & Z_2 = \sqrt{2}(d_{22} + \frac{1}{2}d_{11}) = \frac{d_{22} - d_{33}}{\sqrt{2}}, \\ Z_3 = \sqrt{2}d_{12}, & Z_4 = \sqrt{2}d_{23}, & Z_5 = \sqrt{2}d_{13}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Тензорному базису $\{i_k\}$ соответствует векторный ортонормированный базис $\{\hat{i}_k\}$ ($k=1, 2, \dots, 5$)

$$\begin{cases} \hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3), & \hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}[\hat{\varepsilon}_1 - \frac{1}{2}(\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3)], \\ \hat{i}_2 = \frac{\hat{\varepsilon}_2 - \hat{\varepsilon}_3}{\sqrt{2}}, & \hat{i}_3 = \hat{\varepsilon}_4, & \hat{i}_4 = \hat{\varepsilon}_5, & \hat{i}_5 = \hat{\varepsilon}_6. \end{cases} \quad (3.15)$$

4. Постулат изотропии и общие определяющие соотношения в линейном координатно-тензорном евклидовом пространстве.

Постулат изотропии (2.2) является наиболее общим законом связи напряжений и деформаций при сложном нагружении и разгрузении, учитывающим скалярные и векторные свойства сплошных сред и материалов. Умножая (2.2) на \hat{i}_k и складывая, получаем векторную форму общего постулата изотропии в E_5

$$\bar{\sigma} = A_k \frac{d^k \bar{\Theta}}{dS^k} \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (4.1)$$

Каждая траектория деформаций (напряжений) с длиной дуги $s(t)$ либо $\Sigma(t)$, векторами $\bar{\sigma}$, $d\bar{\sigma}$, $(\bar{\Theta}, d\bar{\Theta})$ и приписанными к ним температурой T и другими нетермофизическими параметрами β создают *образ процесса* деформирования (нагружения) в E_5 (либо Σ_5). Каждому образу соответствует свой физический процесс и поэтому подпространства E_5 , Σ_5 и E_6 , Σ_6 *неинвариантны* относительно ортогональных преобразований в них вращения и отражения траекторий, кроме тех, которые соответствуют вращению координатных осей x_k в физическом пространстве [11]. В произвольной точке траектории деформирования с длиной дуги $s(t)$ можно построить ортонормированный естественный репер Френе-Ильюшина $\{\hat{p}_k\}$. При известном касательном векторе $\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}$ все остальные векторы \hat{p}_k находятся из рекуррентных уравнений [10–12]

$$\frac{d\hat{p}_k}{ds} = -\varkappa_{k-1}\hat{p}_{k-1} + \varkappa_k\hat{p}_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad \varkappa_0 = 0, \quad \varkappa_5 = 0. \quad (4.2)$$

Используя (4.2) можно выразить производные $d^k\bar{\Theta}/ds^k$ через орты репера $\{\hat{p}_k\}$

$$\frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \hat{p}_1, \quad \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2} = \varkappa_1\hat{p}_2, \quad \frac{d^3\bar{\Theta}}{ds^3} = -\varkappa_1^2\hat{p}_1 + \frac{d\varkappa_1}{ds}\hat{p}_2 + \varkappa_1\varkappa_2\hat{p}_3, \dots \quad (4.3)$$

и найти согласно (4.1) общую формулу постулата изотропии

$$\bar{\sigma} = P_k\hat{p}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (4.4)$$

Полученное соотношение становится физическим законом, если коэффициенты P_k будут найдены как функционалы процесса, т. е. будут зависеть от параметров ε_0 , Θ , φ , \varkappa_m , T , β как функций дуги $s(t)$

$$P_k = P_k \{ \varepsilon_0, \Theta, \varphi, \varkappa_m, T, \beta \}_{s(t)}. \quad (4.5)$$

Выраженный в виде определяющих соотношений

$$\bar{S}_0 = 3K\bar{\Theta}_0, \quad \bar{\sigma} = P_k\hat{p}_k, \quad P_k = P_k \{ \varepsilon_0, \Theta, \varphi, \varkappa_m, T, \beta \}_{s(t)} \quad (4.6)$$

в тензорно-координатном линейном евклидовом пространстве E_6 *основной постулат механики сплошных сред* (постулат макроскопической определенности) для начально изотропных сред физического пространства полностью отображает свойства этой среды и происходящие в ней процессы, поскольку определяющие соотношения ковариантны относительно преобразований системы координат x_k ($k = 1, 2, 3$) и тензоров ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) в теле. Однако они неинвариантны относительно ортогональных преобразований вращения и отражения образов физических процессов в E_6 . Соотношения (4.6) названы *общей формой постулата изотропии* [11].

5. Частный постулат изотропии.

Многочисленные опыты с изотропными в исходном состоянии конструкционными материалами при нормальной и высоких температурах во времени, когда пластические свойства материалов существенны, показали, что при нормальном внешнем давлении p влиянием первого σ_0 и третьего φ инвариантов на закономерности деформирования при малых деформациях является слабым [11]. Для простых процессов это согласуется с законом единой кривой упрочнения Роша и Эйхингера. Это означает, что подпространства E_5, Σ_5 становятся для процессов практически изотропными по отношению к преобразованиям вращения и отражения траекторий. В этом случае приходим к частному постулату изотропии: *образ физического процесса практически сохраняется при всех* вращениях и отражениях в E_5 , если в соответствующих точках траекторий сохраняются параметры ε_0 , T , β . В этом случае существенно упрощаются экспериментальные исследования и построение функционалов процессов, становится реальным решение краевых задач. При исследовании новых сред частный постулат может нарушаться. В этом случае следует ставить задачу по его уточнению [11]. Влияние первого и

третьего инвариантов возможно в задачах нелинейной теории упругости и пластичности, при низких температурах, в грунтовых средах и др. В любом случае теория процессов предопределяет дальнейшее современное развитие теории пластичности и является принципиально важным вкладом великого ученого-механика А.А. Ильюшина в мировую и отечественную науку в области механики деформируемого твердого тела и ее теории пластичности.

Постулат изотропии определяет векторные свойства материалов и сводит проблему определения напряжений между напряжениями и деформациями к определению скалярных свойств. Он относится к любому состоянию среды, траекториям любого вида и априори не предполагает различие свойств материалов при активном и пассивном деформировании (разгрузке). Поэтому определяющие соотношения (4.6) при правильном построении функционалов упругопластических процессов обязаны описывать не только активные процессы, но и сложную разгрузку. Построение аппроксимаций функционалов упругопластических свойств и соответствующих математических моделей является важной практической задачей теории пластичности. Ниже приводится один из вариантов таких соотношений

$$\begin{cases} \sigma = \Phi(s) A f_p(s) \Omega(s), \\ \Phi(s) = \sigma_T + 2G_* \Delta s + \sigma_* (1 - e^{-\beta \Delta s}), \\ \frac{d\sigma}{dS} = \frac{d\Phi}{dS} - \left(\frac{d\Phi_0}{dS} + 2G \right) f_p(s) \left(1 - \frac{\Delta s}{1+b} \right) e^{-\gamma \Delta s}, \quad f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, \\ M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p) f_q(s) e^{-\gamma \Delta s} - \frac{\sigma \kappa_1}{\sin \vartheta_1} + M_3 \operatorname{ctg} \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \\ M_3 = \sigma \kappa_2 \sin \vartheta_1 / \cos \vartheta_2, \quad \Omega(s) = - \left[\gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b (1 - e^{-\gamma \Delta s}) \right], \end{cases} \quad (5.1)$$

где A , p , q , β , γ – параметры, определяемые из базовых опытов; $f(\vartheta_1)$, $\Omega(s)$ – функции сложности процесса.

6. О дискуссии 1960-1961 гг. в теории пластичности.

Эта дискуссия отражена в работах [12, 15, 16, 17, 20, 22, 27].

Постулат изотропии, как и все новое прогрессивное направление в теории пластичности был встречен рядом ученых отрицательно (негативно). Так, в работах [20, 21] отмечено: “Согласно (частному) постулату изотропии, связь между тензорами-девиаторами напряжений и деформаций изотропна в пространстве тензоров-девиаторов напряжений и деформаций. Следует подчеркнуть принципиальное отличие требования постулата изотропии (о независимости от третьих инвариантов) от определения изотропии материала. Нет никаких оснований считать постулат изотропии общим законом пластичности. Единственным условием пластичности, изотропным в пространстве тензора-девиатора напряжений является условие пластичности Мизеса” [20]. “В научной литературе общепризнанна необходимость выделения пластических деформаций; игнорирование этого разделения в теории пластичности нельзя считать правильным” [21].

В работе [26] высказанные в [20, 21] замечания молодого в то время, но талантливого Д.Д. Ивлева получили развитие и в ряде случаев приобрели резко отрицательный и необъективный характер: “Дело в том, что тензор деформации в физическом пространстве имеет три независимых инварианта: будучи же трактован как вектор в пятимерном пространстве, он имеет лишь один инвариант – длину вектора. То же относится и к тензору напряжений. Центральное место в рассуждениях представителей этого (теории процессов) направления в теории пластичности занимает постулат изотропии”. “При этом критерий пластичности Мизеса возводится в ранг закона, справедливого для всех изотропных сред”. “Таким образом, нет оснований считать постулат изотропии универсальным законом для пластических тел. Для любого подчиняющегося постулату изотропии материалу все результаты испытаний на простое нагружение должны ложиться на единую кривую. Известно, что ряд изотропных материалов не обладает этой кривой. Все они (при испытаниях на сложное нагружение) должны в большей или меньшей мере не подчиняться (частному) постулату изотропии”. “Явление запаздывания действительно наблюдается при пластической деформации, причем оно хорошо описывается

теорией течения”. “Деформация в теории течения складывается из упругой и пластической”. “Сторонники нового направления долгое время обходились без разделения в своей теории полной деформации на пластическую и упругую. Результаты (экспериментов) обрабатывались в форме зависимостей между напряжениями и полными деформациями”. “Тем самым провозглашается право игнорировать коренное различие между процессами упругой и пластической деформации, в результате чего все рассуждения приобретают формальный характер”(?!). “Теория течения для сторонников нового направления в теории пластичности неприемлема. Своей же собственной теории у них не было (!?). Нельзя же всерьез воспринимать как теорию предложение разлагать вектор напряжений по пяти направлениям репера траекторий деформирования и искать коэффициенты этого разложения то ли в форме функции, то ли в форме функционалов от длины дуги пятимерной траектории деформирования и всех ее пяти кривизн”!? “Основные варианты теории течения подчиняются векторной интерпретации в пятимерном пространстве, поэтому резкие нападки на теорию течения со стороны представителей нового направления. . . необоснованны”. Таким образом признается в итоге, что основные варианты теории течения являются частной конкретизированной формой теории течения. В работе [27] того же автора отмечено: “Постулат изотропии есть ни что другое, как подмена понятия изотропии в физическом трехмерном пространстве во вспомогательном пятимерном пространстве”. “Ввиду этого векторная трактовка теории пластичности, предложенная А.А. Ильюшиным, носит частный характер и пригодна для математического описания лишь таких упругопластических материалов, которые при простых нагружениях обладают единой кривой. Это условие необходимо, но недостаточно. Оно вытекает из требований, чтобы простое нагружение не противоречило постулату изотропии”. “Предлагаемая теория справедлива лишь для материалов, следующих критерию Мизеса”. “А.А. Ильюшин. . . настаивает на полной эквивалентности тензорного и пятимерно-векторного подходов к построению теории пластичности, полагая, что использование векторного подхода – это просто вопрос удобства”. “Неужели он (А.А. Ильюшин) действительно считает, что девиатор тензора второго ранга может быть безоговорочно отождествлен с пятимерным вектором”? “А.А. Ильюшин не только связывает S_{ij} с S_k и \mathcal{E}_{ij} с \mathcal{E}_k однозначными зависимостями, но и трактует затем S_k и \mathcal{E}_k как компоненты пятимерных векторов”. “Чтобы иметь право называть соотношение (4.1) векторным равенством в пятимерном пространстве, надо потребовать, чтобы коэффициенты A_k были инвариантами этого пространства (т. е. зависели от первого третьего инвариантов тензоров напряжений и деформаций, каковые не являются инвариантами пространства E_5)”.

“Соотношения постулата изотропии носят чисто геометрический характер, и от их написания до построения теории пластичности – дистанция огромного размера”.

Приведенные эмоциональные высказывания о постулате изотропии и новом направлении в теории пластичности в работах [26, 27] противоречивы и наводят на мысли, что их автор недостаточно внимательно и глубоко ознакомился с работами А.А. Ильюшина. Новые прорывные идеи А.А. Ильюшина у многих исследователей вызвали просто зависть к его таланту и полученным результатам мирового уровня.

А.А. Ильюшин отметил в [17]: “В заметке Новожилова имеется недопустимое смешение понятий изотропии физического тела и изотропии многомерных вспомогательных пространств”. “Компоненты S_{ij} и S_k , \mathcal{E}_{ij} и \mathcal{E}_k соответственно связаны взаимно однозначными линейными соотношениями, и значит, обе группы параметров эквивалентны”, т. е. тензор, трактованный как вектор линейного пространства, сохраняет все три инварианта. Они сохраняются и при ортогональных преобразованиях вращения в линейном пространстве, если последние соответствуют повороту координатных осей X_k ($k = 1, 2, 3$) в физическом пространстве. Во всех других случаях ортогональные преобразования в линейном пространстве соответствуют различным физическим процессам с изменяющимися инвариантами. Поэтому вспомогательное векторное пространство по отношению к таким процессам, которых нет в физическом пространстве, *неизотропно*. Это и вызвало у многих недопонимание гениальных идей великого ученого А.А. Ильюшина.

Как видим критика в [26, 27] была весьма эмоциональна и противоречива. Наряду с разумными мыслями имеет место непонимание или нежелание понять новые переломные идеи в теории пластичности. Возможно поэтому сторонники теории течения игнорировали широкое совещание, собранное Научным советом АН СССР по проблеме “Научные основы прочности и пластичности” совместно с Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова в 1961 году специально для обсуждения проблемы по основам нового научного направления в теории пластичности. На совещание лично были приглашены выступить с докладами известные ученые-механики, академики В.В. Новожилов, Ю.Н. Работнов, Л.И. Седов и др., которые отказались участвовать в совещании. Некоторые считают, что дискуссия 1961-1962 гг., кроме вреда, ничего в теорию пластичности не внесла. Это не совсем так. Здесь уместно привести слова одного из участников дискуссии – выдающегося ученого-механика Д.Д. Ивлева – в одной из его поздних статей [22]. “В свое время я заметил, что в предложенной форме постулата изотропии не учитывается влияние третьего инварианта девиатора напряжений, хотя для изотропного тела третий инвариант девиатора имеет место (в физическом пространстве). Алексей Антонович ответил [17]: “Многочисленные опыты наших и зарубежных ученых с изотропными в исходном состоянии материалами показывают, что влияние третьего инварианта является слабым”. Мое замечание послужило поводом для ожесточенной дискуссии. Оценивая сейчас дискуссию, скажу следующее. Мне кажется, что дискуссия внесла больше негатива, чем позитива и ничего положительного для нашей науки не дала. Из моего замечания следовало, что между изотропией физического тела и требованиями постулата изотропии есть различия. Но мое замечание носило частный характер, относилось к частной формулировке постулата изотропии и никак не могло сказаться на фундаментальных идеях, сформулированных в постулате изотропии. Обобщить представления постулата изотропии с учетом третьего инварианта девиатора напряжений не представляет принципиальных трудностей, что и было сделано самим А.А. Ильюшиным. Попытки сформулировать общие соотношения связи между напряженным и деформированным состояниями предпринимались неоднократно, например, В. Прагером. На этом пути выдающиеся результаты принадлежат В.Г. Зубчанинову. Ему удалось в развитие постулата изотропии построить математическую модель общих соотношений связи напряжений и деформаций, снизить на основе выдвинутого им постулата физической определенности их локальную размерность и получить “сверху” как частные случаи все формы известных теорий течения и процессов со своими конкретизированными функционалами процессов и течений. С утверждением, что в теории процессов разложение полной деформации на упругую и пластическую части не допускается, за исключением простого нагружения-разгружения, мне трудно согласиться. На мой взгляд, это разложение можно не допускать, а можно и допустить. В.Г. Зубчанинов не допустил и полностью объяснил явление нырка напряжений на диаграмме деформирования при реализации процесса сложного разгружения. Он обобщил закон линейной упругой и частичной разгрузки в математической теории пластичности. Великий ученый механик Алексей Антонович Ильюшин сформулировал постулат изотропии и тем самым определил новое направление развития механики сплошной среды. Ученик Алексея Антоновича, выдающийся ученый В.Г. Зубчанинов продолжил дело учителя и в настоящее время является крупнейшим представителем механики теории процессов пластического деформирования сплошных сред и материалов” [22]. Это объективное мнение выдающегося ученого в области механики деформируемого твердого тела и теории пластичности, участника дискуссии Д.Д. Ивлева имеет весьма важное значение для научной общественности и делает ему честь своей зрелостью научного мышления.

А. Пуанкаре принадлежит знаменитая фраза: “Нельзя получить представление о слоне, изучая его под микроскопом”. Нельзя понять постулат изотропии, если видишь в нем только геометрическое разложение вектора напряжений по пяти направлениям репера Френе в линейном координатно-тензорном евклидовом пространстве. Я убедился, что этим недугом были больны многие, даже крупные, наши ученые-механики.

7. Общие определяющие соотношения теории процессов.

На основе общей формы постулата изотропии (4.6) построена общая теория определяющих соотношений теории процессов [2-4, 28].

Представим в репере Френе-Ильюшина на $\{\hat{p}_k\}$ единичные векторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\Theta}$ в виде

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \cos \beta_k \hat{p}_k, \quad \hat{\Theta} = \frac{\bar{\Theta}}{\Theta} = \cos \alpha_k \hat{p}_k, \quad (7.1)$$

где угловые координаты β_k и α_k связаны со сферическими координатами ϑ_m , Θ_m ($m = 1, 2, 3, 4$) этих векторов формулами

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \vartheta_1, \quad \cos \beta_1 = \cos \beta_k \operatorname{tg} \vartheta_1 \cos \vartheta_{k+1}, \\ \alpha_1 &= \Theta_1, \quad \cos \alpha_{k+1} = \cos \alpha_k \operatorname{tg} \Theta_1 \cos \Theta_{k+1}, \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \end{aligned} \quad (7.2)$$

В репере $\{\hat{p}_k\}$ можно, кроме векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Theta}$, разложить любой другой физический вектор

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = P_k^* \hat{p}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (7.3)$$

Наиболее общей формой конкретизации (7.3) является локальная форма определяющего соотношения [28]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_k \hat{p}_k + M \hat{\sigma}. \quad (7.4)$$

Функционалы процесса

$$\begin{cases} M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_0 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, & M_2 = 0, \\ M_0 = M_3 \cos \vartheta_3 + M_* \sin \vartheta_3, & M_* = M_4 \cos \vartheta_4 + M_5 \sin \vartheta_4. \end{cases} \quad (7.5)$$

Для определения угловых координат ϑ_m , Θ_m получены системы нелинейно-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} (-M_1 \sin \vartheta_1 + M_0 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2), \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \varkappa_2 \cos \vartheta_3 \right) = \varkappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_0}{\sigma} \cos \vartheta_2, \\ \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \left(\frac{d\vartheta_3}{ds} + \varkappa_3 \cos \vartheta_4 \right) = \varkappa_2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 + \frac{1}{\sigma} (M_* \cos \vartheta_3 - M_3 \sin \vartheta_3), \\ \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \left(\frac{d\vartheta_4}{ds} + \varkappa_4 \right) = \varkappa_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 + \frac{1}{\sigma} (M_5 \cos \vartheta_4 - M_4 \sin \vartheta_4). \end{cases} \quad (7.6)$$

Аналогичные соотношения имеют место для полярных углов Θ_m ($m = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{cases} \frac{d\Theta_1}{ds} + \varkappa_1 \cos \Theta_2 = -\frac{1}{\Theta} \sin \Theta_1, \quad \sin \Theta_1 \left(\frac{d\Theta_2}{ds} + \varkappa_2 \cos \Theta_3 \right) = \varkappa_1 \cos \Theta_1 \sin \Theta_2, \\ \sin \Theta_2 \left(\frac{d\Theta_3}{ds} + \varkappa_3 \cos \Theta_4 \right) = \varkappa_2 \cos \Theta_2 \sin \Theta_3, \quad \sin \Theta_3 \left(\frac{d\Theta_4}{ds} + \varkappa_4 \right) = \varkappa_3 \cos \Theta_3 \sin \Theta_4. \end{cases} \quad (7.7)$$

В квазипростых процессах векторы $\hat{\sigma} = \hat{\Theta}$ направлены по одному лучу, который поворачивается в E_5 так, что концы векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Theta}$ описывают криволинейные траектории при $\vartheta_m = \Theta_m$.

Из уравнений (7.6), (7.7) следует $M_1 = \sigma/\Theta$, $M_3 = M_4 = M_5 = 0$. Определяющее соотношение (7.4) принимает вид

$$d\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\Theta} d\bar{\Theta} + \left(\frac{d\sigma}{d\Theta} - \frac{\sigma}{\Theta} \right) \frac{\bar{\sigma} d\bar{\Theta}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \quad (7.8)$$

где

$$P = \frac{d\sigma}{d\Theta} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \Theta_1}, \quad \sigma = \Phi(\Theta). \quad (7.9)$$

Это соотношение нашло применение в теории устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при их бифуркации после докритического простого нагружения.

В неполных квазишростых процессах деформирования $\vartheta_3 = \Theta_3$, $\vartheta_4 = \Theta_4$. Из соотношений (7.4)-(7.7) получаем

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1\hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_0\hat{p}_3, \quad (7.10)$$

$$\begin{cases} M_0 = \frac{M_3}{\cos \vartheta_3}, & M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_0 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \\ M_4 = M_3 \operatorname{tg} \vartheta_3 \cos \vartheta_4, & M_5 = M_3 \operatorname{tg} \vartheta_3 \sin \vartheta_4, & M_* = M_3 \operatorname{tg} \vartheta_3. \end{cases} \quad (7.11)$$

В работе [3] выдвинут *постулат физической определенности*, который допускает разложение E_5 на два пересекающихся трехмерных подпространства $Z \cap \Pi$ с базисами $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3\}$ и $\{\hat{i}_3, \hat{i}_4, \hat{i}_5\}$ соответственно. Направление единичного вектора $\{\hat{i}_3\}$ служит их пересечением. Первое Z -подпространство названо *изображающим подпространством*, второе Π -подпространство названо *сдвиговым*. В Π -подпространстве реализуется *квазишростой образ сдвигового процесса*.

Отнесенные к подвижному естественному реперу $\{\hat{p}_\kappa\}$ $Z \cap \Pi$ подпространства пересекаются по направлению единичного репера $\{\hat{p}_3\}$. При этом Π -подпространство при репере $\{\hat{p}_3, \hat{p}_4, \hat{p}_5\}$ оказывается фактически пустым. Процесс деформирования описывается целиком в Z -подпространстве при репере $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\}$. В Z и Π подпространствах имеют место дифференциальные соотношения

$$\frac{d\hat{p}_1}{ds} = \varkappa_1\hat{p}_2, \quad \frac{d\hat{p}_2}{ds} = -\varkappa_1\hat{p}_1 + \varkappa_2\hat{p}_3, \quad \frac{d\hat{p}_3}{ds} = -\varkappa_2\hat{p}_2, \quad (7.12)$$

$$\frac{d\hat{p}_3}{ds} = 0, \quad \frac{d\hat{p}_4}{ds} = \varkappa_4\hat{p}_5, \quad \frac{d\hat{p}_5}{ds} = -\varkappa_4\hat{p}_4, \quad (7.13)$$

что возможно при $\vartheta_3 = 0$, $\varkappa_3 = 0$. Положение вектора \hat{p}_4 и значения параметра \varkappa_4 остаются неопределенными и их можно условно считать равными нулю.

Таким образом, постулат физической определенности позволяет снизить локальную размерность определяющего уравнения (7.4) с пяти до трех. В этом случае основные определяющие соотношения принимают вид для трехпараметрических плоских задач

$$\frac{d\sigma}{ds} = M_1\hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3\hat{p}_3, \quad (7.14)$$

$$\hat{\sigma} = \cos \vartheta_1\hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2\hat{p}_2 + \sin \vartheta_2\hat{p}_3), \quad (7.15)$$

$$M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \quad \frac{d\sigma}{ds} = P \cos \vartheta_1, \quad (7.16)$$

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} (-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2), \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \varkappa_2 \right) = \varkappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2. \end{cases} \quad (7.17)$$

Локальная форма определяющего соотношения (7.14) с учетом (7.15) может быть преобразована к её *нелокальной форме*

$$\frac{d\sigma}{ds} = N_1\hat{p}_1 + (N_\sigma\hat{\sigma} + N_\vartheta\hat{\vartheta}), \quad (7.18)$$

где

$$N_\sigma = \frac{d\sigma}{ds} - N_1 \cos \vartheta_1 - N_\vartheta \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \hat{\sigma} \cdot \hat{\vartheta}. \quad (7.19)$$

Если в процессе деформирования вектор $\bar{\sigma}$ остается лежать в соприкасающейся плоскости репера Ильюшина-Френе $\{\hat{p}_\kappa\}$, то $\vartheta_2 = 0$. В этом случае из соотношений (7.14-7.17) следуют определяющие соотношения, названные *гипотезой (теорией) малого кручения* \varkappa_2 ,

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \\ \hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 \hat{p}_2, \end{cases} \quad (7.20)$$

$$M_3 = \sigma \varkappa_2 \sin \vartheta_1, \quad M_4 = M_5 = 0, \quad M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1, \quad (7.21)$$

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1. \quad (7.22)$$

Для плоских траекторий $\varkappa_2 = 0$ и из (7.20), (7.21) следует $M_3 = 0$ и

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma}. \quad (7.23)$$

Закон (7.22) часто распространяют приближенно на случай $\varkappa_2 \approx 0$, $M_3 = 0$. В этом случае соотношение (7.23) было названо А.А. Ильюшиным гипотезой компланарности трех векторов $\bar{\sigma}$, $d\bar{\sigma}$, $d\bar{\Theta}$.

Соотношение (7.23) для плоских траекторий может быть также на основании (7.21), (7.22) представлено в виде

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \left[\frac{d\sigma}{ds} \cos \vartheta_1 - \sigma \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 \right) \right] \hat{p}_1 + \left[\frac{d\sigma}{ds} \sin \vartheta_1 + \sigma \cos \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 \right) \right] \hat{p}_2, \quad (7.24)$$

Откуда при $\cos \vartheta_1 \rightarrow 0$, $d\vartheta_1/ds \rightarrow 0$ получаем соотношение $\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \hat{p}_1 + \sigma \varkappa_1 \hat{p}_2$ или с учетом $\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}$, $\hat{p}_2 = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2}$,

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \sigma \frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\sigma \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \right). \quad (7.25)$$

После интегрирования (7.25) получаем

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \quad (\hat{\sigma} = \hat{p}_1), \quad d\bar{\Theta} = \frac{ds}{\sigma} \bar{\sigma}. \quad (7.26)$$

Процесс, при котором $\hat{\sigma} = \hat{p}_1$, назван *скользящим процессом*. Соотношение (7.26) было получено в работе [4] для траекторий малой кривизны. Если $\varkappa_1 = 0$, то траектория – прямойный луч, для которого $\frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2} = 0$, $ds = d\bar{\Theta}$.

В этом случае получаем дифференциальный закон теории малых упругопластических деформаций

$$d\bar{\sigma} = \frac{d\sigma}{d\bar{\Theta}} d\bar{\Theta}, \quad \sigma = \Phi(\bar{\Theta}), \quad (7.27)$$

где $d\sigma/d\bar{\Theta} = 2G_k$ – удвоенный касательный модуль сдвига.

Если траектория – ломаная линия с углом излома $\vartheta_1^0 \neq 0$, то для таких траекторий $\frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2} = 0$ и из (7.26) следует соотношение

$$d\bar{\sigma} = \frac{d\sigma}{ds} d\bar{\Theta}, \quad \sigma = \Phi(s), \quad (7.28)$$

которое отличается от закона (7.27) тем, что $ds \neq d\bar{\Theta}$ для второго и последующих звеньев ломаной траектории. Вследствие принципа запаздывания соотношение (7.28) будет справедливо только после исчерпания следа запаздывания. В этом случае три вектора $\hat{\sigma} = \hat{p}_1 = \hat{q}_1$ совпадут. Такой процесс мы назвали локально-простым, а соотношение (7.28) – законом теории процессов для локально простых процессов.

8. О законе простой и частичной разгрузке.

Постулат изотропии А.А. Ильюшина в теории упругопластических процессов относится к любой начально изотропной среде и рассматривает траектории деформирования и нагружения произвольного вида в совмещенном шестимерном E_6 либо пятимерном E_5 векторном координатном евклидовом пространстве независимо от того, имеет ли место активный процесс деформирования либо сложный процесс нелинейного разгружения, повторного пластического нагружения [2-3]. При этом под пластической деформацией понимается остаточная деформация при полной разгрузке [12, 29-32]. Впервые остаточные деформации обнаружил Ф. Герстнер, а затем И. Ходкинсон [32]. Г. Генки был первым, кто рассмотрел упругую разгрузку материалов при сложном напряженно-деформированном состоянии (НДС) в своей деформационной теории течения идеальных упругопластических сред [29]. Он представил полные деформации ε_{ij} тензора деформаций и компоненты \mathfrak{D}_{ij} тензора-девиатора деформаций как сумму упругих ε_{ij}^e , \mathfrak{D}_{ij}^e и пластических (остаточных) ε_{ij}^p , \mathfrak{D}_{ij}^p частей

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \mathfrak{D}_{ij} = \mathfrak{D}_{ij}^e + \mathfrak{D}_{ij}^p, \quad (8.1)$$

$$\mathfrak{D} = \sqrt{\mathfrak{D}_{ij}\mathfrak{D}_{ij}}, \quad \mathfrak{D}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (8.2)$$

где \mathfrak{D}_{ij} , \mathfrak{D} , ε_0 – компоненты девиатора деформаций, его модуля и средней деформации соответственно, δ_{ij} – символ Кронекера.

Для упругих и пластических деформаций Генки принял соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^e &= \frac{\sigma_0}{3K}, \quad \mathfrak{D}_{ij}^e = \frac{S_{ij}}{2G}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad \varepsilon_0^p = 0, \\ \mathfrak{D}_{ij}^p &= \frac{\varphi(\sigma)}{2G} S_{ij}, \quad 2G = \frac{E}{1+\mu}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \\ S_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \sigma_0 = \sigma_{ii}/3 \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (8.3)$$

где S_{ij} , σ , σ_0 – компоненты девиатора напряжений, его модуль и среднее напряжение соответственно, K – объемный модуль упругости, G – модуль сдвига, E – продольный модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, $\varphi(\sigma)$ – функция Генки. В своей теории Генки принял критерий полной пластичности Мизеса

$$\sigma = \sqrt{S_{ij} + S_{ij}} = \sigma^T, \quad \sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T, \quad (8.4)$$

где σ_T – предел текучести при растяжении. Это условие не допускает, чтобы частица тела деформировалась в каком-либо направлении упруго, а в другом – пластически. Однако Генки считал условие неполной пластичности Треска–Сен-Венана

$$\tau_{max} = (\sigma_m - \sigma_n)/2 = k \quad (m < n; \quad m, n = 1, 2, 3) \quad (8.5)$$

более обоснованным физически. Однако уже Т. Карман и А. Хаар [5] отметили, что материал за пределом упругости может находиться в двух состояниях – полном и неполном пластическом. С появлением пластичности в материале возникает сначала слабая деформационная анизотропия, которая делает его квазиизотропным. В опытах [8] обнаружено для упрочняющихся материалов почти точное совпадение экспериментальных данных с критерием Мизеса при простом нагружении, что привело к гипотезе “единой кривой” упрочнения в условиях сложного напряженного состояния. А.А. Ильюшин принял этот закон в теории малых упругопластических деформаций в пределах той же точности порядка $\pm 7\%$ [30,31].

По Г. Генки и А.А. Ильюшину полные деформации возможно представить как сумму ее упругих и пластических частей (8.1). Тогда закон линейной упругой разгрузки при сложном НДС и простом разгрузении принимает вид

$$d\mathfrak{D}_{ij} = \frac{dS_{ij}}{2G}. \quad (8.6)$$

Этот закон линейной разгрузки (8.6) А.А. Ильющин распространил и на случай сложного упругого разгрузки по криволинейным либо ломаным траекториям, что наглядно было проиллюстрировано в работе [12]. Используя векторный подход для описания процессов деформирования, он поставил в соответствие тензорам напряжений и деформаций, а также их девiatorам в линейном координатном евклидовом шестимерном E_6 и пятимерном E_5 пространствах векторы напряжений и деформаций. Вектор полной деформации формоизменения $\bar{\Theta}$ был представлен в виде упругой $\bar{\Theta}^e$ и пластической $\bar{\Theta}^p$ частей: $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}^e + \bar{\Theta}^p$, где $\bar{\Theta}^e = \bar{\sigma}/2G$, $\bar{\sigma}$ – вектор напряжений формоизменения. Это позволило все возможные траектории деформирования, которые являются продолжением заданной из некоторой точки K , разбить на два множества, разделенных предельной поверхностью $F(\bar{\Theta})$. Любая траектория, направленная внутрь поверхности, представляла пассивную деформацию, т. е. линейную упругую разгрузку. Любая траектория, направленная вне поверхности, представляла собой активную упруго-пластическую деформацию. При этом допускалось при разгрузке, что упругая деформация обращается в нуль, когда $\bar{\sigma} = 0$. Это условно позволяло находить пластическую деформацию в момент начала разгрузки по ее остаточной деформации и проверять правильность такого подхода в зависимости от вида траектории разгрузки. Однако, таких систематических опытов за последние 50 лет не было, исключая опыты, которые были проведены в лаборатории механических испытаний на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в Тверском государственном техническом университете. Поэтому соотношение вида

$$d\bar{\Theta} = d\bar{\sigma}/2G \quad (8.7)$$

до последнего времени оставалось в общей теории пластичности лишь гипотезой.

9. Критерии активного и пассивного процессов сложного деформирования и нагружения.

Поскольку макроскопическое состояние сплошной среды в механике сплошных сред в любой момент времени однозначно определяется процессом, то критерием состояния процесса деформирования среды может служить знак приращения удельной энергии деформации

$$dA = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = \sigma_0d\theta + S_{ij}d\Theta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (9.1)$$

где $dA_0 = \sigma_0d\theta$ – приращение энергии всестороннего растяжения-сжатия, $\theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ – относительное изменение объема,

$$dA_\Phi = S_{ij}d\Theta_{ij} = \bar{\sigma}d\bar{\Theta} = \sigma ds \cos \vartheta_1 \quad (9.2)$$

– является приращением энергии деформирования формоизменения, $\sigma = |\bar{\sigma}|$, $ds = |d\bar{\Theta}|$, ϑ_1 – угол сближения.

Критерием определения состояния процесса нагружения является знак приращения энергии напряжений (дополнительной работы)

$$dB = \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} = \theta d\sigma_0 + \Theta_{ij}dS_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (9.3)$$

где $dB_0 = \theta d\sigma_0$ – приращение дополнительной работы всестороннего растяжения-сжатия,

$$dB_\Phi = \Theta_{ij}dS_{ij} = \bar{\Theta}d\bar{\sigma} = \Theta d\Sigma \cos \vartheta_1^* \quad (9.4)$$

– является приращением энергии напряжений формоизменения, $\Theta = |\bar{\Theta}|$, $d\Sigma = |d\bar{\sigma}|$, ϑ_1^* – угол запаздывания.

Так как для большинства материалов энергия объемного расширения-сжатия обратима, то критерием активного необратимого процесса деформирования можно считать $dA_\Phi > 0$ ($\vartheta_1 < \pi/2$), пассивного – $dB_\Phi < 0$ ($\vartheta_1^* > \pi/2$). При простых процессах деформирования и нагружения по лучевым траекториям понятия активного и пассивного процессов деформирования и нагружения соответствуют друг другу и достаточно пользоваться одним из них, как это и делается в деформационной теории малых упругопластических деформаций [30],

[31]. Поэтому в этой теории нагружением называется процесс, при котором $d\sigma > 0$ либо $d\mathcal{E} > 0$, а разгрузением - процесс, при котором $d\sigma < 0$ либо $d\mathcal{E} < 0$. При сложном деформировании либо нагружении указанные выше понятия процессов таким свойством не обладают. При сложном нагружении–разгрузении имеем дело с криволинейными либо ломаными траекториями. Параметрами сложности процессов являются параметры кривизны и кручения \varkappa_m и углы излома траектории. В работе [5] для активных процессов нагружения и деформирования были введены понятия о полных и неполных состояниях пластичности материала. При полной пластичности среда испытывает необратимое пластическое деформирование во всех направлениях. В состояниях неполной пластичности в одном из направлений среда может испытывать упругое деформирование, а в других - необратимое пластическое деформирование. Следовательно, для упрочняющихся сред при сложном НДС значительно труднее различить понятия нагружения и разгрузения для материалов. Тем сложнее это сделать в условиях активного сложного нагружения и деформирования. Неслучайно возникают дискуссии по поводу условий пластичности Мизеса и Треска–Сен-Венана, закона единой кривой упрочнения при простых нагружениях. Аналогичная ситуация сложилась и для пассивных процессов сложного разгрузения. Для этих процессов материал также может находиться в двух состояниях - упругом и неполном упругом. Следовательно, вопрос о возможности разложения полных деформаций на упругие и пластические части при сложном нагружении является некорректным. В этом случае невозможно объяснить в рамках механики сплошных сред явление частичной упругой разгрузки на нырках напряжений после излома траекторий и др.

Таким образом, разложение полных деформаций на упругие и пластические части не может быть, строго говоря, принято в теориях, описывающих сложные процессы нагружения. Для простых и близких к простым процессов такое разложение не только допустимо, но и методически оправдано.

10. Описание процессов сложного разгрузения материалов.

В результате многочисленных систематических экспериментальных исследований на экспериментальном автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний Тверского государственного технического университета удалось установить, что при сложной непропорциональной разгрузке сформулированная выше в [12] гипотеза о линейной упругой разгрузке имеет частный характер и не может быть принята в качестве общего закона разгрузки в теории пластичности. Характер поведения диаграмм деформирования $\sigma - \mathcal{E}$ и прослеживания процессов $\sigma - s$ при разгрузке может быть различен. Для локальных траекторий после их излома на углы больше 90° на диаграммах деформирования $\sigma - \mathcal{E}$ и прослеживания процессов $\sigma - s$ наблюдаются обратные и прямые нырки соответственно. На всем протяжении сложного нырка до исчерпания запаздывания по скалярным свойствам имеет место пассивный процесс разгрузения при $d\sigma < 0$ и догружения при $d\sigma > 0$, когда дополнительная работа $dB < 0$ ($\vartheta_1^* > 90^\circ$). На ниспадающей ветви нырков имеет место пассивный процесс деформирования ($dA < 0$, $\vartheta_1^* > 90^\circ$), получивший название частичной упругой разгрузки материала. При достижении минимального значения модуля напряжений на нырке σ_M^T происходит смена пассивного процесса деформирования на активный процесс неполного упругого деформирования или частичной пластической догрузки. Это минимальное напряжение на нырке получило название вторичного предела текучести. При этом напряжении происходит “протыкание” изнутри предельной поверхности активного пластического деформирования. На восходящем участке нырка в одном из направлений продолжается пассивный процесс деформирования, а в других - активные процессы пластического деформирования вплоть до точки A , в которой модуль деформации принимает минимальное значение \mathcal{E}_{\min} . Это состояние на нырке, в отличие от состояния неполной пластичности Хара и Кармана, названо автором состоянием неполной упругости. При продолжении процесса догружения за точкой A , как и при простом нагружении, имеет место переходный участок

избыточного упругопластического деформирования AK , на котором одновременно $d\sigma > 0$, $d\mathcal{E} > 0$.

При достижении деформацией \mathcal{E} значения \mathcal{E}_K^T , с которого началась разгрузка, пассивный процесс в материале по скалярным свойствам завершается. Практически он завершается и по векторным свойствам при $\vartheta_1 \rightarrow 0$. После прохождения точки K оба процесса деформирования и нагружения становятся активными и практически реализуется локально-простой процесс. В результате после завершения нырка напряжений в материале возникает деформационная анизотропия, которая несколько повышает новый предел текучести в точке K , а также несколько изменяются упругие характеристики материала, зависящие от угла излома траектории.

Для любого квазипростого процесса в соотношении (7.14) $M_3 = 0$, и оно принимает вид

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{d\Sigma}{ds} \hat{q}_1 = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma}, \quad (10.1)$$

$$P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1} = \frac{d\sigma}{d\mathcal{E}}. \quad (10.2)$$

Для активного процесса [11-13]

$$M_1 = \frac{\sigma}{\mathcal{E}}, \quad M = \frac{d\sigma}{ds} - \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \cos \vartheta_1, \quad P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta} = \frac{d\sigma}{d\mathcal{E}}, \\ \vartheta_1 = \Theta, \quad d\mathcal{E} = ds \cos \Theta_1, \quad d\sigma = d\Sigma \cos \vartheta.$$

При пассивном сложном квазипростом процессе в условиях частичной упругой разгрузки $M_1 = P = 2G$, $M_3 = M_4 = M_5 = 0$, $M = 0$. В этом случае следует соотношение

$$\bar{\sigma} = 2Gd\bar{\mathcal{E}}, \quad (10.3)$$

используемое также при пропорциональном разгрузении. На восходящей ветви нырка, как показывают эксперименты, квазипростой образ процесса деформирования места не имеет. Однако, процесс остается практически плоским. Умножая скалярно соотношение (10.1) на единичные векторы \hat{p}_1 и \hat{q}_1 и решая полученную систему уравнений, находим функционалы

$$M_1 = \frac{d\Sigma \sin \vartheta}{ds \sin \vartheta_1}, \quad M = -\frac{d\Sigma \sin \gamma}{ds \sin \vartheta_1}, \quad P = \frac{d\Sigma \cos \vartheta}{ds \cos \vartheta_1}, \quad (10.4)$$

$$\cos \gamma = \hat{p}_1 \cdot \hat{q}_1, \quad \cos \vartheta = \hat{\sigma} \cdot \hat{q}_1, \quad \cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1. \quad (10.5)$$

Если угол γ мал и стремится к нулю, то из (10.4), (10.5) следует $\hat{p}_1 = \hat{q}_1$,

$$M_1 = P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1} = \frac{d\Sigma}{ds}, \quad M = 0, \quad (10.6)$$

что позволяет согласно (7.4), (7.14) закон разгрузки для многозвенных ломаных траекторий представить в виде

$$d\bar{\sigma} = Pd\bar{\mathcal{E}}. \quad (10.7)$$

На рис. 2 приведены результаты испытания и расчета трубчатого образца из стали 45 по трехзвенной ломаной плоской траектории с двумя углами излома по 135° . Кривая 1 отвечает диаграмме простого растяжения материала, кривая 2 – диаграмме локального простого растяжения на втором звене после завершения нырка напряжений и исчерпывания следа запаздывания, кривая 3 – реализуемой экспериментальной программе испытания по трехзвенной ломаной траектории, кривая 4 – аппроксимации $\sigma - s$ этого процесса, кривая 5 – расчетному процессу деформирования по заданной программе сложного деформирования с использованием численного метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности согласно соотношениям общей модели теории процессов.

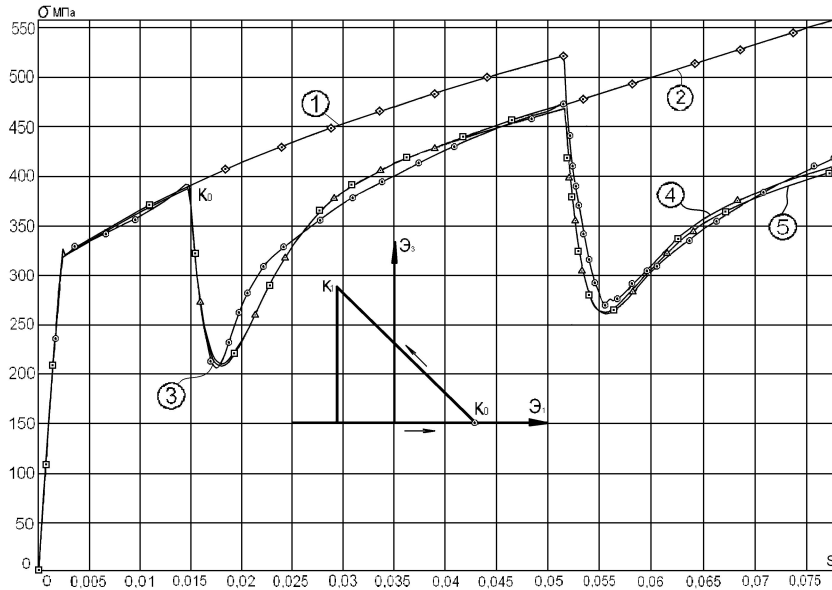


Рис. 2.

Для описанного выше опыта с нагружением по двузвенной ломаной траектории на рис.3 построены характерные углы ϑ_1^* , Θ , ϑ_1 , ϑ , γ в зависимости от приращения длины дуги Δs после излома точки излома K на всем протяжении “нырка” KMA' сложного разгрузки, помеченные цифрами 1-5. Из рис.3 видно, что интересующий угол γ между направлениями процессов нагружения и деформирования составил в эксперименте $6^\circ - 6.5^\circ$, что укладывается в оценку точности теории пластичности простых процессов $7^\circ - 8^\circ$. Это дает основание считать, что полученные результаты (10.7) достоверно описывают процесс сложного упруго-пластического разгрузки для ломаных траекторий [3].

Для криволинейных траекторий вопрос о закономерностях построения функционалов процесса разгрузки выглядит несколько сложнее. С ростом кривизны траектории обратный нырок практически исчезает, ниспадающая ветвь нырка уменьшается. Восходящая ветвь нырка не обнаруживает Θ_{min} вплоть до возникновения участка вторичной частичной упругой разгрузки в некоторой точке P . При полной разгрузке возможно определение остаточной деформации, которая существенно отличается от таковой при использовании закона линейной разгрузки.

На рис. 4 представлены результаты опыта по сложной разгрузке трубчатого образца из стали 45 по траектории вида скручивающейся архимедовой спирали. Как видно, соответствие расчета и эксперимента достаточно хорошее. Точки K соответствуют на диаграммах $\sigma - \Theta$ и $\sigma - s$ точке излома траектории, точка P – началу процесса вторичной частичной упругой разгрузки. Остаточная деформация в данном опыте составила $\Theta^P = 0.125\%$. Согласно гипотезе о линейной разгрузке $\Theta^P = 0.7\%$, что в 5.6 раз больше.

Таким образом, в общем случае при сложном нагружении и разгрузении функционалы процесса должны описывать как упругопластическое сложное нагружение, так и упругопластическое сложное разгрузение. Эта руководящая идея оправдала себя при использовании соотношений (10.2) при расчете результатов базовых экспериментов как для активных, так и для пассивных процессов сложного деформирования.

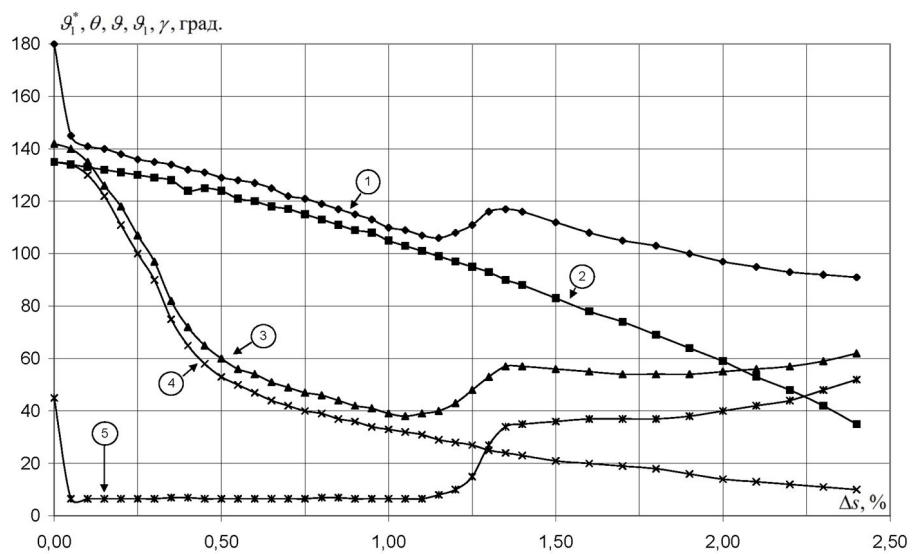


Рис. 3.

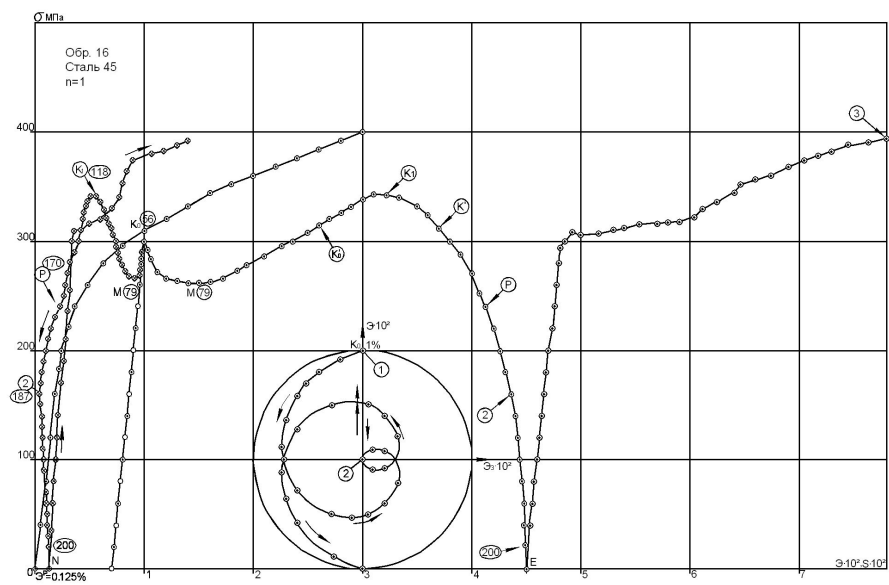


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин, А. А.* Теория пластичности при простом нагружении тел, материал которых обладает упрочнением / А. А. Ильюшин // ПМП. – 1947. – Т. 11., Вып.2. – С. 293–296.
- [2] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2002. – 300 с.
- [3] *Зубчанинов, В. Г.* Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. – М : Физматлит, 2010. – 325 с.
- [4] *Зубчанинов, В. Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2008. – 336 с.
- [5] *Хаар, А.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности: сб. статей / под ред. Ю. Н. Работнова. – М. : Изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56.
- [6] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
- [7] *Ильюшин, А. А.* Вопросы общей теории пластичности / А. А. Ильюшин // ПММ. – 1960. – Т. 24, Вып. 3. – С. 399–411.
- [8] *Рош, М.* Опыты, связанные с выяснением вопроса об опасности разрушения / М. Рош, А. Эйхингер // Теория пластичности: сб. статей / под ред. Ю. Н. Работнова. – М. : Изд-во иностр. лит., 1948. – С. 157–167.
- [9] *Одквист, Т. Ф.* Упрочнение стали и ей подобных материалов / Т. Ф. Одквист // Теория пластичности: сб. статей. – М. : ИЛ, 1948. – С. 283–290.
- [10] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : АН СССР, 1963. – 271 с.
- [11] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошных сред / А. А. Ильюшин. – М. : МГУ, 1990. – 310 с.
- [12] *Ильюшин, А. А.* Об основах общей математической теории пластичности / А. А. Ильюшин // Вопросы теории пластичности. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – С. 3–29.
- [13] *Кочин, Н. Е.* Векторные исчисления и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. – М. : АН СССР, 1961. – 425 с.
- [14] *Ильин, В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. – М. : Физматлит, 2002. – 317 с.
- [15] *Новожилов, В. В.* О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных средах (Геометрическая сторона вопроса) / В. В. Новожилов // ПММ. – 1963. – Т. 27, Вып.5. – С. 794–812.
- [16] *Ильюшин, А. А.* О связи между напряжениями и деформациями в механике сплошной среды / А. А. Ильюшин // ПММ. – 1954. – Т. 18, Вып 6. – С. 641–666.
- [17] *Ильюшин, А. А.* Еще о постулате изотропии / А. А. Ильюшин // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – №1. – С. 201–204.
- [18] *Мейз, Д.* Теория и задачи механики сплошных сред / Д. Мейз. – М. : МИР, 1974. – 318 с.
- [19] *Хоэнмэзер, К.* К механике пластического поведения стали / К. Хоэнмэзер, В. Прагер // Теория пластичности: сб.статей. – М. : ИЛ, 1948. – С. 257–282.
- [20] *Ивлев, Д. Д.* О постулате изотропии в теории пластичности / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 125–127.
- [21] *Ивлев, Д. Д.* О работе В.С. Ленского “Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 179–181.
- [22] *Ивлев, Д. Д.* Постулат изотропии и В. Г. Зубчанинов / Д. Д. Ивлев // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сб. статей. – Тверь : ТГТУ, 2007. – С. 47–50.
- [23] *Ленский, В. С.* Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении / В. С. Ленский // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – С. 15–24.

- [24] *Ленский, В. С.* Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении / В. С. Ленский // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 5. – С. 93–100.
- [25] *Ленский, В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций / В. С. Ленский // Вопросы теории пластичности. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58–82.
- [26] *Новожилов, В. В.* Об одном направлении в теории пластичности (замечания по поводу полемики Д. Д. Ивлева с В. С. Ленским) / В. В. Новожилов // Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1961. – №2. – С. 176–181.
- [27] *Новожилов, В. В.* И еще о постулате изотропии / В. В. Новожилов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 205–208.
- [28] *Зубчанинов, В. Г.* Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов / В. Г. Зубчанинов // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25. №5. – С. 3–13; 1991. – Т. 27. – №12. – С.3–13.
- [29] *Генки, Г.* К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений / Г. Генки // Теория пластичности / под ред. Ю. Н. Работнова. – М. : Изд-во иностр. лит., 1948. – С. 114–135.
- [30] *Ильюшин, А. А.* Некоторые вопросы теории пластических деформаций / А. А. Ильюшин // ПММ. – Т. 7, Вып. 4. – 1943. – С. 245–272.
- [31] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [32] *Белл, Д.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. Малые деформации / Д. Белл. – М. : Наука, 1984. – 596 с.
- [33] *Зубчанинов, В. Г.* Теория процессов и постулат изотропии / В. Г. Зубчанинов // Упругость и неупругость: сб. статей. – М. : Изд-во Московского ун-та, 2011. – С. 73–79.
- [34] *Зубчанинов, В. Г.* Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред / В. Г. Зубчанинов // Известия РАН. МТТ. – 2011. – № 1. – С. 27–37.

V. G. Zubchaninov

**THE THEORY OF PROCESSES, COMPLETE AND INCOMPLETE
PLASTICITY OF THE CONTINUOUS MEDIUMS AND A. A. ILYUSHIN'S
POSTULATE OF ISOTROPY**

Tver State Technical University

Abstract. The mechanics of the processes of elastoplastic deformation of continuous mediums and materials has been created at the turn of 50th years of XX century in the works of the outstanding scientist-mechanic, member-correspondent of the academy of Sciences of the USSR and the Russian Academy of Sciences, head of the department of elasticity, of Moscow State University, professor Alexey Antonovich Ilyushin and developed in the works of the pupils of his school of thought in 90-s and the following years. The current state of the theory of processes and the development of this important fundamental problem of the theory of plasticity.

Keywords: plasticity, complete and incomplete plasticity, complex loading, postulate of isotropy.

Зубчанинов Владимир Георгиевич

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Zubchaninov Vladimir Georgievich

Dr. of Eng. Sci., Professor, Head of the Department of the Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University, Tver

К СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Воронежский государственный университет

Аннотация. Для случая пространственного пластического статически неопределимого напряженного состояния, характеризуемого гладким выпуклым условием пластичности $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ в пространстве главных напряжений $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, предлагается линейная аппроксимация поверхности текучести тремя плоскостями Π_k , касательными к поверхности текучести и проходящими через точку $\widehat{M}(\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \widehat{\sigma}_3)$, находящуюся вблизи текущей точки M поверхности $\widehat{\sigma}_i = \sigma_i + k \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial f / \partial \sigma_i}{|\nabla f|}$ (ε - малый параметр, k - характерное напряжение). Система трех дифференциальных уравнений равновесия и уравнений трех плоскостей Π_k в пространстве напряжений аппроксимирует с малым параметром ε статически неопределимую задачу, которая становится статически определимой.

Ключевые слова: пластичность, пространственная деформация, статическая определимость.

УДК: 539.374

Введение. Классическая теория идеальной пластичности [1-4], рассматриваемая как математическая модель поведения материалов в предельном пластическом состоянии, определяется четырьмя уравнениями для шести компонент симметричного тензора напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Эти уравнения представляют собой три дифференциальных уравнения в частных производных (1) (уравнения равновесия) и одно уравнение (2) предельного состояния материала в пространстве напряжений - условия пластичности:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0, \quad (2)$$

где $I_1 = \sigma_{kk}$, $I_2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij}$, $I_3 = \sigma_{ik} \cdot \sigma_{kl} \cdot \sigma_{li}$.

В случае гладкого выпуклого условия пластичности $f = 0$ в пространстве напряжений Π рассматриваемая система уравнений (1-2) является незамкнутой - 4 уравнения для 6-ти компонент тензора напряжений σ_{ij} . Для случаев плоского напряженного состояния $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$ и гладкой $f = 0$ задача (1-2) статически определима и разрешима [1-4]. В ряде других случаев замена гладкого условия пластичности (2) его кусочно-линейным аналогом (приближением) позволяет решить целый класс задач.

В случае идеального пластического материала условие пластичности (2) не зависит от гидростатического давления, то есть от первого инварианта I_1 тензора напряжений. Условие пластичности (2) представляет собой цилиндр в пространстве главных напряжений $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, причем ось этого цилиндра равнонаклонена к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Приведем наиболее употребительные условия идеального пластического материала. Условие пластичности максимального касательного напряжения (Треска):

$$\tau_{max} = (1/2)max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = k. \quad (3)$$

Условие пластичности максимального приведенного напряжения:

$$S_{max} = max\{|\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma|\} = k. \quad (4)$$

Условие пластичности октаэдрического напряжения (Мизеса):

$$\Sigma_2 = \sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij} = k^2, \quad (5)$$

где $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk} \cdot \delta_{ij}$.

В девиаторной плоскости Π_d пространства главных напряжений Π_g , ортогональной вектору $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, то есть равнонаклоненной к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, следы условий пластичности (3, 4, 5) представляют собой описанный и вписанный шестиугольники по отношению к окружности (рис.1).

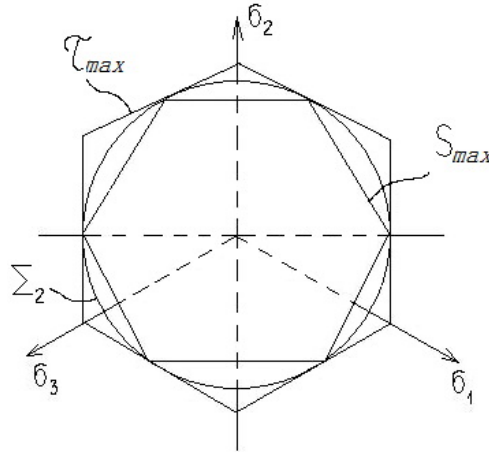


Рис. 1. Следы условий пластичности в девиаторной плоскости Π_g

В [1] указано, что эксперименты на металлах лучше всего согласуются с условием пластичности Мизеса, поэтому условие Треска ($\tau_{max} = k$) можно рассматривать как внешнюю линейную аппроксимацию непрерывного гладкого условия пластичности Мизеса ($\Sigma_2 = k^2$), а шестиугольник $S_{max} = k$ задает внутреннюю линейную аппроксимацию условия пластичности Мизеса. Максимальная относительная погрешность условия пластичности Треска по отношению к условию пластичности Мизеса может быть вычислена исходя из рис.1:

$$\eta = \frac{\tau_{max} - \sqrt{\Sigma_2}}{\sqrt{\Sigma_2}} \cdot 100\% \approx 4\%.$$

Такая малая относительная погрешность позволяет использовать в расчетах линейное условие Треска (3) вместо нелинейного, но аналитически гладкого, условия пластичности Мизеса (4).

Соотношение между различными, непрерывными и гладкими, условиями пластичности приводит к идее кусочно-линейной аппроксимации произвольного условия пластичности $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ в пространстве напряжений в каждой точке пластического напряженного состояния.

1. Плоское напряженное состояние.

В случае плоского напряженного состояния тензор напряжений содержит только три компоненты $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$, которые должны удовлетворять двум уравнениям статики и условию пластичности $f(I_1, I_2) = 0$. Предлагаемая задача является статически определенной и мы рассмотрим линейризацию условия пластичности парой касательных прямых в пространстве напряжений исходя только из методологических соображений. В случае идеальной пластичности, описываемой гладким выпуклым условием пластичности Мизеса, проведем аппроксимацию кривой $\Sigma_2 = \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 = k^2$ в девиаторной плоскости Π_d парой касательных прямых [5].

Из рис. 2 следует, что при замене точки \widetilde{M} , отвечающей действительному напряженному состоянию (σ_1', σ_2') , на точку \widehat{M} напряженное состояние $(\widehat{\sigma}_1', \widehat{\sigma}_2')$, близко к состоянию в точке \widetilde{M} .

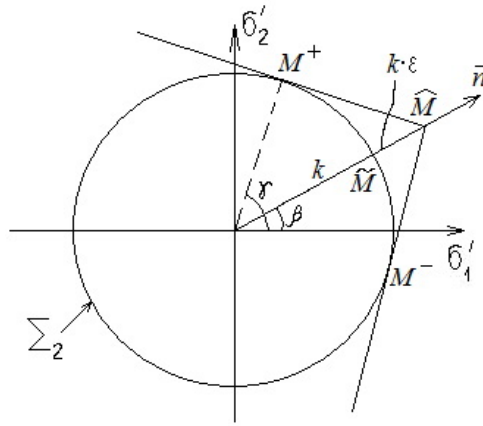


Рис. 2. Схематическое изображение аппроксимации условия пластичности Мизеса Σ_2 парой касательных прямых $\widehat{M}M^+$ и $\widehat{M}M^-$

В самом деле, $\widehat{M}\widetilde{M} = \varepsilon \cdot k \cdot \bar{n}$, где $\bar{n} = \nabla f / |\nabla f|$. В рассматриваемом примере вектор \bar{n} совпадает с направлением OM , так что

$$\widehat{\sigma}_1' = (1 + \varepsilon)k \cdot \cos\beta \cdot \sigma_2' = (1 + \varepsilon)k \sin\beta. \quad (6)$$

При приведенном построении координаты точки $\widetilde{M}(\widetilde{\sigma}_1', \widetilde{\sigma}_2')$ удовлетворяют условию пластичности Мизеса:

$$\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 = k, \quad (7)$$

а сама точка \widetilde{M} принадлежит кривой Σ_2 . Точка \widehat{M} лежит на малом расстоянии εk , отсчитываемом от Σ_2 по направлению нормали \bar{n} к Σ_2 , и принадлежит паре прямых (8):

$$\sigma_2' - \sigma_2'^{\pm} = (\sigma_1' - \sigma_1'^{\pm}) \cdot \frac{\widehat{\sigma}_2' - \sigma_2'^{\pm}}{\widehat{\sigma}_1' - \sigma_1'^{\pm}}. \quad (8)$$

Здесь: $\widehat{\sigma}_1' = k(1 + \varepsilon) \cos\beta$; $\widehat{\sigma}_2' = k(1 + \varepsilon) \sin\beta$; $\sigma_1'^* = k \cdot \cos\beta$, $\sigma_2'^* = k \cdot \sin\beta$.

Огибающей семейства касательных из точек \widehat{M} к Σ_2 , проходящих через точку касания M^\pm , является сама Σ_2 . При предлагаемой замене кривой пластичности Σ_2 (6) на пару прямых (8) имеет место предлагаемый переход

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{\sigma}'_2 = \sigma'_2; \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{\sigma}'_1 = \sigma'_1. \quad (9)$$

Заметим, что при замене условия (6) на условие (8) использовался удачный выбор параметра β , приводящий при замене

$$\widetilde{\sigma}'_1 = k \cos \beta, \widetilde{\sigma}'_2 = k \sin \beta \quad (10)$$

к автоматическому выполнению условия пластичности (6).

2. Общий случай пространственного напряженного состояния с выпуклым гладким условием пластичности в пространстве главных напряжений.

Для построения замкнутой системы уравнений статики в случае пространственного предельного напряженного состояния с гладким выпуклым условием пластичности (2) в пространстве главных напряжений выполним кусочно-линейную аппроксимацию условия пластичности (2) (рис. 3) [5-6]. Для этого в некоторой произвольной точке $\widehat{M}(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3)$, принадлежащей поверхности Σ_2 условия пластичности, проведем замену (аппроксимацию) этой поверхности тройкой линейно независимых плоскостей, проходящих через точку $\widehat{M}(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3)$ и касающихся гладкой выпуклой поверхности Σ_2 . Точку \widehat{M} будем откладывать на некоторое малое расстояние $k\varepsilon$ по направлению нормали к Σ_2 из точки \widehat{M} .

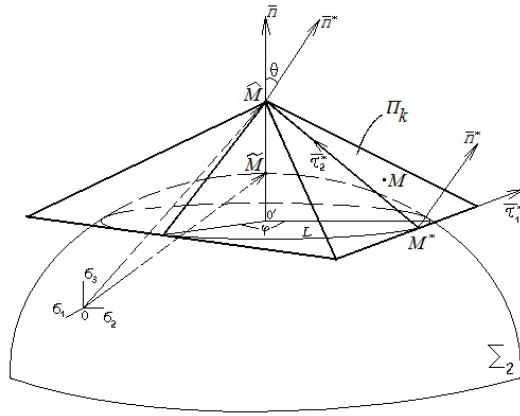


Рис. 3. Схематическое изображение поверхности Σ_2 (условия пластичности) в пространстве главных напряжений $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и аппроксимирующего Σ_2 касательного триэдра с вершиной в точке \widehat{M}

$$\overline{O\widehat{M}} = \overline{OM} + \overline{M\widehat{M}} = \overline{OM} + \varepsilon k \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad (11)$$

Касательных плоскостей из точки \widehat{M} к поверхности Σ_2 можно провести бесчисленное множество. Огибающей касательных плоскостей будет конус K , касательный к Σ_2 и образующий

на Σ_2 след в виде замкнутой линии L , так что координаты $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*)$ текущей точки M^* линии L удовлетворяют условию пластичности

$$f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) = 0. \quad (12)$$

Заметим, что выбор трех линейно независимых плоскостей, проходящих через точку \widehat{M} и касающихся поверхности Σ_2 , неоднозначен. В самом деле, простейшей фигурой, образованной из касательных плоскостей, будет триэдр [6] (пространственный симплекс), который свободен в своем повороте вокруг высоты $O'\widehat{M}$. Более точной линейной аппроксимацией, чем триэдр будет не треугольная пирамида, а шестиугольная пирамида, что соответствует аналогу условию пластичности Треска, аппроксимирующего поверхность Σ_2 в каждой ее точке.

Для построения аналитического уравнения касательной плоскости Π_k введем на ней произвольную точку M . Пересечение трех плоскостей Π_k определяет точку \widehat{M} , в которой эти плоскости аппроксимируют поверхность пластичности Σ_2 . Введем тройку ортогональных единичных векторов $(\bar{n}^*, \bar{\tau}_1^*, \bar{\tau}_2^*)$ в точке касания плоскостью Π_k поверхности Σ_2 (рис. 3)

$$\bar{n} = \nabla f / |\nabla f|; \bar{n}^* = \nabla f^* / |\nabla f^*|; \bar{n}\bar{n}^* = \cos \theta; \bar{n}\bar{\tau}_2^* = -\sin \theta. \quad (13)$$

Введем локальную систему координат (ξ, η, ζ) связанную с нормалью \bar{n} в точке \widehat{M} и касательной плоскостью к Σ_2 в этой точке. Вектора $\bar{n}, \bar{n}^*, \bar{\tau}_1^*, \bar{\tau}_2^*$ в координатах (ξ, η, ζ) будут иметь компоненты

$$\begin{aligned} \bar{n} &= (0, 0, 1); \bar{\tau}_1^* = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta); \\ \bar{n}^* &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta); \bar{\tau}_2^* = (\sin \varphi \cos \theta, -\cos \varphi \cos \theta, 0). \end{aligned} \quad (14)$$

Как следует из рис. 3, угол φ играет роль параметра, фиксирующего одну из бесчисленного множества касательных плоскостей Π_k . Уравнение самой касательной плоскости Π_k следует из условия ортогональности вектора $\overline{M^*M}$ в любую точку M плоскости Π_k вектору нормали \bar{n}^* :

$$\overline{M^*M} \cdot \bar{n}^* = 0, (\sigma_i - \sigma_i^*) \cdot \partial \Phi^* / \partial \sigma_i = 0, \quad (15)$$

где $\overline{M^*M} = \overline{OM} - \overline{OM^*} = (\sigma_1 - \sigma_1^*, \sigma_2 - \sigma_2^*, \sigma_3 - \sigma_3^*)$; $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ - координаты текущей точки M плоскости Π_k .

Уравнение касательной плоскости Π_k может быть привязано и к точке \widehat{M} , тогда получим

$$\widehat{MM} \cdot \bar{n}^* = 0, \widehat{MM} = (\sigma_1 - \widehat{\sigma}_1, \sigma_2 - \widehat{\sigma}_2, \sigma_3 - \widehat{\sigma}_3), (\sigma_i - \widehat{\sigma}_i) \cdot \partial \widehat{\Phi} / \partial \sigma_i = 0, (i = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Для выделения конкретных, скажем трех, касательных плоскостей необходимо ввести параметризацию рассматриваемого семейства касательных плоскостей, представленных уравнениями (15) или (16). Уравнение (16) является не очень удобным для выделения различных касательных плоскостей с использованием точки \widehat{M} , так как она принадлежит всем возможным плоскостям Π_k , проходящим через точку \widehat{M} . Уравнение (15) является удобным для параметризации касательных плоскостей за счет выбора различных точек касания M^* .

Параметризацию плоскости Π_k проведем путем использования цилиндрической системы координат, связанной с точкой \widehat{M} (рис. 4):

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \rho \cdot \cos \varphi; \sigma_\eta = \rho \cdot \sin \varphi; \sigma_\zeta = \sigma; \\ \rho &= |\widehat{MM}^*| \cdot \cos \theta = |\widehat{MM}^*| \cdot \nabla \widehat{\Phi} \cdot \nabla \Phi^* / |\nabla \widehat{\Phi}| \cdot |\nabla \Phi^*|. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение касательной плоскости с параметром ψ можно представить в системе координат $(\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta)$:

$$(\sigma_\xi - \rho^* \cos \varphi) \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_\xi} + (\sigma_\eta - \rho^* \sin \varphi) \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_\eta} + (\sigma_\zeta - \sigma_z^*) \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_\zeta} = 0, \quad (18)$$

здесь $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ - текущее напряженное состояние как функции координат пространства; ρ^* , σ_z^* - параметры напряжений в точке M^* ; $\varphi \in [0, 2\pi]$.

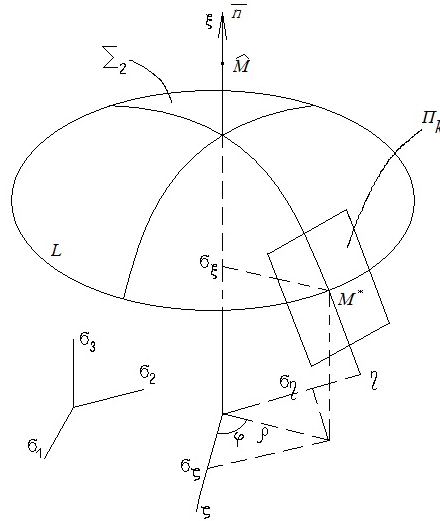


Рис. 4. Схематическое изображение точки касания M^* и выделения ее на линии касания L с помощью параметра ψ

Таким образом система, состоящая из уравнений равновесия (1), выражения компонент тензора напряжений σ_{ij} через главные напряжения $\sigma_{ij} = \sigma_k c_{ki} c_{kj}$, условий ортогональности главных напряжений $\overline{n_k n_l} = \delta_{kl}$ и трех линейных условий пластичности, является замкнутой, а сама задача определения предельного пространственного напряженного состояния становится статически определяемой.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Соколовский, В. В.* Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М. : Наука, 1990. – 272 с.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
- [5] *Бахвалов, Н. С.* Численные методы. Т.1 / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1973.
- [6] *Марчук, Г. И.* Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1977. – 456 с.

N. D. Verveyko

STATICALLY DETERMINATE OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF THEORY OF PLASTICITY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Voronezh State University

Abstract. Linear approximation of yield surface by three tangent planes Π_k passing through the point $\widehat{M}(\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \widehat{\sigma}_3)$ is suggested for three-dimensional plastic statically indeterminate strain problem with smooth convex plasticity condition $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ in the principal stress space $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Point \widehat{M} is located near the point M of surface $\widehat{\sigma}_i = \sigma_i + k \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial f / \partial \sigma_i}{|\nabla f|}$ (ε - small parameter, k - typical strain). A statically indeterminate problem is approximated with small parameter ε by the system of three differential equations and three equations of plains.

Keywords: plasticity, three-dimensional deformation, static definability.

Вервейко Николай Дмитриевич

доктор технических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: ver38@mail.ru

Verveyko, Nikolay Dmitrievich

Dr. Eng. Sci., Professor, Voronezh State University, Voronezh

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ИЗ ЛИСТОВОГО МАТЕРИАЛА

Воронежский государственный университет

Аннотация. В последнее время большое внимание привлечено к исследованию напряженно-деформированного состояния прокатных материалов [1, 2]. Методом малого параметра [3] определяются напряжения и перемещения в тонкой пластине с круговым отверстием из трансверсально-изотропного материала при двукратном растяжении.

Ключевые слова: трансверсальная анизотропия, упруго-пластическое состояние, перемещения, метод малого параметра.

УДК: 539.374

Рассматривается бесконечная плоскость с круговым отверстием радиуса a , растягиваемая на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями p_1 и p_2 ($p_1 > p_2$), контур отверстия свободен от нагрузок.

Положим $\frac{p_1 - p_2}{2k} = \delta$.

Вблизи отверстия реализуется пластическое состояние, которое для трансверсально-изотропных материалов записывается в виде [4]:

$$(1+r)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - 2r\sigma_x\sigma_y + 2(1+2r)\sigma_{xy}^2 = (1+r)\sigma_s^2, \quad (1)$$

где r — коэффициент анизотропии, равный отношению деформации по ширине растягиваемых образцов к деформации по толщине, σ_s — предел текучести при растяжении в плоскости листа.

В работе [4] предлагается заменить это условие кусочно-линейным условием текучести. При этом, напряженное состояние вблизи отверстия может быть описано одним из режимов полученного условия:

$$\sigma_1 - \alpha\sigma_2 = 2k, \quad (2)$$

здесь $\alpha = 1 - \sqrt{\frac{2}{1+r}}$.

1. Для осесимметричного состояния, которое в последующем принимается за нулевое приближение, при равномерном растяжении на бесконечности $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_\rho$ и условие (2) переписывается в виде

$$\sigma_\theta^{0p} - \alpha\sigma_\rho^{0p} = 2k. \quad (3)$$

В работе [5] получено:

$$\sigma_\rho^{0p} = \frac{2k}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\alpha-1} \right], \quad \sigma_\theta^{0p} = \frac{2k}{1-\alpha} \left[1 - \alpha \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\alpha-1} \right] \quad \text{при } \rho_0 \leq \rho \leq 1,$$

$$\sigma_\rho^{0e} = p - \frac{C}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{0e} = p + \frac{C}{\rho^2}, \quad C = \frac{2k - p(1 - \alpha)}{1 + \alpha}, \quad \text{при } 1 \leq \rho \leq \infty. \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем все компоненты, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу пластической зоны r_s^0 :

$$\left(\frac{r_s^0}{a}\right)^{\alpha-1} = \frac{2k - p(1 - \alpha)}{k(1 + \alpha)}. \quad (5)$$

Сравнивая (5) с аналогичной формулой для изотропного материала (при $\alpha = 0$) [6], получим, что при одинаковых нагрузке и диаметре отверстия радиус пластической зоны для анизотропного материала будет меньше радиуса пластической области для изотропного материала, при этом разница тем больше, чем больше α (см. рис. 1).

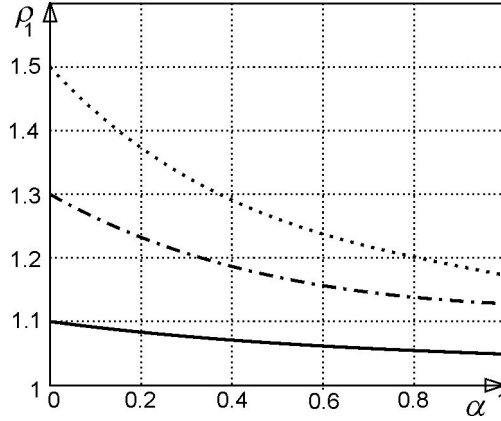


Рис. 1. Изменение радиуса упруго-пластической области

При определении перемещений необходимо использовать ассоциированный закон пластического течения:

$$\varepsilon_\rho^{0p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\rho}; \quad \varepsilon_\theta^{0p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta},$$

где $f(\sigma_{ij}) = \sigma_\theta^0 - \alpha \sigma_\rho^0 - 2k$.

Получаем

$$\varepsilon_\rho^{0p} + \alpha \varepsilon_\theta^{0p} = 0, \quad (6)$$

откуда

$$\frac{du_0}{d\rho} + \alpha \frac{u_0}{\rho} = \frac{1}{E'} [(1 - 2v')\sigma_\rho^{0p} + (\alpha - v')\sigma_\theta^{0p}], \quad (7)$$

здесь E' , v' — приведённые упругие константы трансверсально-изотропного материала.

Решение дифференциального уравнения (7) задает перемещения в пластической области

$$u_0^p = \frac{2k(1 - v')}{E'(1 - \alpha)} \rho + \frac{2k(2v'\alpha - 1 - \alpha^2)}{E'2\alpha(1 - \alpha)} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\alpha + C \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-\alpha}, \quad (8)$$

где $\rho_0 = \frac{a}{r_{s0}}$; $C = \frac{k(1 + \alpha)}{E'\alpha} \rho_0^{1-2\alpha}$.

В упругой области перемещения определяются с помощью закона Гука:

$$\varepsilon_\rho^{te} = \frac{1}{E'} (\sigma_\rho^e - v' \sigma_\theta^e); \quad \varepsilon_\theta^{te} = \frac{1}{E'} (\sigma_\theta^e - v' \sigma_\rho^e). \quad (9)$$

Таким образом:

$$u_0^e = \frac{1 - v'}{E'} p \rho + \frac{1 + v'}{E'} k \rho_0^{1-\alpha} \frac{1}{\rho}. \quad (10)$$

2. Для неравномерно растянутой пластины, ограничиваясь первым приближением, напряжения и перемещения будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta\sigma'_{ij}; \quad (11)$$

$$u_i = u_i^0 + \delta u'_i. \quad (12)$$

Линеаризованное условие текучести (2) в полярных координатах таково:

$$\sigma_\theta^0 - \alpha\sigma_\rho^0 + \delta(\sigma'_\theta - \sigma'_\rho) = 2k. \quad (13)$$

Напряженное состояние для первого приближения получено в [5]:

$$\sigma'^\rho_\rho = 0; \quad \sigma'^\rho_\theta = 0; \quad \sigma'^\rho_{\rho\theta} = 0 \quad \text{при } \rho_0 < \rho < 1. \quad (14)$$

При $\rho \geq 1$

$$\begin{aligned} \sigma'^e_\rho &= 2k \left(\frac{4}{\rho^2} - 1 - \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta; \quad \sigma'^e_\theta = 2k \left(\frac{3}{\rho^4} + 1 \right) \cos 2\theta; \\ \sigma'^e_{\rho\theta} &= 2k \left(1 - \frac{3}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Радиус упруго-пластической зоны:

$$\rho_{s1} = 4 \frac{\rho_0^{\alpha-1}}{\alpha+1} \cos 2\theta. \quad (16)$$

Определяем перемещения в упругой и пластической зонах. Учитывая (15), в упругой области имеем:

$$\begin{aligned} u'^e_\rho &= \frac{2k}{E'} \left[-(1+v')\rho + \frac{1+v'}{\rho^3} - \frac{4}{\rho} \right] \cos 2\theta, \\ u'^e_\theta &= \frac{2k}{E'} \left[(1+v')\rho + \frac{1+v'}{\rho^3} + \frac{2(1-v')}{\rho} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Для определения перемещений в пластической области необходимо использовать ассоциированный закон пластического течения:

$$\frac{\varepsilon^p_\rho}{df} = \frac{\varepsilon^p_\theta}{df} = \frac{\varepsilon^p_{\rho\theta}}{df}, \quad (18)$$

где

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_1 - \alpha\sigma_2 - 2k = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2}(1-\alpha) + (1+\alpha)\sqrt{\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_\rho}{2}\right)^2 + \sigma_{\rho\theta}^2} - 2k. \quad (19)$$

После линеаризации (18) с учетом (6), (11) и (19) получим:

$$\varepsilon'^p_\theta + \alpha\varepsilon'^p_\rho = 0; \quad \varepsilon'^p_{\rho\theta} = 0. \quad (20)$$

Отсюда

$$\varepsilon'_\theta + \alpha\varepsilon'_\rho = \varepsilon'^e_\theta + \alpha\varepsilon'^e_\rho; \quad \varepsilon'_{\rho\theta} = \varepsilon'^e_{\rho\theta}. \quad (21)$$

Так как согласно (14) $\sigma'^p_{ij} = 0$, из соотношений Коши и (21) получим уравнения для определения перемещений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{u'_\rho}{\rho} + \alpha \frac{\partial u'_\rho}{\partial \rho} &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u'_\rho}{\partial \theta} - \frac{u'_\theta}{\rho} + \frac{\partial u'_\theta}{\partial \rho} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение системы (22), учитывая (15), ищется в виде:

$$u'_\rho = R_1(\rho) \cos 2\theta, \quad u'_\theta = R_1(\rho) \sin 2\theta. \quad (23)$$

Получим

$$R_1(\rho) = \frac{1}{2}\rho^{\frac{1-\alpha}{2}} \left[\left(-C_1 \frac{1+\alpha}{2} + C_2 s \right) \cos \varphi + \left(-C_2 \frac{1+\alpha}{2} - C_1 s \right) \sin \varphi \right], \quad (24)$$

$$R_2(\rho) = \rho^{\frac{1-\alpha}{2}} [C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi],$$

где $\varphi(\rho) = s \ln \rho$, $s = \frac{1}{2} \sqrt{14\alpha - \alpha^2 - 1}$.

Константы C_1 и C_2 определяются из условия сопряжения перемещений на упруго-пластической границе:

$$\begin{aligned} \left[u'_\rho + \frac{du_\rho^0}{d\rho} \rho_{s1} \right] &= 0, \\ \left[u'_\theta + \frac{du_\theta^0}{d\rho} \rho_{s1} \right] &= 0, \quad \text{при } \rho = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Как следует из (8) и (10):

$$\frac{du_\rho^{0p}}{d\rho} = \frac{du_\rho^{0e}}{d\rho} \quad \text{при } \rho = 1.$$

При этом из (25) получим систему для определения C_1 и C_2 , решение которой

$$C_1 = \frac{8k}{E'}, \quad C_2 = -\frac{4k}{E's} (7 - \alpha). \quad (26)$$

Таким образом, в пластической зоне получаем:

$$\begin{aligned} u'_\rho &= \frac{2k}{E'} \rho^{\frac{1-\alpha}{2}} \left[-4(4 + \alpha) \cos \varphi + \frac{9 - 29\alpha + 2\alpha^2}{s} \sin \varphi \right] \cos 2\theta, \\ u'_\theta &= \frac{4k}{E'} \rho^{\frac{1-\alpha}{2}} \left[2 \cos \varphi - \frac{7 - \alpha}{s} \sin \varphi \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим изменение отверстия для конкретного материала. Следуя экспериментам [2], материал считается анизотропным, если удовлетворяется условие:

$$|r - 1| \geq 1, 35.$$

Приняв $r = 2, 5$, получим для этого значения r :

$$\alpha \approx 0, 75; \quad s = 0, 83. \quad (28)$$

Ограничиваясь первым приближением, уравнение деформированного отверстия можно записать в виде:

$$\rho = \rho_0 + u_\rho^0 + \delta u'_\rho, \quad (29)$$

Принимая $\rho_0 = 0, 5$, получим, что радиальные перемещения имеют большие значения при $\theta = \pi/2$, то есть в направлении большей силы. Отсюда следует, что круговое отверстие после деформации принимает форму эллипса, вытянутого в направлении большей силы, что совпадает с решением аналогичной задачи для изотропного материала [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред. В 2 т. Т. 2. / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2002. – 446 с.

[1] *Кузнецов, Е. Е.* О границах применимости квадратичного условия пластичности Мизеса к описанию пластических свойств анизотропии листовых прокатных металлов / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2010. – № 3.

[2] *Хван, Д. В.* Экспериментальная механика конечных деформаций / Д. В. Хван, Ф. Х. Томиллов, В. И. Корольков. – Воронеж : Издательство «ЭЛЛИСТ», 1996. – 248 с., илл.

[3] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред. В 2 т. Т. 1. / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – ISBN 5-9221-0140-4.

[4] *Вульман, С. А.* Моделирование расчёта конструкций из трансверсально-изотропного материала с использованием экстремальных свойств условий пластичности / С. А. Вульман, Т. Д. Семькина // Авиакосмические технологии : сб. тр. Третьей Международной науч.-техн. конф. – Воронеж, 2002. – С. 41–46.

[5] *Вульман, С. А.* Двусное растяжение плоскости с эллиптическим отверстием из листового материала / С. А. Вульман, Т. Д. Семькина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. Международной конференции. – Воронеж : Издательско-Полиграфический центр ВГУ, 2010. – С. 103–106.

[6] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упруговязкопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Главная редакция физ.-мат. литературы изд-ва НАУКА, 1978. – 208 с.

S. A. Vulman, T. D. Semykina

ELASTIC-PLASTIC STRESS–STRAIN CONDITION OF A PLANE OF SHEET MATERIAL WITH A CIRCULAR HOLE

Voronezh State University

Abstract. Recently, much attention is drawn to the study of stress-strain conditions of rolling materials [1,2]. The method of small parameter [3] determines stresses and displacements in a thin plate with a circular hole of a transversely – isotropic material under biaxial stretching.

Keywords: transversal anisotropy, plastic–elastic state, shift, the method of small parameter.

Вульман Светлана Александровна

кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Семькина Татьяна Дмитриевна

доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: tdsem@mail.ru

Vulman, Svetlana Aleksandrovna

Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State University, Voronezh

Semykina, Tatyna Dmitrievna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Teoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Д. В. Гоцев, Л. Г. Плотников, А. Н. Спорыхин

О ВЛИЯНИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ

Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж),

Воронежский государственный университет

Аннотация. В рамках метода малого параметра исследуется влияние силы тяжести на напряженно-деформированное состояние цилиндрической трубы, находящейся под действием равномерной радиальной внешней и внутренней нагрузок. В пластической зоне материал трубы моделируется несжимаемой упруго-вязко-пластической средой. Дана оценка влияния силы тяжести и физико-механических параметров среды на развитие упруго-пластической границы.

Ключевые слова: пластичность, упругость, напряжения, напряженно-деформированное состояние, сила тяжести.

УДК: 539.374

Известно, что одним из существенных факторов, влияющих на распределение поля напряжений в толстостенных конструкциях, является их собственный вес. Влияние собственного веса толстостенных цилиндрических труб на напряженное состояние, когда материал трубы в пластической зоне описывается соотношениями идеальной пластичности [1], дано в работе [2]. В настоящей работе аналогичная задача [2] исследуется в случае, когда в пластической зоне материал трубы описывается соотношениями упрочняющейся упруго-вязко-пластической среды [3].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = \left(S_i^j - c \left(\varepsilon_i^j \right)^p - \eta \left(e_i^j \right)^p \right) \left(S_j^i - c \left(\varepsilon_j^i \right)^p - \eta \left(e_j^i \right)^p \right) - k^2, \quad (1)$$

где c – коэффициент упрочнения; k – предел текучести, η – коэффициент вязкости; $S_i^j = \sigma_i^j - \sigma \delta_i^j$ – девиатор тензора напряжений; $\sigma = \sigma_k^k/3$; δ_i^j – символ Кронекера; ε_i^j – компоненты тензора деформаций; e_i^j – компоненты тензора скоростей деформаций. Индексы i, j принимают значения от 1 до 3. Здесь и далее верхние индексы “р” или “e” обозначают величины, относящиеся к пластической или упругой областям соответственно.

Рассмотрим толстостенную трубу с внутренним радиусом a и внешним b . На внутреннем контуре трубы приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью P_0 , моделирующая собой давление жидкости или газа, на внешнем контуре – нагрузка интенсивностью P . Очевидно, в этом случае решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния в толстостенной трубе может быть выполнено в рамках плоского деформированного состояния (рис.1).

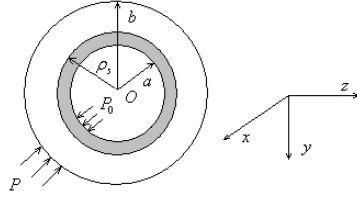


Рис. 1.

Решение задачи проведем в безразмерных величинах, отнеся все величины, имеющие размерность напряжения к величине предела текучести k , т. е. $q_0 = \frac{P_0}{k}$ и $q = \frac{P}{k}$, а все линейные размеры к радиусу пластической зоны в исходном нулевом приближении $\rho_s^{(0)}$, т. е. $\alpha = \frac{a}{\rho_s^{(0)}}$, $\rho = \frac{\rho}{\rho_s^{(0)}}$ и $\beta = \frac{b}{\rho_s^{(0)}}$.

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

где γ – объемная сила.

Частное решение системы уравнений (2) согласно [2] выберем в виде

$$\sigma_y = gy, \quad \sigma_x = \gamma y, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (3)$$

где g, γ – const.

Уравнения равновесия (2) в полярной системе координат (ρ, θ) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= \gamma \sin \theta, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= \gamma \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Условие пластичности (1) и частное решение (3) в полярной системе координат (ρ, θ) запишутся соответственно в форме

$$\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} - c\varepsilon_\rho^p - \eta\dot{\varepsilon}_\rho^p \right)^2 + \left(\tau_{\rho\theta} - c\varepsilon_{\rho\theta}^p - \eta\dot{\varepsilon}_{\rho\theta}^p \right) = 4k^2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{q+3\gamma}{4} \rho \sin \theta + \frac{q-\gamma}{4} \rho \sin 3\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{3q+\gamma}{4} \rho \sin \theta - \frac{q-\gamma}{4} \rho \sin 3\theta, \\ \tau_{\rho\theta} &= \frac{\gamma-q}{4} \rho (\cos \theta - \cos 3\theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Исследуем случай, когда пластическая зона полностью охватывает внутренний контур трубы. При определении напряженного состояния все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра δ , характеризующего отклонение от исходного невозмущенного состояния (от состояния без учета силы тяжести), то есть решение системы (4), (5), согласно [5] будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(1)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots, \quad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \delta \rho_s^{(1)} + \delta^2 \rho_s^{(2)} + \dots, \quad (7)$$

где ρ_s – радиус раздела зон упругого и пластического деформирования.

Влияние силы тяжести учтем в первом приближении, положив [2]

$$g = \delta c_1, \quad \gamma = \delta c_2, \quad (8)$$

где c_1, c_2 – const, δ – малый параметр, характеризующий отклонение распределения веса по оси Ox от распределения веса по оси Oy .

В качестве нулевого приближения выберем решение задачи о нахождении напряженно-деформированного состояния толстостенной цилиндрической трубы, находящейся под действием сжимающих нагрузок q_0 и q без учета силы тяжести, которое согласно работе [6] имеет вид

- в пластической зоне при $\alpha \leq \rho \leq 1$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^p &= -q_0 + \frac{x4\mu}{2\mu+c} \left[\frac{c+2\mu e^{-\xi t}}{4\mu} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) + (1 - e^{-\xi t}) \ln \frac{\rho}{\alpha} \right], \\ \sigma_\theta^p &= -q_0 + \frac{x4\mu}{2\mu+c} \left[\frac{c+2\mu e^{-\xi t}}{4\mu} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) + (1 - e^{-\xi t}) (1 + \ln \frac{\rho}{\alpha}) \right], \\ \tau_{\rho\theta}^p &= 0,\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$x = \text{sign}(q_0 - q), \quad \xi = \frac{2\mu + c}{\eta}.$$

- упругой зоне при $1 \leq \rho \leq \beta$

$$\sigma_\rho^e = -q + \frac{x}{\beta^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2} \right), \quad \sigma_\theta^e = -q + \frac{x}{\beta^2} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right), \quad \tau_{\rho\theta} = 0. \quad (10)$$

Пластические деформации определяются соотношением

$$\varepsilon_\theta^p = -\varepsilon_\rho^p = \frac{x(1 - e^{-\xi t})}{2\mu + c} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right). \quad (11)$$

На упругопластической границе выполняется следующее соотношение для внешних усилий

$$\left(\frac{1}{\beta^2} + 1 + |q_0 - q| \right) (2\mu + c) - 2\mu + 4\mu \ln \alpha (1 - e^{-\xi t}) - \frac{(2\mu e^{-\xi t} + c)}{\alpha^2} = 0. \quad (12)$$

На контуре отверстия при $\rho = \alpha$ в нулевом приближении справедливы граничные условия

$$\sigma_\rho = -q_0, \quad \tau_{\rho\theta} = 0.$$

Согласно (4), (5), (7), (8) для определения поля напряжений в пластической области в рамках первой итерации первого приближения имеет место система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{\rho(1)}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta(1)}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho(1)}^{(1)} - \sigma_{\theta(1)}^{(1)}}{\rho} &= \gamma \sin \theta, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta(1)}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta(1)}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta(1)}^{(1)}}{\rho} &= \gamma \cos \theta,\end{aligned}\quad (13)$$

$$\sigma_{\rho(1)}^{p(1)} - \sigma_{\theta(1)}^{p(1)} = 2c\varepsilon_\rho^{(0)p} + 2\eta\varepsilon_\rho^{(0)p}. \quad (14)$$

В (13), (14) и далее нижний индекс в скобках указывает номер итерации, верхний – номер приближения.

Уравнениям равновесия (13), удовлетворим полагая

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho(1)}^{(1)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Xi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Xi_{(1)}^{(1)}}{\partial \theta^2} + \frac{q+3\gamma}{4} \rho \sin \theta + \frac{q-\gamma}{4} \rho \sin 3\theta, \\ \sigma_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Xi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho^2} + \frac{3q+\gamma}{4} \rho \sin \theta - \frac{q-\gamma}{4} \rho \sin 3\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Xi_{(1)}^{(1)}}{\partial \theta} \right) + \frac{\gamma-q}{4} \rho (\cos \theta - \cos 3\theta),\end{aligned}\quad (15)$$

где $\Xi_{(1)}^{(1)}$ - функция напряжений Эри, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \Xi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Xi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Xi_{(1)}^{(1)}}{\partial \theta^2} = m_1 \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) + \frac{c_2 - c_1}{2} \rho (\sin \theta - \sin 3\theta), \quad (16)$$

где $m_1 = \frac{2c}{2\mu+c} (1 - e^{-\xi t})$.

Определяя решение уравнения (16), найдем напряжения в рамках первой итерации первого приближения в пластической области

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho(1)}^{p(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(-\frac{1}{\rho^2} - 2 \ln \rho \right) + 2C_{01} + \frac{5c_2 - c_1}{4} \rho \sin \theta + \frac{C_{12}}{\rho} \sin \theta + \frac{3(c_1 - c_2)}{4} \rho \sin 3\theta + \\
&+ \frac{1}{\rho} \left((-8C_{31} + \sqrt{8}C_{32}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + (-\sqrt{8}C_{31} - 8C_{32}) \sin(\sqrt{8} \ln \rho) \right) \sin 3\theta, \\
\sigma_{\theta(1)}^{p(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{\rho^2} - 2 - 2 \ln \rho \right) + 2C_{01} + \frac{7c_2 - 3c_1}{4} \rho \sin \theta + \frac{C_{12}}{\rho} \sin \theta + \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \rho \sin 3\theta + \\
&+ \frac{1}{\rho} \left((-8C_{31} + \sqrt{8}C_{32}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + (-\sqrt{8}C_{31} - 8C_{32}) \sin(\sqrt{8} \ln \rho) \right) \sin 3\theta, \\
\tau_{\rho\theta(1)}^{p(1)} &= \frac{c_1 - c_2}{4} \rho \cos \theta - \frac{C_{12}}{\rho} \cos \theta + \frac{3(c_1 - c_2)}{4} \rho \cos 3\theta - \\
&- \frac{1}{\rho} \left(3\sqrt{8} (C_{32} \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - C_{31} \sin(\sqrt{8} \ln \rho)) \right) \cos 3\theta.
\end{aligned} \tag{17}$$

При этом неизвестные константы интегрирования $C_{01}, C_{12}, C_{31}, C_{32}$ определим из граничных условий.

В первом приближении при $\rho = \alpha$ предположим, что

$$\sigma_{\rho(1)}^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha} = 0. \tag{18}$$

Составляющие напряжений (17) при $\sin \theta$ и $\cos \theta$ являются несамобалансирующимися и одновременно обращаются в ноль на контуре отверстия не могут.

Тогда из (17) с учетом (18) получим

$$C_{12} = \alpha^2 \frac{c_1 - 5c_2}{4}.$$

Если же предположить, что в первом приближении при $\rho = \alpha$

$$\tau_{\rho\theta(1)}^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \tag{19}$$

то

$$C_{12} = \alpha^2 \frac{c_1 - c_2}{4}.$$

На контуре отверстия при $\rho = \alpha$ все самоуравновешивающиеся составляющие напряжения обращаются в ноль. Тогда из (17) получим систему для определения коэффициентов C_{31} и C_{32}

$$\begin{cases} C_{31}a_{11} + C_{32}a_{12} = b_1, \\ C_{31}a_{21} + C_{32}a_{22} = b_2, \end{cases} \tag{20}$$

где $a_{11} = -8 \cos(\sqrt{8} \ln \alpha) - \sqrt{8} \sin(\sqrt{8} \ln \alpha)$, $a_{12} = \sqrt{8} \cos(\sqrt{8} \ln \alpha) - 8 \sin(\sqrt{8} \ln \alpha)$, $a_{21} = 3\sqrt{8} \sin(\sqrt{8} \ln \alpha)$, $a_{22} = -3\sqrt{8} \cos(\sqrt{8} \ln \alpha)$, $b_1 = \frac{3(c_1 - c_2)}{4} \alpha^2$, $b_2 = \frac{3(c_2 - c_1)}{4} \alpha^2$.

Откуда находим

$$C_{31} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad C_{32} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{21}$$

Таким образом, напряжения в первом приближении первой итерации в пластической области примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho(1)}^{p(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\rho^2} - 2 \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \frac{5c_2 - c_1}{4} \left(\rho - \frac{\alpha^2}{\rho} \right) \sin \theta + \\
&+ \left(\frac{3(c_1 - c_2)}{4} \rho + \frac{1}{\rho} \left((-8A_1 + \sqrt{8}A_2) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + (-\sqrt{8}A_1 - 8A_2) \sin(\sqrt{8} \ln \rho) \right) \right) \sin 3\theta, \\
\sigma_{\theta(1)}^{p(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\rho^2} - 2 - 2 \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \left(\frac{7c_2 - 3c_1}{4} \rho + \frac{c_1 - 5c_2}{4} \frac{\alpha^2}{\rho} \right) \sin \theta + \\
&+ \left(\frac{3(c_2 - c_1)}{4} \rho + \frac{1}{\rho} \left((-8A_1 + \sqrt{8}A_2) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + (-\sqrt{8}A_1 - 8A_2) \sin(\sqrt{8} \ln \rho) \right) \right) \sin 3\theta, \\
\tau_{\rho\theta(1)}^{p(1)} &= \left(\frac{c_1 - c_2}{4} \rho - \frac{c_1 - 5c_2}{4} \frac{\alpha^2}{\rho} \right) \cos \theta + \\
&+ \left(\frac{3(c_1 - c_2)}{4} \rho - \frac{1}{\rho} \left(3\sqrt{8} (A_2 \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - A_1 \sin(\sqrt{8} \ln \rho)) \right) \right) \cos 3\theta,
\end{aligned} \tag{22}$$

где $A_1 = C_{31}$, $A_2 = C_{32}$.

Из условия непрерывности [5] компонент напряжений на упруго-пластической границе при $\rho = 1$ с учетом (22) имеем

$$\sigma_{\rho}^{e(1)} = a_0'' + b_1'' \sin \theta + b_3'' \sin 3\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{e(1)} = a_1''' \cos \theta + a_3''' \cos 3\theta, \quad (23)$$

где $a_0''' = \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 + 2 \ln \alpha \right)$, $a_1''' = \frac{c_1 - c_2}{4} - \frac{c_1 - 5c_2}{4} \alpha^2$, $a_3''' = \frac{3(c_1 - c_2)}{4} - 3\sqrt{8}A_2$,
 $b_1'' = \frac{5c_2 - c_1}{4} (1 - \alpha^2)$, $b_3'' = -8A_1 + \sqrt{8}A_2 + \frac{3(c_2 - c_1)}{4}$.

Граничные условия на внешней стороне трубы при $\rho = \beta$ запишем в виде

$$\sigma_{\rho}^{e(1)} = b_1 \sin \theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{e(1)} = a_1' \cos \theta, \quad (24)$$

где b_1 и a_1' – const.

Распределение поля напряжений в упругой зоне при $1 \leq \rho \leq \beta$ согласно (6), (23), (24) будет иметь вид [5, 7]

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho(1)}^{e(1)} &= \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(-a_0'' + a_0'' \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) + \left[\frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)}{4m(\beta^2+1)} (b_1'' + a_1''') \left(\frac{1+\beta^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(b_1 - b_1'' \beta \right) \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \left. \right] \sin \theta + \frac{1}{2N} \left\{ \left[3(2 - 3\beta^2 + \beta^{-6}) \rho + 3(4 - 3\beta^2 - \beta^6) \rho^{-5} + \right. \right. \\ &+ (4 - 3\beta^{-2} - \beta^{-6}) \rho^3 + 5(2 - 3\beta^{-2} + \beta^6) \rho^{-3} \left. \right] b_3'' - \left[(-10 + 9\beta^2 + \beta^{-6}) \rho + \right. \\ &+ (4 + 5\beta^6 - 9\beta^2) \rho^{-5} + (-4 + 5\beta^{-2} - \beta^{-6}) \rho^3 + (10 - 5\beta^{-2} - 5\beta^{-6}) \rho^{-3} \left. \right] a_3'' \left. \right\} \sin 3\theta \\ \sigma_{\theta(1)}^{e(1)} &= \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(-a_0'' - a_0'' \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) + \left[3 \frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)}{4m(\beta^2+1)} (b_1'' + a_1''') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \frac{1+\beta^2}{\rho} + \frac{\beta^2}{\rho^3} - 3\rho \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(b_1 - b_1'' \beta \right) \left(3 \frac{\rho}{\beta} + \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \left. \right] \sin \theta + \frac{1}{2N} \left\{ \left[3(-2 + 3\beta^2 - \beta^{-6}) \rho + \right. \right. \\ &+ 3(-4 + 3\beta^2 + \beta^6) \rho^{-5} + 5(-4 + 3\beta^{-2} + \beta^{-6}) \rho^3 + (-2 + 3\beta^{-2} - \beta^6) \rho^{-3} \left. \right] b_3'' - \\ &- \left[(10 - 9\beta^2 - \beta^{-6}) \rho + (-4 + 9\beta^2 - 5\beta^6) \rho^{-5} + (20 - 25\beta^{-2} + 5\beta^{-6}) \rho^3 + \right. \\ &+ (-2 + \beta^{-2} + \beta^6) \rho^{-3} \left. \right] a_3'' \left. \right\} \sin 3\theta \\ \tau_{\rho\theta(1)}^{e(1)} &= - \left[\frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)}{4m(\beta^2+1)} (b_1'' + a_1''') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \frac{1+\beta^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(b_1 - b_1'' \beta \right) \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \left. \right] \sin \theta - \frac{1}{2N} \left\{ \left[3(-2 + 3\beta^2 - \beta^{-6}) \rho + \right. \right. \\ &+ 3(4 - 3\beta^2 - \beta^{-6}) \rho^{-5} + \\ &+ 3(-4 + 3\beta^{-2} + \beta^{-6}) \rho^3 + 3(2 - 3\beta^{-2} + \beta^6) \rho^{-3} \left. \right] b_3'' + \left[(10 - 9\beta^2 - \beta^{-6}) \rho + \right. \\ &+ (4 - 9\beta^2 + 5\beta^6) \rho^{-5} + (12 - 15\beta^{-2} + 3\beta^{-6}) \rho^3 + (6 - 3\beta^{-2} - 3\beta^6) \rho^{-3} \left. \right] a_3'' \left. \right\} \sin 3\theta, \end{aligned} \quad (25)$$

где $m = \mu^{-1}$, причем из условий равновесия имеет место

$$(b_1 + a_1') \beta - (b_1'' + a_1''') = 0. \quad (26)$$

Из условий сопряжения компонент тензора напряжений следует, что на невозмущенной упруго-пластической границе имеет место равенство

$$\left[\sigma_{ij(1)}^{(1)} + \frac{d\sigma_{ij}^{(0)}}{d\rho} \rho_{s(1)}^{(1)} \right] = 0. \quad (27)$$

Откуда, учитывая (9), (10), получим

$$\rho_{s(1)}^{(1)} = - \left[\sigma_{\theta(1)}^{(1)} \right] \left[\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)}}{d\rho} \right]^{-1} = - \frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-\xi t})} \left[\sigma_{\theta(1)}^{(1)} \right]. \quad (28)$$

Соотношение для нахождения радиуса упруго-пластической границы $\rho_{s(1)}^{(1)}$ в первой итерации первого приближения согласно (28) при учете (22) и (25) определим в виде

$$\rho_{s(1)}^{(1)} = M_0 + M_1 \sin \theta + M_3 \sin 3\theta, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}
 M_0 &= -\frac{2\mu+c}{8\mu(1-e^{-\xi t})} \frac{2a_0'' \beta^2}{\beta^2-1}, \\
 M_1 &= -\frac{2\mu+c}{8\mu(1-e^{-\xi t})} \left[\frac{7c_2-3c_1}{4} + \frac{c_1-5c_2}{4} \alpha^2 - \right. \\
 &\quad \left. -3\frac{b_1}{\beta} - \frac{(3m+1)}{4m(\beta^2+1)} (b_1'' + a_1''') \left(-\frac{m-1}{3m+1} (1+\beta^2) + \beta^2 - 3 \right) - \frac{1}{\beta^4-1} (b_1 - b_1'' \beta) \left(\frac{3}{\beta} + \beta^3 \right) \right], \quad (30) \\
 M_3 &= -\frac{2\mu+c}{8\mu(1-e^{-\xi t})} \left[\frac{3(c_2-c_1)}{4} - 8A_1 + \sqrt{8}A_2 - \frac{1}{2N} (-40 + 18\beta^2 + 18\beta^2 + 2\beta^6 + 2\beta^{-6}) b_3'' + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2N} (24 - 24\beta^{-2} - 4\beta^6 + 4\beta^{-6}) a_3''' \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом, поле напряжений в толстостенной цилиндрической трубе, находящейся под действием сжимающих нагрузок и силы тяжести, определено в нулевом и первом приближениях (первая итерация) при $\alpha \leq \rho \leq 1$ соотношениями (9), (22), а при $1 \leq \rho \leq \beta$ – соотношениями (10), (25). Радиус раздела зон упругого и пластического деформирования находится по формулам (12), (29).

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2 – 5. На этих рисунках показана зависимость радиуса упруго-пластической границы ρ_s от угла θ в толстостенной трубе с учетом силы тяжести. При этом значение безразмерных характеристик принимались следующими: внутреннее давление на контуре $q_0 = 0.9$ и внешнее давление на контуре $q = 0.2$; малый параметр $\delta = 0.17$; модуль сдвига $\mu = 1$; радиус отверстия $\alpha = 0.7$; внешний радиус трубы $\beta = 1.7$.

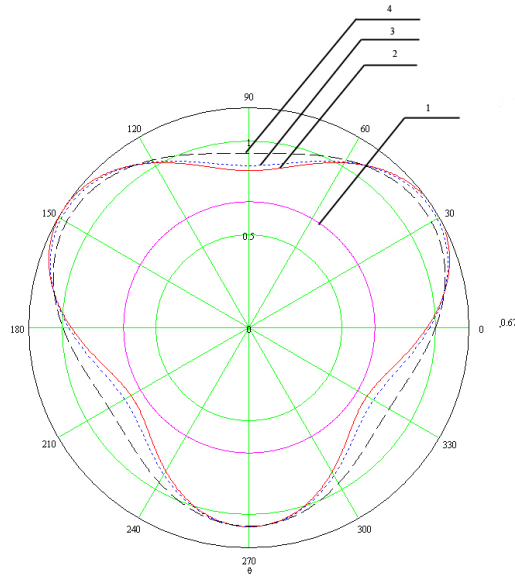


Рис. 2.

На рис. 2–5 замкнутая кривая 1 соответствует внутреннему контуру трубы, замкнутые кривые 2 – 4 характеризуют положение упруго-пластической границы ρ_s для случаев:

рис. 2 – различных моментов времени $t = 0.00004$, $t = 0.00005$, $t = 0.1$ соответственно (при этом $c = 0.2$; $\eta = 0.001$);

рис. 3 – различных значений коэффициента упрочнения $c = 0.00001$, $c = 0.2$, $c = 0.7$ соответственно (при этом $\eta = 0.001$);

рис. 4 – различных значений коэффициента вязкости $\eta = 0.00005$, $\eta = 0.00007$ и $\eta = 0.0001$ соответственно (при этом $c = 0.2$);

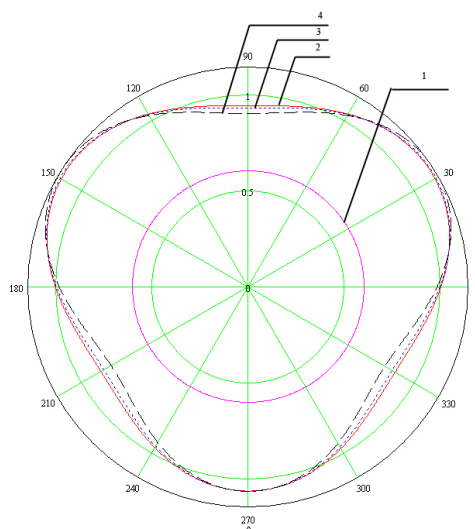


Рис. 3.

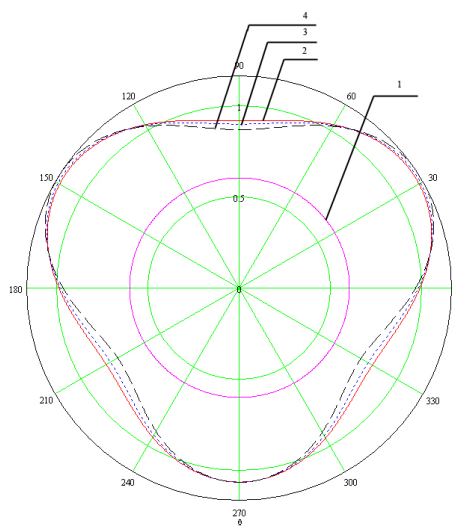


Рис. 4.

рис. 5 – различных значениях $c_1 = 0.01$, $c_2 = 7.6$; $c_1 = 0.1$, $c_2 = 2.1$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, соответственно. Случай $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ соответствует положению упруго-пластической границы без учета силы тяжести. При этом коэффициент упрочнения - $c = 0.2$, коэффициент вязкости - $\eta = 0.001$.

Из анализа результатов численного эксперимента следует, что учет силы тяжести существенно влияет на форму и размер упруго-пластической зоны (рис. 2–5), при этом наблюдаются следующие закономерности:

- изменение пластической зоны с учетом силы тяжести от площади пластической области в нулевом приближении составляет 7,51 % для случая, когда $c_1 = 0.01$ и $c_2 = 7.6$;

- с ростом времени упруго-пластическая граница увеличивается до определенного значения, которое соответствует упрочняющейся упруго-пластической модели среды (рис. 2);
- при увеличении коэффициентов упрочнения s и вязкости η пластическая область сужается.

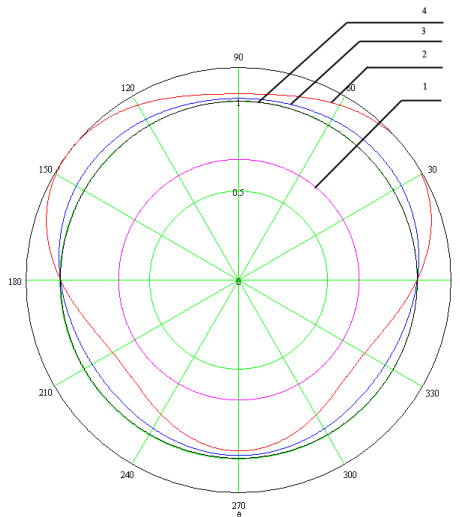


Рис. 5.

Очевидно, что полагая в полученных выше соотношениях (4, 10, 12, 22, 25, 29) $s = 0$, $\eta = 0$ и $t \rightarrow \infty$, приходим к результатам работы [2], когда в пластической зоне материал трубы идеально-пластический. Если положить $s_1 = 0$ и $s_2 = 0$ (сила тяжести не учтена), то приходим к известным решениям [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 229 с.
- [2] *Матвеев, С. В.* Уругоупругое состояние среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести / С. В. Матвеев // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – Самара, 2007. – № 2(52). – С.107–114.
- [3] *Спыхин, А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спыхин. – Воронеж, 1997. – 297 с.
- [4] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : Мир, 1969. – Т. 2. – 840 с.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругоупругого тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [6] *Спыхин, А. Н.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спыхин, А. И. Шашкин. – М. : Физматлит, 2004. – 232 с.
- [7] *Бицено, К. Б.* Техническая динамика / К. Б. Бицено, Р. Граммель. – Л. : Гостехиздат, 1950.

D. V. Gotsev, L. G. Plotnikov, A. N. Sporykhin

**THE EFFECT OF GRAVITY ON THE STRESS-STRAIN STATE OF
THICK-WALLED CYLINDRICAL TUBES**

Military aviation engineering university (Voronezh)

The Voronezh state university

Abstract. As part of the small parameter method we investigate the influence of gravity on the stress-strain state of a cylindrical tube that is subjected to uniform radial internal and external loads. In the plastic zone of the pipe material is modeled by a incompressible elastic-visco-plastic medium. The effect of gravity and physical and mechanical parameters of the environment on the development of elastic-plastic boundary is assessed.

Keywords: plasticity, elasticity, stress, stress-strain state, the force of gravity.

Гоцев Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики, Военный авиационный инженерный университет, г. Воронеж

e-mail: rbgotsev@mail.ru

Плотников Лаврентий Геннадьевич

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: lavrentiy.plotnikov@mail.ru

Спориных Анатолий Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Gotsev, Dmitry Viktorovich

Candidate of Phys. & Math., Professor, Department of Mathematics, Military Aviation Engineering University, Voronezh

Plotnikov, Lavrentiy Gennadevich

Postgraduate Student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Sporykhin, Anatoly Nikolaevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН В КОМПОЗИТАХ, АРМИРОВАННЫХ ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ, ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ СДВИГЕ

Азербайджанский государственный педагогический университет

Аннотация. Рассматривается задача механики разрушения о зарождении трещин в линейно-армированных композитах при поперечном сдвиге. Строятся общие представления, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений в композитах при поперечном сдвиге. Решение задачи о равновесии композитов, армированных однонаправленными волокнами, при поперечном сдвиге с зонами предразрушения сводится к решению трех бесконечных алгебраических систем и двух нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений. Условие появления трещин формируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала связующего.

Ключевые слова: композит, армированный однонаправленными волокнами, зоны предразрушения, связи между берегами, силы сцепления материала.

УДК: 539.375

Для современной техники важное значение имеет разработка методов расчета на прочность элементов машин и конструкций из композитов, армированных однонаправленными волокнами. Исследование этих вопросов важно в связи с широким использованием материалов, имеющих периодическую структуру.

Постановка задачи. Пусть имеется изотропная упругая плоскость (связующее), ослабленная двоякопериодической системой круглых отверстий, имеющих радиусы λ ($\lambda < 1$) и центры в точках

$$P_{m,n} = m\omega_1 + n\omega_2 (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \omega_1 = 2, \omega_2 = \omega_1 h_* e^{i\alpha}, h_* > 0, \operatorname{Im}\omega_2 > 0.$$

Круговые отверстия связующего заполнены волокнами (шайбами) из другого однородного упругого материала. На кусочно-однородное тело (композит) действуют средние напряжения $\tau_{xy} = \tau_{xy}^\infty$, $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$ (поперечный сдвиг на бесконечности). Начало системы координат совмещено с геометрическим центром отверстия (волокна) $L_{0,0}$ в связующем.

По мере увеличения интенсивности внешних нагрузок в композите (связующем) вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет двоякопериодический характер. В связующем возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала.

Полагаем, что в связующем имеются две системы двоякопериодических зон предразрушения, направленные коллинеарно осям абсцисс и ординат неравной длины. В исследуемом

случае возникновения зародышевых трещин в композитах, армированных однонаправленными волокнами, представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи. При действии внешней нагрузки на композит в связях, соединяющих берега зон предразрушения, будут возникать касательные усилия $q_x(x)$ и $q_y(y)$ соответственно. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению.

Задача о напряженно-деформированном состоянии композита с зонами предразрушения сводится к построению в каждой из областей, занятой упругой средой, двух функций [1] $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ по заданным условиям на границах упругих сред. Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$(\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{b|\omega_{mn}} = (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{s|\omega_{mn}}, \quad (1)$$

$$(u + iv)_{b|\omega_{mn}} = (u + iv)_{s|\omega_{mn}},$$

на берегах зон предразрушения

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})_s = -iq_x(x) \text{ коллинеарных оси абсцисс,} \quad (2)$$

$$(\sigma_x - i\tau_{xy})_s = -iq_y(y) \text{ коллинеарных оси ординат.}$$

Здесь ω_{mn} – граница раздела волокна - связующего в ячейке с номером mn ; величины, относящиеся к волокну и связующему, в дальнейшем обозначаются соответственно индексами b и s .

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношениями, связывающими раскрытие берегов зон предразрушения и усилия в связях. Без потери общности эти соотношения представим в виде

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = C(x, q_x(x)) q_x(x), \quad (3)$$

$$v^+(0, y) - v^-(0, y) = C(y, q_y(y)) q_y(y),$$

где функции $C(x, q_x(x))$ и $C(y, q_y(y))$ можно рассматривать как эффективные податливости связей; $(u^+ - u^-)$ – раскрытие берегов концевых зон предразрушения коллинеарных оси абсцисс; $(v^+ - v^-)$ – раскрытие берегов зон предразрушения коллинеарных оси ординат.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой материалом связующего, напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами ω_1 и ω_2 .

Граничные условия рассматриваемой задачи для отыскания комплексных потенциалов имеют вид [1]:

$$\Phi_s(\tau) + \overline{\Phi_s(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_s(\tau) + \Psi_s(\tau)] e^{2i\theta} = \quad (4)$$

$$= \Phi_b(\tau) + \overline{\Phi_b(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_b(\tau) + \Psi_b(\tau)] e^{2i\theta},$$

$$\Phi_s(\tau) - \kappa_s \overline{\Phi_s(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_s(\tau) + \Psi_s(\tau)] e^{2i\theta} =$$

$$= \frac{\mu_s}{\mu_b} \left\{ \Phi_b(\tau) - \kappa_b \overline{\Phi_b(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_b(\tau) + \Psi_b(\tau)] e^{2i\theta} \right\},$$

$$\Phi_s(t) + \overline{\Phi_s(t)} + t\overline{\Phi'_s(t)} + \overline{\Psi_s(t)} = -iq_x(t), \quad (5)$$

$$\Phi_s(t_1) + \overline{\Phi_s(t_1)} + t_1 \overline{\Phi'_s(t_1)} + \overline{\Psi_s(t_1)} = -iq_y(t_1).$$

Здесь μ_s, μ_b – модули сдвига; κ_s и κ_b – постоянные Мусхелишвили для связующего и волокна соответственно; t и t_1 – аффиксы точек берегов зон предразрушения, направленных коллинеарно осям абсцисс и ординат, соответственно.

Для определения предельной величины внешней нагрузки, при которой происходит трещинообразование, постановку задачи необходимо дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей в материале). В качестве такого условия примем критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения

$$V = |(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)| = \delta_{cr}, \quad (6)$$

где δ_{cr} – характеристика сопротивления материала связующего трещинообразованию.

Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (5) – (9) ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_b(z) &= i \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}; \quad \Psi_b(z) = i \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{2k}, \\ \Phi_s(z) &= \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Psi_s(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z),$$

$$\Phi_1(z) = i\tau_{xy}^{\infty} + i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= i\tau_{xy}^{\infty} + i \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \\ \Phi_2(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g(x) \varsigma(x-z) dx + A', \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} [\varsigma(x-z) + Q(x-z) - x\gamma(x-z)] g(x) dx + B',$$

$$\Phi_3(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{L_2} \varsigma(it_1 - z) g_1(t_1) dt_1 + A'',$$

$$\Psi_3(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{L_2} \left\{ \varsigma(it_1 - z) \overline{g_1(t_1)} - [Q(it_1 - z) + it_1 \gamma(it_1 - z)] g_1(t_1) \right\} dt_1 + B''.$$

Здесь интегралы в (9) берутся по линии $L_1 = \{-h, -a\} + [a, h]$; $L_2 = \{-r, -b\} + [b, r]$; $\varsigma(z)$ – дзета функция Вейерштрасса; $\gamma(z)$ – функция Вейерштрасса; $Q(z)$ – специальная мероморфная функция [2]; $g(t), g_1(t_1)$ – искомые функции, характеризующие раскрытие берегов зон предразрушения

$$g(x) = -\frac{2\mu_s i}{1 + \kappa_s} \frac{d}{dx} [u^+(x, 0) - u^-(x, 0)] \quad \text{на } L_1, \quad (10)$$

$$g_1(y) = \frac{2\mu}{1 + \kappa_s} \frac{d}{dy} [v^+(0, y) - v^-(0, y)] \quad \text{на } L_2.$$

Из условия дwoякопериодичности поля напряжений, а также постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, которая соединяет две конгруэнтные точки в D , занятой материалом связующего, получим следующие соотношения

$$(A + \bar{A}) \omega_k + \bar{B} \bar{\omega}_k = (\delta_k + \bar{\delta}_k) a + (\gamma_k + \bar{\delta}_k) a + (\bar{\delta}_k - \delta_k) b + (\bar{\delta}_k - \bar{\gamma}_k) \bar{b} + \beta_2 \lambda^2 \bar{\delta}_k + \alpha_2 \lambda^2 (\delta_k + \bar{\gamma}_k), \quad (k = 1, 2), \quad (11)$$

$$a = -\frac{1}{2\pi} \int_L tg(t) dt; \quad b = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_2} t_1 g_1(t_1) dt_1;$$

$$A = A' + A''; \quad B = B' + B''.$$

Обозначения постоянных δ_k, γ_k двоякопериодической решетки соответствуют употребляемым в [2].

К основным представлениям следует добавить дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-h}^{-a} g(t) dt = 0; \quad \int_a^h g(t) dt = 0, \quad (12)$$

$$\int_{-r}^{-b} g_1(t_1) dt_1 = 0; \quad \int_b^r g_1(t_1) dt_1 = 0.$$

Применяя метод степенных рядов [1], получим соотношения, определяющие коэффициенты a_{2k}, b_{2k} функций $\Phi_b(z)$ и $\Psi_b(z)$.

Для определения неизвестных коэффициентов α_{2k}, β_{2k} функций $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ рассмотрим решение упругой задачи для связующего.

Преобразуем первое краевое условие (4) следующим образом

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - [\bar{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} = \quad (13)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta} + \varphi_1(\theta) + f_1(\theta),$$

$$\varphi_1(\theta) = -\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\bar{\tau} \Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta},$$

$$f_1(\theta) = -\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\bar{\tau} \Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}. \quad (14)$$

Разложим функции $\varphi_1(\theta), f_1(\theta)$ на контуре шайбы $|\tau| = \lambda$ в ряды Фурье. Эти ряды имеют вид

$$\varphi_1(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_{2k} e^{2ki\theta}, \quad Re C'_{2k} = 0, \quad (15)$$

$$f_1(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C''_{2k} e^{2ki\theta}, \quad Re C''_{2k} = 0,$$

$$C'_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) e^{2ki\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$C''_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) e^{-2ki\theta} d\theta.$$

Подставив сюда выражение (14) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов найдем

$$\begin{aligned}
C'_{2k} &= C'^*_{2k} - \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g(t) \varphi_{2k}(t) dt \quad \text{при } k = -1, \pm 2, \dots, & (16) \\
C'_0 &= -2A' + A_0^*; \quad C'_2 = B' + C_2^*; \quad C_0^* - \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g(t) \varphi_0(t) dt, \\
C_2^* &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g(t) \varphi_2(t) dt; \quad \varphi_0(t) = (1 + \varepsilon) \varsigma(t); \quad C''_{2k} = C''^*_{2k}, \\
\varphi_2(t) &= \frac{\lambda^{2k}}{2} \gamma'(t) + t\gamma(t) - \varsigma(t) - Q(t), \\
\varphi_{2k}(t) &= \frac{(2k-1)\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k-1)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} \left[\gamma^{(2k-3)}(t) - Q^{(2k-2)}(t) + t\gamma^{(2k-2)}(t) \right], \\
\varphi_{-2k}(t) &= -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k-1)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \\
C_{2k}^* &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L_2} g_1(t_1) f_{2k}(it_1) dt_1; \quad C_0^* = -2A - \frac{i}{2\pi} \int_{L_2} g_1(t_1) f_0(it_1) dt_1; \\
C_2'' &= B'' + C''^*_2; \quad f_0(it_1) = \varsigma(it_1) - \overline{\varsigma(it_1)}, \\
f_2(it_1) &= \frac{\lambda^2}{2} \gamma'(it_1) + \varsigma(it_1) - Q(it_1) - it_1 \gamma(it_1), \\
f_{2k}(it_1) &= \frac{(2k-1)\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k-1)}(it_1) - \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} \left[\gamma^{(2k-3)}(it_1) - \right. \\
&\quad \left. - Q^{(2k-2)}(it_1) + it_1 \gamma^{(2k-2)}(it_1) \right] \quad (k = 2, 3, \dots), \\
f_{-2k}(it_1) &= -\frac{\varepsilon \lambda^{2k}}{(2k)!} \overline{\gamma^{(2k-1)}(it_1)} \quad (k = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

Подставив в левую часть граничного условия (13) вместо $\Phi_1(z)$, $\overline{\Phi_1(z)}$, $\Phi_1'(z)$ и $\Psi_1(z)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} :

$$i\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} ia_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Поступая аналогично со вторым краевым условием (4), после некоторых преобразований получаем аналогичную систему уравнений относительно α_{2j+2}^* при $\varepsilon = \kappa_s$.

Используя полученные соотношения и выполняя некоторые преобразования, получаем формулы, определяющие коэффициенты α_{2k} , β_{2k} , A_0 , A_{-2k} через величины A_{2k} , а также бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно A_{2k} :

$$i\alpha_{2j+2} = \frac{1 - \mu_s/\mu_b}{1 + \kappa_s} A_{2j+2}; \quad \chi = \kappa_s; \quad \chi_0 = \kappa_b, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 A_{-2j} &= \frac{\mu_b}{\mu_b + \chi_0 \mu_s} (C_{-2j}^* - C_{-2j}) - \frac{(1 + \chi_0) \mu_s}{\mu_b - \mu_s \chi_0} B_{-2j} + \\
 &\quad + \frac{\mu_b - \mu_s}{\mu_b + \chi_0 \mu_s} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2j+2k+2} r_{j,k} A_{2k+2}; \\
 A_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} e_{0,k} \lambda^{2k+2} A_{2k+2} + i e_0 + e_1, \\
 e_{0,k} &= \frac{1 - \mu_s / \mu_b}{(1 - 2\kappa_2 \lambda^2) e} r_{0,k}; \quad e_0 = \frac{1 + \chi}{(1 - 2\kappa_2 \lambda^2) e}, \\
 e_1 &= \frac{1}{e} C_0^* - \frac{1 + (\chi - 1) \kappa_2 \lambda^2}{(1 - 2\kappa_2 \lambda^2) e} - \frac{(1 + \chi_0) \mu}{2\mu_b e} B_0, \\
 e &= \frac{1 + \chi}{2(1 - 2\kappa_2 \lambda^2)} - \frac{\chi - 1}{2} + \frac{\mu_s (\chi_0 - 1)}{2\mu_b}, \\
 i\beta_{2j+4} &= \frac{1 - \mu_s / \mu_b}{1 + \chi_0} [(2j + 3) A_{2j+2} + \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j + 2k + 3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4} A_{2k+2}}{(2j + 2)! (2k + 1)! 2^{2j+2k+4}}] - A_{-2j-2} - C_{-2j-2}, \\
 A_{2j+2} &= \sum_{k=0}^{\infty} D_{j,k} A_{2k+2} T_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \\
 D_{j,k} &= (2j + 1) \lambda^{2j+2k+2} S_{j,k} / \gamma; \quad S_{j,k} = \frac{1 - \mu_s / \mu_b}{1 + \chi} \left(\gamma_{j,k} + \frac{\mu_b}{\chi \mu_s} \gamma_{j,k}^* + d_{j,k} \right), \\
 d_{j,k} &= \frac{g_{j+1} g_{k+1}}{2^{2j+2k+4}} \lambda^2 \eta (\mu_s / \mu_b); \\
 \eta (\mu_s / \mu_b) &= \frac{[(\chi_0 - 1) / \chi_0] [1 / (1 + (\chi - 1) \kappa_2 \lambda^2) - (2 / (1 - 2\kappa_2 \lambda^2))]}{1 - (1 - 2\kappa_2 \lambda^2) \left[\frac{\chi - 1}{\chi + 1} - \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\chi_0 - 1}{\chi + 1} \right]}, \\
 T_0^* &= \left(1 - \frac{\mu_b}{\chi_0 \mu_s} \right) i \tau_{xy}^{\infty}; \quad T_j = (T_j^* + h_j + K_j) / \gamma, \\
 h_0 &= \frac{1 + \chi_0}{\chi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} B_{-2k-2}; \quad T_j^* = \frac{(2j + 1) g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}} \eta_1 (\mu_s / \mu_b) i \tau_{xy}^{\infty} \\
 \eta_1 (\mu_s / \mu_b) &= \frac{(1 + \mu_b / \chi_0 \mu_s) [(\mu_b / \mu_s) (\chi_0 - 1) - (\chi - 1)]}{1 + (\chi - 1) \kappa_2 \lambda^2 + (\mu_s / 2\mu_b) (\chi_0 - 1) (1 - 2\kappa_2 \lambda^2)}, \\
 h_j &= \frac{(2j + 1) g_{j+1} \lambda^{2j+2} B_0}{2^{2j+2}} \left\{ \frac{(1 + \chi) \mu_s}{2\mu_b e (1 - 2\kappa_2 \lambda^2)} + \left(1 + \frac{\mu_s (1 - \chi_0)}{2\mu_s e} \right) \times \right. \\
 &\quad \times \frac{(1 + \chi)}{2\chi_0 [1 + (\chi - 1) \kappa_2 \lambda^2]} + \frac{1 + \chi_0}{\chi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j + 2k + 3)! g_{j+k+2} \lambda^{2k+2j+4} B_{-2k-2}}{(2j)! (2k + 3)! 2^{2j+2k+4}} \\
 K_j &= - \frac{(2j + 1) g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}} \left\{ \frac{1 - (\chi - 1) \kappa_2 \lambda^2}{e} \left[\frac{1}{1 - 2\kappa_2 \lambda^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1 - \chi}{2\chi_0 [1 + (\chi - 1) \kappa_2 \lambda^2]} \right] - 1 \right\} R_0 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(2j-1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}} \left\{ \frac{1}{(1-2\kappa_2\lambda^2)e} + \frac{1}{\chi[1+(\chi-1)\kappa_2\lambda^2]} \left(\frac{1-\chi_0}{2e} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\mu_s}{\mu_b} \right) \right\} C_0^* + C_{2j+2} + \frac{\mu_b}{\chi_0\mu_s} C_{2j+2}^- \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2k+2j+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}} \left(C_{-2k-2} + \frac{\mu_b}{\chi_0\mu_s} C_{-2k-2}^* \right), \\
& \gamma = \frac{(1-\mu_s/\mu_{0b})(1-\chi\mu_b/\chi_0\mu_s)}{1+\chi} - \frac{1+\chi_0}{\chi_0}.
\end{aligned}$$

Теперь, подставив (7) – (9) в краевое условие (5), после некоторых преобразований получим систему двух сингулярных интегральных уравнений относительно искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_L g(t) K(t-x) dt + H(x) = -iq_x(x), \quad (18)$$

$$K(x) = 3\zeta(x) + Q(x) - x\gamma(x), \quad (19)$$

$$H(x) = A' + \bar{A}' + \bar{B}' + x\Phi'_s(x) + \Psi_s(x),$$

$$\Phi_s(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x); \quad \Psi_s(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x),$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \left\{ g_1(t_1) \left[i\zeta(it_1 - iy) - \overline{i\zeta(it_1 - iy)} \right] + \right. \\
& \left. + \overline{g_1(t_1)} \left[iQ(it_1 - iy) + (it_1 - iy) \overline{\gamma(it_1 - iy)} - \overline{i\zeta(it_1 - iy)} \right] \right\} dt_1 + N(y) = -iq_y(y),
\end{aligned}$$

$$N(y) = iy\overline{\Phi'_0(iy)} + \overline{\Psi_0(iy)} + A'' + \bar{A}'' + \bar{B}'';$$

$$\Phi_0(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x); \quad \Psi_0(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x).$$

Используя разложение [2] функций $\zeta(z)$, $\gamma(z)$, $Q(z)$ в основном параллелограмме периодов, замену переменных, а также квадратурные формулы [3], [4], интегральные уравнения приведем к двум конечным алгебраическим системам относительно приближенных значений p_k^0 , R_v^0 искомой функции в точках по чебышевским узлам

$$\sum_{k=1}^n a_{m,k} p_k^0 - \frac{1}{2} Im H_*(\eta_m) = -iq_x(\eta_m) \quad (m = 1, 2, \dots, n-1), \quad (20)$$

$$\sum_{v=1}^n b_{m,v} R_v^0 + \frac{1}{2} Im N_*(\eta_m) = -iq_y(\eta_m).$$

К полученной системе уравнений (20) добавляются дополнительные уравнения (12), записанные в дискретной форме

$$\sum_{k=1}^n \frac{p_k^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_1^2)(\tau_k+1)+\lambda_1^2}} = 0; \quad \sum_{v=1}^n \frac{R_v^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_2^2)(\tau_v+1)+\lambda_2^2}} = 0. \quad (21)$$

В правые части полученных конечных систем входят неизвестные значения напряжений $q_x(\eta_m)$ и $q_y(\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих зонам предразрушения, направленных

коллинеарно осям абсцисс и ординат соответственно. Неизвестные значения напряжений в связях, возникающие на берегах зон предразрушения, определяются из дополнительных условий (3). Используя полученное решение, уравнения (3) можно представить в виде

$$g(x) = -\frac{2\mu_s i}{1 + \kappa_s} \frac{d}{dx} [C(x, q_x(x)) q_x(x)], \quad (22)$$

$$g_1(y) = \frac{2\mu_s}{1 + \kappa_s} \frac{d}{dy} [C(y, q_y(y)) q_y(y)].$$

Эти уравнения служат для определения усилий в связях. Для построения недостающих уравнений потребуем выполнения условий (22) в узловых точках, содержащихся в зонах предразрушения. При этом используется метод конечных разностей. В результате получим еще две системы из M уравнений, каждая для определения приближенных значений $q_x(\eta_m)$ и $q_y(\eta_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$). Так как в композите напряжения ограничены, то решение сингулярных интегральных уравнений следовало бы искать в классе всюду ограниченных функций. Следовательно, к системам (21)–(22) следует добавить условия ограниченности напряжений у вершин зон предразрушения. Записывая эти условия, находим

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} p_k^0 t g \frac{\theta_k}{2} = 0; \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k p_k^0 c t g \frac{\theta_k}{2} = 0. \quad (23)$$

$$\sum_{v=1}^n (-1)^{v+n} R_v^0 t g \frac{\theta_v}{2} = 0; \quad \sum_{v=1}^n (-1)^v R_v^0 c t g \frac{\theta_v}{2} = 0.$$

Уравнения (23) служат для определения неизвестных размеров зон предразрушения. Так как размеры зон предразрушения неизвестны, то объединенная система уравнений (17), (20) – (22), (23) оказалась нелинейной даже при линейно-упругих связях. Для ее решения использовался метод последовательных приближений.

Численные результаты и их анализ. Для численной реализации изложенного способа были выполнены расчеты. Для числовых расчетов были взяты правильные нормированные треугольная ($\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 2e^{i\pi/3}$) и квадратная ($\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 2i$) сетки отверстий. При решении результирующей системы был применен метод редукции. В системах (17) и (20) – (23) полагалось $n = 20$ и $n = 30$, что отвечает разбиению интервала на 20 и 30 чебышевским узлов. Каждая из бесконечных систем урезалась до пяти уравнений, причем с помощью одной из них из остальных уравнений исключались коэффициенты β_{2k} .

Полученная система в каждом приближении решалась методом Гаусса. Было принято для материала связующего $v_s = 0,32$; $\mu_s = 2,5 \cdot 10^5$ МПа, а для материала волокна $v_b = 0,33$; $\mu_b = 4,6 \cdot 10^5$ МПа.

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в зонах предразрушения использовался также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [5].

На основании численных результатов были построены для квадратной сетки отверстий зависимости критической (предельной) нагрузки $\tau_* = \tau_y^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIc}$ от длины трещины в связующем. Эти графики изображены на рис. 1–4.

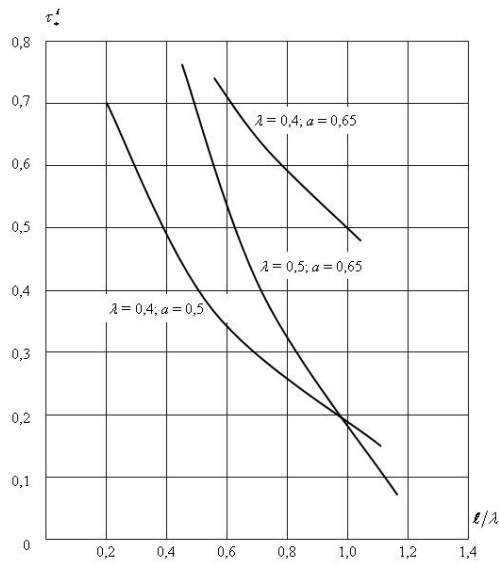


Рис. 1.

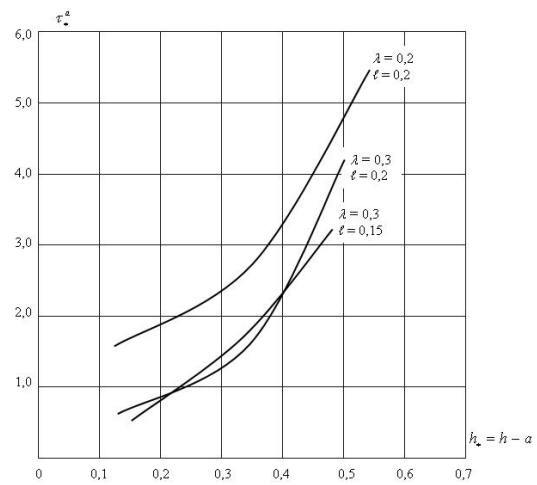


Рис. 2.

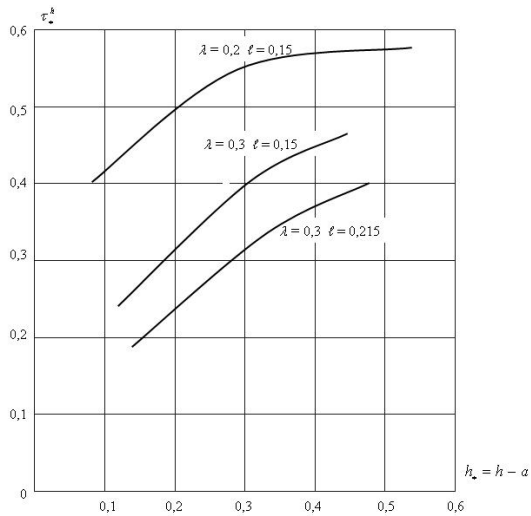


Рис. 3.

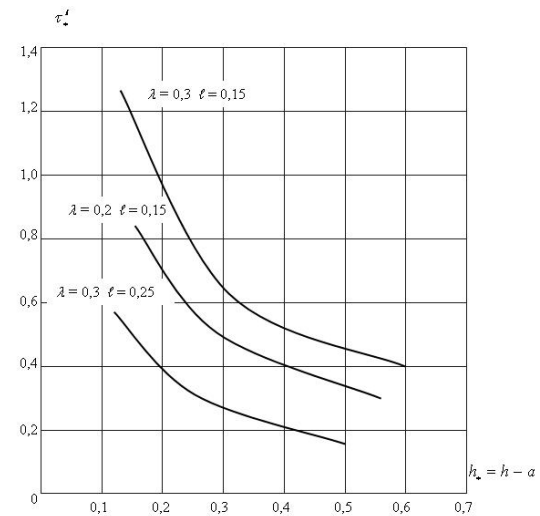


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [2] Григолюк, Э. И. Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.

[3] *Каландия, А. И.* Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 304 с.

[5] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.

[6] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.

S. M. Guliyev

NUCLEATION OF CRACKS IN THE COMPOSITES REINFORCED BY UNIDIRECTIONAL FIBRES AT TRANSVERSE SHEAR

Azerbaijan State Pedagogical University

Abstract. The problem of mechanics of fracture about nucleation of cracks in the linearly-reinforced composites is considered at transverse shear. The general representations describing a class of problems with doubly periodic by distribution of states in composites at transverse shear are under construction. The solution of a problem on balance of the composites reinforced by unidirectional fibres, at transverse shear shift with prefracture zones is comes to the solution of three infinite algebraic systems and two nonlinear singular in to integro-differential equations. The condition for the appearance of cracks is formed, taking account the criterion of a limit traction of the bonds in the material.

Keywords: a composite, reinforced unidirectional by fibres, prefracture zones, interfacial bonds, cohesive forces of a material.

Гулиев Салех Мирзахан оглы

кандидат технических наук, доцент, Азербайджанский государственный педагогический университет, г. Баку

e-mail: salehm@rambler.ru

Guliyev, Saleh Mirzaxan oglu

Candidate of Technical Sciences, Assoc. Professor, Azerbaijan State Pedagogical University, Baku

КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Аннотация. В работе показана возможность существования поверхностных волн в диапазоне скоростей больших, чем скорость поперечных волн, но меньших, чем скорость продольных волн. В краевой задаче для упругого полупространства в данном интервале скоростей существуют поверхностные волны, скорость которых постоянна и равна $\sqrt{2}c_S$, где c_S – скорость поперечных волн. Эти волны, как и поверхностные волны Рэлея, являются бездисперсионными. Их скорость определяется только плотностью среды и ее упругими модулями. Показано, что существование такой скорости может быть связано со скоростью поверхностных волн в условиях стесненной деформации. Возможно, они проявляются как волны разгрузки в условиях стесненной деформации.

Ключевые слова: контактное разрушение, теория упругости, поверхностная волна.

УДК: 539.3

Введение. Контактные динамические задачи теории упругости при наличии трения необходимы для исследования процессов, сопровождающих взаимодействие подвижных поверхностей. Они присутствуют в задачах движения штампов, в задачах проникания тела в прочную среду, в геофизических процессах при относительном проскальзывании плит земной коры. Одним из важнейших параметров для данного класса задач является относительная скорость проскальзывания. В дозвуковом диапазоне движения эти задачи представлены в монографии Г. А. Галина [1]. Современные исследования [2–8] показали необходимость решения таких задач для трансзвукового диапазона скоростей движения – “скорость штампа меньше, чем скорость продольных волн, но больше, чем скорость поперечных волн”.

Это связано с тем, что в данном интервале скоростей проявляется новая критическая скорость движения. Известно, что при дозвуковом движении критической скоростью является скорость поверхностных волн Рэлея. Оказывается, что в “трансзвуковом” диапазоне скоростей также существует критическая скорость. При переходе через эту скорость резко меняется режим взаимодействия среды с телом [5–7]. В работах [2–5], [8] экспериментально и теоретически показана возможность существования сверхзвуковой скорости трещин сдвига. Возможно, это, как и в случае волн Рэлея, является физическим проявлением поверхностных волн.

Постановка задачи. Рассмотрим волны, бегущие вдоль поверхности упругой среды $y \leq 0$, ограниченной жесткой плоскостью $y = 0$. Плоскопараллельное движение упругой среды должно удовлетворять волновым уравнениям для потенциалов продольных $\varphi(x, y, t)$ и поперечных $\psi(x, y, t)$ волн

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_l^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_s^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Поступила 25.01.2011

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-024-00396-а.

$$c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_s = \sqrt{\mu/\rho},$$

где c_l , c_s соответственно скорость продольных и поперечных волн, ρ – плотность среды, λ , μ – упругие модули Ламе. Поле перемещений выражается через потенциалы формулами Ламе

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Подстановка перемещений (2) в выражения для деформаций и в закон Гука, позволяют найти выражения для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, & \sigma_{xy} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{yy} &= \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

На границе будем считать выполненными равенство нулю компоненты перемещений u_y и линейную связь между усилиями на данной поверхности

$$y = 0, \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} + f \sigma_{yy} = 0, \quad (4)$$

где f – неизвестный коэффициент.

Построение решения. Будем искать решение уравнений (1) в виде волн, бегущих вдоль поверхности с неизвестной, но постоянной скоростью c

$$\varphi(x, y, t) = \Phi(y)F(x - ct), \quad \psi(x, y, t) = \Psi(y)G(x - ct). \quad (5)$$

Подстановка выражений (5) в уравнения (1) для потенциалов приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} c^2 \Phi(y)F''(x - ct) &= c_l^2 \Phi(y)F''(x - ct) + c_l^2 \Phi''(y)F(x - ct), \\ c^2 \Psi(y)G''(x - ct) &= c_s^2 \Psi(y)G''(x - ct) + c_s^2 \Psi''(y)G(x - ct). \end{aligned}$$

После разделения переменных получим

$$\left(\frac{c^2}{c_l^2} - 1 \right) \frac{F''(x - ct)}{F(x - ct)} = \frac{\Phi''(y)}{\Phi(y)}, \quad \left(\frac{c^2}{c_s^2} - 1 \right) \frac{G''(x - ct)}{G(x - ct)} = \frac{\Psi''(y)}{\Psi(y)}. \quad (6)$$

Будем искать решения (6) при условии, что скорость волн удовлетворяет неравенству $c_s < c < c_l$. В этом случае можно ввести обозначения

$$\alpha = \sqrt{1 - c^2/c_l^2}, \quad \beta = \sqrt{c^2/c_s^2 - 1}. \quad (7)$$

Поскольку мы ищем волны, которые двигаются со скоростью большей скорости поперечных волн, но меньшей, чем скорость продольных волн, то будем искать решение в форме, обеспечивающей затухание продольных возмущений на бесконечности. В этом случае с учетом обозначений (7) уравнения (6) переписутся в форме

$$\frac{F''(x - ct)}{F(x - ct)} = -\frac{\Phi''(y)}{\alpha^2 \Phi(y)} = -k^2, \quad \frac{G''(x - ct)}{G(x - ct)} = \frac{\Psi''(y)}{\beta^2 \Psi(y)} = -k^2. \quad (8)$$

Решения для потенциалов (5), удовлетворяющие условиям излучения на бесконечности и уравнениям (8), будут иметь вид

$$\varphi = A e^{\alpha k y} e^{ik(x - ct)}, \quad \psi = B e^{ik(-\beta y + x - ct)}. \quad (9)$$

Выражения (3) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{\mu} &= (2 + M_1^2 - 2M_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, & \frac{\sigma_{xy}}{\mu} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - (2 - M_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \frac{\sigma_{yy}}{\mu} &= - (2 - M_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $M_1 = c/c_l, M_2 = c/c_s$.

Отметим, что полученные выражения (10) для напряжений уже сразу позволяют говорить о некоторой особой скорости, для которой $M_2 = \sqrt{2}$. Действительно, это единственное значение скорости, при которой задачи определения потенциалов поперечных и продольных волн при заданных на границе усилиях σ_{xy}, σ_{yy} могут быть решены независимо друг от друга.

Подстановка решений (9) в формулы (2), (10) позволяет найти компоненты вектора перемещений и тензора напряжений

$$\begin{aligned} u_x &= ik(Ae^{\alpha ky} - \beta Be^{-ik\beta y})e^{ik(x-ct)}, & u_y &= k(\alpha Ae^{\alpha ky} - iBe^{-ik\beta y})e^{ik(x-ct)}, \\ \frac{\sigma_{xx}}{\mu} &= [(-M_2^2 - \alpha^2 - 1) Ae^{\alpha ky} + 2\beta Be^{-ik\beta y}] k^2 e^{ik(x-ct)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = [2\alpha i Ae^{\alpha ky} - (\beta^2 - 1) Be^{-ik\beta y}] k^2 e^{ik(x-ct)}, \quad \frac{\sigma_{yy}}{\mu} = [(2 - M_2^2) Ae^{\alpha ky} - 2\beta Be^{-ik\beta y}] k^2 e^{ik(x-ct)}.$$

Подстановка выражений (11) в граничные условия (4) приводит к следующей системе уравнений для коэффициентов A, B :

$$\alpha A - iB = 0,$$

$$[2i\alpha + f(2 - M_2^2)] A - (\beta^2 - 2f\beta - 1) B = 0.$$

Условие существования нетривиального решения – равенство нулю определителя

$$-\alpha(\beta^2 - 2f\beta - 1) + if(2 - M_2^2) = 0. \quad (12)$$

Приравнявая к нулю мнимую часть определителя (12) при условии, что коэффициент f не равен нулю, получим

$$f(2 - M_2^2) = 0 \quad f \neq 0, \quad M_2^2 = 2, \quad c = \sqrt{2}c_s. \quad (13)$$

Из равенства нулю действительной части определителя (12) с учетом равенств (13) следует

$$\alpha(\beta^2 - 2f\beta - 1) = 0 \quad (\beta^2 = c^2/c_s^2 - 1 = 2 - 1 = 1) \quad \Rightarrow \quad f = 1. \quad (14)$$

Если f коэффициент равен нулю, мнимая часть определителя (14) тождественно равна нулю, а равенство нулю действительной части приводит к условию $c = 0$.

Выводы. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Существуют поверхностные волны в исследуемом трансзвуковом диапазоне скоростей.
2. Они, как и волны Рэлея, не имеют дисперсии и реализуются в условиях стесненной деформации, например, как волны разгрузки при выполнении дополнительного требования $f = 1$.
3. Данные волны, как и волны Рэлея, должны проявлять себя при решении динамических контактных задач и задач разрушения в сдвиговых трещинах, поскольку в этих задачах деформация является заведомо стесненной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Галин, Л. А.* Контактные задачи теории упругости / Л. А. Галин. – М. : Гостехиздат, 1953.
- [2] *Rosakis, A. J.* Intersonic shear cracks and fault ruptures / A. J. Rosakis // *Advances in Physics*. – 2002. – № 51. – № 4. – P. 1189–1257.
- [3] *Hao, S.* Modeling and simulation of intersonic crack growth / S. Hao, W. K. Liu, P. A. Klein, A. J. Rosakis // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – № 41, № 7. – P. 1773–1799.
- [4] *Bouchon, M.* How fast is rupture during an earthquake? New insights from the 1999 Turkey earthquakes / M. Bouchon, M. P. Bouin, H. Karabulut, N. Toksoz, M. Dietrich, A. J. Rosakis // *Geophysical Research Letters*. – 2001. – № 28. – P. 2723–2726.
- [5] *Звягин, А. В.* Сверхзвуковое движение тела в упругой среде при наличии трения / А. В. Звягин // *Вестн. МГУ. Сер. 1: Математика, Механика*. – 2007. – № 4. – С. 52–61.
- [6] *Звягин, А. В.* Образование отрывных зон при наличии асимметрии движения тела в упругой среде / А. В. Звягин, Г. А. Ромашов // *Шевченковская весна, материалы научной международной междисциплинарной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых*. – К. : Логос, 2010. – № 8. – С. 104–105.
- [7] *Звягин, А. В.* Актуальные проблемы механики сплошной среды / А. В. Звягин, Г. А. Ромашов // *Труды II международной конференции*. – Ер. : ЕГУАС, 2010. – № 2. – С. 99–102.
- [8] *Rosakis, A. J.* Cracks faster than the shear wave speed / A. J. Rosakis, O. Samudrala, D. Coker // *Science*. – 1999. – 284, № 5418. – P. 1337–1340.

A. V. Zvyagin, G. A. Romashov

CRITICAL VELOCITY IN CONTACT PROBLEMS

Lomonosov Moscow State University

Abstract. The possibility of the existence of surface waves in the range of speeds greater than the speed of shear waves, but smaller than the velocity of longitudinal waves is considered in this paper. The boundary problem for an elastic half-space in this velocity range, there are surface waves, whose velocity is constant and equal to $\sqrt{2}c_S$, where c_S is the velocity of shear wave. These waves, as well as Rayleigh surface waves have no dispersion. Their speed is determined only by the elastic constants and density of the material. It is shown that the existence of such a speed is possibly related to surface waves in case of constrained deformation. It is possible that they appear as waves of relief in the conditions of straitened deformation.

Keywords: contact destruction, theory of elasticity, surface wave.

Звягин Александр Васильевич

доктор физико-математических наук, профессор кафедры газовой и волновой динамики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

Ромашов Григорий Александрович

аспирант кафедры газовой и волновой динамики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

e-mail: romashovg@mail.ru

Zvyagin, Alexander Vasilyevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Gas and Wave Dynamics, Lomonosov Moscow State University, Moscow

Romashov, Grigory Aleksandrovich

Postgraduate student, Department of Gas and Wave Dynamics, Lomonosov Moscow State University, Moscow

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ КРУЧЕНИИ

Московский государственный открытый университет

Аннотация. Рассматриваются слоистые круговые цилиндры, находящиеся под действием крутящих усилий. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами прямоугольной анизотропии. Разработан алгоритм определения предельного напряженного состояния для произвольного числа слоев.

Ключевые слова: напряжение, кручение, анизотропия, цилиндр, слой.

УДК: 539.374

Рассматривается слоистый круговой цилиндр, находящийся под действием кручения (рис. 1)

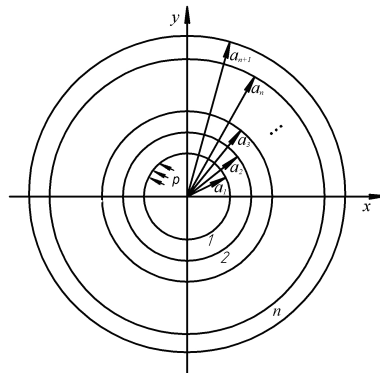


Рис. 1.

Обозначим через α_1, α_2 внутренний и внешний радиусы 1-го цилиндра, через α_2, α_3 – внутренний и внешний радиусы 2-го цилиндра, через α_n, α_{n+1} – внутренний и внешний радиусы n -го цилиндра.

Условие предельного состояния для n -го слоя примем в виде

$$A_n \tau_{xzn}^2 + B_n \tau_{yzn}^2 = k_n^2, \quad A_n, B_n, k_n - \text{const}, \quad (1)$$

где τ_{xzn}, τ_{yzn} – компоненты касательных напряжений в n -м слое в декартовой системе координат x, y ; A_n, B_n – константы анизотропии.

К выражениям компонент напряжений в полярной системе координат r, θ перейдем по формулам [1]

Поступила 01.04.2011

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \tau_{rz} \cos \theta - \tau_{\theta z} \sin \theta, \\ \tau_{yz} &= \tau_{rz} \sin \theta + \tau_{rz} \cos \theta.\end{aligned}\quad (2)$$

В дальнейшем перейдем к безразмерным переменным, отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к постоянной k_0 , все величины, имеющие размерность длины, отнесем к единице длины, безразмерное значение радиуса обозначим ρ .

Из (1), (2) получим

$$A_n [\tau_{\rho\theta n} \cos \theta - \tau_{\theta zn} \sin \theta]^2 + B_n [\tau_{\rho\theta n} \sin \theta - \tau_{\theta zn} \cos \theta]^2 = k_n^2 \quad (3)$$

Из (3) следует

$$\begin{aligned}\tau_{\rho zn}^2 [A_n \cos^2 \theta + B_n \sin^2 \theta] + \tau_{\theta zn}^2 [A_n \sin^2 \theta + B_n \cos^2 \theta] - \\ - (A_n - B_n) \tau_{\rho\theta n} \tau_{\theta zn} \sin 2\theta = k_n^2.\end{aligned}\quad (4)$$

Соотношение (4) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\tau_{\rho zn}^2 \left[\frac{A_n + B_n}{2} + \frac{A_n - B_n}{2} \cos 2\theta \right] + \tau_{\theta zn}^2 \left[\frac{A_n + B_n}{2} - \frac{A_n - B_n}{2} \cos 2\theta \right] - \\ - (A_n - B_n) \tau_{\rho\theta n} \tau_{\theta zn} \sin 2\theta = k_n^2.\end{aligned}\quad (5)$$

Решение будем искать в виде разложений по степеням некоторого малого безразмерного параметра δ :

$$\sigma_{ijn} = \sigma_{ijn}^0 + \delta \sigma'_{ijn}, \quad A_n = 1 + \delta a_n, \quad B_n = 1 + \delta b_n. \quad (6)$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \quad (7)$$

В исходном нулевом приближенном положении

$$\tau_{\rho\theta n}^0 = 0, \quad \tau_{\theta zn}^0 = k_n. \quad (8)$$

Из (6), (7) следует

$$\frac{\partial \tau'_{\rho zn}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\theta zn}}{\partial \theta} + \frac{\tau'_{\rho zn}}{\rho} = 0. \quad (9)$$

Из (5), (6), (8) будем иметь

$$\tau'_{\theta zn} = -\frac{k_n}{4} ((a_n + b_n) - (a_n - b_n) \cos 2\theta). \quad (10)$$

Из (9), (10) следует уравнение для определения $\tau'_{\rho zn}$:

$$\frac{\partial \tau'_{\rho zn}}{\partial \rho} + \frac{\tau'_{\rho zn}}{\rho} = \frac{k_n}{\rho} \left(\frac{a_n - b_n}{2} \right) \sin 2\theta. \quad (11)$$

Из (11) получим

$$\tau'_{\rho zn} = \left[\frac{C_n}{\rho} + k_n \left(\frac{a_n - b_n}{2} \right) \right] \sin 2\theta, \quad C_n - \text{const}. \quad (12)$$

Предположим, что внутренняя полость 1-го цилиндра свободна от напряжений

$$\tau_{\rho z 1} = -0, \quad \text{при } \rho = \alpha_1. \quad (13)$$

Из (12), (13) получим

$$\begin{aligned} C_1 &= -k_1 \alpha_1 \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right), \\ \tau'_{\rho z 1} &= k_1 \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha_1}{\rho} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

На внешнем контуре 1-го цилиндра согласно (14) компонента напряжения имеет место

$$\tau'_{\rho z 1} = k_1 \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \sin 2\theta. \quad (15)$$

Условие сопряжения напряжений имеет вид

$$\tau'_{\rho z 2} = \tau'_{\rho z 1} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_2. \quad (16)$$

Из (12), (16) будем иметь

$$\frac{C_2}{\alpha_2} + k_2 \left(\frac{a_2 - b_2}{2} \right) = \frac{C_1}{\alpha_2} + k_1 \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right), \quad (17)$$

откуда

$$C_2 = C_1 + k_1 \alpha_2 \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right) - k_2 \alpha_2 (a_2 - b_2). \quad (18)$$

Предположим, что C_{n-1} известно, величина C_n определяется из условия сопряжения напряжений

$$\tau'_{\rho z n} = \tau'_{\rho z n-1} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_n. \quad (19)$$

Из (12), (19) будем иметь

$$\frac{C_n}{\alpha_n} + k_n \left(\frac{a_n - b_n}{2} \right) = \frac{C_{n-1}}{\alpha_n} + k_{n-1} \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \right), \quad (20)$$

откуда

$$C_n = C_{n-1} + k_{n-1} \alpha_n \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \right) - k_n \alpha_n \left(\frac{a_n - b_n}{2} \right). \quad (21)$$

Соотношения (14), (18), (20) позволяют определить величины C_n , тем самым компоненты $\tau'_{\rho z n}$ согласно (12) определены. Компоненты $\tau'_{\theta z n}$ определены согласно (10).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубчанинов, В. Г.* Сопротивление материалов / В. Г. Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2005. – 350 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
- [3] *Ивлев, Д. А.* О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д. А. Ивлев // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 1(7). – С. 57 – 63.

D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov

**LIMITING STATE OF LAMINATED ANISOTROPIC CIRCULAR CYLINDERS
IN TORSION**

Moscow State Open University

Abstract. We consider layered circular cylinders under the action of twisting effort. It is assumed that each layer has its own properties of rectangular anisotropy. The algorithm for determining the limiting stress state for an arbitrary number of layers is defined.

Keywords: tension, torsion, anisotropy, cylinder, coat.

Ивлев Дмитрий Александрович

кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики Московский государственный открытый университет, г. Москва

e-mail: IvlevDA@mail.ru

Ivlev, Driitriy Alexandrovich

Candidate of Phys. & Math., Department of Mathematics, Moscow State Open University, Moscow

Д. Д. Ивлев

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работах [1–3] введены и рассмотрены соотношения идеальнопластической трансляционной анизотропии. Ниже обсуждаются некоторые вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии.

Ключевые слова: напряжение, условие текучести, идеальная пластичность, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Трансляционная анизотропия имеет место при смещении поверхности текучести в пространстве напряжений. Если условие текучести определено в виде

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты напряжения, то условие текучести в случае идеальнопластической трансляционной анизотропии имеет вид

$$f(\sigma_{ij} - k_{ij}) = 0, \quad k_{ij} - const. \quad (2)$$

Условие текучести при идеальнопластической трансляционной анизотропии в плоском случае запишем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_0^2, \quad k_0, k_i - const, \quad (3)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат xy .

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, все величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к k_0 .

Условию пластичности (3) можно удовлетворить, полагая

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + \frac{k_1 - k_2}{2} + k_0 \cos 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{k_1 - k_2}{2} - k_0 \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = k_0 \sin 2\theta + k_3, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

и соотношений (3) следует

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k_0 \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2k_0 \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2k_0 \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2k_0 \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Система двух квазилинейных уравнений (6) принадлежит к гиперболическому типу, ортогональные характеристики имеют вид [4]

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right), \quad (7)$$

вдоль характеристики (7) имеют место соотношения Генки

$$\sigma \pm k_0 \theta = \operatorname{const}. \quad (8)$$

Согласно (4) угол θ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2(\tau_{xy} - k_3)}{(\sigma_x - \sigma_y) - (k_1 - k_2)}. \quad (9)$$

Использование соотношений (1.4 – 1.9) сопряжено с характерными особенностями. Например, если граничные условия заданы в виде

$$\tau_{xy} = \sigma_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (10)$$

Из (4), (10) имеет место

$$\sin 2\theta = -\frac{k_3}{k_0}, \quad \theta = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{k_3}{k_0}, \quad \sigma = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{k_3}{k_0}\right)^2} + \frac{k_1 - k_2}{2}. \quad (11)$$

В [1 – 3] предложен подход к определению исходных соотношений в случае идеальнопластической трансляционной анизотропии (3).

Положим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma + k(\psi) \cos 2\psi, \\ \sigma_y &= \sigma - k(\psi) \cos 2\psi,\end{aligned}\quad (12)$$

$$\tau_{xy} = k(\psi) \sin 2\psi.$$

Из (3), (12) следует

$$\left(k(\psi) \cos 2\psi - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (k(\psi) \sin 2\psi - k_3^2) = 1. \quad (13)$$

Из (13) найдем

$$k^2(\psi) - 2k(\psi) \left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right) \cos 2\psi + k_3 \sin 2\psi \right] - \left[1 - \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 - k_3^2 \right] = 0. \quad (14)$$

Из (14) получим

$$k(\psi) = \rho \cos 2(\psi - \mu) \pm \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\psi - \mu)}, \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{2k_3}{k_1 - k_2}, \quad \rho = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2}. \quad (16)$$

Согласно (12) условие текучести (3) может быть записано в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2(\psi), \quad (17)$$

где $k(\psi)$ определяется согласно (15), (16).

Величина $k(\psi)$ определяет переменный предел текучести в зависимости от угла ψ , $k(\psi) > 0$, в (15) следует ограничиться верхним знаком.

Соотношения теории анизотропного тела при условии пластичности (17) рассмотрены в [4], имеют место ортогональные характеристики

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{-k' \cos 2\psi - 2k \sin 2\psi \pm \sqrt{k'^2 + 4k^2}}{k' \sin 2\psi + 2k \cos 2\psi}, \quad (18)$$

где $k = k(\psi)$, $k'(\psi) = \frac{dk}{d\psi}$.

Вдоль характеристик (18) имеют место соотношения, обобщающие соотношения Генки

$$\sigma \pm F(\psi) = \text{const}, \quad F(\psi) = \int \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\psi. \quad (19)$$

Из (12) следует

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (20)$$

Согласно (9), (12), (20) связь между углами θ , ψ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{k(\psi) \sin 2\psi - k_3}{[k(\psi) \cos 2\psi - \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)]}, \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\sin 2\theta + k_3}{[\cos 2\theta + \frac{k_1 - k_2}{2}]}. \quad (22)$$

При $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ имеет место $\theta = \psi$.

Согласно (4), (7), (8), а также (12), (18), (19) для одной и той же сетки характеристик можно получить различные выражения в зависимости от выбора углов θ и ψ .

Рассмотрим определение поля скоростей перемещений.

Из (3) согласно ассоциированному закону течения следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \\ \varepsilon_y &= -\lambda \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\varepsilon_{xy} = \lambda (\tau_{xy} - k_3), \quad \lambda \geq 0.$$

Из (4), (23) получим

$$\varepsilon_x = \lambda \cos 2\theta, \quad \varepsilon_y = -\lambda \cos 2\theta, \quad \varepsilon_{xy} = \lambda \sin 2\theta, \quad (24)$$

где $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$, u , v - компоненты скорости перемещения вдоль осей x , y .

Из (24), (2.3) найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin 2\theta - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos 2\theta = 0. \quad (25)$$

Система двух уравнений (25) относительно u , v принадлежит к гиперболическому типу, уравнения ортогональных характеристик определяются согласно (7), вдоль характеристик имеют место соотношения Гейрингер [4].

Если в качестве условия пластичности принять (17), соотношения ассоциированного закона течения примут вид [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda \left(\sigma_x - \sigma_y + \frac{k'(\psi)}{k(\psi)} \tau_{xy} \right), \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0, \\ \varepsilon_{xy} &= 2\lambda \left(2\tau_{xy} - \frac{k'(\psi)}{2k(\psi)} (\sigma_x - \sigma_y) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Характеристики системы уравнений (26) совпадают с (18), вдоль характеристик имеют место соотношения Гейрингер [4].

Рассмотрим пространственное состояние. Напряженное состояние при условии полной пластичности

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + 1, \quad (27)$$

где σ_1 , σ_2 , σ_3 – главные напряжения, может быть представлено в виде [1]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3} + n_1^2, \quad \tau_{xy} = n_1 n_2, \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3} + n_2^2, \quad \tau_{yz} = n_2 n_3, \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3} + n_3^2, \quad \tau_{xz} = n_1 n_3, \end{aligned} \quad (28)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (29)$$

где n_i – направляющие косинусы, определяющие направление третьего главного напряжения в декартовой системе координат xyz .

От компонент напряжений σ_{ij} в (28) перейдем к компонентам $\sigma_{ij} - k_{ij}$, $k_{ij} - const$. В этом случае соотношения (28) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + k_x - k^0 - \frac{1}{3} + n_1^2, \quad \tau_{xy} = n_1 n_2 + k_{xy}, \\ \sigma_y &= \sigma + k_y - k^0 - \frac{1}{3} + n_2^2, \quad \tau_{yz} = n_2 n_3 + k_{yz}, \\ \sigma_z &= \sigma + k_z - k^0 - \frac{1}{3} + n_3^2, \quad \tau_{xz} = n_1 n_3 + k_{xz}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad k^0 = \frac{1}{3} (k_x + k_y + k_z), \quad k_{ij} - const. \quad (31)$$

Из (30), (31) и уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (32)$$

получим статически определимую систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных σ , n_1 , n_2 , n_3

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2n_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} + n_1 \frac{\partial n_2}{\partial y} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial y} + n_1 \frac{\partial n_3}{\partial z} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial x} + n_1 \frac{\partial n_2}{\partial x} + 2n_2 \frac{\partial n_2}{\partial y} + n_2 \frac{\partial n_3}{\partial z} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial z} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial x} + n_1 \frac{\partial n_3}{\partial x} + n_2 \frac{\partial n_3}{\partial y} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial y} + 2n_3 \frac{\partial n_3}{\partial z} &= 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Система уравнений (33), (34) рассмотрена в [1], принадлежит к гиперболическому типу. Из (30) следует

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{(\tau_{xy} - k_{xy})(\tau_{xz} - k_{xz})}{\tau_{yz} - k_{yz}}, \\ n_2^2 &= \frac{(\tau_{xy} - k_{xy})(\tau_{yz} - k_{yz})}{\tau_{xz} - k_{xz}}, \\ n_3^2 &= \frac{(\tau_{xz} - k_{xz})(\tau_{yz} - k_{yz})}{\tau_{xy} - k_{xy}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (30), (35) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + k_x - k^0 - \frac{1}{3} + \frac{(\tau_{xy} - k_{xy})(\tau_{xz} - k_{xz})}{\tau_{yz} - k_{yz}}, \\ \sigma_y &= \sigma + k_y - k^0 - \frac{1}{3} + \frac{(\tau_{xy} - k_{xy})(\tau_{yz} - k_{yz})}{\tau_{xz} - k_{xz}}, \\ \sigma_z &= \sigma + k_z - k^0 - \frac{1}{3} + \frac{(\tau_{xz} - k_{xz})(\tau_{yz} - k_{yz})}{\tau_{xy} - k_{xy}}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{(\tau_{xy} - k_{xy})(\tau_{xz} - k_{xz})}{\tau_{yz} - k_{yz}} + \frac{(\tau_{xy} - k_{xy})(\tau_{yz} - k_{yz})}{\tau_{xz} - k_{xz}} + \frac{(\tau_{xz} - k_{xz})(\tau_{yz} - k_{yz})}{\tau_{xy} - k_{xy}} = 1. \quad (37)$$

Предположим

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0. \quad (38)$$

Из (30), (38) получим

$$n_1 n_2 + k_{xy} = 0, \quad n_2 n_3 + k_{yz} = 0, \quad n_1 n_3 + k_{xz} = 0. \quad (39)$$

Из (39) найдем

$$n_1^2 = -\frac{k_{xy}k_{xz}}{k_{yz}}, \quad n_2^2 = -\frac{k_{xy}k_{yz}}{k_{xz}}, \quad n_3^2 = -\frac{k_{xz}k_{yz}}{k_{xy}}. \quad (40)$$

Отметим, что согласно (34), (40) имеет место

$$\frac{k_{xy}k_{xz}}{k_{yz}} + \frac{k_{xy}k_{yz}}{k_{xz}} + \frac{k_{xz}k_{yz}}{k_{xy}} + 1 = 0. \quad (41)$$

Соотношение (41) накладывает ограничение на величины k_{xy} , k_{yz} , k_{xz} , хотя, в принципе, в общем случае трансляционной анизотропии ограничение на k_{ij} не предусматривается.

Из (30), (40) получим

$$\sigma_x = \sigma + k_x - k^0 - \frac{1}{3} - \frac{k_{xy}k_{xz}}{k_{yz}},$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sigma + k_y - k^0 - \frac{1}{3} - \frac{k_{xy}k_{yz}}{k_{xz}}, \\ \sigma_z &= \sigma + k_z - k^0 - \frac{1}{3} - \frac{k_{xz}k_{yz}}{k_{xy}}.\end{aligned}\tag{42}$$

При условиях (38) напряжения (3.16) являются главными: $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$, однако условия полной пластичности (27) в случае (3.16) места не имеют. По-видимому, в случае (30) имеет место случай статически определимой системы соотношений, приводящей к уравнениям гиперболического типа, заслуживающий дальнейшего изучения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. - № 2(8). Ч.3. – С. 576 – 579.

[2] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. - № 2(8). Ч.3. – С. 580 – 582.

[3] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. - № 2(8). Ч.3. – С. 583 – 584.

[4] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

D. D. Ivlev

ISSUES OF THE THEORY OF PERFECTLY PLASTIC TRANSLATIONAL ANISOTROPY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The relations of perfectly plastic translational anisotropy are introduced and considered in papers [1–3]. Below we discuss some of the questions of the theory of perfectly plastic translational anisotropy.

Keywords: stress, yield condition, perfect plasticity, translational anisotropy.

Ивлев Дюис Данилович

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ivlev21@mail.ru

Ivlev, Dyuis Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Мионов

К ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары

Аннотация. В работах [1–3] предложены соотношения теории идеальной пластической анизотропии для случаев кручения, плоской и пространственной задач. В работах [4–8] дано развитие теории и решения ряда задач. В настоящей работе обсуждается возможность обобщения теории, показано, как из общих соотношений теории идеальной трансляционной пластической анизотропии могут быть получены соотношения пластической анизотропии Мизеса-Хилла [9].

Ключевые слова: идеальная пластичность, условие пластичности, напряжения, анизотропия.

УДК: 539.374

Условие пластичности запишем в виде

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты напряжения.

Условие пластичности (1) определяет в пространстве напряжений σ_{ij} некоторую поверхность текучести.

Рассмотрим условие пластичности

$$f(\sigma_{ij} - k_{ij}) = 0, \quad k_{ij} - \text{const}. \quad (2)$$

Условие пластичности (2) определяет в пространстве напряжений смещенную поверхность текучести (1) с центром, с координатами k_{ij} .

Простейший исходный случай трансляционной идеальной пластической анизотропии имеет место при $k_{ij} - \text{const}$, но можно представить, что величины k_{ij} зависят от параметров напряженного состояния, параметров нагружения, в этом случае центр поверхности текучести в пространстве напряжений будет смещаться в зависимости от вида напряженного состояния.

Рассмотрим условие пластичности

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - K_1\right)^2 + (\tau_{xy} - K_2)^2 = k_0^2, \quad k_0 - \text{const}. \quad (3)$$

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и будем считать величины, имеющие размерность напряжений, отнесенными к величине k_0 .

В (3) положим

$$\begin{aligned} K_1 &= f_1 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \tau_{xy} \right) + k_1, \quad k_1 - \text{const}, \\ K_2 &= f_2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \tau_{xy} \right) + k_2, \quad k_2 - \text{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим

$$f_i \left(\lambda \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right), \lambda \tau_{xy} \right) = \lambda f_i \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \tau_{xy} \right). \quad (5)$$

Воспользуемся заменой

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + k(\theta) \cos 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma - k(\theta) \cos 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k(\theta) \sin 2\theta, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (6)$$

Из (3–6) следует

$$\begin{aligned} &[k(\theta) (\cos 2\theta - f_1(\cos 2\theta, \sin 2\theta)) - k_1]^2 + \\ &+ [k(\theta) (\sin 2\theta - f_2(\cos 2\theta, \sin 2\theta)) - k_2]^2 = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) получим

$$k(\theta)^2 \cdot M - 2k(\theta)N - P = 0. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} M &= 1 + f_1^2 + f_2^2 - 2(f_1 \cos 2\theta + f_2 \sin 2\theta), \\ N &= k_1 (\cos 2\theta - f_1) + k_2 (\sin 2\theta - f_2), \\ P &= 1 - k_1^2 - k_2^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) следует

$$k(\theta) = \frac{N \pm \sqrt{N^2 + MP}}{M}. \quad (10)$$

Величина $k(\theta) > 0$ определяет предел текучести при одноосном растяжении по направлению θ , поэтому в (10) следует взять верхний знак.

Далее, следуя [10], определим ортогональные характеристики

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = \frac{-k' \cos 2\theta - 2k \sin 2\theta \pm \sqrt{k'^2 + 4k^2}}{k' \sin 2\theta + 2k \cos 2\theta} \quad (11)$$

и соотношения вдоль характеристик

$$\sigma \pm F(\theta) = \text{const}, \quad F = \int \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\theta, \quad k' = \frac{dk}{d\theta}. \quad (12)$$

Рассмотрим два случая:

$f_1 = f_2 = 0$, $k_1 - \text{const}$, $k_2 - \text{const}$. Этот случай рассмотрен в [2].

$$k_1 = k_2 = 0,$$

$$f_1 = G \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right), \quad f_2 = H \tau_{xy}, \quad G, H - \text{const}. \quad (13)$$

Из (3), (4), (13) следует

$$\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (1 - G) \right]^2 + [\tau_{xy} (1 - H)]^2 = 1. \quad (14)$$

Обозначим

$$A = (1 - G)^2, \quad B = (1 - H)^2, \quad A, B - \text{const.} \quad (15)$$

Из (14), (15) получим условие идеальнопластического анизотропного тела

$$A \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B \tau_{xy}^2 = 1. \quad (16)$$

Таким образом, соотношение (3) содержит в себе идеальнопластическую анизотропию по Мизесу-Хиллу (16) и исходный случай идеальной трансляционной пластической анизотропии [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 576–579.

[2] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 580–582.

[3] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 583–584.

[4] *Рыбакова, Т. И.* О сдавливании анизотропного идеальнопластического слоя / Т. И. Рыбакова // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 585–587.

[5] *Митрофанова, Т. В.* Об условиях трансляционной анизотропии идеальнопластических тел при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 596–600.

[6] *Митрофанова, Т. В.* О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 601–609.

[7] *Фоминых, С. О.* Двуосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 610–622.

[8] *Фоминых, С. О.* Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной трубы / С. О. Фоминых // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 623–627.

[9] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1965. – 407 с.

[10] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov

THE THEORY OF IDEAL TRANSMITTING PLASTIC ANISOTROPY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch

Abstract. Parities of the theory the ideal plastic anisotropy for cases of torsion, flat and spatial problems are offered in papers [1–3]. The development of the theory and the solution of some problems is given in works [4–8]. The possibility of generalization of the theory is discussed in the present work. It is shown how from the general parities of the theory of ideal transmitting plastic anisotropy parities of plastic anisotropy of Mises-Hill [9] can be received.

Keywords: ideal plasticity, a condition of plasticity, pressure, anisotropy.

Ивлев Дюис Данилович

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ivlev21@mail.ru

Максимова Людмила Анатольевна

доктор физико-математических наук, Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары

e-mail: maximova_ng@mail.ru

Миронов Борис Гурьевич

доктор физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

Ivlev, Dyuis Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Maksimova, Ludmila Anatolievna

Dr. Sci. Phys. & Math., Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Branch, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ВЫПУЧИВАНИЯ
 ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, УСИЛЕННОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ
 СИСТЕМОЙ РЕБЕР, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ СО СРЕДОЙ НА
 КРИТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ**

Азербайджанский архитектурно-строительный университет

Аннотация. В данной статье исследуется влияние предварительного выпучивания оболочки, усиленной регулярной перекрестной системой ребер, заполненной средой на параметры критической нагрузки общей потери устойчивости. В основу исследований положена постановка задачи, использующая смешанный энергетический метод и нелинейное уравнение совместной деформации.

Ключевые слова: ребристая оболочка, среда, критическая нагрузка, потеря устойчивости, выпучивание, энергетический метод, совместная деформация.

УДК: 539.3

Введение. Цилиндрические оболочки, усиленные регулярной перекрестной системой ребер, являются важным конструктивным элементом ракет, подводных лодок, автомобилей и др. Исследование поведения таких конструкций с учетом внешних факторов имеет особое значение в области контактных задач теории ребристых оболочек. Отметим, что устойчивость без учета предварительного выпучивания ребристых цилиндрических оболочек при продольном сжатии, заполненных средой, были рассмотрены в работах [1–3].

1. Постановка задачи. Полная энергия системы записывается в виде [4]:

$$\Pi = \Xi + A, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi = & \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)R^2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\theta + \\ & + \frac{h}{2ER^2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\theta + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\{ E_c F_c L_1 \varepsilon_c^2 \Big|_{\theta=\theta_i} + \frac{1}{R^3} \int_0^{\xi_1} \left[E_c I_{yc} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + G_c I_{kp.c} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} \right)^2 \right] \Big|_{\theta=\theta_i} d\xi \right\} + \\ & + \sigma_x h \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right\} d\xi d\theta - \frac{N_c}{2R} \sum_{i=1}^k \int_0^{\xi_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \Big|_{\theta=\theta_i} d\xi + \\ & + \frac{1}{2R^3} \sum_{j=1}^{k_1} \int_0^{2\pi} \left[E_s I_{xs} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 + G_s I_{kp.s} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} \right] \Big|_{\xi=\xi_j} d\theta \end{aligned}$$

Здесь $\xi = \frac{x}{R}$, $\theta = \frac{y}{R}$; E_c , G_c , E_s , G_s – модуль упругости и сдвига материала продольных ребер; k , k_1 – количество продольных и поперечных ребер соответственно; σ_x – осевые сжимающие напряжения; u , v , w – компоненты вектора перемещений оболочки; h и R – толщина и радиус оболочки соответственно; E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; $\xi_1 = \frac{L_1}{R}$, L_1 – длина оболочки, F_c , I_{yc} , $I_{kp.c}$ – соответственно площади и моменты инерции поперечного сечения продольного стержня относительно оси Ox и Oz , а также момент инерции при кручении, w_0 – начальный прогиб, ε_c – среднее укорочение продольного стержня, N_c – среднее усилие в продольном стержне, т. е.

$$\varepsilon_c = \frac{R}{L_1} \int_0^{L_1} \varepsilon_x d\xi, \quad N_c = \frac{F_c R}{L_1} \int_0^{L_1} \sigma_{xc} d\xi.$$

Влияние среды на оболочку определяется как влияние внешних поверхностных нагрузок, приложенных к оболочке, и вычисляется как работа, совершенная этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное состояние и представляется в виде

$$A = -R^2 \int_0^{\xi} \int_0^{2\pi} q_z w d\xi d\theta. \quad (2)$$

Для определения q_z применяется модель Пастернака [4]. Суть этой модели заключается в том, что влияние среды на оболочку на поверхности контакта определяется зависимостью

$$q_z = (\tilde{q} + \tilde{q}_0 \nabla^2) w = K w, \quad (3)$$

где ∇^2 – двумерный оператор Лапласа на поверхности контакта.

Уравнение неразрывности деформаций при $w_0 = 0$ записывается в виде [5]

$$\Delta \Delta \varphi = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - R \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right\}. \quad (4)$$

2. Метод решения. Принимается, что торцы оболочки шарнирно оперты. Предполагается, что до выпучивания оболочки заданные осевые сжимающие напряжения равномерно распределены по площади поперечного сечения торца. Совместность продольных перемещений оболочки и ребер обеспечивается только в точках на краях оболочки. Прогиб оболочки задаем в виде суммы

$$w = w_1 + w_2 = f_1 \sin d_{m_1} \xi \sin n_1 \theta + f_2 \sin^2 d_{m_2} \xi \sin^2 n_2 \theta, \quad (5)$$

где f_1 , f_2 – варьируемые параметры, $d_{m_s} = \frac{\pi m_s}{\xi_1}$ ($s = 1, 2$), m_1 и m_2 , $2n_1$ и $2n_2$ – количество полуволн в продольном и окружном направлениях. Первому слагаемому в (5) соответствуют формы предварительного выпучивания, а второму – формы прогиба общей потери устойчивости. После выпучивания оболочки в форме $w_1 = f_1 \sin d_{m_1} \xi \sin n_1 \theta$ поведение оболочки с ростом нагрузки рассматривается как поведение нелинейной системы, причем с ростом амплитуды выражение для прогиба не изменяется. Условия потери устойчивости имеют вид

$$\frac{\partial \Pi(w_1)}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi(w)}{\partial f_2} = 0. \quad (6)$$

Используя уравнение совместности деформаций (4), находим функцию напряжений

$$\begin{aligned}
 \varphi = E \left\{ \frac{f_1^2}{32} \left(\frac{n_1^2}{d_{m_1}^2} \cos 2d_{m_1} \xi + \frac{d_{m_1}^2}{n_1^2} \cos 2n_1 \theta \right) + \right. \\
 + f_1 \frac{d_{m_1}^2 R}{(d_{m_1}^2 + n_1^2)^2} \sin d_{m_1} \xi \sin n_1 \theta - f_2 \left(\frac{R}{16} \cos 2d_{m_2} \xi - \frac{d_{m_2}^2 R}{16(d_{m_2}^2 + n_2^2)^2} \cos 2d_{m_2} \xi \cos 2n_2 \theta \right) + \\
 + f_2^2 \left(-\frac{d_{m_2}^2}{512n_2^2} \cos 4n_2 \theta - \frac{n_2^2}{512d_{m_2}^2} \cos 4d_{m_2} \xi + \frac{n_2^2}{32d_{m_2}^2} \cos 2d_{m_2} \xi + \frac{d_{m_2}^2}{32n_2^2} \cos 2n_2 \theta + \right. \\
 + \frac{d_{m_2}^2 n_2^2}{32(d_{m_2}^2 + 2n_2^2)^2} \cos 2d_{m_2} \xi \cos 4n_2 \theta - \frac{d_{m_2}^2 n_2^2}{32(d_{m_2}^2 + n_2^2)^2} \cos 2d_{m_2} \xi \cos 2n_2 \theta + \\
 \left. + \frac{d_{m_2}^2 n_2^2}{32(2d_{m_2}^2 + n_2^2)^2} \cos 4d_{m_2} \xi \cos 2n_2 \theta \right) + f_1 f_2 \left[\frac{(d_{m_1} n_2 + d_{m_2} n_1)^2}{4(b_4^2 + b_2^2)^2} \sin b_4 \xi \sin b_2 \theta + \right. \\
 + \frac{(d_{m_1} n_2 + d_{m_2} n_1)^2}{4(b_1^2 + b_3^2)^2} \sin b_3 \xi \sin b_1 \theta - \frac{(d_{m_1} n_2 - d_{m_2} n_1)^2}{(b_4^2 + b_1^2)^2} \sin b_4 \xi \sin b_1 \theta - \\
 - \frac{(d_{m_1} n_2 - d_{m_2} n_1)^2}{4(b_2^2 + b_3^2)^2} \sin b_3 \xi \sin b_2 \theta - \frac{1}{2} d_{m_1}^2 n_2^2 \left(\frac{1}{(b_2^2 + d_{m_1}^2)^2} \sin b_2 \theta \sin d_{m_1} \xi - \right. \\
 - \frac{1}{(b_1^2 + d_{m_1}^2)^2} \sin b_1 \theta \sin d_{m_1} \xi \left. \right) - \frac{1}{2} d_{m_2}^2 n_1^2 \left(\frac{1}{(b_4^2 + n_1^2)^2} \sin n_1 \theta \sin b_4 \xi - \right. \\
 \left. - \frac{1}{(b_3^2 + n_1^2)^2} \sin n_1 \theta \sin b_3 \xi \right) - \frac{R^2 \sigma_x \theta^2}{2E} \left. \right\}, \tag{7}
 \end{aligned}$$

где $b_1 = 2n_2 - n_1$, $b_2 = 2n_2 + n_1$, $b_3 = 2d_{m_2} - d_{m_1}$, $b_4 = 2d_{m_2} + d_{m_1}$.

После подстановки в (1) – (3) выражения для w и φ получаем

$$\begin{aligned}
 \Pi = \frac{\pi E h^5 L_1}{48(1-\nu^2)R^3} \left\{ \frac{3}{8} (1-\nu^2) \left[\left(1 + 2\bar{\gamma}_c^{(1)} \right) d_{m_1}^4 + n_1^4 \right] \tilde{f}_1^4 + \left[(d_{m_1}^2 + n_1^2)^2 + \right. \right. \\
 \left. \frac{1-\nu^2}{a^2} \frac{d_{m_1}^4}{(d_{m_1}^2 + n_1^2)^2} + \frac{2}{a^2} \left(\mu_c^{(1)} + \mu_s^{(1)} \right) d_{m_1}^2 n_1^2 - \eta \frac{1-\nu^2}{a^2} d_{m_1}^2 h^* \right] \tilde{f}_1^2 + \\
 + \left[\frac{3}{16} (1-\nu^2) (d_{m_1} n_2 - d_{m_2} n_1)^4 \left(\frac{1}{(b_1^2 + b_3^2)^2} + \frac{1}{(b_2^2 + b_4^2)^2} \right) + \right. \\
 + \frac{3}{16} (1-\nu^2) (d_{m_1} n_2 + d_{m_2} n_1)^4 \left(\frac{1}{(b_2^2 + b_3^2)^2} + \frac{1}{(b_1^2 + b_4^2)^2} \right) + \\
 \left. + \frac{3}{4} (1-\nu^2) d_{m_1}^2 \left[n_2^2 \left(\frac{1}{(d_{m_1}^2 + b_1^2)^2} + \frac{1}{(d_{m_1}^2 + b_2^2)^2} \right) + n_1^4 \left(\frac{1}{(b_3^2 + n_1^2)^2} + \frac{1}{(b_4^2 + n_1^2)^2} \right) \right] \tilde{f}_1^2 \tilde{f}_2^2 + \right. \\
 + \left[3d_{m_2}^2 + 2d_{m_2}^2 n_2^2 + 3n_2^4 + \frac{3(1-\nu^2)}{2(h^*)^2} \left(1 + \frac{d_{m_2}^4}{2(d_{m_2}^2 + n_2^2)^2} \right) + \right. \\
 + \frac{2}{a^2} \left(4\eta_c^{(1)} \sigma_1 d_{m_2}^4 + \mu_c^{(1)} \sigma_2 d_{m_2}^2 n_2^2 + 4\eta_{s1}^{(2)} \sigma_3 (n_2^2 - 1)^2 + \mu_s^{(2)} \sigma_4 d_{m_2}^2 n_2^2 \right) - \\
 - \eta \frac{12(1-\nu^2)}{h^*} d_{m_2}^2 \left(\frac{3}{4} + 2\bar{\gamma}_c^{(1)} \sigma_1 \right) \left. \right] \tilde{f}_2^2 \left. \right\} + \frac{\pi h^2 \xi_1}{4} [\tilde{q} - \tilde{q}_0 (n_1^2 + d_{m_1}^2)] \tilde{f}_1^2 + \\
 + \frac{9\pi h^2}{64} [\tilde{q} - \tilde{q}_0 (n_2^2 + d_{m_2}^2)] \tilde{f}_2^2 + \frac{h^2}{4} \left[\frac{1}{d_{m_1}} (1 - \cos d_{m_1} \xi_1) + \right. \\
 + \frac{1}{2b_4} (\cos b_4 \xi_1 - 1) - \frac{1}{2b_3} (\cos b_3 \xi_1 - 1) \left. \right] \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 = \frac{\pi E h^5 L_1}{48(1-\nu^2)R^3} \times \\
 \times \left\{ A_1 \tilde{f}_1^4 + (A_2 - A_3 \eta + A_8) \tilde{f}_1^2 + (A_4 + A_5) \tilde{f}_1^2 \tilde{f}_2^2 + A_{10} \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 + [A_6 - A_7 \eta + A_9] \tilde{f}_2^2 \right\} + C_0, \tag{8}
 \end{aligned}$$

где $\tilde{f}_1 = \frac{f_1}{h}$, $\tilde{f}_2 = \frac{f_2}{h}$; C_0 – слагаемое, не зависящее от \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 , $\eta = \frac{\sigma_x R}{Eh}$.

Коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{3}{8} (1 - \nu^2) \left[\left(1 + 2\bar{\gamma}_c^{(1)} \right) d_{m_1}^4 + n_1^4 \right], \\
A_2 &= (d_{m_1}^2 + n_1^2)^2 + \frac{1-\nu^2}{a^2} \frac{d_{m_1}^4}{(d_{m_1}^2 + n_1^2)^2} + \frac{2}{a^2} \left(\mu_c^{(1)} + \mu_s^{(1)} \right) d_{m_1}^2 n_1^2, \\
A_3 &= \frac{1-\nu^2}{a^2} d_{m_1}^2 h^*, \quad A_4 = \frac{3}{16} (1 - \nu^2) \left\{ (d_{m_1} n_2 - d_{m_2} n_1)^4 \left[\frac{1}{(b_1^2 + b_3^2)^2} + \frac{1}{(b_2^2 + b_4^2)^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + (d_{m_1} n_2 + d_{m_2} n_1)^4 \left[\frac{1}{(b_2^2 + b_3^2)^2} + \frac{1}{(b_1^2 + b_4^2)^2} \right] \right\} \\
A_5 &= \frac{3}{4} (1 - \nu^2) d_{m_1}^4 \left\{ n_2^4 \left[\frac{1}{(d_{m_1}^2 + b_1^2)^2} + \frac{1}{(d_{m_1}^2 + b_2^2)^2} \right] + n_1^4 \left[\frac{1}{(b_3^2 + n_1^2)^2} + \frac{1}{(b_4^2 + n_1^2)^2} \right] \right\}, \\
A_6 &= 3d_{m_2}^2 + 2d_{m_2}^2 n_2^2 + 3n_2^4 + \frac{3(1-\nu^2)}{2(h^*)^2} \left[1 + \frac{d_{m_2}^4}{2(d_{m_2}^2 + n_2^2)^2} \right] + \\
&\quad + \frac{2}{a^2} \left[4\eta_c^{(1)} \sigma_1 d_{m_2}^4 + \mu_c^{(1)} \sigma_2 d_{m_2}^2 n_2^2 + 4\eta_{s1}^{(2)} \sigma_3 (n_2^2 - 1)^2 + \mu_s^{(2)} \sigma_4 d_{m_2}^2 n_2^2 \right], \\
A_7 &= \frac{12(1-\nu^2)}{h^*} d_{m_2}^2 \left(\frac{3}{4} + 2\bar{\gamma}_c^{(1)} \sigma_1 \right), \quad A_8 = \frac{48(1-\nu^2)R^5}{Eh^5 L_1} [\tilde{q} - \tilde{q}_0 (n_1^2 + d_{m_1}^2)], \\
A_9 &= \frac{48(1-\nu^2)R^5}{Eh^5 L_1} [\tilde{q} - \tilde{q}_0 (n_2^2 + d_{m_2}^2)], \\
A_{10} &= \frac{12(1-\nu^2)R^5}{Eh^3 L_1} \left[\frac{1}{d_{m_1}} (1 - \cos d_{m_1} \xi_1) + \frac{1}{2b_4} (\cos b_4 \xi_1 - 1) - \frac{1}{2b_3} (\cos b_3 \xi_1 - 1) \right], \\
\sigma_1 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sin^4 n_2 \theta_i, \quad \sigma_2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sin^2 2n_2 \theta_i, \quad \sigma_3 = \frac{1}{k_1+1} \sum_{j=1}^{k_1} \sin^4 2d_{m_2} \xi_j, \quad a^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \\
\sigma_4 &= \frac{1}{k_1+1} \sum_{j=1}^{k_1} \sin^2 2d_{m_2} \xi_j, \quad \bar{\gamma}_c^{(1)} = \frac{F_c k}{2\pi R h}, \quad \eta_c^{(1)} = \frac{E_c (J_{yc} + h_c^2 F_c) k}{2\pi r^3 h E} (1 - \nu^2), \\
\bar{\mu}_s^{(1)} &= \frac{J_{kp.s}}{L h r R}, \quad \eta_{s1}^{(2)} = \frac{E_s (I_{xs} + h_s^2 F_s) (k_1+1) (1-\nu^2)}{E h L_1 R^2}, \quad \mu_c^{(1)} = \frac{G_c (1-\nu^2) J_{kp.c} k}{2\pi R^3 h E}.
\end{aligned}$$

Из условий (6) при четных m_1 и m_2 получаем систему уравнений

$$2A_1 \tilde{f}_1^2 + (A_2 - A_3 \eta + A_8) = 0, \quad (A_4 + A_5 + A_{10}) \tilde{f}_1^2 + A_6 - A_7 \eta + A_9 = 0,$$

из которой находим параметр критических напряжений общей потери устойчивости с учетом предварительного выпучивания обшивки

$$\eta = \frac{A_6 + A_9 - \frac{(A_2 + A_8)(A_4 + A_5 + A_{10})}{2A_1}}{A_7 - \frac{A_3(A_4 + A_5 + A_{10})}{2A_1}} \quad (9)$$

и относительный прогиб оболочки в состоянии, предшествующем общей потере устойчивости:

$$\tilde{f}_1^2 = -\frac{A_2 + A_8 - A_3 \eta}{2A_1}. \quad (10)$$

Отметим, что формулы (9) и (10) при $A_8 = A_9 = A_{10} = 0$ переходят в формулы для оболочек без среды, приведенные в [5]. Параметр η необходимо сравнить с η_p , который соответствует наименьшей критической нагрузке с изгибом продольных ребер без учета выпучивания оболочки. При вычислении параметра критической нагрузки проводится минимизация η по параметрам формы m_2 , n_2 . Область каждого из этих параметров строится в окрестности тех значений m_1 и n_1 , которые соответствуют минимуму η_p .

В таблице приведены результаты вычисления параметра критической нагрузки η с учетом предварительного выпучивания оболочки. Область параметров подкрепления выбрана

таким образом, что удовлетворяется условие $\eta_p = \alpha \eta_{ob}$ ($\alpha \in [2; 3]$, η_{ob} – параметр критических напряжений для оболочки). Общими для этих оболочек были следующие параметры: $h^* = 1/40$; $\xi_1 = 2$; число поперечных ребер $k_1 = 3$; продольных ребер поперечного сечения с отношением высоты к ширине $\psi_1 = 14$. Варьировалось отношение площади поперечного сечения продольных ребер к площади поперечного сечения оболочки $\bar{\gamma}_c^{(1)} = 0,7; 1$. Число продольных ребер также изменялось: $k = 16, 24, 32$. Кольцевые ребра имели следующие характеристики: $\frac{\eta_{s1}^{(2)}}{a^2(k_1+1)} = 8, 4$; $\frac{\mu_s^{(2)}}{a^2(k_1+1)} = 0,054$. Для заполнителя были приняты: $\tilde{q}/\tilde{q}_0 = 3$; $\tilde{q}_0/E = 0,002$.

Как видно из таблицы, отношение $\eta/\eta_p \in [0,83; 1]$ для рассмотренных оболочек. Отношение η/η_p увеличивается с ростом числа продольных ребер при одинаковой их общей площади поперечного сечения. Числа m_2 и n_2 совпадают или незначительно отличаются от m и n , соответствующих η_p . Форма потери устойчивости с изгибом ребер может отвечать симметричному относительно срединной поверхности выпучиванию.

$\bar{\gamma}_c^{(1)}$	k	η_{ob}	η_p	η	\tilde{f}_1	η/η_p
0,7	16	0,686	2,002	1,652	1,962	0,83
	24	0,736	1,564	1,385	1,513	0,89
	32	0,759	1,346	1,344	1,732	1,00
1	16	0,799	1,885	1,754	1,482	0,93
	24	0,892	1,843	1,745	1,403	0,95
	32	0,761	1,721	1,704	1,752	0,99

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Исаев, З. Ф. Устойчивость при продольном сжатии цилиндрических оболочек, усиленных продольными ребрами и заполненных средой / З. Ф. Исаев // Министерство образования Азербайджана. Механика. Машиностроение. – 2007. - № 1. – С. 20–22.
- [2] Исаев, З. Ф. Устойчивость цилиндрических оболочек, усиленных кольцевыми ребрами и заполненных средой при продольном осевом сжатии с учетом дискретных размещений ребер / З. Ф. Исаев // Вестник Бакинского государственного университета, серия физ.-мат. наук. – 2007. - № 1. - С. 54–60.
- [3] Исаев, З. Ф. Устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки с пустотелым заполнителем при продольном осевом сжатии / З. Ф. Исаев // Вестник Бакинского государственного университета, серия физ.-мат. наук. – 2007. - № 3. – С. 71–79.
- [4] Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Стройиздат, 1954. – 56 с.
- [5] Амиро, И. Я. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И. Я. Амиро, В.А. Заруцкий – Киев : Наукова думка, 1980. – 367 с.

R. A. Iskanderov

**ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF PRELIMINARY BUCKLING OF THE
CYLINDRICAL SHELL REINFORCED BY A CROSS SYSTEM OF RIBS AND
CONTACTING WITH MEDIUM ON CRITICAL STRESSES OF GENERAL
STABILITY LOSS**

Azerbaijan University of Architecture and Construction, Baku

Abstract. The influence of preliminary buckling of a shell reinforced by a regular cross system of ribs and filled with medium on critical load parameters of general stability loss has been investigated in this article. The investigation is based on the problem statement using the mixed energy method and nonlinear equation of combined deformation.

Keywords: ribbed shells, medium, critical load, stability loss, buckling, energy method, combined deformation.

Искендеров Рамиз Азиз оглы

кандидат физико-математических наук, доцент, Азербайджанский архитектурно-строительный университет, г. Баку

e-mail: r.iskanderov@gmail.com

Iskenderov, Ramiz Aziz oglu

Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Azerbaijan University of Architecture and Construction, Baku

Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко

ВАРИАНТ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УСЛОВИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Тулский государственный университет

Аннотация. Предложена полиномиальная формулировка условия предельного состояния изотропного тела через инварианты ранжированных главных напряжений. Показана возможность формулировки полиномиального условия предельного состояния анизотропных сред с учетом влияния вида напряженного состояния. Выписаны уравнения ребер полной пластичности.

Ключевые слова: тензор напряжения, главные напряжения, плоскости сингулярности, ребра полной пластичности, ранжированные главные напряжения, условие предельного состояния.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим трехмерное векторное пространство главных напряжений $\vec{\sigma}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Вектор напряжения в точке определяется соотношением

$$\vec{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \vec{\sigma}_i. \quad (1.1)$$

Наряду с неупорядоченными главными напряжениями σ_i введем ранжированные (упорядоченные) напряжения σ_i^r . Условие ранжирования примем в виде $\sigma_1^r \geq \sigma_2^r \geq \sigma_3^r$. Растягивающие напряжения считаем положительными.

Для ранжированных напряжений справедливы соотношения [5]

$$\sigma_1^r = \sigma + \left(1 - \frac{1}{3}\mu\right)T, \quad \sigma_2^r = \sigma + \frac{2}{3}\mu T, \quad \sigma_3^r = \sigma - \left(1 + \frac{1}{3}\mu\right)T, \quad (1.2)$$

где $\sigma = (\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r)/3$ – среднее напряжение, $T = (\sigma_1^r - \sigma_3^r)/2$ – максимальное касательное напряжение, $\mu = \frac{2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r}{\sigma_1^r - \sigma_3^r}$ – параметр Лоде. Параметр Лоде изменяется в диапазоне $-1 \leq \mu \leq 1$. Одноосному растяжению соответствует параметр $\mu = -1$, чистому сдвигу $\mu = 0$, одноосному сжатию $\mu = 1$.

Ось, равно наклоненная к направлениям главных напряжений, называется осью среднего напряжения. Если через гидростатическую ось и направления главных напряжений провести три плоскости, то они разделят трехмерное векторное пространство на шесть сегментов.

Поскольку на плоскостях между сегментами промежуточное главное напряжение равно максимальному или минимальному напряжению, то эти плоскости будем называть плоскостями кратности. Ось среднего напряжения делит каждую из плоскостей кратности на две полуплоскости. Каждой из полуплоскостей характеризуется условием

$$1 + \mu = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \mu = 0. \quad (1.3)$$

Поскольку на полуплоскостях кратности на главные напряжения накладываются ограничения (1.2), то будем называть их еще и полуплоскостями сингулярности.

Введем инварианты напряженного состояния

$$M = (1 + \mu)T, \quad H = (1 - \mu)T. \quad (1.4)$$

Отсюда следует

$$M + H = 2T, \quad M - H = 2\mu T. \quad (1.5)$$

Ранжированные главные напряжения σ_i^r теперь можно вычислять по формулам

$$\sigma_1^r = \sigma + \frac{1}{3}(2M + H), \quad \sigma_2^r = \sigma + \frac{2}{3}(M + H), \quad \sigma_3^r = \sigma - \frac{1}{3}(M + 2H). \quad (1.6)$$

Из (1.5) следует, что на полуплоскостях сингулярности справедлива закономерность: если инвариант $M = 0$, то $H = 2T$ и наоборот, если инвариант $H = 0$, то $M = 2T$.

2. В общем случае поверхность предельного состояния изотропного тела является функцией главных ранжированных напряжений

$$F(\sigma_1^r, \sigma_2^r, \sigma_3^r) = 1. \quad (2.1)$$

Поскольку ранжированные главные напряжения являются функциями инвариантов σ , M , H , то условие (2.1) можно представить в виде

$$F(\sigma, M, H) = 1. \quad (2.2)$$

В статье Э. Ву [1] рассматривались различные полиномиальные представления предельных соотношений, однако разложение по инвариантам σ , M , H отсутствует.

Восполним этот пробел, рассматривая возможности полиномиального разложения по инвариантам σ , M , H

$$A_1 M^2 + A_2 M H + A_3 H^2 + A_4 M + A_5 H = 1 + 3A_6 \sigma + 9A_7 \sigma^2, \quad (2.3)$$

где A_1, \dots, A_9 – механические характеристики предельного состояния.

В разложении (2.3) отсутствуют слагаемые с произведениями $M\sigma$ и $H\sigma$, поскольку в случае их учета в законе пластического течения, ассоциированного с условием (2.3), возникают эффекты, противоречащие физике изотропного тела: воздействие гидростатического давления приводит к деформациям сдвига.

В разложении (2.3) перейдем к ранжированным главным напряжениям

$$0.25[A_1(1 - \mu)^2 + A_2(1 - \mu^2) + A_3(1 + \mu)^2](\sigma_1^r - \sigma_3^r)^2 + \\ + 0.5[A_4(1 - \mu) + A_5(1 + \mu)](\sigma_1^r - \sigma_3^r) = 1 + A_6(\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r) + A_7(\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r)^2. \quad (2.4)$$

Для экспериментального определения механических характеристик предельного состояния A_1, \dots, A_9 рассмотрим три группы базовых экспериментов.

А. Экспериментальные точки находятся на полуплоскости $1 + \mu = 0$.

В этом случае условие предельного состояния (2.4) принимает вид

$$A_1(\sigma_1^r - \sigma_3^r)^2 + A_4(\sigma_1^r - \sigma_3^r) = 1 + A_6(\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r) + A_7(\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r)^2. \quad (2.5)$$

Назначим три базовых эксперимента при значении $\mu = -1$:

1. Одноосное растяжение $\sigma_1^r = \sigma_p$, $\sigma_2^r = \sigma_3^r = 0$,

$$\sigma_p^2 A_1 + \sigma_p A_4 = 1 + \sigma_p A_6 + \sigma_p^2 A_7. \quad (2.6)$$

2. Двухосное сжатие $\sigma_1^r = 0$, $\sigma_2^r = \sigma_3^r = -\sigma_{2c}$,

$$A_1\sigma_{2c}^2 + A_4\sigma_{2c} = 1 - 2\sigma_{2c}A_6 + 4\sigma_{2c}^2A_7; \quad (2.7)$$

3. Двухосное сжатие с растяжением $\sigma_1^r = \sigma_{2c,p}$, $\sigma_2^r = \sigma_3^r = -\sigma_{2c,p}$, $\mu = -1$

$$4\sigma_{2c,p}^2A_1 + 2\sigma_{2c,p}A_4 = 1 - \sigma_{2c,p}A_6 + \sigma_{2c,p}^2A_7. \quad (2.8)$$

В. Экспериментальные точки находятся на полуплоскости $1 - \mu = 0$.

В этом случае условие предельного состояния (2.4) принимает вид

$$A_3(\sigma_1^r - \sigma_3^r)^2 + A_5(\sigma_1^r - \sigma_3^r) = 1 + A_6(\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r) + A_7(\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r)^2. \quad (2.9)$$

Назначим три базовых эксперимента при значении $\mu = 1$:

1. Одноосное сжатие $\sigma_1^r = \sigma_2^r = \sigma_p$, $\sigma_3^r = -\sigma_p$,

$$\sigma_c^2A_3 + \sigma_cA_5 = 1 - \sigma_cA_6 + \sigma_c^2A_7; \quad (2.10)$$

2. Двухосное растяжение $\sigma_1^r = \sigma_2^r = \sigma_{2p}$, $\sigma_3^r = 0$,

$$\sigma_{2p}^2A_3 + \sigma_{2p}A_5 = 1 + 2\sigma_{2p}A_6 + 4\sigma_{2p}^2A_7; \quad (2.11)$$

3. Двухосное растяжение с поджатием $\sigma_1^r = \sigma_2^r = \sigma_{2p,c}$, $\sigma_3^r = -\sigma_{2p,c}$,

$$4\sigma_{2p,c}^2 + 2\sigma_{2p,c}A_5 = 1 + \sigma_{2p,c}A_6 + \sigma_{2p,c}^2A_7. \quad (2.12)$$

Решая совместно систему уравнений (2.6) – (2.12), найдем

$$A_6 = \frac{X_3Y_2 - X_2Y_3}{X_1Y_2 - Y_1X_2}, \quad A_7 = \frac{X_3Y_1 - X_1Y_3}{X_2Y_1 - Y_2X_1}, \quad A_1 = a_1 + a_2A_6 + a_3A_7,$$

$$A_3 = b_1 + b_2A_6 + b_3A_7, \quad A_4 = a_4 + a_5A_6 + a_6A_7, \quad A_5 = b_4 + b_5A_6 + b_6A_7, \quad (2.13)$$

где

$$X_1 = 4a_2\sigma_{2p,c}^2 + 2a_5\sigma_{2p,c} - \sigma_{2p,c}, \quad X_2 = 4a_3\sigma_{2p,c}^2 - \sigma_{2p,c}^2 + 2a_6\sigma_{2p,c},$$

$$X_3 = 1 - 4a_1\sigma_{2p,c}^2 - 2\sigma_{2p,c}a_4, \quad Y_1 = 4b_2\sigma_{2c,p}^2 + 2b_5\sigma_{2c,p} + \sigma_{2c,p},$$

$$Y_2 = 4b_3\sigma_{2c,p}^2 + 2b_6\sigma_{2c,p} - \sigma_{2c,p}^2, \quad Y_3 = 1 - 4b_1\sigma_{2c,p}^2 - 2b_4\sigma_{2c,p},$$

$$a_1 = -\frac{1}{\sigma_p\sigma_{2c}}, \quad a_2 = \frac{3}{\sigma_p - \sigma_{2c}}, \quad a_3 = \frac{\sigma_p - 4\sigma_{2c}}{\sigma_p - \sigma_{2c}}, \quad a_4 = \frac{1}{\sigma_p} + \frac{1}{\sigma_{2c}},$$

$$a_5 = \frac{\sigma_{2c} + 2\sigma_p}{\sigma_{2c} - \sigma_p}, \quad a_6 = \frac{3\sigma_{2c}}{\sigma_{2c} - \sigma_p}, \quad b_1 = -\frac{1}{\sigma_c\sigma_{2p}}, \quad b_2 = \frac{1}{\sigma_{2p} - \sigma_c},$$

$$b_3 = \frac{\sigma_c - 4\sigma_{2p}}{\sigma_c - \sigma_{2p}}, \quad b_4 = \frac{\sigma_{2p} + \sigma_c}{\sigma_c\sigma_{2p}}, \quad b_5 = \frac{\sigma_{2p} - 2\sigma_c}{\sigma_{2p} - \sigma_c}, \quad b_6 = -\frac{3\sigma_c\sigma_{2p}}{\sigma_{2p} - \sigma_c}.$$

С. Эксперимент при значении $\mu = 0$.

1. Чистый сдвиг $\sigma_1^r = \tau$, $\sigma_2^r = 0$, $\sigma_3^r = -\tau$

$$(A_1 + A_2 + A_3)\tau^2 + (A_4 + A_5)\tau = 1. \quad (2.14)$$

Отсюда

$$A_2 = \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau}(A_4 + A_5) - A_1 - A_3. \quad (2.15)$$

В зависимости от соотношения констант A_6 и A_7 предельная поверхность (2.3) в трехмерном векторном пространстве главных напряжений будет замкнутой с двух концов по оси среднего напряжения ($A_6^2 > 4A_7$) или с одного конца ($A_6^2 \leq 4A_7$).

3. Уравнение предельного состояния (2.4) справедливо в пределах каждого из сегментов между полуплоскостями сингулярности.

При пересечении предельной поверхности с полуплоскостью сингулярности образуется ребро сингулярности:

при $\mu = -1$

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \left[-A_4 + \sqrt{A_4^2 + 4A_1(1 + 3A_6\sigma + 9A_7\sigma^2)} \right] (2A_1)^{-1}, \quad \sigma_2^r = \sigma_3^r; \quad (3.1)$$

при $\mu = 1$

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = \left[-A_5 + \sqrt{A_4^2 + 4A_3(1 + 3A_6\sigma + 9A_7\sigma^2)} \right] (2A_3)^{-1}, \quad \sigma_2^r = \sigma_1^r. \quad (3.2)$$

Ребра сингулярности можно называть ребрами полной пластичности [2], [6], поскольку при значениях $\mu = \pm 1$ предельное состояние наступает на двух площадках экстремальных касательных напряжений одновременно.

4. Анизотропную сплошную среду отнесем к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$). Напряженное состояние в точке характеризуется тензором напряжения σ_{ij} или главными напряжениями σ_i и триэдром их направлений. Наряду с неупорядоченными главными напряжениями введем ранжированные (упорядоченные) главные напряжения σ_i^r . Условие ранжирования примем в виде неравенств $\sigma_1^r \geq \sigma_2^r \geq \sigma_3^r$. Растягивающие напряжения считаем положительными.

Компоненты тензора напряжения σ_{ij} связаны с ранжированными главными напряжениями соотношениями

$$\sigma_{ij} = n_{ik}n_{jk}\sigma_k^r \quad (t = k), \quad (4.1)$$

где n_{ik} – направляющие косинусы главных направлений ранжированных напряжений в системе координат x_i . Направляющие косинусы n_{ik} являются функциями трех углов, определяющих ориентацию орта собственных векторов относительно лабораторной системы координат x_i . Девять направляющих косинусов n_{ik} связаны шестью соотношениями ортогональности

$$n_{ik}n_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{при} \quad n_{ik}n_{kj} = \delta_{ij}, \quad (4.2)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Вместо тройки ранжированных главных напряжений σ_i^r можно использовать их линейные инварианты [3], [4]

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r), \quad \Gamma = \frac{1}{2}(\sigma_1^r - \sigma_3^r), \quad \Lambda = \mu\Gamma = \frac{1}{2}(2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r), \quad (4.3)$$

где $\mu = (2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r)(\sigma_1^r - \sigma_3^r)^{-1}$ – параметр Лоде. Параметр Лоде изменяется в диапазоне $-1 \leq \mu \leq 1$. При одноосном растяжении $\mu = -1$, при одноосном сжатии $\mu = 1$.

Разрешая уравнения (4.3) относительно σ_i^r , получим [5]

$$\begin{aligned} \sigma_1^r &= \sigma + \Gamma - \frac{1}{3}\Lambda = \sigma + \left(1 - \frac{1}{3}\mu\right)\Gamma, \\ \sigma_2^r &= \sigma + \frac{2}{3}\Lambda = \sigma + \frac{2}{3}\mu\Gamma, \\ \sigma_3^r &= \sigma - \Gamma - \frac{1}{3}\Lambda = \sigma - \left(1 + \frac{1}{3}\mu\right)\Gamma. \end{aligned} \quad (4.4)$$

5. Рассмотрим трехмерное векторное пространство главных напряжений $\vec{\sigma}_i$. Через ось гидростатического напряжения и оси главных направлений проведем три плоскости. Эти плоскости являются плоскостями кратности промежуточного главного напряжения. Плоскости кратности делят трехмерное векторное пространство на шесть сегментов. На плоскостях кратности компоненты тензора напряжения проявляют свойства сингулярности, из шести компонент тензора напряжения независимыми являются только четыре компоненты. Ось гидростатического давления делит плоскости кратности на шесть полуплоскостей. Каждая из плоскостей характеризуется равенством параметра Лоде своих крайних значений: $\mu = 1$ или $\mu = -1$.

Учитывая, что на полуплоскостях сингулярности справедливы условия

$$1 - \mu = 0 \quad \text{или} \quad 1 + \mu = 0, \quad (5.1)$$

введем инварианты

$$M = (1 - \mu)T, \quad N = (1 + \mu)T. \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует

$$2T = M + N, \quad 2\mu T = M - N. \quad (5.3)$$

С учетом (5.3) соотношения для ранжированных главных напряжений (4.4) принимают вид

$$\sigma_1^r = \sigma + \frac{1}{3}(M + 2N), \quad \sigma_2^r = \sigma + \frac{1}{3}(M - N), \quad \sigma_3^r = \sigma - \frac{1}{3}(2M + N). \quad (5.4)$$

Если подставить (4.4) в (4.1), то можно записать

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \alpha_{ij} \Pi + \beta_{ij} N, \quad (5.5)$$

где

$$\alpha_{ij} = \chi_{ij} + n_{1i}n_{1j}, \quad \beta_{ij} = \chi_{ij} - n_{3i}n_{3j}, \quad \chi_{ij} = \delta_{ij}/3. \quad (5.6)$$

Таким образом, на полуплоскостях сингулярности напряженное состояние, в зависимости от величины крайнего значения параметра Лоде, зависит от двух инвариантов σ , M или σ и N . Поэтому признаку полуплоскости сингулярности будем называть M -полуплоскость, и N -полуплоскость.

Признаком M -полуплоскости является условие $1 + \mu = 0$, а N -полуплоскости условие $1 - \mu = 0$.

Из (5.5) и (5.6) следует, что на полуплоскостях сингулярности напряженное состояние зависит от двух инвариантов σ , T и еще от двух углов, задающих направление вектора $\vec{\sigma}_1^r$ или $\vec{\sigma}_3^r$. Таким образом, на полуплоскостях сингулярности из шести компонент тензора напряжения σ_{ij} независимыми являются только четыре.

6. Условие предельного состояния анизотропного тела является функцией компонент тензора напряжения

$$F(\sigma_{ij}) = 1. \quad (6.1)$$

Подробный обзор вариантов полиномиального разложения функции $F(\sigma_{ij})$ по компонентам тензора напряжения σ_{ij} дан в работе Э. Ву [1]. В этой работе также можно найти обзор основных публикаций по этой теме.

Рассмотрим иное представление. Поскольку, согласно (5.4) напряженное состояние в точке является функцией трех инвариантов ранжированных главных напряжений σ , M , N и направляющих косинусов главных направлений n_{ij} , то предельное состояние анизотропного тела можно записать в виде

$$\Phi(\sigma, M, H, n_{ij}) = 1. \quad (6.2)$$

Используя полиномиальное разложение, рассмотрим частный случай представления функции предельного состояния $\Phi(\sigma, M, H, n_{ij})$

$$A_1(n_{ij})M^2 + A_2(n_{ij})MH + A_3(n_{ij})H^2 + A_4(n_{ij})M\sigma + A_5(n_{ij})H\sigma + A_6\sigma^2 + \\ + A_7(n_{ij})M + A_8(n_{ij})H + A_9\sigma = 1, \quad (6.3)$$

где A_1, \dots, A_9 – экспериментально определяемые механические характеристики предельного состояния.

Введем предположение о том, что механические характеристики при квадратах инвариантов являются свертками компонент тензоров четвертого ранга, а при первых степенях инвариантов свертками тензоров второго ранга. Тогда условие предельного состояния (6.3) можно представить в виде

$$A_{ijmn}\alpha_{ij}\alpha_{mn}\Pi^2 + B_{ijmn}(\alpha_{ij}\beta_{mn} + \beta_{ij}\alpha_{mn})MH + C_{ijmn}\beta_{ij}\beta_{mn}H^2 + D_{ijmn}(\alpha_{ij}\delta_{mn} + \delta_{ij}\alpha_{mn})M\sigma + \\ + E_{ijmn}(\beta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{ij}\beta_{mn})H\sigma + F_{ijmn}\delta_{ij}\delta_{mn}\sigma^2 + B_{ij}\alpha_{ij}M + C_{ij}\beta_{ij}H + A_{ij}\delta_{ij}\sigma = 1. \quad (6.4)$$

Из (6.3) и (6.4) следует

$$A_1(n_{ij}) = A_{ijmn}\alpha_{ij}\alpha_{mn}, \quad A_2(n_{ij}) = B_{ijmn}(\alpha_{ij}\beta_{mn} + \beta_{ij}\alpha_{mn}), \quad A_3(n_{ij}) = C_{ijmn}\beta_{ij}\beta_{mn}, \\ A_4(n_{ij}) = D_{ijmn}(\alpha_{ij}\delta_{mn} + \delta_{ij}\alpha_{mn}), \quad A_5(n_{ij}) = E_{ijmn}(\beta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{ij}\beta_{mn}), \\ A_6 = F_{ijmn}\delta_{ij}\delta_{mn} = F, \quad A_7(n_{ij}) = B_{ij}\alpha_{ij}, \quad A_8(n_{ij}) = C_{ij}\beta_{ij}, \quad A_9 = A_{ij}\delta_{ij} = A. \quad (6.5)$$

Учитывая зависимости (5.2), условие предельного состояния принимает вид

$$[A_1(n_{ij})(1 - \mu)^2 + A_2(n_{ij})(1 - \mu^2) + A_3(n_{ij})(1 + \mu)^2]T^2 + [A_4(n_{ij})(1 - \mu) + \\ + A_5(n_{ij})(1 + \mu)]T\sigma + F\sigma^2 + [A_7(n_{ij})(1 - \mu) + A_8(n_{ij})(1 + \mu)]T + A\sigma = 1. \quad (6.6)$$

В случае, если механические характеристики материала таковы, что

$$A_{ijmn} = B_{ijmn} = C_{ijmn} = D_{ijmn} = E_{ijmn} = F_{ijmn}, \quad A_{ij} = B_{ij}, \quad (6.7)$$

то условие предельного состояния (5.3) принимает вид

$$A_{ijmn}[\sigma^2\delta_{ij}\delta_{mn} + (\alpha_{ij}\delta_{mn} + \delta_{ij}\alpha_{mn})\sigma M + (\beta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{ij}\beta_{mn})\sigma H + (\alpha_{ij}\beta_{mn} + \beta_{ij}\alpha_{mn})MH + \\ + \alpha_{ij}\alpha_{mn}M^2 + \beta_{ij}\beta_{mn}H^2] + A_{ij}[\sigma\delta_{ij} + \alpha_{ij}M + \beta_{ij}H] = 1 \quad (6.8)$$

или

$$A_{ijmn}\delta_{ij}\delta_{mn}\sigma^2 + A_{ijmn}[(\alpha_{ij}\delta_{mn} + \delta_{ij}\alpha_{mn})(1 - \mu) + (\beta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{ij}\beta_{mn})(1 + \mu)]\sigma T + \\ + [(\alpha_{ij}\beta_{mn} + \beta_{ij}\alpha_{mn})(1 - \mu^2) + \alpha_{ij}\alpha_{mn}(1 - \mu)^2 + \beta_{ij}\beta_{mn}(1 + \mu)^2]T^2 + \\ + A_{ij}\delta_{ij}\sigma + A_{ij}[\alpha_{ij}(1 - \mu) + \beta_{ij}(1 + \mu)]T = 1. \quad (6.9)$$

Если в представлениях (6.8) или (6.9) перейти к компонентам тензора напряжения, то получим полиномиальное условие предельного состояния

$$A_{ijmn}\sigma_{ij}\sigma_{mn} + A_{ij}\sigma_{ij} = 1. \quad (6.10)$$

7. На полуплоскостях сингулярности, характеризующихся условием

$$1 + \mu = 0, \quad (7.1)$$

условие предельного состояния (6.6) принимает вид

$$4A_1(n_{1j})T^2 + 2[A_4(n_{1j})\sigma + A_7(n_{1j})]T + F\sigma^2 + A\sigma = 1. \quad (7.2)$$

Разрешая уравнение (7.2) относительно T , получим

$$T = F(\sigma, n_{1i}). \quad (7.3)$$

Уравнение ребра полной пластичности [2], [6] на плоскостях сингулярности, характеризующихся значением $\mu = -1$ или условием $\sigma_2^r = \sigma_3^r$, записываются в виде

$$\sigma_1^r - \sigma_2^r = F(\sigma, n_{1i}), \quad \sigma_1^r - \sigma_3^r = F(\sigma, n_{1i}). \quad (7.4)$$

Аналогично на полуплоскостях сингулярности, характеризующихся условием

$$1 - \mu = 0, \quad (7.5)$$

условие предельного состояния (7.6) принимает вид

$$4A_1(n_{1j})T^2 + 2[A_4(n_{1j})T\sigma + 2A_7(n_{1j})]T + F\sigma^2 + A\sigma = 1. \quad (7.6)$$

Разрешая уравнение (7.2) относительно T , получим

$$T = F(\sigma, n_{1i}). \quad (7.7)$$

Уравнение ребра полной пластичности на плоскостях сингулярности, характеризующихся значением $\mu = 1$ или условием $\sigma_2^r = \sigma_1^r$, записываются в виде

$$\sigma_1^r - \sigma_2^r = F(\sigma, n_{1i}), \quad \sigma_1^r - \sigma_3^r = F(\sigma, n_{1i}). \quad (7.8)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ву, Э. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред / Э. Ву // Механика композиционных материалов. Т. 2. – М. : Мир, 1978. – С. 401–491.
- [2] Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 234 с.
- [3] Кузнецов, Е. Е. Об изоморфизме упругопластических свойств / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию А. А. Ильюшина. – М. : Ленанд, 2006. – С. 166–171.
- [4] Кузнецов, Е. Е. Формулировка условия предельного состояния изотропных сред в инвариантах собственных упругих состояний / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 78-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 369–375.
- [5] Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. школа, 1969. – 608 с.
- [6] Хаар, А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности. Сб. пер. – М. : Ил., 1948. – С. 41–56.

Y. Y. Kuznetsov, N. M. Mattchenko

**VARIANT OF POLYNOMIALING CONDITION OF THE LIMITING OF
ISOTROPIC AND ANISOTROPIC STATE MEDIUMS**

The Tula State University

Abstract. Polynomial formulation of a condition of a limiting state of the isotropic body through invariants ranked main pressures is offered. The possibility of formulation of polynomial condition of limiting state of anisotropic mediums taking into account the influence of a tension variety is shown. The equations of edges of full plasticity are written out.

Keywords: pressure tensor, main pressures, planes of singularity, edges of full plasticity, ranked main pressure, a condition of a limiting condition.

Кузнецов Евгений Евгеньевич

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc_05@mail.ru

Матченко Николай Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc_05@mail.ru

Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenyevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

Mattchenko, Nikolay Mikhaylovich

Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Department of Mathematical Modeling, Tula State University, Tula

О ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ СЫПУЧИХ СРЕД

Тулльский государственный университет

Аннотация. Показано, что условия кратности промежуточного главного напряжения разделяют пространство главных напряжений тремя плоскостями, проходящими через гидростатическую ось и оси главных напряжений на шесть равных сегментов. Следствием кратности главных напряжений являются два условия совместности компонент тензора напряжения. Поэтому на плоскостях кратности напряжений из шести компонент тензора напряжения независимыми являются только четыре. Проявление кратности промежуточного главного напряжения исследуется на примере сыпучих сред. Пересечение поверхности пластичности с плоскостями кратности образует ребра сингулярности. Выписаны уравнения поля напряжений и скоростей перемещений.

Ключевые слова: вектор напряжения, ранжированные главные напряжения, линейные инварианты, промежуточное главное напряжение, плоскости кратности, условие пластичности, ребра сингулярности.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим трехмерное пространство главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Растягивающие напряжения далее считаются положительными. Пусть $\vec{i}_1^0, \vec{i}_2^0, \vec{i}_3^0$ - тройка ортогональных единичных векторов, характеризующих направления главных напряжений по отношению к лабораторной системе координат $x_i (i = 1, 2, 3)$.

Напряженное состояние в точке характеризуется вектором напряжений

$$\vec{\Sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3 = \sigma_1 \vec{i}_1^0 + \sigma_2 \vec{i}_2^0 + \sigma_3 \vec{i}_3^0. \quad (1.1)$$

Выделим девиаторную плоскость, проходящую через начало координат и имеющую одинаковые наклоны к координатным осям

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \quad (1.2)$$

Пусть единичный вектор \vec{m}_I^0 нормален к этой площадке. Ось, задаваемая направлением \vec{m}_I^0 , является осью среднего напряжения. Поскольку

$$\vec{m}_I^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}_1^0 + \vec{i}_2^0 + \vec{i}_3^0),$$

то проекция вектора напряжения $\vec{\Sigma}$ на гидростатическую ось определяется соотношением

$$\sigma_I = \vec{\Sigma} \cdot \vec{m}_I^0 = (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3) \cdot \vec{m}_I^0 = \sqrt{3}\sigma, \quad (1.3)$$

где $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ – среднее напряжение.

Проекция вектора $\vec{\Sigma}$ на девиаторную плоскость (1.2) представляет собой вектор \vec{S}_d – вектор интенсивности девиаторных напряжений:

$$\vec{\Sigma}_d = \vec{\Sigma} - \vec{\sigma}_I = (\sigma_1 - \sigma)\vec{i}_1^0 + (\sigma_2 - \sigma)\vec{i}_2^0 + (\sigma_3 - \sigma)\vec{i}_3^0 = s_1\vec{i}_1^0 + s_2\vec{i}_2^0 + s_3\vec{i}_3^0, \quad (1.4)$$

где $s_i = \sigma_i - \sigma$ – главные девиаторные напряжения, при этом $s_1 + s_2 + s_3 = 0$.

Модуль вектора $\vec{\Sigma}_d$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \Sigma_d &= \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Наряду с неупорядоченными главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ неравенствами

$$\sigma_1^r \geq \sigma_2^r \geq \sigma_3^r \quad (1.6)$$

введем ранжированные (упорядоченные) главные напряжения.

Представление вектора напряжения через собственные векторы (1.1) не является единственным.

Рассмотрим вариант [3], [4], [5]

$$\vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}_I + \vec{\Sigma}_{II} + \vec{\Sigma}_{III}. \quad (1.7)$$

Собственным векторам $\vec{\Sigma}_I, \vec{\Sigma}_{II}, \vec{\Sigma}_{III}$ соответствуют собственные функции

$$\begin{aligned} \Sigma_I &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r), \\ \Sigma_{II} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1^r - \sigma_3^r), \quad \Sigma_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Функции $\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III}$ являются линейными инвариантами ранжированных главных напряжений.

Разрешая уравнения (1.8) относительно главных ранжированных напряжений, получим

$$\begin{aligned} \sigma_1^r &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma_I + \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_{II} - \frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma_{III}, \quad \sigma_2^r = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Sigma_I + \sqrt{2}\Sigma_{III}), \\ \sigma_3^r &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma_I - \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_{II} - \frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma_{III} \end{aligned} \quad (1.9)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_1^r &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma_I + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} - m_\sigma)\Sigma_{II}, \quad \sigma_2^r = \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma_I + \sqrt{\frac{2}{3}}m_\sigma\Sigma_{II}, \\ \sigma_3^r &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma_I - \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} + m_\sigma)\Sigma_{II}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $m_\sigma = \Sigma_{III}/\Sigma_{II}$ – параметр вида напряженного состояния. Параметр m_σ изменяется в диапазоне $-1/\sqrt{3} \leq m_\sigma \leq 1/\sqrt{3}$.

Поскольку $\Sigma_I/\sqrt{3} = \sigma$ и $\Sigma_{II}/\sqrt{2} = \Gamma$, $\Gamma = \Sigma_d/\sqrt{2(1+m_\sigma^2)}$, то соотношения (1.10) можно представить в форме

$$\sigma_1^r = \sigma + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}m_\sigma\right)\Gamma, \quad \sigma_2^r = \sigma + \frac{2}{\sqrt{3}}m_\sigma\Gamma, \quad \sigma_3^r = \sigma - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}m_\sigma\right)\Gamma \quad (1.11)$$

или

$$\sigma_1^r = \sigma + \frac{\sqrt{3} - m_\sigma}{\sqrt{6(1+m_\sigma^2)}}\Sigma_d, \quad \sigma_2^r = \sigma + \frac{2m_\sigma}{\sqrt{6(1+m_\sigma^2)}}\Sigma_d, \quad \sigma_3^r = \sigma - \frac{\sqrt{3} + m_\sigma}{\sqrt{6(1+m_\sigma^2)}}\Sigma_d. \quad (1.12)$$

2. Если в векторном пространстве главных напряжений провести три плоскости через ось среднего напряжения и оси главных напряжений, то пространство разделится на шесть одинаковых сегментов.

Условия

$$m_\sigma = \pm 1/\sqrt{3} \quad (2.1)$$

делят эти плоскости на шесть полуплоскостей. Разделительной линией является ось среднего напряжения.

Подставляя (2.1) в (1.11), получим:

при $m_\sigma = 1/\sqrt{3}$

$$\sigma_1^r = \sigma_2^r = \sigma + \frac{2}{3}\Gamma, \quad \sigma_3^r = \sigma - \frac{4}{3}\Gamma; \quad (2.2)$$

при $m_\sigma = -1/\sqrt{3}$

$$\sigma_1^r = \sigma + \frac{4}{3}\Gamma, \quad \sigma_2^r = \sigma_3^r = \sigma - \frac{2}{3}\Gamma. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) видно, что на полуплоскостях, разделяющих векторное пространство главных напряжений на секторы, промежуточное главное напряжение является кратным

$$\sigma_2^r = \sigma_3^r \quad \text{или} \quad \sigma_2^r = \sigma_1^r. \quad (2.4)$$

Поэтому плоскости между сегментами будем называть плоскостями кратности или плоскостями сингулярности.

Из условия кратности главных напряжений вытекают условия совместности компонент тензора напряжения.

Действительно, промежуточное главное напряжение можно найти из условия равенства нулю определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_2^r & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_2^r & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_2^r \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Поскольку промежуточное напряжение является кратным, то матрица (2.5) имеет ранг равный единице и все ее миноры равны нулю [6].

Следовательно

$$(\sigma_{11} - \sigma_2^r)(\sigma_{22} - \sigma_2^r) = \sigma_{12}^2, \quad (\sigma_{22} - \sigma_2^r)(\sigma_{33} - \sigma_2^r) = \sigma_{23}^2, \quad (\sigma_{11} - \sigma_2^r)(\sigma_{33} - \sigma_2^r) = \sigma_{13}^2; \quad (2.6)$$

$$(\sigma_{11} - \sigma_2^r)\sigma_{23} = \sigma_{12}\sigma_{13}, \quad (\sigma_{22} - \sigma_2^r)\sigma_{13} = \sigma_{12}\sigma_{23}, \quad (\sigma_{33} - \sigma_2^r)\sigma_{12} = \sigma_{13}\sigma_{23}. \quad (2.7)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжения, отнесенные к декартовой системе координат x_i . В уравнениях (2.6) и (2.7) независимыми являются любые из трех соотношений.

Исключая из (2.7) девиаторную часть промежуточного главного напряжения, получим два условия совместности компонент тензора девиатора напряжения

$$\sigma'_{11} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = \sigma'_{22} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}} = \sigma'_{33} - \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}. \quad (2.8)$$

Сингулярность компонент тензора девиатора на плоскостях кратности является топологическим свойством пространства тензора напряжения.

Компоненты тензора напряжения σ_{ij} вычисляются через главные ранжированные напряжения посредством соотношений

$$\sigma_{ij} = \sum_{s=1}^3 \sigma_s^r n_{si} n_{sj}, \quad (2.9)$$

где n_{ij} – направляющие косинусы триэдра главных направлений ранжированных напряжений.

Направляющие косинусы удовлетворяют условиями ортогональности

$$n_{ik} n_{kj} = \delta_{ij}, \quad n_{ki} n_{kj} = \delta_{ij}, \quad (2.10)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Подставляя выражения (1.11) для ранжированных главных напряжений в (2.9), получим

$$\sigma_{ij} = (\sigma + 2m_\sigma \Gamma / \sqrt{3}) \delta_{ij} + (1 - \sqrt{3} m_\sigma) \Gamma n_{1i} n_{1j} - (1 + \sqrt{3} m_\sigma) \Gamma n_{3i} n_{3j}. \quad (2.11)$$

На плоскостях сингулярности напряжений компоненты тензора напряжения вычисляются по формулам:

на плоскости $m_\sigma = 1/\sqrt{3}$

$$\sigma_{ij} = \nu \delta_{ij} - 3n_{si} n_{sj} \delta_s \Gamma / 3 \quad (s = 3, 1), \quad (2.12)$$

где $\nu = \sigma + 2\delta_s \Gamma / 3$. Здесь и далее по s не суммировать.

На полуплоскости сингулярности, соответствующей $m_\sigma = 1/\sqrt{3}$, компоненты тензора напряжения зависят от двух инвариантов напряженного состояния ν , Γ и двух углов, определяющих направление вектора минимального ранжированного главного напряжения $\vec{\sigma}_3^r$. А на плоскости сингулярности, соответствующей $m_\sigma = -1/\sqrt{3}$, компоненты тензора напряжения зависят от двух инвариантов напряженного состояния ν , Γ и двух углов, определяющих направление вектора максимального ранжированного главного напряжения σ_1^r .

3. В общем виде условие пластичности сыпучих сред для каждого из сегментов векторного пространства главных напряжений представим в виде

$$f(\sigma, \Gamma, m_\sigma) = 0. \quad (3.1)$$

Разрешая (3.1) относительно максимального касательного напряжения, запишем

$$\Gamma = F(\sigma, m_\sigma). \quad (3.2)$$

При пересечении поверхности (3.1) с полуплоскостями кратности главных напряжений образуются ребра сингулярности.

Для ребра сингулярности справедливы соотношения:

$$\Gamma = F(\sigma, m_\sigma)|_{m_\sigma=1/\sqrt{3}} = F_3(\sigma), \quad \sigma_2^r = \sigma_1^r; \quad (3.3)$$

$$\Gamma = F(\sigma, m_\sigma)|_{m_\sigma=-1/\sqrt{3}} = F_1(\sigma), \quad \sigma_2^r = \sigma_3^r. \quad (3.4)$$

Индексы при функции F связаны с номером ранжированного главного напряжения, являющегося характеристическим для полуплоскости сингулярности.

Следуя терминологии Кармана-Хаара [6], ребра сингулярности будем называть ребрами полной пластичности.

Уравнениям ребер полной пластичности (3.3) и (3.4) можно придать вид:

$$\sigma_1^r - \sigma_3^r = 2F_s(\sigma), \quad \sigma_1^r - \sigma_2^r = 2F_s(\sigma) \quad (s = 3, 1). \quad (3.5)$$

Вид функций $F_s(\sigma)$ определяется экспериментальным путем при крайних значениях параметра вида напряженного состояния.

4. В связи с тем, что полуплоскости сингулярности разделяют векторное пространство главных напряжений на секторы, то закон пластического течения следует записывать для поверхности пластичности в пределах сегмента и на ребрах полной пластичности.

Скорость диссипации механической работы при пластическом течении для изотропного тела имеет вид

$$D = \sigma_1^r \varepsilon_1^r + \sigma_2^r \varepsilon_2^r + \sigma_3^r \varepsilon_3^r, \quad (4.1)$$

где ε_i^r – ранжированные главные скорости деформаций.

Связь между напряженным и деформированным состоянием в пределах сегментов определим из условия максимума диссипации (4.1) при ограничении, накладываемой связью (3.1). Рассмотрим функционал

$$D = \sigma_1^r \varepsilon_1^r + \sigma_2^r \varepsilon_2^r + \sigma_3^r \varepsilon_3^r - \lambda f(\sigma, \Gamma, m_\sigma), \quad (4.2)$$

Условие экстремума функционала (4.2) имеет вид

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i^r} = 0. \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.3) имеем

$$\varepsilon_i^r = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_i^r} + \frac{\partial f}{\partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_i^r} + \frac{\partial f}{\partial m_\sigma} \frac{\partial m_\sigma}{\partial \sigma_i^r} \right). \quad (4.4)$$

Учитывая

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_i^r} &= \frac{1}{3}, & \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_1^r} &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_3^r} = \frac{1}{2}, & \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_2^r} &= 0, \\ \frac{\partial m_\sigma}{\partial \sigma_1^r} &= \frac{-2}{\Gamma\sqrt{3}}(1 + 3\sqrt{3}m_\sigma), & \frac{\partial m_\sigma}{\partial \sigma_2^r} &= \frac{1}{\Gamma\sqrt{3}}, & \frac{\partial m_\sigma}{\partial \sigma_3^r} &= \frac{-2}{\Gamma\sqrt{3}}(1 - 3\sqrt{3}m_\sigma), \end{aligned} \quad (4.5)$$

запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^r &= \lambda \left(\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \Gamma} - \frac{2(1 + 3\sqrt{3}m_\sigma)}{\Gamma\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial m_\sigma} \right), \\ \varepsilon_2^r &= \lambda \left(\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial m_\sigma} \frac{\partial m_\sigma}{\partial \sigma_2^r} \right), \\ \varepsilon_3^r &= \lambda \left(\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \Gamma} - \frac{2(1 - 3\sqrt{3}m_\sigma)}{\Gamma\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial m_\sigma} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

На ребрах полной пластичности из (3.5) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^r &= (\lambda_1 + \lambda_2) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\partial F_s}{\partial \sigma} \right), & \varepsilon_2^r &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{2}{3} \frac{\partial F_s}{\partial \sigma} - \lambda_2, \\ \varepsilon_3^r &= -\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{2}{3} \frac{\partial F_s}{\partial \sigma}, & \lambda_1 &\geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad (s = 3, 1), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где λ_1, λ_2 – неопределенные множители Лагранжа.

Из (4.3) найдем

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = -\frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial F_s}{\partial \sigma}. \quad (4.8)$$

Учитывая зависимости между инвариантами Γ и Σ_d , условие пластичности (3.2) можно записать

$$\Sigma_\sigma^2 = 2(1 + m_\sigma^2)F^2(\sigma, m_\sigma). \quad (4.9)$$

На гладкой поверхности пластичности в пределах сегмента соотношения между компонентами тензора скорости пластической деформации и напряжений записываются в виде

$$\varepsilon = -\frac{4}{3}\lambda(1+m_\sigma^2)F(\sigma, m_\sigma)\frac{\partial F}{\partial \sigma},$$

$$\varepsilon'_{ij} = 2\lambda \left[\sigma'_{ij} - \left(2m_\sigma F^2(\sigma, m_\sigma) + (1+m_\sigma^2)F(\sigma, m_\sigma)\frac{\partial F(\sigma, m_\sigma)}{\partial m_\sigma} \right) \frac{1}{\cos\omega_\sigma} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial \sigma'_{ij}} \right], \quad (4.10)$$

где ε_{ij} – компоненты скорости пластической деформации, $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}/3$, $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma$. Производная $\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial \sigma'_{ij}}$ находится из условия, что $\omega_\sigma = -[\arcsin(3\sqrt{6}Q)]/3$,

где $Q = \det(\sigma'_{ij})\Sigma_\theta^{-3}$. Тогда

$$\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial \sigma'_{11}} = -\frac{\sqrt{6}}{\Sigma_\theta^3 \sqrt{1-54Q^2}} \left(\sigma'_{22}\sigma'_{33} - (\sigma'_{23})^2 - 3\sigma'_{11} \frac{\det(\sigma'_{ij})}{\Sigma_\theta^2} \right),$$

$$\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial \sigma'_{12}} = -\frac{\sqrt{6}}{\Sigma_\theta^3 \sqrt{1-54Q^2}} \left(\sigma'_{13}\sigma'_{23} - (\sigma'_{33})^2 - 6\sigma'_{12} \frac{\det(\sigma'_{ij})}{\Sigma_\theta^2} \right), \quad (4.11)$$

Поскольку на ребре полной пластичности $\sigma_2^r = \sigma + 2\delta_s F_s(\sigma)/3$, то условия кратности промежуточного главного напряжения (2.7) принимают вид

$$\begin{aligned} [\sigma_{11} - \sigma - 2\delta_s F_s(\sigma)/3]\sigma_{23} &= \sigma_{12}\sigma_{13}, \\ [\sigma_{22} - \sigma - 2\delta_s F_s(\sigma)/3]\sigma_{13} &= \sigma_{12}\sigma_{23}, \\ [\sigma_{33} - \sigma - 2\delta_s F_s(\sigma)/3]\sigma_{12} &= \sigma_{13}\sigma_{23}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Используя соотношения (4.9) как обобщенный пластический потенциал [3], можно получить определяющие соотношения на соответствующих ребрах полной пластичности

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{2}{3}\lambda_1 \left(1 - \frac{\delta_s}{3} \frac{dF_s(\sigma)}{d\sigma} \right) \sigma_{23} - \frac{1}{3}\lambda_2 \left(1 + \frac{\delta_s}{3} \frac{dF_s(\sigma)}{d\sigma} \right) \sigma_{13} - \frac{1}{3}\lambda_3 \left(1 + \frac{\delta_s}{3} \frac{dF_s(\sigma)}{d\sigma} \right) \sigma_{12}, \\ \varepsilon_{12} &= -\lambda_1\sigma_{13} - \lambda_2\sigma_{23} + \frac{1}{3}[2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22} - 2\delta_s F_s(\sigma)] \quad (4.13) \end{aligned}$$

5. На ребрах полной пластичности компоненты тензора напряжения σ_{ij} вычисляются через инвариант $\nu = \sigma + 2\delta_s T/3$ и направляющие косинусы минимального или максимального главного напряжения по формуле

$$\sigma_{ij} = \nu\delta_{ij} - \delta_s n_{si}n_{sj}F_s(\sigma). \quad (5.1)$$

Компоненты тензора напряжения σ_{ij} должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (5.2)$$

Подставляя соотношения (5.1) в уравнения равновесия (5.2), для ребер полной пластичности, принадлежащих полуплоскостям сингулярности $m_\sigma = \pm 1/\sqrt{3}$, получим систему трех уравнений

$$\begin{aligned} [1/2 + (1/3 - \delta_s n_{s1}^2)]F'_s\sigma_{,1} - 2\delta_s n_{s1}n_{s1,1}F_s - 2\delta_s n_{s1}n_{s2}F'_s\sigma_{,2} - \\ - \delta_s(n_{s,2}n_{s2} + n_{s1}n_{s2,2})F_s - 2\delta_s n_{s1}n_{s3}F'_s\sigma_{,3} - \delta_s(n_{s1,3}n_{s3} + n_{s1}n_{s3,3})F_s = 0 \quad (4.13), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $F'_s = dF_s/d\sigma$.

Если учесть условие ортогональности

$$n_{s1}^2 + n_{s2}^2 + n_{s3}^2 = 1, \quad (5.4)$$

то система уравнений (5.4) и (5.5) будет замкнутой относительно четырех переменных σ и n_{si} .

Система уравнений (5.3), (5.4) при соответствующих граничных условиях является статически определимой. Как показал Д. Д. Ивлев [1], [2] системы уравнений типа (5.3), (5.4) принадлежат к гиперболическому типу дифференциальных уравнений в частных производных.

6. Для изотропного тела справедливы условия совпадения направлений главных напряжений и главных скоростей деформации.

В случае соответствия напряженного и деформированного состояния ребрам полной пластичности фиксируются только направления $\vec{\sigma}_s^r$ ($s = 3, 1$). Поэтому условие изотропии сводится к совпадению направлений главного напряжения σ_s^r и главной скорости деформации ε_s^r . Известно

$$n_{sj}\varepsilon_s = \varepsilon_{ji}n_{si}. \quad (6.1)$$

Отсюда следует

$$\frac{\varepsilon_{1j}n_{sj}}{n_{s1}} = \frac{\varepsilon_{2j}n_{sj}}{n_{s2}} = \frac{\varepsilon_{3j}n_{sj}}{n_{s3}}. \quad (6.2)$$

Присоединяя к уравнениям (6.2) ассоциированный закон пластического изменения объема (4.4) и используя соотношения Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{j,i} + u_{i,j}, \quad (6.3)$$

получим для каждого ребра систему трех уравнений с тремя неизвестными u_i :

$$\varepsilon = \lambda F'_s, \quad \lambda = -(\lambda_1 + \lambda_3)/3, \quad (6.4)$$

$$(u_{1,j} + u_{j,1})\frac{n_{sj}}{n_{s1}} = (u_{2,j} + u_{j,2})\frac{n_{sj}}{n_{s2}} = (u_{3,j} + u_{j,3})\frac{n_{sj}}{n_{s3}} \quad (s = 3, 1). \quad (6.5)$$

Д. Д. Ивлев показал [1], [2], что системы типа уравнений (6.4), (6.5) принадлежат к гиперболическому типу. Характеристические многообразия для уравнений, определяющих кинематику пластического течения на ребре полной пластичности, совпадают с характеристическими многообразиями для поля напряжений (5.3), (5.4).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д. Д. Ивлев // ПММ. – 1958. – Т. 22, Вып. 1. – С. 90–96.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д. Д. Ивлев // Док. АН СССР. – 1959. – Т. 124. – № 3. – С. 546–549.
- [3] *Кузнецов, Е. Е.* Об изоморфизме упругопластических свойств / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию А. А. Ильюшина. – М. : Ленанд, 2006. – С. 166–171.
- [4] *Кузнецов, Е. Е.* Формулировка условия предельного состояния изотропных сред в инвариантах собственных упругих состояний / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 78-летию Е.И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 369–375.
- [5] *Кузнецов, Е. Е.* Об уравнениях пространственной задачи теории идеальной пластичности изотропных материалов / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Вестник Чуваш. гос. пед. ун.-та им. И. Я. Яковлева. К 80-летию Д. Д. Ивлева. – Чебоксары. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). – Ч. 2.
- [6] *Курош, А. Г.* Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Гостехтеоретиздат, 1952. – 335 с.

[7] Хаар, А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности. Сб. пер. – М. : Ил, 1948. – С. 41–56.

Y. Y. Kuznetsov, N. M. Mattchenko

FULL PLASTICITY OF LOOSE ENVIRONMENTS

Tula State University

Abstract. It is shown, that conditions of frequency rate of an intermediate main stress separate space of the main stress three planes which pass over hydrostatic an axis and axes of the main stress on six equal segments. Consequences of frequency rate of the main stress are two conditions of joint a component tensor stress. Therefore only four from six component tensor on planes of frequency rate are stress independent. Crossing a surface of plasticity with planes of frequency rate is formed with edges singularity. The equations of a field of stress and speeds of moving are written out.

Keywords: a vector of stress, the main stress, linear invariants, an intermediate main frequency rate, planes of frequency rate, a condition of plasticity, an singular edge.

Кузнецов Евгений Евгеньевич

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc_05@mail.ru

Матченко Николай Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc_05@mail.ru

Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenyevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Building, Building Materials and Designs, Tula State University, Tula

Mattchenko, Nikolay Mikhaylovich

Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Department of Mathematical Modeling, Tula State University, Tula

В. Д. Кулиев, Т. Н. Алексева

МНОГОСЛОЙНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

*Московский государственный открытый университет,
Коломенский институт (филиал) Московского государственного открытого
университета*

Аннотация. Рассматривается задача нахождения поля напряжений в двухслойном материале, находящемся под воздействием внешней температуры. Вычислены некоторые компоненты тензора термических напряжений.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, интегральные преобразования Лапласа и Фурье, термоупругий потенциал перемещений.

УДК: 539.3

В современной технике и технологии широкое применение нашли многослойные композиции. Разнородность слоев определяется не только исходными материалами, но и технологической последовательностью формирования этих систем и условиями их эксплуатации. Анализ тепловых воздействий представляет практический интерес не только для технических, но и для медицинских приложений. В частности, биомеханику костных систем и технических конструкционных материалов объединяет единый механизм разрушения многослойного материала.

При исследовании аналитических решений краевых задач многослойные материалы представляют полосами разных толщин и упругих свойств. Для плоской задачи теории упругости двухслойных материалов, находящихся под воздействием внешней температуры, решение строится из интегральных преобразований Лапласа и Фурье [1], [3].

1. Постановка задачи

Предполагается, что две однородные изотропные полосы жестко сцеплены вдоль плоскостей $x = h_1$, $x = H$. Поверхность двухслойного материала подвержена воздействию некоторой заданной температуры. Предполагается, что материал каждого из слоев является термоупругим. Задача считается симметричной относительно плоскости $y = 0$. На бесконечности напряжения отсутствуют, а смещения исчезают. Таким образом, приходим к следующей плоской краевой задаче теории термоупругости для двухслойных материалов.

1. Начальные условия

$$t = 0, T_j(x, y, 0) = 0. \quad (1)$$

2. Граничные условия

$$x = 0, T_1(0, y, t) = f(y, t), \quad f(y, t) = T_0 \sin \omega t, \quad (2)$$

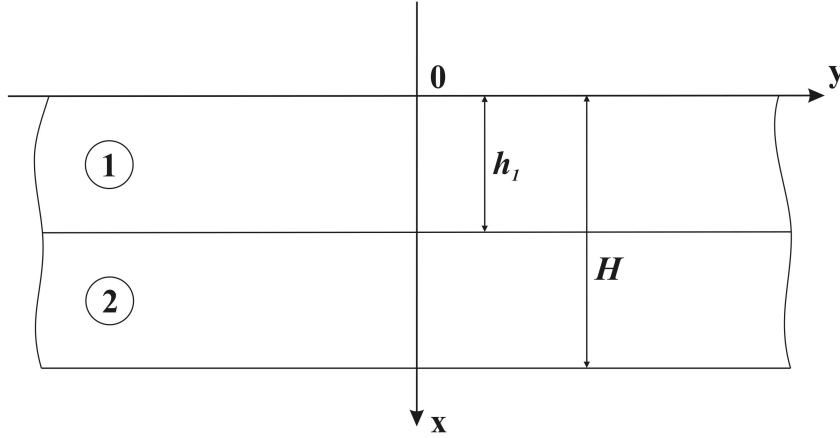


Рис. 1.

$$x = H, T_2(H, y, t) = \varphi(y, t), \quad \varphi(y, t) = 0;$$

$$x = h_1, \quad T_1(h_1, y, t) = T_2(h_1, y, t), \quad (3)$$

$$k_1 \left(\frac{\partial T_1(x, y, t)}{\partial x} \right)_{x=h_1} = k_2 \left(\frac{\partial T_2(x, y, t)}{\partial x} \right)_{x=h_1};$$

$$v_1(h_1, y, t) = v_2(h_1, y, t), \quad (4)$$

$$u_1(h_1, y, t) = u_2(h_1, y, t);$$

$$(\sigma_x)_1(h_1, y, t) = (\sigma_x)_2(h_1, y, t), \quad (5)$$

$$(\tau_{xy})_1(h_1, y, t) = (\tau_{xy})_2(h_1, y, t).$$

3. Условия на бесконечности

$$0 \leq x \leq H, \quad |y| \rightarrow \infty, \quad T_j(x, y, t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial T_j(x, y, t)}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial T_j^2(x, y, t)}{\partial y^2} \rightarrow 0; \quad (6)$$

$$(\sigma_x)_j, \quad (\sigma_y)_j, \quad (\tau_{xy})_j \rightarrow 0;$$

$$\Psi_j \rightarrow 0, \quad v_j \rightarrow 0, \quad u_j \rightarrow 0.$$

Здесь k_j – коэффициент теплопроводности j -го слоя, α_j – коэффициент температуропроводности j -го слоя, T_0 – амплитуда, являющаяся постоянной функцией, ω – циклическая частота, Ψ_j – термоупругий потенциал перемещений.

Всюду в дальнейшем считается, что изменения функции $T_j(x, y, t)$ во времени происходит с достаточно малой скоростью, когда влиянием инерционных членов в уравнениях движения теории упругости можно пренебречь, рассматривая движение как последовательность состояний равновесия (принцип Дюамеля) [4].

2. Решение краевой задачи (распределение температуры в многослойном материале)

Найдем распределение температуры $T_j(x, y, t)$ ($j = 1, 2$) в каждом слое.

Функция $T_j(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$a_j \left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial T_j}{\partial t}. \quad (7)$$

Применяя преобразование Лапласа и Фурье к уравнению (7), получаем линейное однородное дифференциальное уравнение II порядка

$$\frac{d^2 T_j^{**}(x, \lambda, s)}{dx^2} - \left(\lambda^2 + \frac{s}{a_j} \right) T_j^{**}(x, \lambda, s) = 0. \quad (8)$$

$$\left(\int_0^\infty T_j(x, y, t) e^{-st} dt = T_j^*(x, y, s), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty T_j^*(x, y, s) e^{i\lambda y} dy = T_j^{**}(x, \lambda, s) \right).$$

Решение уравнения (8) ищется в виде

$$T_j^{**}(x, \lambda, s) = C_1^{(j)} e^{-w_j x} + C_2^{(j)} e^{w_j x}, \quad (9)$$

где $w_j = \sqrt{\lambda^2 + \frac{s}{a_j}}$, а $C_1^{(j)}$ и $C_2^{(j)}$ - неизвестные функции.

Для нахождения функций $C_1^{(j)}$ и $C_2^{(j)}$ воспользуемся граничными условиями (2) и (3), применив к ним преобразование Лапласа и Фурье:

$$\begin{cases} T_1^{**}(h_1, \lambda, s) = T_2^{**}(h_1, \lambda, s), \\ k_1 \left(\frac{\partial T_1^{**}(x, \lambda, s)}{\partial x} \right)_{x=h_1} = k_2 \left(\frac{\partial T_2^{**}(x, \lambda, s)}{\partial x} \right)_{x=h_1}, \\ T_1^{**}(0, \lambda, s) = F(\lambda, s), \\ T_2^{**}(H, \lambda, s) = G(\lambda, s). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $F(\lambda, s), G(\lambda, s)$ - преобразованные по Лапласу и Фурье функции в граничных условиях (2), причем

$$f(\lambda, s) = F(\lambda, s) = \sqrt{2\pi} T_0 \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \delta(\lambda) (\delta(\lambda) - \text{дельта-функция Дирака}),$$

$$\varphi(\lambda, s) = G(\lambda, s) = 0. \quad (11)$$

Решение системы (10) с учетом (9) имеет вид

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} &= \frac{k_1 w_1 F(\lambda, s) e^{h_1 w_1} sh(w_2(H - h_1)) + k_2 w_2 \{ F(\lambda, s) e^{h_1 w_1} ch(w_2(H - h_1)) - G(\lambda, s) \}}{2k_1 w_1 ch(h_1 w_1) sh(w_2(H - h_1)) + 2k_2 w_2 sh(h_1 w_1) ch(w_2(H - h_1))}; \\ C_2^{(1)} &= \frac{k_1 w_1 F(\lambda, s) e^{-h_1 w_1} sh(w_2(H - h_1)) + k_2 w_2 \{ -F(\lambda, s) e^{-h_1 w_1} ch(w_2(H - h_1)) + G(\lambda, s) \}}{2k_1 w_1 ch(h_1 w_1) sh(w_2(H - h_1)) + 2k_2 w_2 sh(h_1 w_1) ch(w_2(H - h_1))}; \\ C_1^{(2)} &= \frac{k_1 w_1 \{ F(\lambda, s) e^{H w_2} - G(\lambda, s) e^{h_1 w_2} ch(h_1 w_1) \} + k_2 w_2 G(\lambda, s) e^{h_1 w_2} sh(h_1 w_1)}{2k_1 w_1 ch(h_1 w_1) sh(w_2(H - h_1)) + 2k_2 w_2 sh(h_1 w_1) ch(w_2(H - h_1))}; \\ C_2^{(2)} &= \frac{k_1 w_1 \{ -F(\lambda, s) e^{-H w_2} + G(\lambda, s) e^{-h_1 w_2} ch(h_1 w_1) \} + k_2 w_2 G(\lambda, s) e^{-h_1 w_2} sh(h_1 w_1)}{2k_1 w_1 ch(h_1 w_1) sh(w_2(H - h_1)) + 2k_2 w_2 sh(h_1 w_1) ch(w_2(H - h_1))}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $w_1 = \sqrt{\lambda^2 + \frac{s}{a_1}}$, $w_2 = \sqrt{\lambda^2 + \frac{s}{a_2}}$.

3. Решение краевой задачи (нахождение термоупругого потенциала перемещений)

Термоупругий потенциал перемещений Папковича-Гудьера $\Psi_j = \Psi_j(x, y, t)$ для квазистатического случая определяется уравнением Пуассона

$$\Delta \Psi_j = (1 + \nu_j) \alpha_j T_j, \quad (13)$$

где α_j – коэффициент линейного расширения, ν_j – коэффициент Пуассона.

Применяя преобразование Лапласа и Фурье к уравнению (13), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 \Psi_j^{**}(x, \lambda, s)}{dx^2} - \lambda^2 \Psi_j^{**}(x, \lambda, s) = (1 + \nu_j) \alpha_j T_j^{**}(x, \lambda, s) \quad (14)$$

$$((\Psi_j^*(x, y, s) = \int_0^\infty \Psi_j(x, y, t) e^{-st} dt \text{ (Res} > 0), \Psi_j^{**}(x, \lambda, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_j(x, y, s) e^{i\lambda y} dy),$$

решение которого имеет вид

$$\Psi_j^{**}(x, \lambda, s) = \tilde{C}_1^{(j)} e^{-\lambda x} + \tilde{C}_2^{(j)} e^{\lambda x} + \frac{a_j A_j C_1^{(j)}}{s} e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{s}{a_j}} x} + \frac{a_j A_j C_2^{(j)}}{s} e^{\sqrt{\lambda^2 + \frac{s}{a_j}} x}. \quad (15)$$

Здесь $A_j = (1 + \nu_j) \alpha_j$.

Термические напряжения и смещения, преобразованные по Лапласу и Фурье, выражаются через термоупругий потенциал $\Psi_j(x, y, t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} u_j^{**}(x, \lambda, s) &= \frac{d\Psi_j^{**}(x, \lambda, s)}{dx}, \\ v_j^{**}(x, \lambda, s) &= -i\lambda \Psi_j^{**}(x, \lambda, s), \\ (\sigma_x)_j^{**}(x, \lambda, s) &= 2G_j \lambda^2 \Psi_j^{**}(x, \lambda, s), \\ (\tau_{xy})_j^{**}(x, \lambda, s) &= -2G_j i \lambda \frac{d\Psi_j^{**}(x, \lambda, s)}{dx}. \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом (16) граничные условия (4) и (5) примут вид

$$\begin{aligned} v_1^{**}(h_1, \lambda, s) &= v_2^{**}(h_1, \lambda, s), \\ u_1^{**}(h_1, \lambda, s) &= u_2^{**}(h_1, \lambda, s), \\ (\sigma_x)_1^{**}(h_1, \lambda, s) &= (\sigma_x)_2^{**}(h_1, \lambda, s), \\ (\tau_{xy})_1^{**}(h_1, \lambda, s) &= (\tau_{xy})_2^{**}(h_1, \lambda, s). \end{aligned} \quad (17)$$

Решение системы (17) с учетом (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^{(1)} &= -\frac{1}{2} e^{\lambda h_1} \frac{a_1 A_1}{\lambda s} \left(w_1 \left(C_1^{(1)} e^{-w_1 h_1} - C_2^{(1)} e^{w_1 h_1} \right) + \lambda \left(C_1^{(1)} e^{-w_1 h_1} + C_2^{(1)} e^{w_1 h_1} \right) \right); \\ \tilde{C}_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} e^{-\lambda h_1} \frac{a_1 A_1}{\lambda s} \left(w_1 \left(-C_1^{(1)} e^{-w_1 h_1} + C_2^{(1)} e^{w_1 h_1} \right) + \lambda \left(C_1^{(1)} e^{-w_1 h_1} + C_2^{(1)} e^{w_1 h_1} \right) \right); \\ \tilde{C}_1^{(2)} &= -\frac{1}{2} e^{\lambda h_1} \frac{a_2 A_2}{\lambda s} \left(w_2 \left(C_1^{(2)} e^{-w_2 h_1} - C_2^{(2)} e^{w_2 h_1} \right) + \lambda \left(C_1^{(2)} e^{-w_2 h_1} + C_2^{(2)} e^{w_2 h_1} \right) \right); \end{aligned}$$

$$\tilde{C}_2^{(2)} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda h_1} \frac{a_2 A_2}{\lambda s} \left(w_2 \left(-C_1^{(2)} e^{-w_2 h_1} + C_2^{(2)} e^{w_2 h_1} \right) + \lambda \left(C_1^{(2)} e^{-w_2 h_1} + C_2^{(2)} e^{w_2 h_1} \right) \right). \quad (18)$$

Применяя обратные преобразования Фурье и Лапласа к (17) с учетом (15), можно получить термические напряжения $(\sigma_x)_j$, $(\sigma_y)_j$, $(\tau_{xy})_j$ и смещения u_j , v_j вследствие действия термических напряжений.

Для решения плоской задачи теории упругости с трещиной нормального разрыва особый интерес представляет нахождение нормального напряжения $\sigma_{y1}^*(x, y, t)$.

Подставим (15) и (18) в (17), учитывая (11), после упрощений получим

$$\begin{aligned} \sigma_{y1}^{**}(x, \lambda, s) &= 2G_1 a_1 A_1 \frac{w_1}{sz} \sqrt{2\pi} T_0 \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \delta(\lambda) \\ &[-k_1 w_1^2 sh(w_2(H - h_1)ch(w_1(h_1 - x)) - k_2 w_1 w_2 ch(w_2(H - h_1)sh(w_1(h_1 - x)) + \\ &+ k_1 \lambda^2 sh(w_2(H - h_1)ch(\lambda(h_1 - x)) + k_2 w_2 \lambda ch(w_2(H - h_1)sh(\lambda(h_1 - x))]. \end{aligned} \quad (19)$$

Выполним обратное преобразование Фурье и Лапласа:

$$\sigma_{y1}^*(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Res-i\infty}^{Res+i\infty} e^{st} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{y1}^{**}(x, \lambda, s) e^{-i\lambda y} d\lambda \right] ds.$$

При помощи обратного преобразования Фурье из (19) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_{y1}^*(x, y, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{y1}^{**}(x, \lambda, s) e^{-i\lambda y} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_{y1}^*(x, 0, s); \\ \sigma_{y1}^*(x, 0, s) &= -2G_1 a_1 A_1 T_0 \frac{\sqrt{2\pi}\omega}{\omega^2 + s^2} \frac{1}{z} [sh(w_2(H - h_1))ch(w_1(h_1 - x)) + \\ &+ k_c h(w_2(H - h_1))sh(w_1(h_1 - x))]. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $z = ch(w_1 h_1)sh(w_2(H - h_1)) + ksh(w_1 h_1)ch(w_2(H - h_1))$,

$$k = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}, \quad w_1 = \sqrt{\frac{s}{a_1}}, \quad w_2 = \sqrt{\frac{s}{a_2}}. \quad (21)$$

Выполним обратное преобразование Лапласа с помощью теоремы Коши о вычетах:

$$\sigma_{y1}(x, 0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Res-i\infty}^{Res+i\infty} \sigma_{y1}^*(x, y, s) e^{st} ds = \sum_{s_k} \text{Выч}(\sigma_{y1}^*(x, y, s) e^{st}, s_k),$$

где s_k — особые точки функции $\sigma_{y1}^*(x, y, s)$.

Из (21) следует, что функция $\sigma_{y1}^*(x, y, s)$ имеет три особые точки: $s = 0$ (точка устранимого разрыва); $s = i\omega$, $s = -i\omega$ (полюсы I порядка), откуда

$$\sigma_{y1}^*(x, 0, t) = \text{Выч}(\sigma_{y1}^* e^{st} |_{s=i\omega}, i\omega) + \text{Выч}(\sigma_{y1}^* e^{st} |_{s=-i\omega}, -i\omega).$$

Таким образом, после соответствующих вычислений получим

$$\sigma_{y1}^*(x, 0, t) = -2G_1 a_1 A_1 T_0 \frac{1}{I_1^2 + I_2^2} [(I_1 I_4 - I_2 I_3) \cos \omega t + (I_1 I_3 - I_2 I_4) \sin \omega t]. \quad (22)$$

Здесь $d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a_2}} (H - h_1)$, $d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a_1}} h_1$, $d_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a_1}} (h_1 - x)$;

$$I_1 = \frac{1}{2}[(k+1)sh(d_2 + d_1) \cos(d_2 + d_1) + (k-1)sh(d_2 - d_1) \cos(d_2 - d_1)],$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(k+1)ch(d_2 + d_1) \sin(d_2 + d_1) + (k-1)ch(d_2 - d_1) \sin(d_2 - d_1)],$$

$$I_3 = \frac{1}{2}[(k+1)sh(d_1 + d_3) \cos(d_1 + d_3) + (k-1)sh(d_1 - d_3) \cos(d_1 - d_3)],$$

$$I_4 = \frac{1}{2}[(k+1)ch(d_1 + d_3) \sin(d_1 + d_3) + (k-1)ch(d_1 - d_3) \sin(d_1 - d_3)].$$

Упрощение выражения (22), а также решение систем (10),(17) в символьном виде выполнено с помощью системы аналитических вычислений Maple [2].

Заключение. Определены отдельные компоненты тензора термических напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кулиев, В. Д.* Сингулярные краевые задачи / В. Д. Кулиев – М. : Физматлит, 2005. – 720 с.
- [2] *Матросов, А. В.* Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А. В. Матросов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.
- [3] *Свешников, А. Г.* Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
- [4] *Талыпов, Г. Б.* Сварочные напряжения и деформации / Г. Б. Талыпов. – Л. : Машиностроение, 1973. – 280 с.

V. D. Kuliev, T. N. Alekseeva

**MULTILAYER MATERIALS UNDER THE INFLUENCE OF OUTSIDE
TEMPERATURE**

Moscow State Open University

Kolomna Institute (branch) of Moscow State Open University

Abstract. The problem of finding the stress field in two-layer materials under the influence of external temperature is considered. Some component of thermal stress tensor for this system was calculated too.

Keywords: plane problem of elasticity theory, Laplace and Fourier integrals, thermoelastic displacement potential.

Кулиев Валех Джафарович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московский государственный открытый университет, г. Москва

e-mail: alexeevatn75@rambler.ru

Алексеева Татьяна Николаевна

старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики КИ(ф)МГОУ, г. Коломна

e-mail: alexeevatn75@rambler.ru

Kuliev, Valekh Dzhafarovich

Dr. of Phys. & Math., Professor, Department of Mathematics, Moscow State Open University, Moscow

Alekseeva, Tatyana Nikolaevna

Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Kolomna Institute (branch) of Moscow State Open University, Kolomna

Б. Г. Миронов, Т. В. Митрофанова

О КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе исследовано напряженно-деформированное состояние кругового и цилиндрического стержней. Получены уравнения для определения характеристик, соотношения вдоль характеристик. Показано, что характеристики являются прямыми.

Ключевые слова: кручение, цилиндрический стержень, анизотропия, характеристики, деформация, напряжение, линии разрыва.

УДК: 539.374

Рассмотрим анизотропный цилиндрический стержень, ориентированный в декартовой системе координат xuz , причем образующие стержня направлены параллельно оси z . Предположим, что стержень закручивается вокруг своей оси.

Пусть напряженное состояние стержня характеризуется условием пластичности

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + D\tau_{xy}^2 + E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2 = 1, \quad (1)$$

где A, B, C, D, E, F – const, σ_{ij} – компоненты напряжений в декартовой системе координат.

К соотношению (1) присоединим три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1), (2) является статически неопределимой. Предположим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \quad (3)$$

С учетом (3) из (1) и (2) получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad E\tau_{xz}^2 + F\tau_{yz}^2 = 1. \quad (4)$$

Второму уравнению (4) удовлетворим, полагая

$$\tau_{xz} = a \cos \varphi, \quad \tau_{yz} = b \sin \varphi, \quad \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi, \quad (5)$$

где $a = \frac{1}{\sqrt{F}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{E}}$.

Подставляя выражения (5) в первое уравнение (4), получим

$$-a \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Система для определения характеристик (6) имеет вид

$$-\frac{dx}{a \sin \varphi} = \frac{dy}{b \cos \varphi} = \frac{d\varphi}{0}. \quad (7)$$

Из (7) следует

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi, \quad \varphi = \text{const}. \quad (8)$$

Следовательно, характеристики есть прямые линии

$$y = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi \cdot x + C(\varphi). \quad (9)$$

Согласно (5)

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \theta, \quad (10)$$

где θ – угол, который образует вектор касательного напряжения τ с осью Ox .

Боковая поверхность стержня свободна от усилий, тогда касательное напряжение τ направлено по касательной к контуру L , где L – контур поперечного сечения стержня в плоскости xy ($z = \text{const}$). В рассматриваемом случае контур поперечного сечения есть окружность произвольного радиуса R

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (11)$$

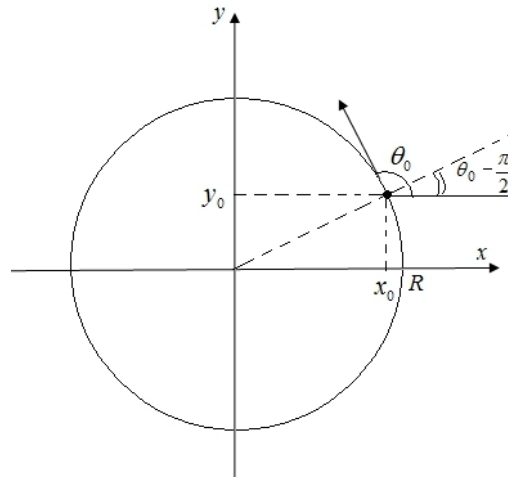


Рис. 1.

Пусть $(x_0, y_0) \in L$ и $\theta(x_0, y_0) = \theta_0$ (рис. 1). Тогда

$$\frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg} \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \theta_0. \quad (12)$$

Из (12), учитывая (10), получим

$$\operatorname{ctg} \varphi_0 = -\frac{b x_0}{a y_0}. \quad (13)$$

Тогда с учетом (11) и (13) уравнение семейства характеристик (9) примет вид

$$y = \pm \frac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{a^2 x_0} [(a^2 - b^2)x_0 + b^2 x]. \quad (14)$$

Уравнение огибающей данного семейства характеристик имеет вид

$$y = \pm \frac{b^2}{a^2} \left(\sqrt[3]{\frac{(b^2 - a^2)^2 R^2}{b^4} - x^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (15)$$

Расположение характеристик и огибающей характеристик приведено на рис. 2. В случае $a > b$, когда $y_{1,2} = \pm \frac{R(b^2 - a^2)}{a^2}$. В случае, когда $a < b$, $x_{1,2} = \pm \frac{R(b^2 - a^2)}{b^2}$.

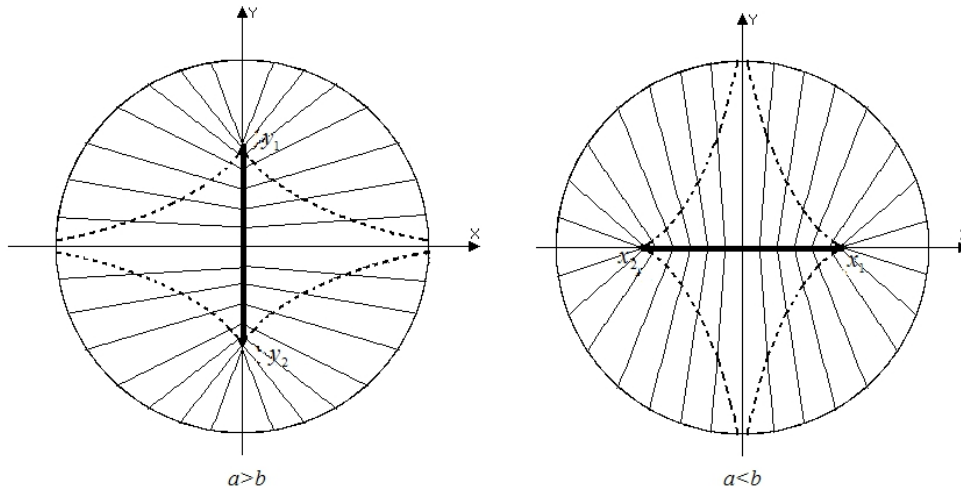


Рис. 2.

Деформированное состояние стержня определим из соотношений ассоциированного закона пластического течения. Из условия экстремума функционала

$$A = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + 2(\varepsilon_{xy} \tau_{xy} + \varepsilon_{yz} \tau_{yz} + \varepsilon_{xz} \tau_{xz}) - \mu \left(A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + D\tau_{xy}^2 + E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2 - 1 \right) \quad (16)$$

имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2\mu((A+C)\sigma_x - A\sigma_y - C\sigma_z), & \varepsilon_{xy} &= 2\mu D\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= 2\mu(-A\sigma_x + (A+B)\sigma_y - B\sigma_z), & \varepsilon_{yz} &= 2\mu E\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= 2\mu(-C\sigma_x - B\sigma_y + (C+B)\sigma_z), & \varepsilon_{xz} &= 2\mu F\tau_{xz}. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно (3) из (16) и (17) получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad F\varepsilon_{yz}\tau_{yz} = E\varepsilon_{xz}\tau_{xz}. \quad (18)$$

Считая деформации настолько малыми, что изменениями геометрии тела можно пренебречь, имеем, что при кручении напряжения в данной точке тела остаются постоянными по величине и направлению. В этом случае соотношения ассоциированного закона течения интегрируются, и так как в начальный момент закручивания все компоненты деформации равны нулю, то из (18) получим

$$e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \quad F e_{yz} \tau_{yz} = E e_{xz} \tau_{xz}, \quad (19)$$

где e_{ij} – компоненты тензора деформаций.

В соотношениях (19) перейдем к компонентам перемещений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (20)$$

Согласно (5) имеем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) b \cos \varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) a \sin \varphi. \quad (21)$$

Удовлетворим соотношениям (21), полагая

$$u = \rho yz, \quad v = -\rho xz, \quad w = w(x, y), \quad (22)$$

где $\rho = \text{const.}$

С учетом (22) из (21) следует

$$-\frac{\partial w}{\partial x} a \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} b \cos \varphi = \rho (ya \sin \varphi + xb \cos \varphi). \quad (23)$$

Система уравнений для определения характеристик соотношения (23) имеет вид

$$-\frac{dx}{a \sin \varphi} = \frac{dy}{b \cos \varphi} = \frac{dw}{\rho (ya \sin \varphi + xb \cos \varphi)}. \quad (24)$$

Из (24) имеем

$$dw = -\frac{\rho}{a} (ya + xb \operatorname{ctg} \varphi) dx. \quad (25)$$

Отсюда следует

$$w = -\frac{\rho}{a^3} \left[y_0 (a^2 - b^2) x + b^2 \left(\frac{y_0^2 - ax_0^2}{x_0 y_0} \right) x^2 \right] + c_1, \quad y_0 = \pm \sqrt{R^2 - x_0^2}, \quad (26)$$

где c_1 – постоянная, своя вдоль каждой характеристики.

Постоянная c_1 определяется из граничных условий для перемещения w . Рассматривая линию разрыва напряжений как предельное положение жесткого слоя, положим деформацию сдвига на этих линиях равной нулю. Тогда получим

$$2e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \rho y = 0, \quad 2e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \rho y = 0. \quad (27)$$

Согласно (27) вдоль линии разрыва имеет место соотношение

$$dw = \rho (-y dx + x dy). \quad (28)$$

Учитывая, что при $a > b$ уравнение линии разрыва напряжений имеет вид

$$x = 0 \quad \text{при} \quad y_1 \leq y \leq y_2, \quad (29)$$

из (28) следует

$$w = \text{const.} \quad (30)$$

Принимая в какой-нибудь точке линии разрыва $w = 0$, из (26) и (30) получим, что $c_1 = 0$. В случае кручения стержня, поперечное сечение которого есть эллипс

$$L: \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1, \quad (31)$$

уравнение семейства характеристик будет иметь вид

$$y = \pm \frac{d}{a^2 c} \sqrt{c^2 - x_0^2} \left((a^2 - b^2) x_0 + b^2 x \right), \quad (32)$$

уравнение огибающей данного семейства характеристик –

$$y_1 = \pm \frac{b^2 d}{a^2 c} \left(\sqrt[3]{\frac{(b^2 - a^2) c^2}{b^4} - x_0^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (33)$$

Расположение характеристик и огибающей характеристик приведено на рис. 3 и 4. Для случая $a > b$ отрезок $A_1 A_2$ является линией разрыва напряжений (рис. 3а и 4а). Для случая $a < b$ отрезок $B_1 B_2$ является линией разрыва напряжений (рис. 3б и 4б).

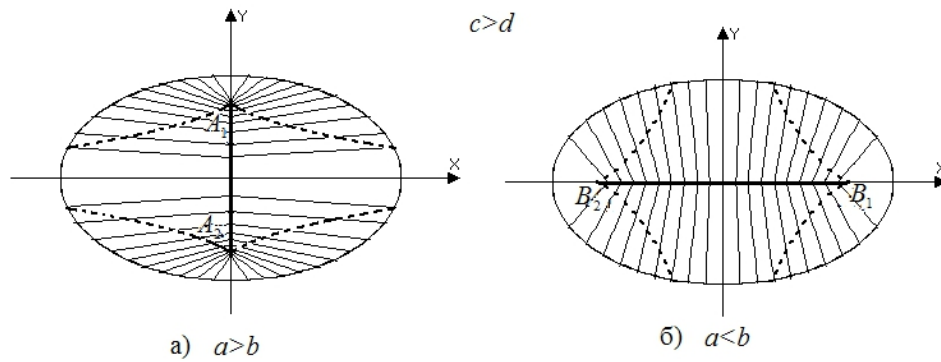


Рис. 3.

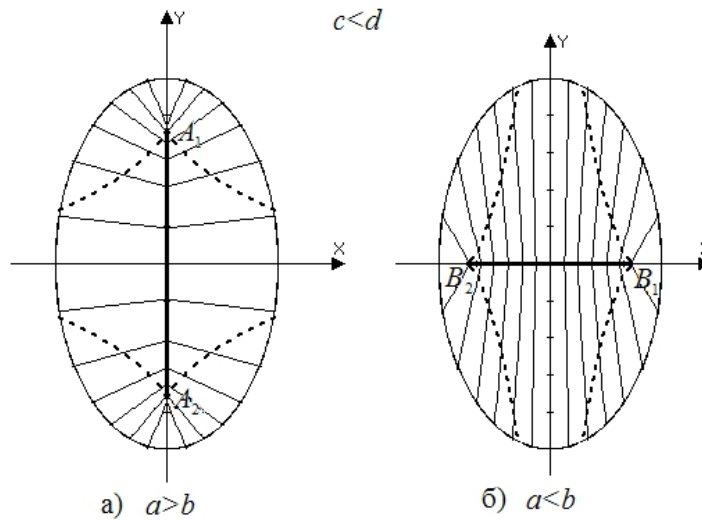


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [2] *Козлова, Л.С.* Предельное состояние призматических стержней при кручении / Л. С. Козлова // Чув. гос. пед ун-т им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары, 2010. – 7 с. – Библиогр. : 3 назв. Рус. Деп. в ВИНТИ 29.04.10 № 232-В2010.
- [3] *Миронов, Б.Г.* О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чув. гос. пед. ин-та им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1(48). – С. 98-101.
- [4] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.

B. G. Mironov, T. V. Mitrofanova

TORSION OF ANISOTROPIC CYLINDRICAL CORES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Intense-deformed condition of circular and cylindrical cores is investigated in the work. The equations for definition of characteristics, parities along characteristics are found. It is shown that the characteristics are straight lines.

Keywords: torsion, cylindrical core, anisotropy, characteristics, deformation, pressure, rupture lines.

Миронов Борис Гурьевич

доктор физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

Митрофанова Татьяна Валерьевна

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mitrofanova, Tatyana Valeryevna

Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

М. В. Мирсалимов

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕРЕГОВ ТРЕЩИНЫ В ПОЛОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Азербайджанский технический университет

Аннотация. Рассматривается задача механики разрушения для полосы (стержня), ослабленного прямолинейной трещиной со связями между берегами в концевых зонах, при действии неравномерного температурного поля. Считается, что под действием тепловой нагрузки имеет место частичное закрытие трещины. Толщина полосы считается переменной. Определение контактных усилий и усилий в связях между берегами трещин в концевых зонах сводится к системе сингулярных интегральных уравнений. Получено условие предельного состояния полосы.

Ключевые слова: полоса (стержень) переменной толщины, контактные усилия, трещина со связями между берегами, силы сцепления, зона контактная, неравномерный нагрев.

УДК: 539.375

Полосы (стержни) переменной толщины широко используются в различных изделиях и конструкциях. Часто они подвергаются действию тепловых нагрузок. Для приложений исследование вопросов разрушения полос (стержней) переменной толщины при неравномерном нагреве имеет важное значение.

Рассмотрим упругую однородную изотропную полосу (стержень) переменной толщины, ослабленную одной сквозной прямолинейной трещиной, направленной перпендикулярно к боковым граням полосы. Обозначим через $2c$ и $2h$ соответственно ширину и толщину полосы, а через 2ℓ – длину трещины с концевыми зонами. Пусть полоса с нецентрально расположенной трещиной подвергается неравномерному нагреву по ширине поперечного сечения. Считается, что температура является только функцией x и не зависит от других координат.

Будем использовать прямолинейную систему декартовых координат Oxy , считая, что декартовы координаты x, y в срединной плоскости полосы являются плоскостью симметрии и в плоскости Oxy трещина расположена вдоль оси Ox при $a \leq x \leq b$, где a, b – абсциссы концов трещины с концевыми зонами (длина трещины $2\ell = b - a$).

Рассматривается модель трещины со связями (силы сцепления), непрерывно распределенными в узкой концевой зоне трещины и имеющими заданную диаграмму деформирования. При этом силы сцепления (связи) сосредоточены в некоторой узкой концевой зоне, размер которой заранее неизвестен и должен быть определен из решения задачи. Принято, что процесс разрушения локализован в концевой зоне, которая рассматривается как часть трещины и соизмерима с размером трещины.

Полоса переменной толщины с трещиной с концевыми зонами при неравномерном нагреве находится в обобщенном плоско-напряженном состоянии. Выделим части трещины $d_1 = a_1 - a$ и $d_2 = b - b_1$ (концевые области), в которых между берегами трещины имеют место силы сцепления (рис. 1).

Поступила 14.10.2010

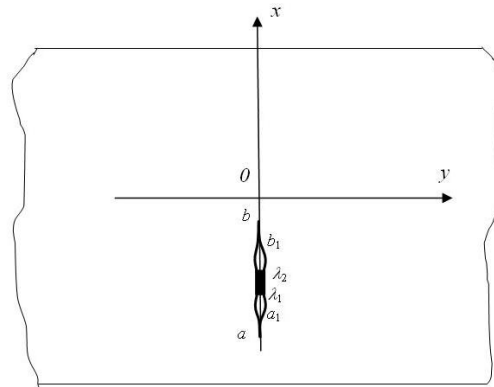


Рис. 1. Расчетная схема задачи о частичном закрытии трещины в полосе переменной толщины

Взаимодействие берегов трещины в концевых зонах моделируется путем введения между берегами трещины связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры концевых зон зависят от вида материала.

Под действием неравномерного нагрева в связях, соединяющих берега трещин в концевых зонах, будут возникать нормальные $q_y(x)$ и касательные $q_{xy}(x)$ усилия. Величины этих усилий заранее неизвестны и подлежат определению. Поскольку концевые зоны трещины малы по сравнению с остальной частью упругой полосы, то их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Таким образом, к берегам трещины в концевых зонах будут приложены нормальные и касательные усилия, численно равные $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$, соответственно.

Считаем, что толщина полосы $2h(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_2,$$

где h_1 и h_2 – наименьшее и наибольшее значение толщины полосы, соответственно.

Функция толщины может быть представлена в виде [1].

$$h(x, y) = h_0 [1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)], \tag{1}$$

где $h_0 = (h_1 + h_2)/2$; $\varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_1 + h_2)$ – малый параметр; $\bar{h}(x, y)$ – некоторая безразмерная непрерывная функция ($-1 \leq \bar{h}(x, y) \leq 1$). При заданном законе изменения толщины ε будет постоянным.

Грани полосы, параллельные плоскости Oxy , приняты свободными от внешних нагрузок. Берега трещины вне концевых зон считаются свободными от внешних нагрузок.

Принимается, что под действием тепловой нагрузки в зоне сжимающих напряжений происходит частичное закрытие трещины на участке $\lambda_1 \leq x \leq \lambda_2$ в средней части трещины. Это взаимодействие берегов трещины приводит к появлению контактных напряжений. В контактной зоне (λ_1, λ_2) возникают контактные нормальные $p_y(x)$ и касательные $p_{xy}(x)$ усилия. Величины этих усилий и размеры зоны контакта берегов трещины заранее неизвестны и подлежат определению.

Уравнения статического деформирования полосы переменной толщины имеют вид [1, 2]: уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

закон Гука

$$N_x = \frac{2Eh}{1-v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_y = \frac{2Eh}{1-v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad N_{xy} = \frac{Eh}{1+v} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (3)$$

где N_x, N_y, N_{xy} – нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины; u, v – компоненты вектора перемещений; E – модуль упругости Юнга, v – коэффициент Пуассона материала полосы.

Граничное условие контактной задачи на берегах трещины со связями между берегами в концевых зонах имеет вид

$$N_y(x, 0) - iN_{xy}(x, 0) = 0 \quad \text{на свободных берегах трещины,}$$

$$N_y(x, 0) - iN_{xy}(x, 0) = q_y(x) - iq_{xy}(x) \quad \text{на берегах концевых зон трещины,} \quad (4)$$

$$N_y(x, 0) - iN_{xy}(x, 0) = p_y(x) - ip_{xy}(x) \quad \text{на участке контакта берегов трещины.}$$

Основные уравнения задачи необходимо дополнить соотношениями, связывающими раскрытие берегов трещины и усилия в связях, а также условие отсутствия раскрытия трещины в контактной зоне.

Эти соотношения представим в виде [3, 4]

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = C(x, \sigma) [q_y(x) - iq_{xy}(x)], \quad (5)$$

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \lambda_1 \leq x \leq \lambda_2. \quad (6)$$

Здесь функцию $C(x, \sigma)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения, $(v^+ - v^-)$ и $(u^+ - u^-)$ – нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов трещины; $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$ – модуль вектора усилий в связях; $i = \sqrt{-1}$.

Решение системы уравнений статического деформирования полосы переменной толщины ищем в виде

$$N_x = N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^{(1)} + \dots, \quad N_y = N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^{(1)} + \dots, \quad N_{xy} = N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{(1)} + \dots, \quad (7)$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots,$$

$$q_y = q_y^{(0)} + \varepsilon q_y^{(1)} + \dots, \quad q_{xy} = q_{xy}^{(0)} + \varepsilon q_{xy}^{(1)} + \dots$$

$$p_y = p_y^{(0)} + \varepsilon p_y^{(1)} + \dots, \quad p_{xy} = p_{xy}^{(0)} + \varepsilon p_{xy}^{(1)} + \dots$$

$$a = a^0 + \varepsilon a^1 + \dots, \quad b = b^0 + \varepsilon b^1 + \dots,$$

$$\lambda_1 = \lambda_1^0 + \varepsilon \lambda_1^1 + \dots, \quad \lambda_2 = \lambda_2^0 + \varepsilon \lambda_2^1 + \dots$$

Формулы (1), (7) подставляем в (2), (3) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε . В полученных уравнениях уравнения нулевого приближения совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого приближения представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости с объемной силой, определяемой согласно [1]

$$X_1 = N_x^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}, \quad Y_1 = N_y^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}. \quad (8)$$

Аналогично определяются составляющие X_2 , Y_2 объемной силы для второго и последующих приближений.

Граничные условия задачи принимают вид:
для нулевого приближения

$$N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad a_1 < x < \lambda_1^0 \quad \text{и} \quad \lambda_2^0 < x < b_1, \quad (9)$$

$$N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} = q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} \quad \text{при } y = 0, \quad a^0 \leq x \leq a_1 \quad \text{и} \quad b_1 < x < b^0,$$

$$N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} = p_y^{(0)} - ip_{xy}^{(0)} \quad \text{при } y = 0, \quad \lambda_1^0 \leq x \leq \lambda_2^0,$$

для первого приближения

$$N_y^* - iN_{xy}^* = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad a_1 < x < \lambda_1^1 \quad \text{и} \quad \lambda_2^1 < x < b_1, \quad (10)$$

$$N_y^* - iN_{xy}^* = q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)} - \bar{h}(x, 0) \left(q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} \right) \quad \text{при } y = 0, \quad a^1 \leq x \leq a_1 \quad \text{и} \quad b_1 < x < b^1,$$

$$N_y^* - iN_{xy}^* = p_y^{(1)} - ip_{xy}^{(1)} - \bar{h}(x, 0) \left(p_y^{(0)} - ip_{xy}^{(0)} \right) \quad \text{при } y = 0, \quad \lambda_1^1 \leq x \leq \lambda_2^1.$$

При выводе уравнений первого приближения были приняты обозначения

$$N_x^* = N_x^{(1)} - N_{x_0}^{(1)}, \quad N_y^* = N_y^{(1)} - N_{y_0}^{(1)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy}^{(1)} - N_{xy_0}^{(1)},$$

$$N_{x_0}^{(1)} = \bar{h}(x, y)N_x^{(0)}, \quad N_{y_0}^{(1)} = \bar{h}(x, y)N_y^{(0)}, \quad N_{xy_0}^{(1)} = \bar{h}(x, y)N_{xy}^{(0)}.$$

Применяя метод возмущений к дополнительным соотношениям (5), (6), находим:
для нулевого приближения

$$(v_0^+ - v_0^-) - i(u_0^+ - u_0^-) = C(x, \sigma_0) \left[q_y^{(0)}(x) - iq_{xy}^{(0)}(x) \right] \quad \text{в концевых зонах трещин}, \quad (11)$$

$$(v_0^+ - v_0^-) - i(u_0^+ - u_0^-) = 0 \quad \text{в контактной зоне},$$

для первого приближения

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = C(x, \sigma_1) \left[q_y^{(1)}(x) - iq_{xy}^{(1)}(x) \right] \quad \text{в концевых зонах}, \quad (12)$$

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = 0 \quad \text{в контактной зоне}.$$

$$\text{Здесь } \sigma_j = \sqrt{\left[q_y^{(j)} \right]^2 + \left[q_{xy}^{(j)} \right]^2} \quad (j = 0, 1).$$

Напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины с концевыми зонами определяем приближенно в том смысле [5], что будем удовлетворять граничным условиям задачи на контуре трещины (условиям (9) – (10)) и требовать, чтобы на значительном расстоянии от трещины напряженное состояние в полосе совпадало с термонапряженным состоянием, вызванным неравномерным нагревом для сплошной (бездефектной) полосы.

Рассмотрим решение для нулевого приближения. Представим напряженное состояние в нулевом приближении в виде

$$N_x^{(0)} = N_{xT}^{(0)} + N_{x1}^{(0)}, \quad N_y^{(0)} = N_{yT}^{(0)} + N_{y1}^{(0)}, \quad N_{xy}^{(0)} = N_{xyT}^{(0)} + N_{xy1}^{(0)}. \quad (13)$$

Здесь $N_{xT}^{(0)}$, $N_{yT}^{(0)}$, $N_{xyT}^{(0)}$ – нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины в сплошной бездефектной полосе и вызванные неравномерным нагревом; $N_{x1}^{(0)}$, $N_{y1}^{(0)}$,

$N_{xy_1}^{(0)}$ – нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины, вызванные наличием трещины со связями между берегами в концевых зонах.

Для температурных усилий $N_{xT}^{(0)}$, $N_{yT}^{(0)}$, $N_{xyT}^{(0)}$ имеем

$$\frac{N_{yT}^{(0)}}{2h_0} = -\alpha ET(x) + \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \alpha ET(x) dx + \frac{3x}{2c^3} \int_{-c}^c \alpha ET(x) x dx, \quad (14)$$

$$N_{xT}^{(0)} = 0, \quad N_{xyT}^{(0)} = 0.$$

Здесь α – коэффициент линейного температурного расширения материала полосы; $T(x)$ – температурная функция.

С учетом (13) и (14) граничное условие (9) примет вид

$$N_{y_1}^{(0)} = -N_{yT}^{(0)}, \quad N_{xy_1}^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad a_1 < x < \lambda_1^0 \quad \text{и} \quad \lambda_2^0 < x < b_1,$$

$$N_{y_1}^{(0)} = q_y^{(0)} - N_{yT}^{(0)}; \quad N_{xy_1}^{(0)} = q_{xy}^{(0)} \quad \text{при} \quad y = 0, \quad a^0 \leq x \leq a_1 \quad \text{и} \quad b_1 < x < b^0,$$

$$N_{y_1}^{(0)} = p_y^{(0)} - N_{yT}^{(0)}; \quad N_{xy_1}^{(0)} = p_{xy}^{(0)} \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \lambda_1^0 \leq x \leq \lambda_2^0.$$

Компоненты усилий $N_{x_1}^{(0)}$, $N_{y_1}^{(0)}$, $N_{xy_1}^{(0)}$ в условиях плоской задачи теории упругости выражаются через две аналитические функции

$$\frac{N_{x_1}^{(0)} + N_{y_1}^{(0)}}{2h_0} = 2 \left[\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} \right], \quad (15)$$

$$\frac{N_{y_1}^{(0)} - N_{x_1}^{(0)} + 2iN_{xy_1}^{(0)}}{2h_0} = 2 \left[z\Phi_0'(z) + \Psi_0(z) \right].$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ нулевого приближения получим граничную задачу

$$\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\overline{\Phi_0'(x)} + \overline{\Psi_0(x)} = f(x), \quad a^0 \leq x \leq b^0, \quad (16)$$

$$\text{где } f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{на свободных берегах трещины} \\ q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} + f_0(x) & \text{на берегах концевых зон трещины} \\ p_y^{(0)} - ip_{xy}^{(0)} + f_0(x) & \text{на берегах контактной зоны} \end{cases}$$

$$f_0(x) = \alpha ET(x) - \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \alpha ET(x) dx - \frac{3x}{2c^3} \int_{-c}^c \alpha ET(x) x dx.$$

Так как $T = T(x)$, в нулевом приближении имеем $q_{xy}^{(0)} = 0$ и $p_{xy}^{(0)} = 0$.

Решение краевой задачи (16) получим сведением к задаче линейного сопряжения [5]

$$\Phi_0(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{a^0}^{b^0} \frac{f(t) dt}{X(t)(t-z)}, \quad \Psi_0(z) = -z\Phi_0'(z). \quad (17)$$

Здесь $X(z) = \sqrt{(z-a^0)(z-b^0)(z-\lambda_1^0)(z-\lambda_2^0)}$; при $z \rightarrow \infty$ $X(z) = z^2 + O(1/z)$. Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу разреза.

Согласно поведению функции $\Phi_0(z)$ условие разрешимости краевой задачи имеет вид

$$\int_{a^0}^{b^0} \frac{f(t) dt}{X(t)} = 0, \quad \int_{a^0}^{b^0} \frac{tf(t) dt}{X(t)} = 0. \quad (18)$$

Эти уравнения служат для определения неизвестных параметров a_0 и b_0 , определяющих размеры концевых зон трещины.

Для полного определения потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ необходимо еще найти усилия в концевых зонах трещины и в контактной зоне. Для определения функции $q_y^{(0)}(x)$ и $p_y^{(0)}(x)$ рассмотрим формулу

$$2\mu \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + i \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = \kappa_0 \Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} - z \overline{\Phi_0'(z)} - \overline{\Psi_0(z)} + \beta f(z), \quad (19)$$

где $\kappa_0 = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; $\beta = \alpha E/(1 + \nu)$; $T = \text{Ref}(z)$; μ – модуль сдвига материала, выражение $2\mu(u_0^* + iv_0^*) = \beta \int f(z) dz$ представляет собой перемещения точек полосы, вызванные неравномерным нагревом бездефектной полосы.

Используя соотношение (19) и граничные значения функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, получим на отрезке $a^0 \leq x \leq b^0$ следующее равенство

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_0^+ - u_0^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v_0^+ - v_0^-) \right]. \quad (20)$$

Используя формулы Сохоцкого-Племеля [5], с учетом соотношения (17) находим

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \frac{X^+(x)}{\pi i} \int_{a^0}^{b^0} \frac{f(t) dt}{X^+(t)(t-x)}. \quad (21)$$

Подставив выражение (21) в левую часть уравнения (20) с учетом соотношений (11), получим для определения неизвестных функций $q_y^{(0)}(x)$ и $p_y^{(0)}(x)$ систему связанных между собой сингулярных интегральных уравнений

$$-\frac{1 + \kappa_0}{2\pi\mu} X^+(x) \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{X^+(t)(t-x)} = \frac{d}{dx} \left[C(x, \sigma_0) q_y^{(0)}(x) \right], \quad (22)$$

при $a_0 \leq x \leq a_1$ и $b_1 < x < b^0$,

$$\int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{X^+(t)(t-x)} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_1^0 \leq x \leq \lambda_2^0. \quad (23)$$

Уравнение (22) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром Коши и может быть решено только численно. Для ее решения можно использовать коллокационную схему с аппроксимацией неизвестной функции. Решив интегральное уравнение (23) и удовлетворив условиям ограниченности контактных усилий при $x = \lambda_1^0$ и $x = \lambda_2^0$, найдем формулы для подсчета усилий $p_y^{(0)}(x)$

$$p_y^{(0)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_2^0} \frac{g(t) dt}{X(t)(t-x)}, \quad g(t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{a^0}^{b^0} \frac{X(\tau) f_0(\tau) d\tau}{\tau - t}. \quad (24)$$

При этом должны выполняться условия разрешимости сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_2^0} \frac{g(\tau)d\tau}{X(\tau)} = 0, \quad \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_2^0} \frac{\tau g(\tau)d\tau}{X(\tau)} = 0. \quad (25)$$

Последние два уравнения служат для определения величин λ_1^0 и λ_2^0 . С помощью формул (24) из интегродифференциального уравнения исключаются контактные усилия $p_y^{(0)}(x)$.

Перейдем к алгебраизации интегродифференциального уравнения (22) с дополнительными условиями (18). Сначала в уравнении (22) и в дополнительных условиях (18) все интервалы интегрирования приводятся к одному отрезку $[-1, 1]$. Для этого сделаем замену переменных

$$t = \frac{a^0 + b^0}{2} + \frac{b^0 - a^0}{2}\tau, \quad x = \frac{a^0 + b^0}{2} + \frac{b^0 - a^0}{2}\eta.$$

Заменяем производную, входящую в правую часть уравнения (22) конечно-разностной аппроксимацией. При этом учитываются граничные условия при $\eta_0 = \pm 1$ $q_y^{(0)}(a^0) = q_y^{(0)}(b^0) = 0$ (это соответствует условиям $v_0^+(a^0, 0) - v_0^-(a^0, 0) = 0$, $v_0^+(b^0, 0) - v_0^-(b^0, 0) = 0$).

Затем интегралы заменяются конечными суммами с помощью квадратурных формул типа Гаусса. Это дает возможность заменить интегродифференциальное уравнение системой алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции $q_y^{(0)}$ в узловых точках. В результате алгебраизации интегродифференциального уравнения с дополнительными условиями получаем $M + 2$ (M – число узловых точек) алгебраических уравнений для определения усилий в узловых точках и размеров концевых зон трещины в нулевом приближении (параметры a^0 и b^0).

Из-за неизвестных размеров концевых зон даже в частном случае линейно-упругих связей полученная алгебраическая система уравнений является нелинейной. Для ее решения в случае линейных связей использовали метод последовательных приближений [6]. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в концевых зонах используется также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [7]. Предполагается, что закон деформирования связей является линейным $V = |(u_0^+ - u_0^-) + i(v_0^+ - v_0^-)| \leq V_*$. Последующие итерации выполняются в случае, когда $V(x) > V_*$. Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для связей с эффективной податливостью, переменной вдоль концевой зоны и зависящей от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [8]. Предполагается, что процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия в концевых зонах, полученные на двух последовательных итерациях, будут мало отличаться друг от друга. Алгебраическая система в каждом приближении решалась численно методом Гаусса с выбором главного элемента.

Перейдем к решению задачи (10) первого приближения. Найдем компоненты объемной силы в первом приближении согласно (8). При наличии объемных сил (8) решение представим в виде суммы

$$N_x^* = N_{x_T}^{(1)} + N_{x_*}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}, \quad N_y^* = N_{y_T}^{(1)} + N_{y_*}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy_T}^{(1)} + N_{xy_*}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)},$$

где $N_{x_T}^{(1)}$, $N_{y_T}^{(1)}$, $N_{xy_T}^{(1)}$ – усилия в сплошной (бездефектной) полосе и вызванной неравномерным нагревом в первом приближении; $N_{x_*}^{(1)}$, $N_{y_*}^{(1)}$, $N_{xy_*}^{(1)}$ – частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемной силы (8); $N_{x_1}^{(1)}$, $N_{y_1}^{(1)}$, $N_{xy_1}^{(1)}$ – общее решение уравнений плоской теории упругости.

Для температурных усилий $N_{x_T}^{(1)}$, $N_{y_T}^{(1)}$, $N_{xy_T}^{(1)}$ имеем

$$\frac{N_{yT}^{(1)}}{2h_0} = \frac{2h_0}{F_0} \int_{-c}^c \alpha ET(x) \bar{h}(x) dx - \frac{2h_0 x}{I_z} \int_{-c}^c \alpha ET(x) \bar{h}(x) x dx,$$

$$N_{xT}^{(1)} = 0, \quad N_{xyT}^{(1)} = 0.$$

Здесь F_0 – площадь поперечного сечения полосы; I_z – момент инерции площади сечения относительно оси Oz .

Используя [9] общие представления

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4Re \left[\Phi_1(z) - \frac{1}{2(1 + \kappa_0)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right] + \frac{N_{yT}^{(1)}}{2h_0}, \quad (26)$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2 \left[z\Phi_1'(z) + \Psi_1(z) + \frac{1}{2(1 + \kappa_0)} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa_0 \bar{F}_1 - \bar{Q}_1) \right] + \frac{N_{yT}^{(1)}}{2h_0}.$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ первого приближения получаем краевую задачу при $y = 0$, $a^1 \leq x \leq b^1$

$$\Phi_1(x) + \bar{\Phi}_1(x) + x\bar{\Phi}_1'(x) + \bar{\Psi}_1(x) = f_1(x), \quad (27)$$

$$\text{где } f_1(x) = \begin{cases} f_0^*(x) & a_1 < x < \lambda_1^1 \quad \text{и} \quad \lambda_2^1 < x < b_1 \\ q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)} + f_0^*(x) - \bar{h}q_y^{(0)} & a^1 \leq x \leq a_1 \quad \text{и} \quad b_1 < x < b^1 \\ p_y^{(1)} - ip_{xy}^{(1)} + f_0^*(x) - \bar{h}p_y^{(0)} & \lambda_1^1 \leq x \leq \lambda_2^1 \end{cases}$$

$$f_0^*(x) = g_1(x) + g_2(x); \quad g_1(x) = \frac{1}{(1 + \kappa_0)} Re \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1 + \kappa_0)} \left(\kappa_0 \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial z} \right) \quad \text{при } y = 0,$$

$$g_2(x) = -\frac{2h_0}{F} \int_{-c}^c \alpha ET(x) \bar{h}(x) dx + \frac{2h_0 x}{I_z} \int_{-c}^c \alpha ET(x) \bar{h}(x) x dx.$$

Функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$ представляют собой частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F}, \quad F = X_1 + iY_1 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + i \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}). \quad (28)$$

Решение граничной задачи (27) получим сведением к задаче линейного сопряжения [5]

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{a^1}^{b^1} \frac{f_1(t) dt}{X_1(t)}, \quad (29)$$

где $\Omega_1(z) = \bar{\Phi}_1(z) + z\bar{\Phi}_1'(z) + \bar{\Psi}_1(z)$, $X_1(z) = \sqrt{(z - a_1)(z - b_1)(z - \lambda_1^1)(z - \lambda_2^1)}$.

Размеры концевых зон в первом приближении определяются из условия разрешимости краевой задачи

$$\int_{a^1}^{b^1} \frac{f_1(t) dt}{X_1^+(t)} = 0, \quad \int_{a^1}^{b^1} \frac{t f_1(t) dt}{X_1^+(t)} = 0. \quad (30)$$

Для окончательного определения комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ необходимо найти усилия $q_y^{(1)}$, $q_{xy}^{(1)}$ в связях и контактные усилия $p_y^{(1)}$ и $p_{xy}^{(1)}$.

Используя соотношение $2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + iv_1) = \kappa_0 \Phi_1(z) - \Omega_1(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \bar{\Phi}_1'(z)$ и граничные значения функций $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$, получим на отрезке $a^1 \leq x \leq b^1$ следующее равенство

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = \frac{2\mu}{1 + k_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_1^+ - u_1^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v_1^+ - v_1^-) \right]. \quad (31)$$

Используя формулы Сохоцкого-Племеля [5] и учитывая формулы (29), находим

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -\frac{iX_1^+(x)}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)}. \quad (32)$$

Подставив выражение (32) в (31) и учитывая соотношения (12) после некоторых преобразований, получим систему, состоящую из одного комплексного сингулярного интегрального уравнения и одного комплексного интегродифференциального уравнения, относительно неизвестных функций $p_y^{(1)}$, $p_{xy}^{(1)}$ и $q_y^{(1)}$, $q_{xy}^{(1)}$

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_1^1 \leq x \leq \lambda_2^1, \quad (33)$$

$$-\frac{1+k_0}{2\pi\mu} X_1^+(x) + (x) \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t)dt}{x_1 + (t-x)} = \frac{d}{dx} \left[C(x, \sigma_1) \left(q_y^{(\tau)}(x) - i q_{xy}^{(1)}(x) \right) \right], \quad (34)$$

при $a^1 \leq x \leq a$ и $b < x < b^1$.

Решение сингулярного интегрального уравнения (33) с учетом условий ограниченности контактных усилий при $x = \lambda_1^1$ и $x = \lambda_2^1$ имеет вид

$$p_y^{(1)}(x) - i p_{xy}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_2^1} \frac{g_*(t)dt}{X_1^+(t-x)}, \quad g_*(t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{a^1}^{b^1} \frac{X_1(\tau) f_1^*(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad (35)$$

$$\text{где } f_1^*(x) = \begin{cases} f_0^*(x) & a_1 < x < \lambda_1^1 \quad \text{и} \quad \lambda_2^1 < x < b_1, \\ q_y^{(1)} - i q_{xy}^{(1)} + f_0^*(x) - \bar{h} q_y^{(0)} & a^1 \leq x \leq a_1 \quad \text{и} \quad b_1 < x < b^1, \\ f_0^*(x) - \bar{h} p_y^{(0)} & \lambda_1^1 \leq x \leq \lambda_2^1. \end{cases}$$

При этом должны выполняться следующие условия разрешимости интегрального уравнения

$$\int_{\lambda_1^1}^{\lambda_2^1} \frac{g_*(\tau) d\tau}{X_1(\tau)} = 0, \quad \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_2^1} \frac{\tau g_*(\tau) d\tau}{X_1(\tau)} = 0. \quad (36)$$

Последние два уравнения служат для определения величин λ_1^1 и λ_2^1 .

Отделяя действительные и мнимые части, после некоторых преобразований вместо (34) получим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $q_y^{(1)}$, $q_{xy}^{(1)}$. Как и в нулевом приближении каждое из этих уравнений представляет нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром типа Коши и может быть решено только численно.

Для определения распределения усилий и размеров контактной и концевых зон трещины задается закон изменения толщины в полосе. Функцию $h(x, y)$ разложим в ряд Тейлора в начале координат и в этом разложении ограничимся для простоты двумя членами разложения

$$h(x, y) = h_0 [1 + \varepsilon(a_*^x + b_*^y)],$$

где $2h_0$ – толщина полосы в начале координат, a_* и b_* – некоторые коэффициенты.

С помощью формул (15) находятся $N_x^{(0)}$, $N_y^{(0)}$, $N_{xy}^{(0)}$. Затем по формуле (28) находим функцию $F = X_1 + iY_1$.

С помощью интегрирования уравнений (28) находим функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$. По найденным функциям $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$ находим функцию $g_1(x)$. Затем по полученным формулам (29) находим решение краевой задачи в первом приближении. При этом алгебраизация интегродифференциальных уравнений проводилась аналогично нулевому приближению.

Для определения предельного состояния полосы, при котором начинает расти трещина, используем критерий критического раскрытия берегов трещины. Принимаем, что разрыв связей на краю концевой зоны ($x_0 = a$ или $x_0 = b$) происходит при выполнении условия

$$\sqrt{[v^+(x_0, 0) - v^-(x_0, 0)]^2 + [u^+(x_0, 0) - u^-(x_0, 0)]^2} = \delta_c,$$

где δ_c - характеристика сопротивления материала развитию трещины.

Используя полученное решение и учитывая соотношение (5), предельное условие можно записать в виде

$$C(x_0, \sigma(x_0)) \sigma(x_0) = \delta_c, \tag{37}$$

где $x_0 = a$ для нижней концевой зоны и $x_0 = b$ для верхней концевой зоны; $\sigma(x_0) = \sigma_0(x_0) + \varepsilon\sigma_1(x_0)$.

Совместное решение полученных уравнений и условия (37) позволяет при заданных характеристиках связей определить тепловую нагрузку (перепад температуры), размеры контактной и концевых зон для предельно-равновесного состояния вершины трещины.

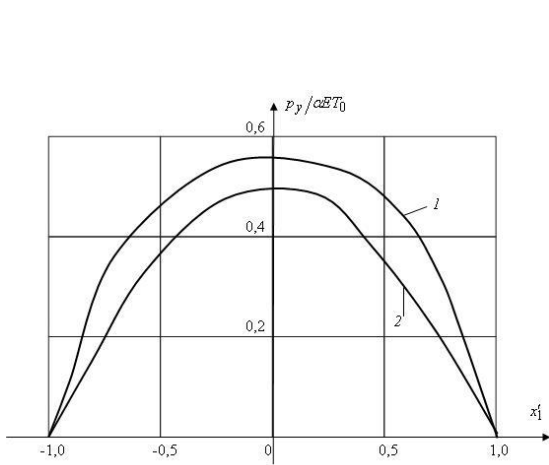


Рис. 2. Распределение нормальных контактных усилий p_y вдоль контактной зоны (кривая 1 соответствует линейному закону деформирования связей, а кривая 2 – билинейному закону деформирования)

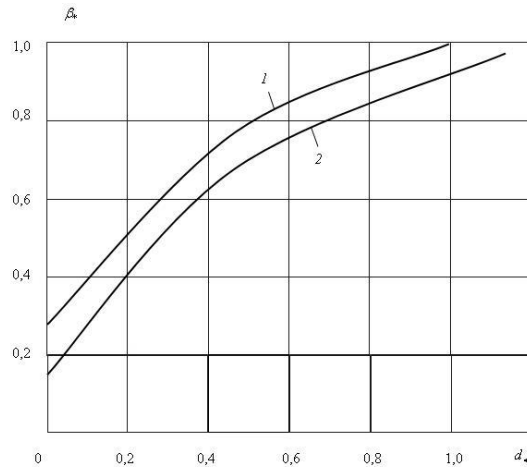


Рис. 3. Распределение безразмерной предельной тепловой нагрузки $\beta_* = \alpha E T_0 / \sigma_s$ от относительной длины контактной зоны $d_* = (\lambda_2 - \lambda_1) / (b - a)$ при различных значениях относительной толщины полосы h_1/h_0 (кривая 1 соответствует случаю $h_1/h_0 = 0,5$, а кривая 2 – $h_1/h_0 = 0,4$)

На рис. 2 представлены графики распределения нормального контактного усилия $p_y(x)$ вдоль контактной зоны (кривая 1 соответствует линейному закону деформирования связей, а кривая 2 – билинейному закону деформирования).

В расчетах было принято $\nu = 0,3$; $M = 30$; $h_1/h_0 = 0,5$. Использовались безразмерные координаты $x = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} x'_1$.

На рис. 3 приведена зависимость безразмерной предельной тепловой нагрузки $\beta_* = \alpha E T_0 / \sigma_s$ от относительной длины контактной зоны $d_* = (\lambda_2 - \lambda_1) / (b - a)$. Здесь T_0 – характерная температура полосы; кривая 1 соответствует значению $h_1/h_0 = 0,5$, а кривая 2 – значению $h_1/h_0 = 0,4$.

Анализ предельно-равновесного состояния полосы переменной толщины при наличии трещины со связями в концевых зонах и частичном контактировании берегов трещины при действии тепловой нагрузки сводится к параметрическому исследованию решения полученных алгебраических систем уравнений при различных законах деформирования связей, упругих и геометрических характеристиках полосы (стержня).

Таким образом, предложена эффективная методика решения задачи механики разрушения для полосы переменной толщины. Эффективность этой методики заключается, в частности, в том, что предложен единый способ построения решения методом возмущений. Этот способ позволяет получить в каждом приближении решение единым методом аналитических функций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мирсалимов, М. В.* Решение задачи механики разрушения для полосы переменной толщины / М. В. Мирсалимов // Известия ТулГУ. Серия: Актуальные вопросы механики. - 2006. т. 1, вып. 2. - С. 241 – 247.
- [2] *Мирсалимов, М. В.* Контактное взаимодействие берегов трещины при изгибе полосы переменной толщины / М. В. Мирсалимов // Механика машин, механизмов и материалов : Международный журнал. – 2007. - № 1. - С. 56 – 59.
- [3] *Гаджиев, В. Д.* Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами / В. Д. Гаджиев, М. В. Мирсалимов // Оптимальное проектирование механических систем. - Баку : ЭЛМ. 1999. - С. 50 – 63.
- [4] *Гольдштейн, Р. В.* Рост трещин на границе соединения материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Проблемы механики: Сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / Под ред. Д. М. Климова. – М. : Физматлит, 2003. – С. 221–238.
- [5] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [6] *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / М. В. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [7] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Упругопластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат. 1948. – 376 с.
- [8] *Биргер, И. А.* Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М. : Наука, – С. 51–73.
- [9] *Угодчиков А. Г.* Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах / А. Г. Угодчиков, М. И. Длугач, А. Е. Степанов. – М. : Высшая школа, 1970. – 528 с.

M. V. Mirsalimov

CONTACT INTERACTION OF CRACK FACES IN THE BAND OF VARIABLE THICKNESS

Azerbaijan technical university

Abstract. The problem of mechanics of fracture for a band (bar), weakened by a rectilinear crack with bond between faces in the end zones is considered at action of a non-uniform temperature field. It is considered, that under the action of thermal loading partial closing a crack takes place. Thickness of a band is considered variable. Solution of contact tractions and tractions in bond between crack faces in end zones comes to the system of singular integral equations. The condition of a limiting state of a band is received.

Keywords: variable-thickness band (bar), contact tractions, crack with interfacial bonds, cohesive forces, contact zone, non-uniform heating.

Мирсалимов Мир Ахмед Керим Вагиф оглы

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Азербайджанский технический университет, г. Баку

e-mail: a-mirsalimov@yandex.ru

Mirsalimov Mir Ahmed Kerim Vagif oglu

Dr. of Phys. & Math., Senior Research Worker, Azerbaijan Technical University, Baku

Т. В. Митрофанова

О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ГЛАДКОГО ШТАМПА В АНИЗОТРОПНОЕ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

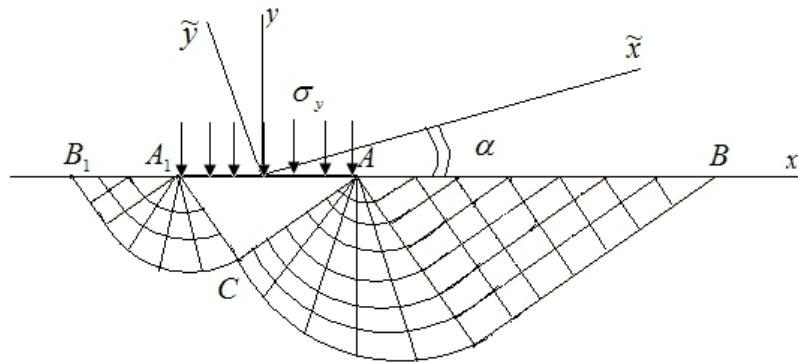
Аннотация. Задача о вдавливании гладкого штампа в анизотропную идеальнопластическое полупространство рассматривалась Хиллом [6], позднее в [1], [5]. В обоих случаях предполагалось, что имеет место анизотропия по Мизесу-Хиллу [6].

В настоящей работе рассматривается обобщенный случай анизотропии, включающий в себя как частные случаи анизотропии по Мизесу-Хиллу и трансляционную анизотропию. Предполагается, что главные оси анизотропии по Мизесу-Хиллу расположены под некоторым углом α к физическим осям координат x, y . Решение получено для общего случая. Далее рассматриваются частные случаи анизотропии: анизотропия по Мизесу-Хиллу [6], трансляционная анизотропия [3]. Определено предельное давление, проведен сравнительный анализ влияния свойств анизотропии на величину предельного напряжения при вдавливании штампа.

Ключевые слова: идеальная пластичность, плоская задача, анизотропия, давление плоского штампа, полупространство.

УДК: 539.374

1. Рассмотрим задачу о вдавливании плоского гладкого штампа в анизотропное идеальнопластическое полупространство (рис. 1).



Предельное условие в случае идеальнопластической анизотропии для случая плоской деформации в системе координат $O\tilde{x}\tilde{y}$ имеет вид

$$A \left(\frac{\sigma_{\tilde{x}} - \sigma_{\tilde{y}}}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B (\tau_{\tilde{x}\tilde{y}} - k_3)^2 = 1, \quad A, B, k_1, k_2, k_3 - \text{const}, \quad (1.1)$$

Поступила 04.09.2010

где $\sigma_{\tilde{x}}$, $\sigma_{\tilde{y}}$, $\tau_{\tilde{x}\tilde{y}}$ – компоненты напряжения в системе координат \tilde{x} , \tilde{y} .

Перейдем к системе координат Oxy по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{\tilde{x}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \sigma_{\tilde{y}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{\tilde{x}\tilde{y}} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Согласно (1.2) условие пластичности (1.1) примет вид

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\alpha\right) + \tau_{xy}^2 \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\alpha\right) + \\ & + (A-B) \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \tau_{xy} \sin 4\alpha - \\ & - 2\rho \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \left(\frac{A-B}{2} \cos(2\alpha - \mu) + \frac{A+B}{2} \cos(2\alpha + \mu)\right) + \right. \\ & \left. + \tau_{xy} \left(\frac{A+B}{2} \sin(2\alpha + \mu) + \frac{A-B}{2} \sin(2\alpha - \mu)\right) \right] - T^2 = 0,\end{aligned}\quad (1.3)$$

где

$$T^2 = 1 - \rho^2 (A \cos^2 \mu + B \sin^2 \mu). \quad (1.4)$$

Положим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= p + k(\theta) \cos 2\theta, \\ \sigma_y &= p - k(\theta) \cos 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k(\theta) \sin 2\theta,\end{aligned}\quad (1.5)$$

Из (1.3), (1.5) будем иметь

$$\begin{aligned}k^2(\theta) \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right] - \\ - 2k(\theta) \rho \left[\frac{A-B}{2} \cos(2(\theta - \alpha) + \mu) + \frac{A+B}{2} \cos(2(\theta - \alpha) - \mu) \right] - T^2 = 0,\end{aligned}\quad (1.6)$$

Из (1.6) получим

$$\begin{aligned}k(\theta) &= \frac{\rho \left[\frac{A-B}{2} \cos(2(\theta - \alpha) + \mu) + \frac{A+B}{2} \cos(2(\theta - \alpha) - \mu) \right] \pm \sqrt{D_1}}{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4(\theta - \alpha)}, \\ D_1 &= \rho^2 \left[\frac{A-B}{2} \cos(2(\theta - \alpha) + \mu) + \frac{A+B}{2} \cos(2(\theta - \alpha) - \mu) \right]^2 + \\ & + \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right] \left[1 - \rho^2 \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\mu \right) \right],\end{aligned}\quad (1.7)$$

Величина $k(\theta)$ – переменный предел текучести при растяжении вдоль угла θ , $k(\theta) > 0$, из (1.7) следует

$$k(\theta) = \frac{\rho \left[\frac{A-B}{2} \cos(2(\theta - \alpha) + \mu) + \frac{A+B}{2} \cos(2(\theta - \alpha) - \mu) \right] + \sqrt{D_1}}{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4(\theta - \alpha)}, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}k'(\theta) &= \frac{dk}{d\theta} = \frac{2(A-B) \sin 4(\theta - \alpha) \rho}{\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4(\theta - \alpha)\right)^2} \times \\ & \times \frac{\left(\frac{A-B}{2} \cos(2(\theta - \alpha) + \mu) + \frac{A+B}{2} \sin(2(\theta - \alpha) - \mu) + \sqrt{D_1}\right)}{\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4(\theta - \alpha)\right)} + \\ & + \frac{-2\rho \left[\frac{A-B}{2} \sin(2(\theta - \alpha) + \mu) + \frac{A+B}{2} \sin(2(\theta - \alpha) - \mu) \right] + \frac{A-B}{2} \sin 4(\theta - \alpha)}{\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4(\theta - \alpha)\right)^2}.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (1.10)$$

Согласно [4] из (1.5), (1.8), (1.9) характеристики системы уравнений (1.10) имеют вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{k' \sin 2\theta - 2k \cos 2\theta \pm \sqrt{k'^2 + 4k^2}}{k' \cos 2\theta - 2k \sin 2\theta}, \quad k' = \frac{dk}{d\theta}. \quad (1.11)$$

Характеристики (1.11) взаимно ортогональны. Соотношения вдоль характеристик, обобщающие интегралы Генки, имеют вид

$$\sigma \pm F(\theta) = \text{const}, \quad F(\theta) = \int \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\theta. \quad (1.12)$$

В соотношениях (1.11), (1.12) следует использовать выражения $k(\theta)$, $k'(\theta)$, определяемые согласно (1.8), (1.9).

Граничные условия на отрезке AB (рис. 1) имеют вид

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \sigma_x < 0. \quad (1.13)$$

Из (1.5), (1.13) следует

$$\theta_B = \frac{\pi}{2}, \quad p_B = -k\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \sigma_x = -2k\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (1.14)$$

Под гладким штампом (AA_1 на рис. 1) имеет место

$$\theta_A = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (1.15)$$

При вдавливании плоского гладкого штампа в анизотропное полупространство угол θ изменится от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Давление на штамп определяется интегралом (1.12) при граничных условиях (1.14), (1.15)

$$p_A = p_B - \int_0^{\pi/2} \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\theta. \quad (1.16)$$

Из (1.5), (1.8), (1.9), (1.16) найдем напряжения в треугольнике AA_1C (рис. 1)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p_A + k(\theta_A) \cos 2\theta_A, \\ \sigma_y &= p_A - k(\theta_A) \cos 2\theta_A, \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Решение задачи будем искать в виде разложений по степеням некоторого малого безразмерного параметра δ :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \delta \sigma'_{ij} + \delta^2 \sigma''_{ij}, \quad A = 1 + d_1 a \delta, \quad B = 1 + d_1 b \delta, \\ k_1 &= d_2 \delta k_1, \quad k_2 = d_2 \delta k_2, \quad k_3 = d_2 \delta k_3, \quad \rho = d_2 \delta \bar{\rho}, \quad d_1, d_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Линеаризируем основные соотношения.

С учетом (1.18) выражения (1.8), (1.9) примут вид

$$\begin{aligned} k(\theta) &= 1 - \delta \left[\frac{d_1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right) - \bar{\rho} d_2 \cos(2(\theta - \alpha) - \mu) \right] + \\ &+ \delta^2 \left[\frac{3d_1^2}{8} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right)^2 + \bar{\rho} d_1 d_2 \left(\frac{a+b}{2} [\cos(2(\theta - \alpha) - \mu) - 1] + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{a-b}{2} [\cos(2(\theta - \alpha) + \mu) - \cos 4(\theta - \alpha)] \right) - \frac{d_2^2}{2} \bar{\rho}^2 \sin^2(2(\theta - \alpha) - \mu) \right], \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} k'(\theta) &= -\delta [-d_1(a-b) \sin 4(\theta - \alpha) + \bar{\rho} d_2 \sin(2(\theta - \alpha) - \mu)] + \\ &+ \delta^2 [-d_2^2 \bar{\rho}^2 \sin 2(2(\theta - \alpha) - \mu) + \\ &+ \bar{\rho} d_1 d_2 \left(\frac{a-b}{2} [4 \sin 4(\theta - \alpha) - 2 \sin(2(\theta - \alpha) + \mu) - (a+b) \sin(2(\theta - \alpha) - \mu)] - \right. \\ &\left. - \frac{3}{2} d_1^2 (a-b) \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right) \sin 4(\theta - \alpha) \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

Согласно (1.19), (1.20) соотношение (1.16) запишем в виде

$$\begin{aligned}
p_A = p_B - \int_0^{\pi/2} & \left(2 - 2\delta \left[\frac{d_1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right) - \bar{\rho} d_2 \cos(2(\theta - \alpha) - \mu) \right] + \right. \\
& + \delta^2 \left[\frac{3d_1^2}{8} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right)^2 - \frac{d_2^2}{2} \bar{\rho}^2 \sin^2(2(\theta - \alpha) - \mu) + \right. \\
& \left. \left. + d_1 d_2 \bar{\rho} \left(\frac{a+b}{2} [\cos(2(\theta - \alpha) - \mu) - 1] + \frac{a-b}{2} [\cos(2(\theta - \alpha) + \mu) - \cos 4(\theta - \alpha)] \right) \right] \right) d\theta,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

где

$$\begin{aligned}
p_B = -k \left(\frac{\pi}{2} \right) = -1 + \delta & \left[\frac{d_1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4\alpha \right) + d_2 \bar{\rho} \cos(2\alpha + \mu) \right] - \\
& - \delta^2 \left[\frac{3d_1^2}{8} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4\alpha \right)^2 - \frac{d_2^2}{2} \bar{\rho}^2 \sin^2(2\alpha + \mu) - \right. \\
& \left. - \bar{\rho} d_1 d_2 \left(\frac{a+b}{2} [\cos(2\alpha - \mu) + 1] + \frac{a-b}{2} [\cos(2\alpha - \mu) + \cos 4\alpha] \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Согласно (1.16), (1.21), (1.22) получим

$$\begin{aligned}
p_A = -(1 + \pi) + \\
& + \delta \left[\frac{d_1(a+b)}{4} (1 + \pi) + \frac{d_1(a-b)}{4} \cos 4\alpha + d_2 \bar{\rho} (\cos(2\alpha + \mu) - 2 \sin(2\alpha + \mu)) \right] - \\
& - \delta^2 \left[d_1^2 \left(-\frac{9(a^2+b^2)}{128} \pi - \frac{3ab}{64} \pi + \frac{3(a^2-b^2)}{16} \cos 4\alpha + \frac{3(a^2+b^2)}{64} \cos 8\alpha + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3ab(1-\cos 8\alpha)}{32} + \frac{9(a^2+b^2)}{64} \right) - \bar{\rho} d_1 d_2 \left[\frac{(a+b)}{4} \pi - \frac{a-b}{2} \cos 4\alpha - \frac{a+b}{2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{a+b}{2} [\sin(2\alpha + \mu) + \cos(2\alpha + \mu)] - \frac{a-b}{2} [\sin(2\alpha - \mu) + \cos(2\alpha - \mu)] \right] + \right. \\
& \left. + \bar{\rho}^2 d_2^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{\cos 2(2\alpha + \mu)}{4} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Из (1.17), (1.23) получим давление штампа

$$\begin{aligned}
\sigma_y = -(2 + \pi) + \\
& + \delta \left[\frac{d_1(a+b)}{4} (2 + \pi) + \frac{d_1(a-b)}{2} \cos 4\alpha - 2d_2 \bar{\rho} \sin(2\alpha + \mu) \right] - \\
& - \delta^2 \left[d_1^2 \left(\frac{3ab(1-\cos 8\alpha)}{16} - \frac{9(a^2+b^2)}{128} \pi + \frac{3(a^2-b^2) \cos 4\alpha}{8} - \frac{3ab}{64} \pi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{9(a^2+b^2)}{32} + \frac{3(a^2+b^2) \cos 8\alpha}{32} \right) + \bar{\rho} d_1 d_2 \left[\frac{a+b}{4} \pi - (a+b) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(a-b) \sin(2\alpha + \mu)}{2} + \frac{(a-b) \sin(2\alpha - \mu)}{2} - (a-b) \cos 4\alpha \right] + \right. \\
& \left. + \bar{\rho} d_2^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \sin^2(2\alpha + \mu) \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.24}$$

В зоне AA_1C имеет место

$$\begin{aligned}
\sigma_x = -\pi + \delta & \left[\frac{\pi d_1(a+b)}{4} + 2d_2 \bar{\rho} (\cos(2\alpha + \mu) - \sin(2\alpha + \mu)) \right] + \\
& + \delta^2 \left[-d_1^2 \left(\frac{3ab}{64} + \frac{9(a^2+b^2)}{128} \right) \pi - \bar{\rho} d_1 d_2 \left(\frac{a+b}{4} \pi - \frac{(a-b) \sin(2\alpha - \mu)}{2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(a+b) \sin(2\alpha + \mu)}{2} - (a+b) \cos(2\alpha + \mu) - (a-b)(2\alpha - \mu) \right) + \bar{\rho}^2 \frac{d_2^2}{8} \pi \right], \\
\tau_{xy} = 0.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

2. Предельное условие в случае идеальнопластической анизотропии [5] для случая плоской деформации в системе координат $O\tilde{x}\tilde{y}$ имеет вид

$$A \left(\frac{\sigma_{\tilde{x}} - \sigma_{\tilde{y}}}{2} \right)^2 + B \tau_{\tilde{x}\tilde{y}}^2 = 1, \quad A, B - \text{const}, \tag{2.1}$$

где $\sigma_{\tilde{x}}$, $\sigma_{\tilde{y}}$, $\tau_{\tilde{x}\tilde{y}}$ – компоненты напряжения в системе координат \tilde{x} , \tilde{y} .

Перейдем к системе координат Oxy по формулам (1.2). Согласно (1.2) условие пластичности (2.1) примет вид

$$A_1 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B_1 \tau_{xy}^2 + C_1 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \tau_{xy} = 1, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\alpha, \\ B_1 &= \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\alpha, \\ C_1 &= (A-B) \sin 4\alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Положим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p + k(\theta) \cos 2\theta, \\ \sigma_y &= p - k(\theta) \cos 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k(\theta) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.2), (2.4) будем иметь

$$k^2(\theta) \left[\frac{A_1 + B_1}{2} + \frac{(A_1 - B_1) \cos 4\theta + C_1 \sin 4\theta}{2} \right] = 1. \quad (2.5)$$

В дальнейшем положим

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{C_1}{A_1 - B_1}, \quad \cos 4\alpha = \frac{A_1 - B_1}{\sqrt{(A_1 - B_1)^2 + C_1^2}}, \quad \sin 4\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{(A_1 - B_1)^2 + C_1^2}}. \quad (2.6)$$

Соотношение (2.5), согласно (2.6), примет вид

$$k^2(\theta) \left[\frac{A_1 + B_1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(A_1 - B_1)^2 + C_1^2} \cos 4(\theta - \alpha) \right] = 1. \quad (2.7)$$

Величина $k(\theta)$ – переменный предел текучести при растяжении вдоль угла θ , $k(\theta) > 0$, из (2.3), (2.7) следует

$$k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{A+B}{2}}} \left[1 + \frac{A-B}{A+B} \cos 4(\theta - \alpha) \right]^{-1/2}, \quad (2.8)$$

$$k'(\theta) = \frac{dk}{d\theta} = \frac{2 \sin 4\theta}{\sqrt{\frac{A+B}{2}}} \left(1 + \frac{A-B}{A+B} \cos 4\theta \right)^{-3/2} \left(\frac{A-B}{A+B} \right). \quad (2.9)$$

Уравнения равновесия имеют вид (1.10). Согласно [4] из (2.4), (2.8), (2.9) характеристики системы уравнений (1.10) имеют вид (1.11).

Характеристики (1.11) взаимно ортогональны. Соотношения вдоль характеристик, обобщающие интегралы Генки, имеют вид (1.12).

В соотношениях (1.11), (1.12) следует использовать выражения $k(\theta)$, $k'(\theta)$, определяемые согласно (2.8), (2.9).

Граничные условия на отрезке AB (рис. 1) имеют вид (1.13). Из (1.13), (2.4) следует (1.14).

Под гладким штампом (AA_1 на рис. 1) имеет место (1.15).

При вдавливании плоского гладкого штампа в анизотропное полупространство угол θ изменится от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Давление на штамп определяется интегралом (1.12) при граничных условиях (1.14), (1.15), и имеет вид (1.16).

Из (1.16), (2.4), (2.8), (2.9), найдем напряжения в треугольнике AA_1C (рис. 1) по формулам (1.17).

Решение задачи будем искать в виде разложений по степеням некоторого малого безразмерного параметра δ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta\sigma'_{ij} + \delta^2\sigma''_{ij}, \quad A = 1 + a\delta, \quad B = 1 + b\delta. \quad (2.10)$$

С учетом (2.10) выражения (2.8), (2.9) примут вид

$$k(\theta) = 1 - \frac{\delta}{2} \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right] + \frac{3}{8} \delta^2 \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right]^2, \quad (2.11)$$

$$k'(\theta) = \delta(a-b) \sin 4(\theta - \alpha) - \frac{3}{2} \delta^2 (a-b) \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right) \sin 4(\theta - \alpha). \quad (2.12)$$

Согласно (2.11), (2.12) соотношение (1.16) запишем в виде

$$p_A = p_B - \int_0^{\pi/2} (2 - \delta \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right] + \frac{3\delta^2}{8} \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4(\theta - \alpha) \right]^2) d\theta, \quad (2.13)$$

где

$$p_B = -k\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2}\delta \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4\alpha \right] - \delta^2 \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 4\alpha \right]^2. \quad (2.14)$$

Согласно (1.16), (2.13), (2.14) получим

$$p_A = -(1 + \pi) + \delta \left(\frac{a+b}{4} (1 + \pi) \right) - \delta^2 \left(-\frac{9(a^2+b^2)}{128} \pi - \frac{3ab}{64} \pi + \frac{3(a^2-b^2)}{16} \cos 4\alpha + \frac{3(a^2+b^2)}{64} \cos 8\alpha + \frac{3ab(1-\cos 8\alpha)}{32} + \frac{9(a^2+b^2)}{64} \right). \quad (2.15)$$

Из (1.17), (2.15) получим давление штампа

$$\sigma_y = -(2 + \pi) + \delta \left[\frac{a+b}{4} (2 + \pi) + \frac{a-b}{2} \cos 4\alpha \right] + \delta^2 \left(\frac{3ab(1-\cos 8\alpha)}{16} - \frac{9(a^2+b^2)}{128} \pi + \frac{3(a^2-b^2) \cos 4\alpha}{8} - \frac{3ab}{64} \pi + \frac{9(a^2+b^2)}{32} + \frac{3(a^2+b^2) \cos 8\alpha}{32} \right). \quad (2.16)$$

В зоне AA_1C имеет место

$$\sigma_x = -\pi + \frac{(a+b)\pi}{4} \delta + \left(\frac{3ab}{64} + \frac{9(a^2+b^2)}{128} \right) \pi \delta^2, \quad (2.17)$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

3. Предельное условие в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии для случая плоской деформации имеет вид [3]

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_0^2, \quad k_0, k_1, k_2, k_3 - \text{const}, \quad (3.1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине k_0 , сохраним обозначение для компонент напряжений и постоянных k_i . Условие (3.1) примет вид

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = 1. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.2) перепишем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 - 2\left(\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right) \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + k_3 \tau_{xy}\right) - P^2 = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2 < 1, \\ P^2 &= 1 - \rho^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В дальнейшем положим

$$\frac{k_1 - k_2}{2\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{\rho} = \sin \mu. \quad (3.5)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p + k(\theta) \cos 2\theta, \\ \sigma_y &= p - k(\theta) \cos 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k(\theta) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.3)–(3.6) найдем

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)\rho[\cos(2\theta - \mu)] - P^2 = 0. \quad (3.7)$$

Так как $k(\theta) > 0$, то в дальнейшем следует ограничиться решением уравнения (3.7)

$$k(\theta) = \rho \cos(2\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(2\theta - \mu)}, \quad \rho, \mu = \text{const}. \quad (3.8)$$

$$k'(\theta) = \frac{dk}{d\theta} = -2\rho \sin(2\theta - \mu) - \frac{\rho^2 \sin 2(2\theta - \mu)}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(2\theta - \mu)}}. \quad (3.9)$$

Уравнения равновесия имеют вид (1.10). Согласно [4] из (3.6), (3.8), (3.9) характеристики системы уравнений (1.10) имеют вид (1.11).

Характеристики (1.11) взаимно ортогональны. Соотношения вдоль характеристик, обобщающие интегралы Генки, имеют вид (1.12).

В соотношениях (1.11), (1.12) следует использовать выражения $k(\theta)$, $k'(\theta)$, определяемые согласно (3.8), (3.9).

Граничные условия на отрезке AB (рис. 1) имеют вид (1.13). Из (1.13), (3.6) следует (1.14).

Под гладким штампом (AA_1 на рис. 1) имеет место (1.15).

При вдавливании плоского гладкого штампа в анизотропное полупространство угол θ изменятся от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Давление на штамп определяется интегралом (13) при граничных условиях (1.14), (1.15), и имеет вид (1.16).

Из (1.16), (3.6), (3.8), (3.9), найдем напряжения в треугольнике AA_1C (рис. 1) по формулам (1.17).

Решение задачи будем искать в виде разложений по степеням некоторого малого безразмерного параметра δ :

$$k_1 = \delta \bar{k}_1, \quad k_2 = \delta \bar{k}_2, \quad k_3 = \delta \bar{k}_3. \quad (3.10)$$

Из (3.10) получим

$$\rho = \delta \sqrt{\left(\frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2}\right)^2 + \bar{k}_3^2} = \delta \bar{\rho}. \quad (3.11)$$

Согласно (3.11) соотношения (3.8), (3.9) примут вид

$$\begin{aligned} k(\theta) &= 1 + \delta\bar{\rho} \cos(2\theta - \mu) - \frac{1}{2}\delta^2\bar{\rho}^2 \sin^2(2\theta - \mu), \\ k'(\theta) &= -2\delta\bar{\rho} \sin(2\theta - \mu) - \delta^2\bar{\rho}^2 \sin 2(2\theta - \mu). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Следовательно, выражение (1.16) может быть записано в виде

$$p_A = p_B - \int_0^{\pi/2} \left(2 + 2\delta\bar{\rho} \cos(2\theta - \mu) - \frac{\delta^2}{2}\bar{\rho}^2 \sin^2(2\theta - \mu) \right) d\theta, \quad (3.13)$$

где

$$p_B = -k\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \delta\bar{\rho} \cos \mu + \frac{1}{2}\delta^2\bar{\rho}^2 \sin^2 \mu. \quad (3.14)$$

Согласно (1.16), (3.13), (3.14) получим

$$p_A = -(1 + \pi) + \delta\bar{\rho} (\cos \mu - 2 \sin \mu) + \delta\bar{\rho}^2 \left(\frac{\sin^2 \mu}{2} - \frac{\pi}{8} \right). \quad (3.15)$$

Из (1.17), (3.15) получим давление штампа

$$\sigma_y = -(2 + \pi) - 2\delta\bar{\rho} \sin \mu + \delta^2\bar{\rho}^2 \left(\sin^2 \mu - \frac{\pi}{8} \right). \quad (3.16)$$

В зоне AA_1C имеет место

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\pi + 2\delta\bar{\rho} (\cos \mu - \sin \mu) + \delta^2\bar{\rho}^2 \frac{\pi}{8}, \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Найдем величину предельного давления под штампом при различных μ .

При $\mu = 0$ предельное давление под штампом имеет вид

$$\sigma_y = -(2 + \pi) - \delta^2\bar{\rho}^2 \frac{\pi}{8}.$$

При $\mu = \frac{\pi}{6}$ предельное давление под штампом имеет вид

$$\sigma_y = -(2 + \pi) - \delta\bar{\rho} + \frac{2 - \pi}{4}\delta^2\bar{\rho}^2.$$

При $\mu = \frac{\pi}{4}$ предельное давление под штампом имеет вид

$$\sigma_y = -(2 + \pi) - \sqrt{2}\delta\bar{\rho} + \frac{4 - \pi}{4}\delta^2\bar{\rho}^2.$$

При $\mu = \frac{\pi}{3}$ предельное давление под штампом имеет вид

$$\sigma_y = -(2 + \pi) - \sqrt{3}\delta\bar{\rho} + \frac{6 - \pi}{4}\delta^2\bar{\rho}^2.$$

При $\mu = \frac{\pi}{2}$ предельное давление под штампом имеет вид

$$\sigma_y = -(2 + \pi) - 2\delta\bar{\rho} + \frac{8 - \pi}{4}\delta^2\bar{\rho}^2.$$

Таким образом, получили, что с увеличением величины μ предельное давление под штампом уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Давление плоского штампа на ортотропное идеально пластическое полупространство / Д. Д. Ивлев, Р. И. Непершин // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Т. 1. – С. 182–190.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 – Т. 3. (8). – С. 580–583.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
- [5] *Радаев, С. Ю.* О плоской задаче определения предельного состояния идеальнопластических анизотропных сред / С. Ю. Радаев // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары, 2005. – № 3. – С. 15–21.
- [6] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1965. – 407 с.

T. V. Mitrofanova

CAVE-IN OF A RIGID SMOOTH STAMP IN ANISOTROPIC IDEALLY
PLASTIC SEMISPACЕ

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The problem of cave-in of a smooth stamp in anisotropic ideallyplastic semispace was considered by Hill [6], later in [1], [5]. In both cases it was supposed that anisotropy on Mises-Hill [6] takes place. In the present work the generalized case of anisotropy including as special cases anisotropy accordinс to Mises-Hill and transmitting anisotropy is considered. It is supposed that the main axes of anisotropy are located under some corner a to physical axes of coordinates. The solution is received for the general case. Further anisotropy of special cases is considered: anisotropy Mises-Hill [6], transmitting anisotropy [3]. Limiting pressure is defined, the comparative analysis of influence of properties of anisotropy on size of limiting pressure is carried out at stamp cave-in.

Keywords: idealplasticity, flat problem, anisotropy, pressure of a flat stamp, semispace.

Митрофанова Татьяна Валерьевна

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: mitrofanova_tv@mail.ru

Mitrofanova Tatyana Valeryevna

Postgraduate Student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Е. В. Мочалов, В. В. Сильвестров

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОНКИХ ЖЕСТКИХ ОСТРОКОНЕЧНЫХ МЕЖФАЗНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова,

Российский государственный университет нефти и газа имени И. М. Губкина

Аннотация. Изучается кусочно-однородная упругая плоскость, составленная из двух разных по упругим параметрам полуплоскостей, между которыми расположены два тонких жестких остроконечных включения. Одно включение жестко соединено с окружающей его средой, а другое отсоединено от среды и контактирует с ней подобно гладкому жесткому штампу. Рассматривается плоское деформированное состояние, порожденное заданными на бесконечности напряжениями и заданными сосредоточенными силами. Находятся комплексные потенциалы составной упругой плоскости и коэффициенты интенсивности напряжений вблизи вершин включений.

Ключевые слова: кусочно-однородная упругая плоскость, жесткие межфазные включения, сосредоточенные силы, комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений.

УДК: 539.375

Однородная упругая плоскость с одним и несколькими полностью сцепленными со средой тонкими жесткими остроконечными включениями, а также трещинами изучена в книге [1]. В работах [2], [3] изучена задача взаимодействия трещины и отслоившегося включения в поле действия сосредоточенных сил и пар сил. В работах [4], [5] исследовано напряженное состояние кусочно-однородной упругой плоскости с тонкими прямолинейными включениями, расположенными на линии раздела сред.

1. Постановка задачи. Пусть в кусочно-однородной упругой изотропной плоскости, составленной из разных по упругим свойствам верхней и нижней полуплоскостей, на линии раздела сред сделаны разрезы вдоль отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ ($a < b < c < d$), в которые вставлены два тонких жестких остроконечных включения. Первое включение жестко соединено с малым натягом с окружающей средой. На его сторонах известны значения вектора смещения

$$u^{\pm}(t) + iv^{\pm}(t) = s_1^{\pm}(t) + is_2^{\pm}(t), \quad t \in (a, b). \quad (1)$$

Второе включение полностью отсоединено от среды и контактирует с ней подобно жесткому гладкому штампу:

$$\tau_{xy}^{\pm}(t) = q^{\pm}(t), \quad \nu^{\pm}(t) = s_3(t), \quad t \in (c, d), \quad (2)$$

Поступила 24.01.2011

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00103)

где τ_{xy} — касательная компонента вектора напряжений; $q^\pm(t)$ — заданные функции. Считаем, что функции $s_k^\pm(t)$, а также их производные достаточно малы и $s_k^+(x) = s_k^-(x)$, $(s_k^+(x))' = (s_k^-(x))'$ на концах отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$. Вне включений полуплоскости жестко соединены друг с другом. Верхняя полуплоскость имеет модуль сдвига μ_1 и коэффициент Пуассона ν_1 , нижняя — μ_2 и ν_2 соответственно. На бесконечности заданы значения напряжений и вращения: $\sigma_{x1}^\infty = \sigma_1$, $\sigma_{x2}^\infty = \sigma_2$, $\sigma_{y1}^\infty = \sigma_{y2}^\infty = \sigma$, $\tau_{xy1}^\infty = \tau_{xy2}^\infty = \tau$, $\omega_1^\infty = \omega_1$, $\omega_2^\infty = \omega_2$.

На первое включение действует центрально приложенная сила (X_{01}, Y_{01}) , на второе включение — вертикальная сила $(0, Y_{02})$. Вне включений в точках z_k , $k = 1, 2, \dots, l$, действуют силы $X_k + iY_k$ и пара сил с моментом M_k относительно точек z_k . Будем считать, что все эти точки различны; вне линии раздела сред расположены n_1 точек z_j , $j = 1, \dots, n_1$, а на линии раздела сред — n_2 точек z_{n_1+i} , $i = 1, \dots, n_2$.

2. Математическая модель задачи. Для нахождения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , вращения ω и производной по x от вектора смещения $u + iv$ в точке $z = x + iy$ составной плоскости воспользуемся следующими видоизменениями формул Колосова–Мусхелишвили применительно к кусочно-однородной плоскости [6]:

в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\text{Re } \Phi(z), & 2\mu_1\omega &= (1 + k_1)\text{Im } \Phi(z), \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu_1(u + iv)'_x &= k_1\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}; \end{aligned} \quad (3)$$

в нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\text{Re } \Phi_*(z), & 2\mu_2\omega &= (1 + k_2)\text{Im } \Phi_*(z), \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_*(z) + \Omega_*(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)}, \\ 2\mu_2(u + iv)'_x &= k_2\Phi_*(z) - \Omega_*(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)}; \\ \Phi_*(z) &= \alpha_1\Phi(z) + \alpha_2\Omega(z), & \Omega_*(z) &= \alpha_3\Omega(z) + \alpha_4\Phi(z), \\ \alpha_1 &= \frac{1 + \mu_*k_1}{1 + k_2}, & \alpha_2 &= \frac{1 - \mu_*}{1 + k_2}, & \alpha_3 &= \frac{\mu_* + k_2}{1 + k_2}, & \alpha_4 &= \frac{k_2 - \mu_*k_1}{1 + k_2}, & \mu_* &= \frac{\mu_2}{\mu_1}, & k_{1,2} &= 3 - 4\nu_{1,2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ — кусочно-голоморфные функции (комплексные потенциалы) с линией разрыва $L = [a, b] \cup [c, d]$. На концах этой линии они могут иметь особенности интегрируемого характера, а в окрестности точек приложения сосредоточенных сил и пар сил имеют полюсы первого и второго порядка [2]. В окрестности ∞ имеют место представления

$$\Phi(z) = \gamma_1 + \frac{\gamma_3}{z} + O(z^{-2}), \quad \Omega(z) = \gamma_2 + \frac{\gamma_4}{z} + O(z^{-2}), \quad (5)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}(\sigma_1^\infty + \sigma^\infty) + i\frac{2\mu_1\omega_1^\infty}{1 + k_1}, \quad \gamma_2 = \sigma^\infty - i\tau^\infty - \gamma_1,$$

$$\gamma_3 = -\frac{X_\infty + iY_\infty}{2\pi(1 + \mu_*k_1)}, \quad \gamma_4 = \frac{k_2(X_\infty + iY_\infty)}{2\pi(\mu_* + k_2)},$$

$$X_\infty + iY_\infty = X_{01} - \int_c^d [q^+(t) - q^-(t)] dt + i(Y_{01} + Y_{02}) + \sum_{k=1}^l (X_k + iY_k) -$$

главный вектор внешних усилий, действующих на включениях $[a, b]$, $[c, d]$ и в точках z_k .

Дифференцируя обе части условий (1) по t , на основании формул (3), (4) получим

$$k_1\Phi^+(t) - \Omega^-(t) = h^+(t),$$

$$k_2\alpha_1\Phi^-(t) + k_2\alpha_2\Omega^-(t) - \alpha_3\Omega^+(t) - \alpha_4\Phi^+(t) = h^-(t), \quad t \in (a, b), \quad (6)$$

$$h^\pm(t) = h_1^\pm(t) + ih_2^\pm(t) = 2\mu^\pm \frac{d}{dt}(s_1^\pm(t) + is_2^\pm(t)), \quad \mu^+ = \mu_1, \quad \mu^- = \mu_2.$$

Аналогично из условий (2) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [\Phi^+(t) + \Omega^-(t)] &= -q^+(t), \\ \operatorname{Im} [\alpha_1 \Phi^-(t) + \alpha_2 \Omega^-(t) + \alpha_3 \Omega^+(t) + \alpha_4 \Phi^+(t)] &= -q^-(t), \\ \operatorname{Im} [k_1 \Phi^+(t) - \Omega^-(t)] &= h_3^+(t), \\ \operatorname{Im} [k_2 \alpha_1 \Phi^-(t) + k_2 \alpha_2 \Omega^-(t) - \alpha_3 \Omega^+(t) - \alpha_4 \Phi^+(t)] &= h_3^-(t), \quad t \in (c, d), \\ h_3^\pm(t) &= 2\mu^\pm \frac{ds_3^\pm(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем в рассмотрение новые потенциалы

$$F_1(z) = \frac{k_1 \alpha \Phi(z) + \Omega(z)}{k_1(1 + \alpha)}, \quad F_2(z) = \frac{k_1 \Phi(z) - \Omega(z)}{k_1(1 + \alpha)}, \quad \alpha = \frac{k_2 \alpha_1}{k_1 \alpha_3}.$$

Тогда [4] краевая задача (7)–(8) сводится к следующим краевым задачам для функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$:

$$\begin{aligned} F_1^+(t) - F_1^-(t) &= 2g_1(t), \quad t \in (a, b), \\ \operatorname{Im} F_1^\pm(t) &= f_1^\pm(t), \quad t \in (c, d), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F_2^+(t) - \alpha F_2^-(t) &= 2g_2(t), \quad t \in (a, b), \\ \operatorname{Im} F_2^\pm(t) &= f_2^\pm(t), \quad t \in (c, d), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$g_1(t) = \frac{\mu_* h^+(t) - h^-(t)}{2k_1 \alpha_3 (1 + \alpha)}, \quad g_2(t) = \frac{k_2(1 + k_1)h^+(t) + k_1(1 + k_2)h^-(t)}{2k_1^2(\mu_* + k_2)(1 + \alpha)},$$

функции $f_1^\pm(t)$, $f_2^\pm(t)$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned} k_1(1 + k_1)(1 + k_2)\alpha_3(1 + \alpha)f_1^+(t) &= -(1 + k_1)[k_2 q^-(t) + h_3^-(t)] + \mu_* k_1(1 + k_2)[h_3^+(t) - q^+(t)], \\ k_1(1 + k_1)(1 + k_2)\alpha_3(1 + \alpha)f_1^-(t) &= k_2(1 + k_1)[-q^-(t) + h_3^-(t)] - \mu_*(1 + k_2)[h_3^+(t) + k_1 q^+(t)], \\ k_1(\mu_* + k_2)(1 + \alpha)f_2^+(t) &= k_2[h_3^+(t) - q^+(t)] + h_3^-(t) + k_2 q^-(t), \\ k_1(1 + \mu_* k_1)(1 + \alpha)f_2^-(t) &= [h_3^+(t) + k_1 q^+(t)] + k_1[h_3^-(t) - q^-(t)]. \end{aligned}$$

В силу равенств (5) функции $F_1(z)$, $F_2(z)$ в окрестности ∞ должны иметь представления

$$F_1(z) = \delta_1 + O(z^{-2}), \quad F_2(z) = \delta_2 + \gamma_3 z^{-1} + O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$\delta_1 = (k_1 \alpha \gamma_1 + \gamma_2)/(k_1 + k_1 \alpha), \quad \delta_2 = (k_1 \gamma_1 + \gamma_2)/(k_1 + k_1 \alpha).$$

В окрестности особых точек z_j , \bar{z}_j , z_k функции $F_1(z)$, $F_2(z)$ имеют вид: если $\operatorname{Im} z_k > 0$, то

$$\begin{aligned} F_1(z) &= -\frac{\mu_*(X_k + iY_k)}{2\pi\alpha_3(1 + \alpha)(1 + k_1)(z - z_k)} + O(1), \quad z \rightarrow z_k, \\ F_2(z) &= -\frac{k_2(X_k + iY_k)}{2\pi\alpha_3 k_1(1 + \alpha)(1 + k_2)(z - z_k)} + O(1), \quad z \rightarrow z_k, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{\mu_*}{k_1(1 + \alpha)\alpha_3} \left(\frac{k_1(X_k + iY_k)}{2\pi(1 + k_1)(z - \bar{z}_k)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\bar{z}_k - z_k)(X_k - iY_k) + i(1 + k_1)M_k}{2\pi(1 + k_1)(z - \bar{z}_k)^2} + O(1) \right), \\ F_2(z) &= -\frac{1 + k_1}{k_1(1 + \alpha)\alpha_1(1 + k_2)} \left(\frac{k_1(X_k + iY_k)}{2\pi(1 + k_1)(z - \bar{z}_k)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\bar{z}_k - z_k)(X_k - iY_k) + i(1 + k_1)M_k}{2\pi(1 + k_1)(z - \bar{z}_k)^2} + O(1) \right), \quad z \rightarrow \bar{z}_k; \end{aligned}$$

если $\operatorname{Im} z_k < 0$, то

$$F_1(z) = -\frac{(X_k + iY_k)\alpha}{(1 + \alpha)2\pi\alpha_1(1 + k_2)(z - z_k)} + O(1), \quad F_2(z) \sim \frac{F_1(z)}{\alpha}, \quad z \rightarrow z_k,$$

$$F_1(z) = \frac{1}{k_1(1+\alpha)} \left(\frac{k_2(X_k + iY_k)}{2\pi\alpha_3(1+k_2)(z-\bar{z}_k)} + \frac{(\bar{z}_k - z_k)(X_k - iY_k) + i(1+k_2)M_k}{2\pi\alpha_3(1+k_2)(z-\bar{z}_k)^2} + O(1) \right), \quad F_2(z) \sim -F_1(z), \quad z \rightarrow \bar{z}_k; \quad (12)$$

если $\text{Im } z_k = 0$, то

$$F_1(z) = \frac{i(M_k - z_k Y_k)}{k_1(1+\alpha)2\pi\alpha_3^2(z-z_k)^2} + O(1), \quad z \rightarrow z_k, \quad (13)$$

$$F_2(z) = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+k_2)\alpha_1(z-z_k)} - \frac{i(M_k - z_k Y_k)}{k_1(1+\alpha)2\pi\alpha_3(z-z_k)^2} + O(1), \quad z \rightarrow z_k.$$

Из результатов работ [4], [5] следует, что решения краевых задач (8), (9) имеют вид

$$F_1(z) = F_{1*}(z) + A_1 + i \frac{A_2 + A_3 z}{w(z)} + R_1(z), \quad w(z) = \sqrt{(z-c)(z-d)}, \quad (14)$$

$$F_2(z) = X(z) \left[F_{2*}(z) + B_1 + B_2 z + i \frac{B_3 + B_4 z + B_5 z^2}{w(z)} + R_2(z) \right], \quad (15)$$

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left(\frac{z-a-w(z)+w(a)}{z-b-w(z)+w(b)} \cdot \frac{z-b+w(z)+w(b)}{z-a+w(z)+w(a)} \right)^{i\beta}, \quad \beta = \frac{\ln \alpha}{2\pi},$$

$$\begin{aligned} F_{1*}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \text{Im } g_1(t) \frac{dt}{t-z} - \frac{w(z)}{\pi i} \int_a^b \text{Re } g_1(t) \frac{dt}{(t-z)\omega(t)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_c^d \frac{f_1^+(t) - f_1^-(t)}{t-z} dt + \frac{w(z)}{2\pi i} \int_c^d \frac{f_1^+(t) + f_1^-(t)}{(t-z)\omega(t)} dt, \quad \omega(t) = |w(t)|, \\ F_{2*}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\text{Im } \frac{g_2(t)}{X^+(t)} \right) \frac{dt}{t-z} - \frac{w(z)}{\pi i} \int_a^b \left(\text{Re } \frac{g_2(t)}{X^+(t)} \right) \frac{dt}{(t-z)\omega(t)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_c^d \left(\frac{f_2^+(t)}{X^+(t)} - \frac{f_2^-(t)}{X^-(t)} \right) \frac{dt}{t-z} + \frac{w(z)}{2\pi i} \int_c^d \left(\frac{f_2^+(t)}{X^+(t)} + \frac{f_2^-(t)}{X^-(t)} \right) \frac{dt}{(t-z)\omega(t)}, \\ R_m(z) &= \sum_{j=1}^{n_1} \left(\frac{B_{1j}^m}{z-z_j} + \frac{\bar{B}_{1j}^m}{z-\bar{z}_j} + \frac{C_{1j}^m}{(z-z_j)^2} + \frac{\bar{C}_{1j}^m}{(z-\bar{z}_j)^2} \right) + \\ &+ w(z) \sum_{j=1}^{n_1} \left(\frac{D_{1j}^m}{z-z_j} - \frac{\bar{D}_{1j}^m}{z-\bar{z}_j} + \frac{E_{1j}^m}{(z-z_j)^2} - \frac{\bar{E}_{1j}^m}{(z-\bar{z}_j)^2} \right) + \\ &+ \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \left(\frac{R_{1k}^m}{z-z_k} + \frac{S_{1k}^m}{(z-z_k)^2} \right) + iw(z) \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \left(\frac{R_{2k}^m}{z-z_k} + \frac{S_{2k}^m}{(z-z_k)^2} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что постоянные $A_k, B_k, R_{1k}^m, S_{1k}^m, R_{2k}^m, S_{2k}^m$ — действительные, а постоянные $B_{1j}^m, C_{1j}^m, D_{1j}^m, E_{1j}^m$ — комплексные. Построенное решение задачи (8) зависит от $8n_1 + 4n_2 + 3$ действительных постоянных, а решение задачи (9) — от $8k_1 + 4k_2 + 5$ постоянных. Постоянные находятся разложением функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ в ряд Лорана в окрестности ∞ и в окрестности точек z_k и \bar{z}_k и с использованием равенств (10)–(13).

3. Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Комплексные потенциалы $\Phi(z), \Omega(z)$ находятся по формулам

$$\Phi(z) = F_1(z) + F_2(z), \quad \Omega(z) = k_1 F_1(z) - k_1 \alpha F_2(z).$$

Из формул (14), (15) следует, что комплексные потенциалы, а значит и напряжения вблизи вершин $z = a$ и $z = b$ включения $[a, b]$, имеют особенности видов $C(a-z)^{-\frac{1}{2}+i\beta}$ и $C(z-b)^{-\frac{1}{2}-i\beta}$ соответственно, а вблизи вершин $z = c$ и $z = d$ отслоившегося включения — степенные особенности видов $iA(c-d)^{-\frac{1}{2}}$ и $iA(z-d)^{-\frac{1}{2}}$ соответственно с чисто мнимыми коэффициентами iA . В силу сказанного определим КИН вблизи вершин первого включения по формулам [7]

$$(K_I - iK_{II})(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} (a-z)^{\frac{1}{2}-i\beta} [\sigma_y(z) - i\tau_{xy}(z)],$$

$$(K_I - iK_{II})(b) = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow b} (z-b)^{\frac{1}{2}+i\beta} [\sigma_y(z) - i\tau_{xy}(z)],$$

а вблизи вершин второго включения — по формулам

$$K_{II}(c) = \lim_{z \rightarrow c} \sqrt{2\pi(c-d)} \tau_{xy}(z), \quad K_{II}(d) = \lim_{z \rightarrow d} \sqrt{2\pi(z-d)} \tau_{xy}(z).$$

Тогда на основании формул (3), (4), (14), (15) получим

$$(K_I - iK_{II})(a) = \gamma_* \left(\frac{a-b-\omega(a)-\omega(b)}{a-b+\omega(a)-\omega(b)} \cdot \frac{2a+2\omega(a)-c-d}{4(\omega(a))^2} \right)^{i\beta} [F_{20}(a) + F_{2*}(a)],$$

$$(K_I - iK_{II})(b) = -\gamma_* \left(\frac{a-b+\omega(a)-\omega(b)}{a-b+\omega(a)+\omega(b)} \cdot \frac{4(\omega(b))^2}{c+d-2b-2\omega(b)} \right)^{i\beta} [F_{20}(b) + F_{2*}(b)],$$

$$K_{II}(c) = \sqrt{\frac{2\pi}{d-c}} F_0(c), \quad K_{II}(d) = -\sqrt{\frac{2\pi}{d-c}} F_0(d),$$

где

$$\gamma_* = (k_1\alpha - 1) \sqrt{\frac{2\pi}{b-a}}, \quad F_{20}(x) = B_1 + B_2x - \frac{i(B_3 + B_4x + B_5x^2)}{\omega(x)} + R_2(x),$$

$$F_0(x) = (1+k_1)(A_2 + A_3x) + \frac{(1-k_1\alpha)(B_3 + B_4x + B_5x^2)}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}.$$

Из этих формул видно, что если расстояние $\Delta = c-b$ между включениями уменьшается, то значения $(K_I - iK_{II})(b)$ и $K_{II}(c)$ возрастают как $\Delta^{-\frac{1}{2}}$, в то время как значения $(K_I - iK_{II})(a)$ и $K_{II}(d)$ остаются ограниченными.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бережницкий, Л. Т.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле / Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Сташук. — Киев : Наук. думка, 1983. — 288 с.

[2] *Сильвестров, В. В.* Метод римановых поверхностей в задаче о межфазных трещинах и включениях при наличии сосредоточенных сил / В. В. Сильвестров // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 7(506). — С. 78–91.

[3] *Ярдухин, А. К.* Аналитическое решение задачи взаимодействия межфазной трещины с отслоившимся межфазным включением при наличии сосредоточенных сил / А. К. Ярдухин // Вестник Сам. ГТУ. Серия “Физ.-мат. науки”. — Самара, 2003. — С. 173–177.

[4] *Мочалов, Е. В.* Задачи теории упругости для кусочно-однородной среды с различными сингулярностями на линии раздела сред / Е. В. Мочалов, В. В. Сильвестров, А. К. Ярдухин // Сб. тр. X Междунар. научной школы “Гидромеханика больших скоростей” и Междунар. научной конф. “Гидродинамика. Механика. Энергетические установки”. — Чебоксары, 2008. — С. 511–516.

[5] *Сильвестров, В. В.* Напряженное состояние кусочно-однородной упругой плоскости с тонкими жесткими прямолинейными включениями, расположенными на линии раздела сред / В. В. Сильвестров, Е. В. Мочалов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2010. — Т. 16. — № 2. — С. 197–213.

[6] Черепанов, Г. П. Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1983. – 296 с.

[7] Ballarini, R. A. A rigid line inclusion at a bimaterial interface / R. A. Ballarini // Engineering Fracture Mechanics. – 1990. – Vol. 37. – P. 127–138.

E. V. Mochalov, V. V. Silvestrov

INTERACTION OF THIN RIGID INTERFACE SHARP INCLUSIONS UNDER ACTION OF CONCENTRATED FORCES

I. Ulyanov Chuvash State University

Gubkin Russian State University of Oil and Gas

Abstract. A piecewise-homogeneous elastic plane composed from two elastic half-planes is studied. Two thin rigid sharp inclusions are located between the half-planes. One inclusion is perfectly attached to the plane, and the other inclusion is disjoined from the plane and contacts it as a smooth rigid stamp. The plane strain-stress state which is formed by stresses given at infinity and by given concentrated forces is considered. The complex potentials of the composite elastic plane, and the stress intensity factors near the end-points of inclusions are found.

Keywords: piecewise-homogeneous elastic plane, rigid interface inclusions, concentrated forces, complex potentials, stress intensity factors.

Мочалов Евгений Владимирович

аспирант, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

Сильвестров Василий Васильевич

доктор физико-математических наук, профессор, Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, г. Москва

e-mail: v-silvestrov@yandex.ru

Mochalov, Evgeniy Vladimirovich

Postgraduate student, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary

Silvestrov, Vasily Vasilyevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow

Ю. Н. Радаев, М. В. Таранова

СВЯЗАННОЕ ВОЛНОВОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ ПОЛЕ В ДЛИННОМ ВОЛНОВОДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлунского РАН,

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Аннотация. В представляемой работе рассматривается задача об определении связанного термоупругого волнового поля в длинном цилиндрическом волноводе эллиптического поперечного сечения в форме проходящей вдоль оси волновода гармонической волны третьего типа (GNIII). Боковая поверхность волновода предполагается свободной и проницаемой для тепла. Соответствующая термоупругая задача для цилиндрического волновода с круглым поперечным сечением рассматривалась ранее в ряде работ, в которых были построены точные гармонические по времени решения связанных уравнений динамической теории термоупругости типа III (GNIII) в форме волн, распространяющихся вдоль оси бесконечного цилиндра. Задача для термоупругого волновода с эллиптическим поперечным сечением ранее, по-видимому, не рассматривалась. В работе получены представления сопряженных перемещений, деформаций, напряжений и температуры внутри волновода через три потенциала, которые, в свою очередь, определены в форме разложений в ряды по ортонормированной системе функций Матье. Особый интерес здесь представляют “угловые” волновые гармоники с большими характеристическими числами, определяемыми через характеристические показатели “углового” дифференциального уравнения Матье.

Ключевые слова: термоупругость, волновое поле, волновод, волновое число, характеристическое число, дифференциальное уравнение Матье, функции Матье.

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Термин “термоупругость” в настоящее время охватывает достаточно широкий спектр явлений, таких как теплопроводность, термические напряжения, связанные термоупругие деформации, затухание тепловых и упругих импульсов в твердых телах и, конечно же, тепловые волны “второго звука” в деформируемых твердых телах. С чисто теоретической точки зрения термоупругость следует рассматривать как одну из важнейших составляющих термомеханики и теории поля.

Наиболее ранние исследования по температурным напряжениям и деформациям в деформируемых твердых телах в линейном приближении восходят к Дж. Дюгамелю (J.M.C. Duhamel, 1837) и Ф. Нейману (F. Neumann, 1885): *Duhamel, J. Second Mémoire sur les Phenomenes Thermo-Mécanique // J. Duhamel / J. de L'Ecole Polytech. – 1837. – Vol. 15. – P. 1–57; Duhamel, J. Mémoire sur le Calcul des Actions Moléculaires Développées par les Changements*

Поступила 01.04.2011

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00184-а “Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости”).

de Température dans les Corps Solides // J. Duhamel / Mémoires par Divers Savants. A l'Acad. Roy. des Sci. de l'Inst. de France. – 1838. – Vol. 5. – P. 440–498; Neumann, F. Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers / F. Neumann. – Breslau: Meyer, 1885. Одна из первых работ на русском языке, посвященная температурным напряжениям и содержащая все известные к тому времени достаточно законченные формы решений прикладных задач термоупругости, — монография: Лебедев, Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости / Н.Н. Лебедев. – М., Л.: ОНТИ, 1937. – 110 с.

Классическая теория термоупругости (СТЕ, conventional thermoelasticity) основывается на законе теплопроводности Фурье

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta,$$

где \mathbf{h} — вектор потока тепла (heat flux), Λ_* — коэффициент теплопроводности (thermal conductivity), θ — температура, ∇ — оператор Гамильтона, устанавливающий коллинеарность вектора потока тепла и пространственного антиградиента температуры, и предсказывает возможность распространения теплового сигнала с бесконечно большой скоростью, что явно не соответствует реальным физическим наблюдениям и нарушает принцип причинности. Известно, что соответствующее закону Фурье уравнение теплопроводности принадлежит параболическому аналитическому типу; уравнения такого типа допускают бесконечные скорости распространения возмущений, а в том случае, когда решение имеет “волновой” характер, тепловые волны будут иметь затухающие амплитуды.

По существу, парадокс бесконечной скорости распространения температурных возмущений впервые обсуждался Максвеллом (J.C. Maxwell) [1]. Био (M.A. Biot) [2] впервые методами термодинамики необратимых процессов корректно построил теорию *связанной* термоупругости; связанные соотношения этой теории, классифицируемые в настоящее время как СТЕ, включают векторное уравнение движения, принадлежащее гиперболическому типу, и параболическое уравнение теплопроводности. Ясно, что теория Био в полной мере обладает указанным выше недостатком. “Полевые” уравнения СТЕ для связанных (сопряженных) перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного и сопряженного ему скалярного связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_* \Delta \theta - \kappa \dot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В этих уравнениях \mathbf{u} — вектор перемещения; λ, μ — упругие постоянные Ламе (для изотермической деформации); α — термомеханическая постоянная ($\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$); β^* — коэффициент объемного теплового расширения; θ — абсолютная температура, точнее, ее превышение (инкремент) над отсчетной (референциальной) температурой θ_0 ; θ_0 — отсчетная (равновесная) температура (при температуре, равной θ_0 , отсутствуют деформации и напряжения); κ — теплоемкость (на единицу объема) при нулевой постоянной деформации; $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа. Связанность уравнений СТЕ-теории обуславливается взаимным влиянием нагрева (охлаждения) и объемной деформации тела, проявляется через определяющую постоянную α и является следствием основных принципов термодинамики (см. [2]).

За последние десятилетия было предложено достаточно много различных обобщений теории связанной термоупругости Био с тем, чтобы устранить парадокс бесконечной скорости распространения тепла и допустить возможность волнового характера транспорта тепла в форме *незатухающих* волн. Последнее из указанных явлений называется “вторым звуком”. Обзор работ по проблеме “второго звука”, включая весьма интересный исторический аспект, дан в статьях [3], [4].

Эксперименты, проведенные в разные годы различными исследователями, подтверждают вывод о том, что тепло при определенных условиях может распространяться как незатухающая волна. Первоначально (1946 г.) термические волны “второго звука” были экспериментально обнаружены в жидком гелии и позднее (1966 г.) — в твердом гелии. Феномен второго

звука наблюдается при весьма низких температурах в кристаллах высокой чистоты. Например, в работе [5] указывается на обнаружение “второго звука” в кристалле NaF. “Второй звук” в NaF наблюдается при температуре около 15К [6]. В работах [7] и [8] также подтверждается существование волн второго звука в NaF; согласно [9] скорость волн “второго звука” составляет 1953.1 м/с. В публикации [10] приводятся результаты измерений волн “второго звука” в висмуте (Bi) при температуре около 3К. Скорость волн “второго звука” в висмуте оказывается равной 78 ± 5 м/с.

Остановимся на нескольких наиболее часто встречающихся в прикладных задачах термомеханики обобщениях основополагающих уравнений СТЕ. Одно из них было дано Лордом и Шульманом (H. Lord, Y. Shulman) (LS-theory) [11]. Ими было получено гиперболическое уравнение распространения тепла, основанное на новом законе теплопроводности, заменившем классический закон теплопроводности Фурье. В законе LS-теплопроводности введена дополнительная определяющая постоянная — время релаксации τ_{rel} в соответствии с уравнением Каттанео (C. Cattaneo) [12]

$$\mathbf{h} + \tau_{\text{rel}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = -\Lambda_* \nabla \theta. \quad (2)$$

Время релаксации представляет собой (всегда весьма малое) время запаздывания после возникновения температурного градиента, необходимое для того, чтобы в элементе тела сформировался установившийся поток тепла. Независимо от Каттанео аналогичное уравнение было получено в работе [13].

Уравнение (2) часто выводится на основании уравнения “запаздывания” (the lag equation)

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t + \tau_{\text{rel}}) = -\Lambda_* \nabla \theta(\mathbf{x}, t),$$

которое формулируется для заданного места в пространстве \mathbf{x} и, как уже отмечалось, устанавливает, что поток тепла запаздывает по отношению к пространственному градиенту температуры. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t + \tau_{\text{rel}}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \tau_{\text{rel}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \dots,$$

где частное дифференцирование по времени выполняется при фиксированном положении в пространстве \mathbf{x} , и ограничиваясь лишь первыми двумя выписанными слагаемыми в приведенном разложении, приходим к уравнению Каттанео (2).

“Уравнения поля” LS-теории для связанных перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного (совпадающего с соответствующим уравнением СТЕ-теории) и сопряженного ему скалярного гиперболического связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_* \Delta \theta - \kappa (\dot{\theta} + \tau_{\text{rel}} \ddot{\theta}) - \alpha \theta_0 (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \tau_{\text{rel}} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тем самым в LS-теории как уравнение движения, так и уравнение транспорта тепла принадлежат гиперболическому типу, что и обеспечивает конечную скорость распространения как тепловых, так и упругих волн деформации. В отечественной научной литературе первое упоминание о времени релаксации теплового потока и конечной скорости распространения теплового возмущения было сделано А.В. Лыковым в 1967 г. [14].

Вторым хорошо известным обобщением связанной теории термоупругости Био, допускающим “второй звук”, является теория, предложенная Грином и Линдсей (A.E. Green, K.A. Lindsay) (GL-theory) [15]. GL-теория характеризуется тем, что вектор потока тепла в термоупругом теле \mathbf{h} зависит от скорости изменения абсолютной температуры θ и градиента температуры; закон GL-теплопроводности имеет форму

$$\mathbf{h} = -\mathbf{b} \dot{\theta} - \Lambda_* \cdot \nabla \theta,$$

где \mathbf{b} — антисимметричный вектор, Λ_* — тензор теплопроводности. Тензор второго ранга Λ_* в GL-теории симметричен: $\Lambda_* = \Lambda_*^T$. Заметим, что в случае центральной материальной симметрии выполняется равенство $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Уравнение транспорта тепла оказывается гиперболическим. GL-теория в случае $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ допускает “второй звук”, не нарушая при этом классического закона теплопроводности Фурье.

Определяющее уравнение GL-теории связанной термоупругости имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha \left(1 + \tau^* \frac{\partial}{\partial t} \right) (\theta - \theta_0)\mathbf{I}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, \mathbf{I} — единичный тензор.

Замкнутая система дифференциальных уравнений GL-теории состоит из уравнения движения

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \left(1 + \tau^* \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (5)$$

и уравнения распространения тепла

$$\Lambda_*\Delta\theta - \alpha\theta_0\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \kappa \left(1 + \tau_* \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\theta} = 0. \quad (6)$$

Определяющие постоянные GL-теории τ^* и τ_* , имеющие смысл времен релаксации, подчиняются неравенствам

$$\tau^* \geq \tau_* \geq 0, \quad (7)$$

обеспечивающим неотрицательность внутреннего производства энтропии при распространении связанных волн деформаций и температуры. Если $\tau^* = \tau_* = 0$, то GL-теория сводится к СТЕ.

В начале 90-х гг. XX в. Грином и Нахди (A.E. Green, P.M. Naghdi) [16], [17] была разработана теория обобщенной термоупругости (GN-theory). Предложенная теория сочетает в себе как свойства классической термоупругости СТЕ, выстроенной согласно закону теплопроводности Фурье, так и свойства недиссипативной термоупругости, предполагающей отсутствие производства энтропии и волновой характер распространения теплового сигнала. GN-теория была сформулирована в трех различных термодинамически корректных вариантах: GNI, GNII и GNIII. В линейном приближении первый вариант (GNI) приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности; второй (GNII) — предлагает считать распространение тепла как волновой недиссипативный процесс (dissipationless thermoelasticity), не сопровождающийся внутренним производством энтропии, и приводит к гиперболическому уравнению транспорта тепла; третий (GNIII) — наиболее общий из рассматриваемых — включает GNI и GNII в качестве предельных случаев. Именно по этой причине GN-теория в состоянии моделировать значительно более широкий круг явлений, связанных с переносом тепла, по сравнению с теорией Фурье.

Классическая *связанная* теория термоупругости (СТЕ) широко применяется в различных прикладных задачах термомеханики в тех ситуациях, когда речь идет о быстропротекающих переходных процессах или когда происходит интенсивный нагрев тела (например, с помощью импульсного лазерного излучения). В таких ситуациях температурное поле *связано* с упругим полем и *связанная* форма уравнений термоупругости должна выглядеть наиболее адекватной. Систематическое изложение динамической теории связанной (сопряженной) СТЕ-термоупругости дано в известной монографии: *Новацкий, В.* Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1970. — 256 с.

Отличительной чертой теории GNII гиперболической термоупругости является то, что она полностью согласуется с основными принципами термодинамики (и в этом смысле она термодинамически корректна) и предсказывает нулевое внутреннее производство энтропии, т.е. отсутствие рассеяния энергии, при распространении термической волны “второго звука”. Отсутствие диссипации энергии в GNII-термоупругом теле позволяет дать вариационную (а следовательно, и полевую) формулировку теории с целью дальнейшего поиска вариационных

симметрий связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных термоупругости. Лагранжева и Гамильтонова полевые формы нелинейной теории термоупругости типа GNII рассматривались в работах [18-21].

Анализ литературных источников показывает, что к настоящему времени опубликовано сравнительно небольшое количество работ, выполненных с привлечением связанных уравнений GNIII-теории. Например, распространение плоских гармонических связанных термоупругих волн в рамках GNIII-теории изучалось лишь сравнительно недавно в работах [22] и [23], и нельзя сказать, что эта проблема полностью разрешена в плане определения *нормальных* волновых чисел указанного типа волн. В [24-26] получено решение задачи о распространении связанной GNIII-термоупругой волны вдоль теплоизолированного цилиндрического волновода. В работе [27] исследуется частотное уравнение указанных волн в случае достаточно высоких азимутальных чисел.

2. Основные уравнения теории динамической связанной термоупругости третьего типа (GNIII).

Целью настоящей работы является изучение распространения обобщенных связанных гармонических термоупругих волн третьего типа (GNIII) вдоль длинного цилиндрического волновода со свободной теплопроницаемой стенкой.

В рассматриваемой линейной постановке принимается определяющий закон Дюгамеля—Неймана

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha(\theta - \theta_0)) \mathbf{I}, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, \mathbf{I} — единичный тензор; мы по-прежнему используем следующие обозначения: λ, μ — упругие постоянные Ламе; α — термомеханическая постоянная ($\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$); β^* — коэффициент объемного теплового расширения (coefficient of thermal expansion); θ — абсолютная температура; θ_0 — отсчетная (равновесная) температура. (Отметим, что при температуре, равной θ_0 , отсутствуют деформации и напряжения.)

Линейная теория GNIII-термоупругости характеризуется тем, что вектор потока тепла \mathbf{h} линейно зависит как от градиента температуры, так и от градиента температурного смещения

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta - \Lambda \nabla \vartheta, \quad (9)$$

где ϑ ($\dot{\vartheta} = \dot{\theta}$) — температурное смещение (thermal displacement), Λ — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate), ∇ — трехмерный оператор Гамильтона. Кроме того, полная система соотношений GNIII-теории включает уравнения движения

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (10)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений, ρ — плотность; уравнение баланса энтропии

$$\dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma + \xi, \quad (11)$$

где s — плотность (на единицу объема) энтропии, \mathbf{j} — вектор потока энтропии, σ — внешнее производство энтропии, $\xi \geq 0$ — внутреннее производство энтропии, или

$$\theta \dot{s} + \nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) = \mathbf{j} \cdot \nabla \theta + \theta(\sigma + \xi); \quad (12)$$

и уравнение баланса энергии, которое мы примем в форме

$$-\left(\dot{\psi} + s\dot{\theta}\right) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta} = \theta \xi, \quad (13)$$

где ψ — плотность (на единицу объема) свободной энергии Гельмгольца. Здесь необходимо учесть, что вектор потока тепла и вектор потока энтропии связаны уравнением

$$\mathbf{h} = \theta \mathbf{j}, \quad (14)$$

а для внутреннего производства энтропии справедливо соотношение

$$\theta \xi = - \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta} \right) \cdot \nabla \dot{\vartheta}. \quad (15)$$

В рамках линейной теории следует предполагать линейную зависимость между термодинамическим потоком

$$- \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta} \right)$$

и термодинамической силой

$$\nabla \dot{\vartheta},$$

равно как и квадратичную зависимость ψ от градиента температурного смещения $\nabla \vartheta$. В результате определяющее уравнение для теплового потока будет иметь вид (9).

Заметим, что внутреннее производство энтропии в модели GNII-термоупругости исчезает (т.е. $\xi = 0$) в силу

$$\mathbf{j} = - \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta}.$$

Классическая связанная термоупругость GNI/CTE основывается на допущении о независимости свободной энергии ψ от температурного смещения ϑ и градиента $\nabla \vartheta$, в силу чего внутреннее производство энтропии вычисляется как

$$\theta \xi = - \mathbf{j} \cdot \nabla \theta.$$

Приведем также соотношения Коши, связывающие тензор малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и градиент вектора перемещения $\nabla \otimes \mathbf{u}$:

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T. \quad (16)$$

Условие конвективного теплообмена с окружающей средой через двумерную поверхность с единичной нормалью \mathbf{n} в линейном приближении имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} = \sigma (\theta - \theta_{\text{env}}), \quad (17)$$

где σ — коэффициент теплообмена, θ_{env} — температура окружающей среды. В дальнейшем будем полагать, что температура окружающей среды совпадает с отсчетной $\theta_{\text{env}} = \theta_0$.

Для сокращения записи уравнений в дальнейшем через θ будем обозначать превышение температуры над отсчетной (равновесной) температурой θ_0 , т.е. символ θ в последующем изложении следует понимать как разность $\theta - \theta_0$.

Заклучая введение, приведем линейные связанные уравнения движения и теплопроводности GNIII-термоупругости [25] в той форме, в которой они будут использоваться в настоящей работе:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda \Delta \theta + \Lambda_* \Delta \dot{\theta} - \kappa \ddot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь Δ — трехмерный оператор Лапласа, κ — (specific heat of the unit volume) теплоемкость (на единицу объема) при отсутствии деформации.¹

Разделим второе уравнение системы (18) на Λ и θ_0 . В дальнейшем постоянные Λ , Λ_* и κ будут считаться отнесенными к отсчетной температуре θ_0 . Таким образом можно минимизировать число постоянных, необходимых для формулировки связанных уравнений GNIII-теории. В итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Delta \theta + \frac{\Lambda_*}{\Lambda} \Delta \dot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

¹Поскольку рассматривается линейная теория, теплоемкость κ не зависит от температуры для ее значений в окрестности референциальной температуры θ_0 .

Как упоминалось ранее, классическая связанная термоупругость (GNI/СТЕ) и гиперболическая термоупругость (GNII) являются предельными случаями GNIII-теории. Заметим, что система (19) исключительно удобна при переходе к уравнениям гиперболической GNII-теории: для этого необходимо положить $\Lambda_* = 0$. Не требует комментариев также то, что предельный переход $\Lambda \rightarrow 0$ к классической термоупругости (GNI/СТЕ) в уравнениях (19) должен сопровождаться соблюдением ряда мер предосторожности.

3. Представление связанных уравнений линейной термоупругости в координатах эллиптического цилиндра.

Введем ортогональные криволинейные координаты эллиптического цилиндра ($2c$ — расстояние между фокусами эллипса, u — “радиальная” координата, v — “угловая” координата): $x_1 = c \operatorname{sh} u \cos v$, $x_2 = c \operatorname{sh} u \sin v$, $x_3 = z$. Уравнение эллипса, ограничивающего сечение волновода, примем в форме $u = u_*$. Единичные локальные базисные орты обозначим через $\mathbf{i}_{\langle u \rangle}$, $\mathbf{i}_{\langle v \rangle}$, $\mathbf{i}_{\langle z \rangle}$. Физические компоненты векторных и тензорных полей относительно рассматриваемой координатной системы указываются для удобства соответствующими координатными переменными, заключенными в треугольные скобки. Для сокращения записи уравнений в дальнейшем будем использовать следующее обозначение:

$$\sqrt{} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v} = \sqrt{\operatorname{ch} 2u - \cos 2v}.$$

Из приведенных во втором разделе прямых тензорных соотношений находятся физические компоненты тензора деформаций и напряжений в координатах эллиптического цилиндра:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\langle uu \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{}} \frac{\partial u_{\langle u \rangle}}{\partial u} + \frac{u_{\langle v \rangle}}{c\sqrt{3}} \sin v \cos v, & \varepsilon_{\langle vv \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{}} \frac{\partial u_{\langle v \rangle}}{\partial v} + \frac{u_{\langle u \rangle}}{c\sqrt{3}} \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u, \\ \varepsilon_{\langle zz \rangle} &= \frac{\partial u_{\langle z \rangle}}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{\langle vz \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{}} \frac{\partial u_{\langle z \rangle}}{\partial v} + \frac{\partial u_{\langle v \rangle}}{\partial z}, & 2\varepsilon_{\langle uz \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{}} \frac{\partial u_{\langle z \rangle}}{\partial u} + \frac{\partial u_{\langle u \rangle}}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{\langle uv \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{}} \left(\frac{\partial u_{\langle v \rangle}}{\partial u} + \frac{\partial u_{\langle u \rangle}}{\partial v} \right) - \frac{u_{\langle u \rangle}}{c\sqrt{3}} \sin v \cos v - \frac{u_{\langle v \rangle}}{c\sqrt{3}} \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\langle uu \rangle} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{\langle uu \rangle} - \alpha \theta, & \sigma_{\langle vv \rangle} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{\langle vv \rangle} - \alpha \theta, \\ \sigma_{\langle zz \rangle} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{\langle zz \rangle} - \alpha \theta, & \sigma_{\langle uv \rangle} &= 2\mu \varepsilon_{\langle uv \rangle}, \\ \sigma_{\langle uz \rangle} &= 2\mu \varepsilon_{\langle uz \rangle}, & \sigma_{\langle vz \rangle} &= 2\mu \varepsilon_{\langle vz \rangle}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\langle uu \rangle} + \varepsilon_{\langle vv \rangle} + \varepsilon_{\langle zz \rangle}. \quad (22)$$

Пространственный оператор Гамильтона определяется как

$$\nabla = \frac{1}{c\sqrt{}} \left(\mathbf{i}_{\langle u \rangle} \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{i}_{\langle v \rangle} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \mathbf{i}_{\langle z \rangle} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (23)$$

Дивергенция пространственного векторного поля \mathbf{A} находится согласно формуле

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{c\sqrt{}} \left(\frac{\partial A_{\langle u \rangle}}{\partial u} + \frac{\partial A_{\langle v \rangle}}{\partial v} \right) + \frac{\partial A_{\langle z \rangle}}{\partial z} + \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}{c\sqrt{3}} A_{\langle u \rangle} + \frac{\sin v \cos v}{c\sqrt{3}} A_{\langle v \rangle}. \quad (24)$$

Для ротора пространственного векторного поля \mathbf{A} можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{c\sqrt{}} \left(\frac{\partial A_{\langle z \rangle}}{\partial v} - c\sqrt{} \frac{\partial A_{\langle v \rangle}}{\partial z} \right) \mathbf{i}_{\langle u \rangle} - \frac{1}{c\sqrt{}} \left(\frac{\partial A_{\langle z \rangle}}{\partial u} - c\sqrt{} \frac{\partial A_{\langle u \rangle}}{\partial z} \right) \mathbf{i}_{\langle v \rangle} + \\ &+ \frac{1}{c\sqrt{2}} \left(\sqrt{} \frac{\partial A_{\langle v \rangle}}{\partial u} - \sqrt{} \frac{\partial A_{\langle u \rangle}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}{\sqrt{}} A_{\langle v \rangle} - \frac{\sin v \cos v}{\sqrt{}} A_{\langle u \rangle} \right) \mathbf{i}_{\langle z \rangle}. \end{aligned} \quad (25)$$

Оператор Лапласа в координатах эллиптического цилиндра, как показывают простые вычисления, имеет вид:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{c^2 \sqrt{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (26)$$

В рассматриваемой задаче предполагается, что боковая поверхность волновода свободна от нагрузок, т.е. должны удовлетворяться граничные условия

$$\sigma_{\langle uu \rangle} |_{u=u_*} = 0, \quad \sigma_{\langle uv \rangle} |_{u=u_*} = 0, \quad \sigma_{\langle uz \rangle} |_{u=u_*} = 0, \quad (27)$$

где, как уже указывалось выше, $\sigma_{\langle uu \rangle}$, $\sigma_{\langle uv \rangle}$, $\sigma_{\langle uz \rangle}$ — физические компоненты тензора напряжений в координатах эллиптического цилиндра.

С окружающей средой через боковую стенку волновода происходит конвективный теплообмен по линейному закону (17). Положив $\theta_{\text{env}} = \theta_0$, разделим уравнение (17) на θ_0 , затем разность $\theta - \theta_0$ обозначим, как было оговорено ранее, через θ и продифференцируем обе части полученного уравнения по времени. В результате приходим к условию

$$\left(\Lambda \frac{1}{c \sqrt{2}} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \Lambda_* \frac{1}{c \sqrt{2}} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial u} + \sigma \dot{\theta} \right) \Big|_{u=u_*} = 0, \quad (28)$$

σ — коэффициент теплообмена, отнесенный к отсчетной температуре θ_0 .

4. Связанное термоупругое поле в цилиндрическом волноводе эллиптического поперечного сечения.

Будем рассматривать гармоническую зависимость перемещений и температуры от времени: $\mathbf{u} = \mathbf{U} e^{-i\omega t}$, $\theta = \Theta e^{-i\omega t}$, где ω — циклическая частота; \mathbf{U} , Θ — комплексные амплитуды. Зависимость комплексных амплитуд от переменной z также имеет форму гармонической экспоненты $e^{\pm ikz}$, где k — волновое число.

Представим вектор комплексной амплитуды \mathbf{U} в виде разложения Гельмгольца на безвихревую и вихревую составляющие

$$\mathbf{U} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi, \quad (29)$$

где Φ — скалярный потенциал, Ψ — векторный потенциал. При этом векторный потенциал подчиним условию калибровки

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \quad (30)$$

Векторный потенциал Ψ удовлетворяет независимому уравнению, векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Psi + k_{\perp}^2 \Psi = \mathbf{0}, \quad (31)$$

где k_{\perp}^2 — квадрат волнового числа чисто упругой поперечной волны.

Скалярный потенциал Φ и комплексная амплитуда температуры Θ в силу (19) связаны и выражаются через новый скалярный потенциал Ω согласно

$$\Phi = a\Omega, \quad \Theta = b\Omega; \quad (32)$$

при этом постоянные a и b могут принимать в точности два различных значения:

$$a_j = p_j^2 - g^2, \quad b_j = h \frac{\omega \alpha}{\Lambda_*} \gamma_j^2 \quad (j = 1, 2). \quad (33)$$

Здесь мы вводим следующие, согласующиеся с [25], обозначения:

$$p_j^2 = k^2 - \gamma_j^2, \quad g^2 = k^2 - h h_2^2 h_3^{-2} k_{\parallel}^2, \\ h = h_3^2 \frac{1 + i h_3^2}{1 + h_3^4}, \quad h_2^2 = \frac{c_l^2}{l^2}, \quad h_3^2 = \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda},$$

где постоянные γ_j ($j = 1, 2$) имеют смысл волновых чисел и определяются ниже, k_{\parallel}^2 — квадрат волнового числа чисто упругой продольной волны. Потенциал Ω удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Omega + \gamma^2\Omega = 0 \quad (\gamma = \gamma_1, \gamma_2). \quad (34)$$

Как показано в [25], для нахождения волновых чисел γ_j ($j = 1, 2$) получается биквадратное уравнение

$$\frac{\gamma^4}{k_{\parallel}^4} (ih_3^2 - 1) + \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} (h_1^2 - ih_3^2) - h_2^2 = 0, \quad h_1^2 = 1 + h_2^2 + \frac{\alpha^2}{\rho\Lambda}. \quad (35)$$

Квадраты указанных волновых чисел, следовательно, вычисляются в виде (см. [25])

$$\frac{2\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + \sqrt{(h_1^2 - ih_3^2)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)}}{ih_3^2 - 1}.$$

Извлекая квадратный корень, приходим к выражению

$$2\frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1}, \quad (36)$$

где $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ вычисляются согласно

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2)^2 + 4h_3^4(2h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, \quad (37)$$

$$b_{1,2} = \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}.$$

Выражения для самих волновых чисел γ будут следующими:

$$\sqrt{2(h_3^4 + 1)} \frac{\gamma}{k_{\parallel}} = a'_{1,2;3,4} + ib'_{1,2;3,4}, \quad (38)$$

где, следуя монографии [25], введены обозначения

$$a'_{1,2;3,4} = \pm \sqrt{\frac{S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2} + \sqrt{(S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2})^2 + (T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2})^2}}{2}}, \quad (39)$$

$$b'_{1,2;3,4} = \frac{T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2}}{2a_{1,2;3,4}},$$

при этом S^2 и T^2 выражаются как

$$\begin{aligned} S^2 &= h_3^4 + h_1^2, \\ T^2 &= h_3^2(h_1^2 - 1). \end{aligned} \quad (40)$$

Следует отметить, что $\gamma_{1,2}^2$ есть квадраты волновых чисел плоской связанной термоупругой волны третьего типа (GNIII) [25].

Таким образом, связанные поля Φ и Θ определяются как линейные комбинации

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = C'_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \Omega|_{\gamma=\gamma_2}, \quad (41)$$

где C'_1, C'_2 — произвольные постоянные.

Векторный потенциал Ψ определяется через два скалярных потенциала ψ и χ согласно

$$\begin{aligned}\Psi_{\langle u \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{v}} \left(C_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{C_2}{k_\perp} \frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial z} \right), \\ \Psi_{\langle v \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{v}} \left(-C_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{C_2}{k_\perp} \frac{\partial^2 \chi}{\partial v \partial z} \right), \\ \Psi_{\langle z \rangle} &= -\frac{C_2}{c^2 \sqrt{v^2} k_\perp} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} \right).\end{aligned}\quad (42)$$

Потенциалы ψ и χ удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + k_\perp^2 \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (43)$$

Условие калибровки векторного потенциала (30), как нетрудно проверить, выполняется.

После ряда преобразований физические компоненты поля перемещений могут быть выражены в следующем виде:

$$\begin{aligned}u_{\langle u \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{v}} \left\{ C'_1 a_1 \frac{\partial}{\partial u} \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \frac{\partial}{\partial u} \Omega|_{\gamma=\gamma_2} \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + k_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\}, \\ u_{\langle v \rangle} &= \frac{1}{c\sqrt{v}} \left\{ C'_1 a_1 \frac{\partial}{\partial v} \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \frac{\partial}{\partial v} \Omega|_{\gamma=\gamma_2} \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} - k_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\}, \\ u_{\langle z \rangle} &= \pm ik(C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - C_1(k^2 - k_\perp^2)\psi.\end{aligned}\quad (44)$$

Полагая

$$A = C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2},$$

физические компоненты тензора напряжений определяются на основании формул

$$\begin{aligned}\sigma_{\langle uu \rangle} &= -\lambda k_\parallel^2 (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - \mu \frac{\text{sh}2u}{c^2 \sqrt{v^4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} A \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + k_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\} + \\ &\quad + \mu \frac{\sin 2v}{c^2 \sqrt{v^4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} A \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} - k_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + 2\mu \frac{1}{c^2 \sqrt{v^2}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} A \pm ikC_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + k_\perp C_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} \right\}, \\ \sigma_{\langle uv \rangle} &= -\mu \frac{\sin 2v}{c^2 \sqrt{v^4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + k_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\} - \\ &\quad - \mu \frac{\text{sh}2u}{c^2 \sqrt{v^4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} - k_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + \mu \frac{1}{c^2 \sqrt{v^2}} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) \pm 2ikC_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + k_\perp C_2 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} \right) \right\}, \\ \sigma_{\langle vv \rangle} &= -\lambda k_\parallel^2 (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - \mu \frac{\sin 2v}{c^2 \sqrt{v^4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} A \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} - k_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + \mu \frac{\text{sh}2u}{c^2 \sqrt{v^4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} A \pm ikC_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + k_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\} + \\ &\quad + 2\mu \frac{1}{c^2 \sqrt{v^2}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v^2} A \pm ikC_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - k_\perp C_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} \right\}, \\ \sigma_{\langle uz \rangle} &= \mu \frac{1}{c\sqrt{v}} \left\{ \pm 2ik \frac{\partial}{\partial u} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - C_1(2k^2 - k_\perp^2) \frac{\partial \psi}{\partial u} \mp ikk_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\}, \\ \sigma_{\langle vz \rangle} &= \mu \frac{1}{c\sqrt{v}} \left\{ \pm 2ik \frac{\partial}{\partial v} (C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) - C_1(2k^2 - k_\perp^2) \frac{\partial \psi}{\partial v} \mp ikk_\perp C_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\},\end{aligned}$$

$$\sigma_{<zz>} = -2\mu \left[(k^2 - k_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}k_{\perp}^2)(C'_1 a_1 \Omega|_{\gamma=\gamma_1} + C'_2 a_2 \Omega|_{\gamma=\gamma_2}) \pm ikC_1(k^2 - k_{\perp}^2)\psi \right].$$

Потенциалы Ω , ψ , χ в силу принципа линейной суперпозиции складываются из элементарных четных и нечетных по “угловой” переменной v волновых функций эллиптического цилиндра ($m = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} \psi e_m^1 &= \text{Se}_m(c\lambda, \cos v) \text{Re}_m^1(c\lambda, \text{ch}u) \exp(\pm i\sqrt{k_{\perp}^2 - \lambda^2} z - i\omega t), \\ \psi o_m^1 &= \text{So}_m(c\lambda, \cos v) \text{Ro}_m^1(c\lambda, \text{ch}u) \exp(\pm i\sqrt{k_{\perp}^2 - \lambda^2} z - i\omega t), \\ k^2 &= k_{\perp}^2 - \lambda^2; \\ \chi e_m^1 &= \text{Se}_m(c\lambda, \cos v) \text{Re}_m^1(c\lambda, \text{ch}u) \exp(\pm i\sqrt{k_{\perp}^2 - \lambda^2} z - i\omega t), \\ \chi o_m^1 &= \text{So}_m(c\lambda, \cos v) \text{Ro}_m^1(c\lambda, \text{ch}u) \exp(\pm i\sqrt{k_{\perp}^2 - \lambda^2} z - i\omega t), \\ k^2 &= k_{\perp}^2 - \lambda^2; \\ \Omega|_{\gamma=\gamma_1, \gamma_2} e_m^1 &= \text{Se}_m(c\lambda, \cos v) \text{Re}_m^1(c\lambda, \text{ch}u) \exp(\pm i\sqrt{\gamma_{1,2}^2 - \lambda^2} z - i\omega t), \\ \Omega|_{\gamma=\gamma_1, \gamma_2} o_m^1 &= \text{So}_m(c\lambda, \cos v) \text{Ro}_m^1(c\lambda, \text{ch}u) \exp(\pm i\sqrt{\gamma_{1,2}^2 - \lambda^2} z - i\omega t), \\ k^2 &= \gamma_1^2 - \lambda^2, \quad k^2 = \gamma_2^2 - \lambda^2. \end{aligned} \quad (45)$$

В приведенном представлении элементарных волновых функций эллиптического цилиндра используются периодические четные и нечетные угловые гармоники Матье [28–30]:

$$\begin{aligned} \text{Se}_m(c\lambda, \cos v) &= \sum_n' D_n^m \cos nv, \\ \text{So}_m(c\lambda, \cos v) &= \sum_n' F_n^m \sin nv, \end{aligned} \quad (46)$$

а также ассоциированные радиальные функции Матье:

$$\begin{aligned} \text{Re}_m^1(c\lambda, \xi) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{m-n} D_n^m J_n(c\lambda\xi), \\ \text{Ro}_m^1(c\lambda, \xi) &= \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{m-n} n F_n^m J_n(c\lambda\xi), \end{aligned} \quad (47)$$

где штрих у знака суммы означает, что суммирование производится по четным n , если m четно, и по нечетным n , если m нечетно.

Угловые гармоники Матье являются решениями “углового” (angular, circumferential) дифференциального уравнения Матье

$$\frac{d^2 f}{dv^2} + (b - c^2 \lambda^2 \cos^2 v) f = 0 \quad (48)$$

с характеристической постоянной $b = b_m$, обеспечивающей периодичность решения этого уравнения, а радиальные функции Матье — ассоциированного “радиального” уравнения Матье

$$\frac{d^2 f}{du^2} + (c^2 \lambda^2 \text{ch}^2 u - b) f = 0 \quad (49)$$

с той же самой характеристической постоянной $b = b_m$.

Подстановка суперпозиции элементарных волновых решений (45) с произвольными амплитудными постоянными в граничные условия (27), (28) позволяет получить частотное уравнение (в форме равенства нулю одного бесконечного определителя) для нахождения неизвестного волнового числа k термоупругой волны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Maxwell, J.C.* On the Dynamical Theory of Gases / J.C. Maxwell // Phil. Trans. Royal Soc. Lond. – 1867. – Vol. 157. – P. 49–88.
- [2] *Biot, M.A.* Thermoelasticity and irreversible thermodynamics / M.A. Biot // J. Appl. Phys. – 1956. – Vol. 27(3). – P. 240–253.
- [3] *Joseph, D.D.* Heat waves / D.D. Joseph, L. Preziosi // Rev. Modern Physics. – 1989. – Vol. 61. – No. 1. – P. 41–73.
- [4] *Joseph, D.D.* Addendum to the paper “Heat waves” [Rev. Modern Physics. **61**. 41 (1989)] / D.D. Joseph, L. Preziosi // Rev. Modern Physics. – 1990. – Vol. 62. – No. 2. – P. 375–391.
- [5] *McNelly, T.F.* Heat pulses in NaF: Onset of second sound / T.F. McNelly [et. al.] // Phys. Rev. – 1970. – Vol. 24(3). – P. 100–102.
- [6] *Jackson, H.E.* Second sound in NaF / H.E. Jackson, C.T. Walker, T.F. McNelly // Phys. Rev. Letters. – 1970. – Vol. 25(1). – P. 26–28.
- [7] *Rogers, S.J.* Transport of heat and approach to second sound in some isotopically pure Alkali-Halide crystals / S.J. Rogers // Phys. Rev. B. – 1971. – Vol. 3(4). – P. 1440–1457.
- [8] *Pohl, D.W.* Observation of second sound in NaF by means of light scattering / D.W. Pohl, V. Imiger // Phys. Rev. Letters. – 1976. – Vol. 36(9). – P. 480–483.
- [9] *Hardy, R.J.* Velocity of second sound in NaF / R.J. Hardy, S.S. Jaswal // Phys. Rev. B. – 1971. – Vol. 3(12). – P. 4385–4387.
- [10] *Narayanamurti, V.* Observation of second sound in Bismuth / V. Narayanamurti, R.C. Dynes // Phys. Rev. Letters. – 1972. – Vol. 28. – P. 1461–1464.
- [11] *Lord, H.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity / H. Lord, Y. Shulman // J. Mech. Phys. Solid. – 1967. – Vol. 15. – P. 299–309.
- [12] *Cattaneo, C.* Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée // C. Cattaneo / Journal of Comptes-Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences. – 1958. – Vol. 247. – P. – 431–433.
- [13] *Vernotte, P.* Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // P. Vernotte / Journal of Comptes-Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences. – 1958. – Vol. 246. – P. 3154–3155.
- [14] *Лыков, А.В.* Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М. : Высш. школа, 1967. – 600 с.
- [15] *Green, A.E.* Thermoelasticity / A.E. Green, K.A. Lindsay // J. Elasticity. – 1972. – Vol. 2. – P. 1–7.
- [16] *Green, A.E.* On undamped heat waves in an elastic solid / A.E. Green, P.M. Naghdi // J. Thermal Stresses. – 1992. – Vol. 15. – P. 253–264.
- [17] *Green, A.E.* Thermoelasticity without energy dissipation / A.E. Green, P.M. Naghdi // J. Elasticity. – 1993. – Vol. 31. – P. 189–208.
- [18] *Maugin, G.A.* Towards an analytical mechanics of dissipative materials / G.A. Maugin // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. – 2000. – Vol. 58, 2. Geom., Cont. and Micros., II. – P. 171–180.
- [19] *Maugin, G.A.* The slow march towards an analytical mechanics of dissipative materials / G.A. Maugin, V.K. Kalpakides // Technische Mechanik. – 2002. – B. 22. – H. 2. – S. 98–103.
- [20] *Maugin, G.A.* A Hamiltonian formulation for elasticity and thermoelasticity / G.A. Maugin, V.K. Kalpakides // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – Vol. 35. – P. 10775–10788.
- [21] *Kalpakides, V.K.* Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity / V.K. Kalpakides, G.A. Maugin // Reports in Mathematical Physics. – 2004. – Vol. 53. – P. 371–391.
- [22] *Puri, P.* On the propagation of plane waves in type-III thermoelastic media / P. Puri, P.M. Jordan // Proc. Royal Soc. Lond. A. – 2004. – Vol. 460. – P. 3203–3221.
- [23] *Ковалев, В.А.* Волновые числа плоских GНИИ-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10. – Вып. 3. – С. 46–53.

[24] *Ковалев, В.А.* Волновые задачи теории поля и термомеханика / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев // Вторая международная конференция “Математическая физика и ее приложения”: материалы между. конференции (под ред. чл.-корр. РАН И.В. Волевича и д.ф.-м.н., проф. Ю.Н. Радаева). – Самара : Изд-во “Книга”, 2010. – С. 165–166.

[25] *Ковалев, В.А.* Волновые задачи теории поля и термомеханика / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – 328 с.

[26] *Ковалев, В.А.* Распространение связанных гармонических GNIИ-термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – №2(8). – Ч. 2. – С. 207–255.

[27] *Ковалев, В.А.* Прохождение теплового GNIИ-волнового сигнала с высокой окружной гармоникой через цилиндрический волновод / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев, А.Е. Романов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов международной конференции, посв. 80-летию д.ф.-м.н., проф. Д.Д. Ивлева. – Воронеж : Изд. центр Воронежского гос. ун-та, 2010. – С. 173–180.

[28] *Стретт, М.Д.О.* Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике / М.Д.О. Стретт. – Харьков ; Киев : Гос. научно-техническое изд-во Украины, 1935. – 240 с.

[29] *Мак-Лахлан, Н.В.* Теория и приложения функций Матье / Н.В. Мак-Лахлан. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1953. – 476 с.

[30] *Arcott, F.M.* Periodic differential equations. An introduction to Mathieu, Lamé, and allied functions / F.M. Arcott. – Oxford–Frankfurt : Pergamon Press, 1964. X+284 pp.

Y. N. Radayev, M. V. Taranova

CROSS-COUPLED THERMOELASTIC WAVE FIELD IN A LONG WAVEGUIDE WITH ELLIPTICAL CROSS-SECTION

Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS

N. G. Chernyshevsky Saratov State University

Abstract. The paper is devoted to the study of cross-coupled thermoelastic field in a long cylindrical waveguide with elliptic cross-section as a normal conjugated to elastic strains thermal wave propagating via the waveguide. The sidewall of the waveguide is assumed free from tractions and permeable to heat. The corresponding problem for a waveguide of circular cross-section is considered in a number of our previous publications. The exact harmonic wave solutions of type III coupled thermoelasticity differential equations are obtained therein. The problem for elliptic cross-section seems to be not studied earlier. The exact formulae for wave displacements, strains, stresses and temperature in the thermoelastic waveguide employing orthogonal series of Mathieu functions are given. These series are involving wave harmonics of higher orders of the circumferential (angular) Mathieu equation characteristic exponents thus requiring special attention.

Keywords: thermoelasticity, wave field, waveguide, wavenumber, characteristic number, Mathieu equation, Mathieu function

Радаев Юрий Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

e-mail: radayev@ipmnet.ru

e-mail: y.radayev@gmail.com

Таранова Маргарита Владимировна

соискатель кафедры теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов

e-mail: taranova.mv@gmail.com

Radayev, Yuri Nickolaevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading researcher, A. Y. Ishlinskii Institute of Problems of Mechanics Russian Academy of Science, Moscow

Taranova, Margarita Vladimirovna

Applicant, department of the Theory of Elasticity and Biomechanics N. G. Chernishevsky State University, Saratov

В. В. Сильвестров, А. В. Смирнов

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ УПРУГИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН ЧЕРЕЗ ТОНКОЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина

Аннотация. Изучается напряженное состояние упругой пластины, составленной из двух полубесконечных пластин, соединенных друг с другом через тонкое упругое кусочно-однородное включение. Находятся напряжения на линиях контакта, изучается их поведение вблизи точки изменения жесткости включения.

Ключевые слова: пластины, включение, напряжения, контактная задача, точное решение.

УДК: 539.3

Задачи о передаче нагрузки от тонкого включения или ребра жесткости к упругой пластине имеют важное значение при исследовании тонкостенных конструкций вообще и при проектировании конструкций летательных аппаратов в частности. Построение точного аналитического решения таких задач вызывает особые трудности, связанные с построением решений интегро-дифференциальных уравнений и краевых задач теории аналитических функций. Среди многочисленных работ, относящихся к упомянутым задачам, следует отметить работу Мелана [1], в которой рассматриваются две фундаментальные задачи о передаче нагрузки от бесконечного стрингера к бесконечной и полубесконечной пластине, работу Рейснера [2], получившего интегро-дифференциальное уравнение, соответствующее аналогичной задаче для конечного стрингера, и работу Койтера [3], использовавшего интегральное преобразование Меллина для сведения задачи к разностному уравнению. В последнее время особое внимание уделяется кусочно-однородным пластинам, подкрепленным различными комбинациями включений или стрингеров [4], [5].

Пусть имеются две полубесконечные однородные пластины с различными упругими характеристиками, соединенные между собой через бесконечное тонкое упругое включение с кусочно-постоянным модулем упругости (рис. 1). Средние сечения пластин лежат в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ так, что ось включения, расположенного между ними, совпадает с действительной осью. Обозначим толщины, коэффициенты Пуассона и модули упругости пластин через h_{\pm} , ν_{\pm} и E_{\pm} (здесь и далее знак «+» соответствует верхней пластине, знак «-» — нижней пластине), модуль упругости включения — через E_k при $(-1)^{k-1}x > 0$, ($k = 1, 2$), а ширину и толщину включения — через d и h . К свободной стороне включения приложены распределенные продольные внешние силы, усредненное значение которых в расчете на единицу толщины включения обозначим через $\tau_0(x)$.

Требуется определить законы распределения тангенциальных и нормальных напряжений вдоль линий контакта пластин и включения.

Поступила 24.01.2011

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00103-а).

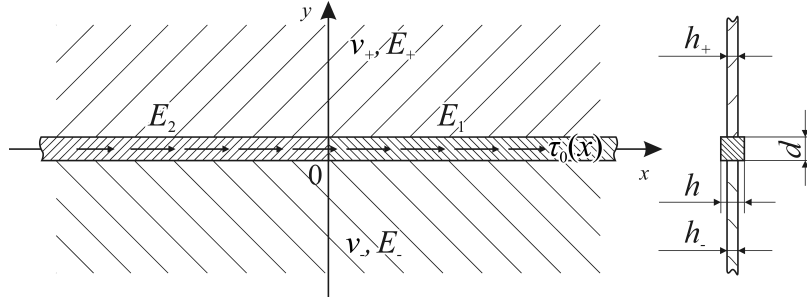


Рис. 1. Кусочно-однородное включение

Пластины находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии, а включение — в одноосном напряженном состоянии. При этом из-за различия упругих характеристик пластин происходит не только растяжение, но и изгиб включения, учет которого значительно усложняет процесс решения. В связи с этим на включение обычно накладываются дополнительные требования. В работе [6] рассматривалась задача о подкреплении кусочно-однородной пластины бесконечным кусочно-однородным стрингером (ребром жесткости) вдоль границы раздела материалов в предположении, что стрингер лишен изгибной жесткости, т. е. совершенно не сопротивляется изгибу. При этом же предположении результаты работы [6] применимы и к рассматриваемой здесь задаче о включении. В данной работе строится аналитическое решение задачи в предположении, что включение гораздо более жесткое по сравнению с пластинами и изгибом включения можно пренебречь. Это предположение приводит к тому, что на действительной оси вертикальные перемещения постоянны. В силу этого на действительной оси имеют место следующие условия контакта:

$$\frac{\partial u^+}{\partial x} = \frac{\partial u^-}{\partial x} = \varepsilon, \quad \frac{\partial v^+}{\partial x} = \frac{\partial v^-}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $\partial u^\pm/\partial x$ и $\partial v^\pm/\partial x$ — деформации граничных точек пластин, расположенных вдоль действительной оси, а ε — осевая деформация включения.

Неизвестные нормальные и тангенциальные контактные напряжения в расчете на единицу толщины пластин обозначим через σ_y^\pm и τ_{xy}^\pm соответственно. Рассматривая отдельно равновесие верхней и нижней упругой полуплоскости, нагруженной вдоль действительной оси нормальными и тангенциальными нагрузками, выразим входящие в (1) деформации через искомые контактные напряжения [7]

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial x} = \alpha_\pm \sigma_y^\pm(x) \mp \frac{\beta_\pm}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_{xy}^\pm(t) dt}{t-x}, \quad \frac{\partial v^\pm}{\partial x} = -\alpha_\pm \tau_{xy}^\pm(x) \mp \frac{\beta_\pm}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_y^\pm(t) dt}{t-x}, \quad |x| > 0,$$

где $\alpha_\pm = (1 - \nu_\pm)/E_\pm$, $\beta_\pm = 2/E_\pm$. Из условия равновесия части включения на лучах $(-\infty, x)$ при $x < 0$ и $(x, +\infty)$ при $x > 0$ выразим осевую деформацию включения

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{E_1 d} \int_x^{+\infty} [\tilde{h}_+ \tau_{xy}^+(t) - \tilde{h}_- \tau_{xy}^-(t) + \tau_0(t)] dt, \quad x > 0,$$

$$\varepsilon(x) = -\frac{1}{E_2 d} \int_{-\infty}^x [\tilde{h}_+ \tau_{xy}^+(t) - \tilde{h}_- \tau_{xy}^-(t) + \tau_0(t)] dt, \quad x < 0,$$

где $\tilde{h}_{\pm} = h_{\pm}/h$. Подставив полученные выражения для деформаций в условия (1), после некоторых преобразований получим систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений Прандтля

$$\begin{aligned} -\frac{a_1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_{xy}^+(t) dt}{t-x} &= \int_x^{+\infty} \tau_{xy}^+(t) dt + b \int_x^{+\infty} \tau_0(t) dt, & x > 0, \\ \frac{a_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_{xy}^+(t) dt}{t-x} &= \int_{-\infty}^x \tau_{xy}^+(t) dt + b \int_{-\infty}^x \tau_0(t) dt, & x < 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$b = K/(\tilde{h}_+K + \tilde{h}_-), \quad a_k = E_k E_+^{-1} db(1 + \nu_+)(3 - \nu_+)/2, \quad k = 1, 2$$

относительно касательных контактных напряжений в верхней пластине. Остальные искомые величины определяются из равенств

$$\begin{aligned} \sigma_y^+(x) &= \frac{1 - \nu_+}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_{xy}^+(t) dt}{t-x}, \quad \sigma_y^+ = \frac{1 - \nu_+}{1 - \nu_-} K \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = -K \tau_{xy}^-, \\ K &= \frac{E_+(1 + \nu_-)(3 - \nu_-)}{E_-(1 + \nu_+)(3 - \nu_+)}. \end{aligned}$$

Уравнения (2) надо дополнить еще условием равновесия всего включения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{h}_+ \tau_{xy}^+(t) - \tilde{h}_- \tau_{xy}^-(t) + \tau_0(t)] dt = 0.$$

Система уравнений (2) допускает решение методом, подробно описанным в работе [6]. Посредством интегрального преобразования Меллина она сводится к системе двух разностных уравнений, которая с помощью выбранной специальным образом диагонализации и последующего конформного отображения единичной полосы на расширенную комплексную плоскость преобразуется в краевое условие задачи сопряжения на римановой поверхности.

Для существования аналитического решения на внешние усилия, приложенные к включению, накладываются следующие условия: функция $\tau_0(x)$ непрерывна по Гельдеру на всей действительной оси за исключением точки $x = 0$, в которой она может иметь разрыв первого рода, а в бесконечно удаленных точках она исчезает быстрее $1/x$. Искомые контактные напряжения удовлетворяют условию Гельдера во всех точках действительной оси, кроме точки $x = 0$. При этом касательные напряжения имеют логарифмическую особенность в окрестности нуля

$$\tau_{xy}^+(x) \sim -A \ln |x|, \quad \tau_{xy}^-(x) \sim K^{-1} A \ln |x|, \quad x \rightarrow 0,$$

а нормальные напряжения принимают различные конечные значения при стремлении к нулю справа и слева

$$\begin{aligned} \sigma_y^+(0+0) &= -\frac{\pi}{2} \frac{a_2(1 - \nu_+)}{a_2 - a_1} A, & \sigma_y^+(0-0) &= -\frac{\pi}{2} \frac{a_1(1 - \nu_+)}{a_2 - a_1} A, \\ \sigma_y^-(0+0) &= -\frac{\pi}{2} \frac{a_2(1 - \nu_-)}{a_2 - a_1} \frac{A}{K}, & \sigma_y^-(0-0) &= -\frac{\pi}{2} \frac{a_1(1 - \nu_-)}{a_2 - a_1} \frac{A}{K}. \end{aligned}$$

При больших значениях x контактные напряжения ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^+(x) &\sim -\frac{a_1}{\pi} \frac{B}{x^2} - b\tau_0(x), & \tau_{xy}^-(x) &\sim -\frac{a_1}{\pi K} \frac{B}{x^2} + \frac{b}{K} \tau_0(x), & x \rightarrow +\infty, \\ \tau_{xy}^+(x) &\sim -\frac{a_2}{\pi} \frac{B}{x^2} - b\tau_0(x), & \tau_{xy}^-(x) &\sim -\frac{a_2}{\pi K} \frac{B}{x^2} + \frac{b}{K} \tau_0(x), & x \rightarrow -\infty, \\ \sigma_y^+(x) &\sim \frac{1 - \nu_+}{2\pi} \frac{B}{|x|}, & \sigma_y^-(x) &\sim \frac{1 - \nu_-}{2\pi K} \frac{B}{|x|}, & x \rightarrow \pm\infty, \end{aligned}$$

где $B = -b \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_0(t) dt$.

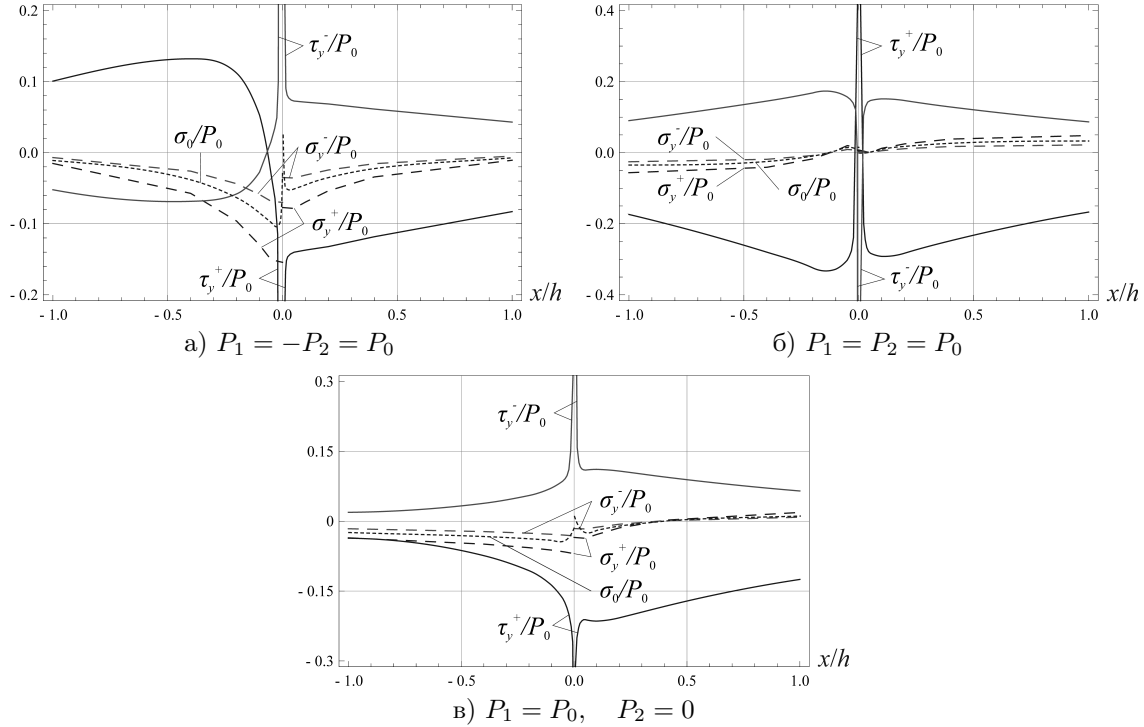


Рис. 2. Контактные напряжения вблизи нуля

Рассмотрим частный случай задачи, когда к включению приложена экспоненциальная нагрузка

$$\tau_0(x) = P_1 e^{-x}, \quad x > 0, \quad \tau_0(x) = P_2 e^x, \quad x < 0.$$

На рис. 2 представлены графики контактных напряжений при симметричной ($P_1 = -P_2$), асимметричной ($P_1 = P_2$) нагрузке и нагрузке, приложенной лишь к одной однородной полубесконечной части включения ($P_2 = 0$). Из графиков видно, что нормальные контактные напряжения в пластинах не равны нулю, однако они малы по сравнению с касательными контактными напряжениями и испытывают разрыв 1-го рода в особой точке. В случае симметричной нагрузки (рис. 2а) нормальные напряжения достаточно велики и, возможно, требуют учета при расчете напряженно-деформированного состояния пластин. Полученные значения касательных контактных напряжений совпадают с касательными напряжениями, рассчитанными для кусочно-однородного стрингера [6], тогда как нормальные контактные напряжения задачи о стрингере (σ_0 на рис. 2) представляют собой усредненные значения нормальных напряжений, полученных в данной работе. Таким образом, значения касательных напряжений не зависят от выбора одной из двух моделей включения (стрингера), при которых включение (стрингер) либо совершенно не сопротивляется изгибу, либо абсолютно не изгибается. Однако в случаях, когда требуется точно определить значения нормальных напряжений, следует более осторожно относиться к выбору той или иной модели.

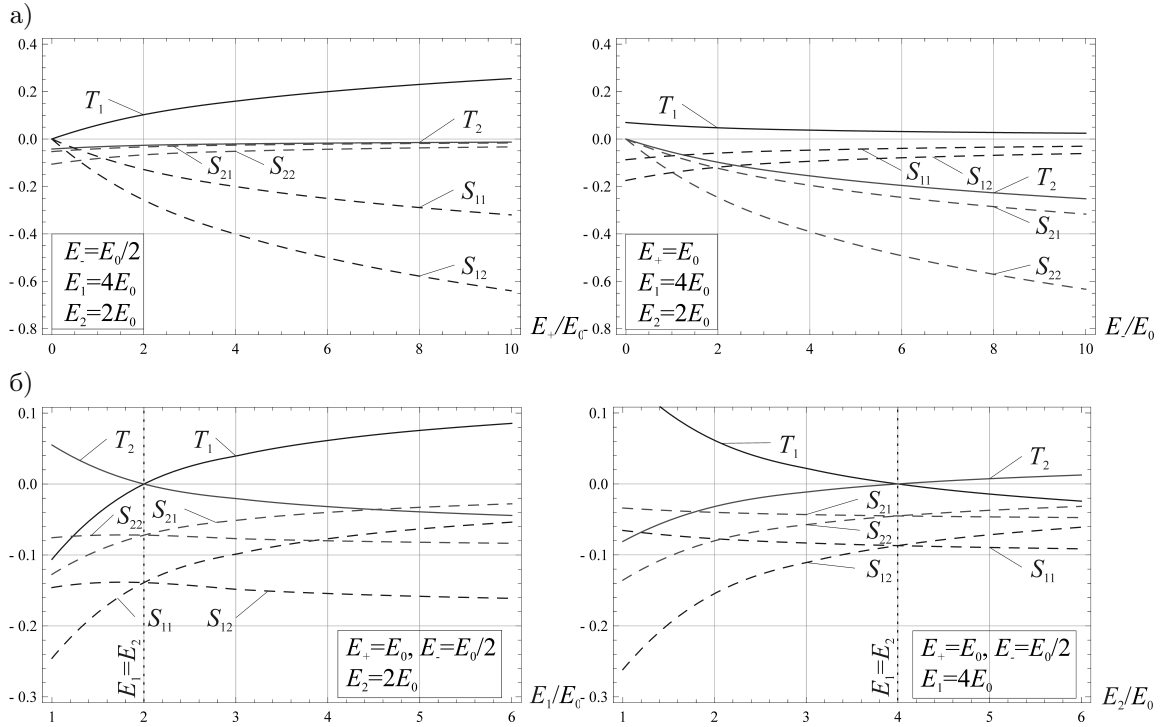


Рис. 3. Зависимость коэффициентов (3) от упругих параметров (а) пластин, (б) включения

На рис. 3 представлены графики коэффициентов $T_1, T_2, S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$, определяющих поведение контактных напряжений вблизи особой точки $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 P_0^{-1} \tau_{xy}^+(x) &\sim T_1 \ln |x|, & P_0^{-1} \tau_{xy}^-(x) &\sim T_2 \ln |x|, & x &\rightarrow 0, \\
 S_{11} &= P_0^{-1} \sigma_y^+(0+0), & S_{12} &= P_0^{-1} \sigma_y^+(0-0), \\
 S_{21} &= P_0^{-1} \sigma_y^-(0+0), & S_{22} &= P_0^{-1} \sigma_y^-(0-0).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Так как для всех трех видов нагрузки графики этих коэффициентов подобны, на рисунке отражен только симметричный случай ($P_1 = -P_2$). На рис. 3а изображены зависимости указанных коэффициентов от модулей упругости пластин. Когда параметр E_+ или E_- стремится к нулю, что в пределе соответствует отсутствию одной из полубесконечных пластин, коэффициенты (3) стремятся к конечному пределу, что соответствует ранее решенным задачам для однородной полубесконечной пластины. На рис. 3б изображены зависимости контактных напряжений от модуля упругости включения, из которых видно, что в случае однородного бесконечного включения ($E_1 = E_2$) особенность касательных и нормальных напряжений в окрестности точки $x = 0$ отсутствует. В то же время при стремлении E_1 или E_2 к нулю коэффициенты (3) неограниченно возрастают. Это означает, что в случае только одного однородного полубесконечного включения контактные напряжения имеют в окрестности точки $x = 0$ особенности более высокого порядка, чем в случае бесконечного включения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Melan, E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen / E. Melan // *Ingenieur Arch.* – 1932. – Vol. 3, № 2. – P. 123–129.
- [2] *Reissner, E.* Note on the Problem of the Distribution of Stress in a Thin Stiffened Elastic Sheet / E. Reissner // *Proceeding of the National Academy of Science.* – 1940. – Vol. 26. – P. 300–305.
- [3] *Koiter, W. T.* On the Difusion of Load From a Stifener into a Sheet / W. T. Koiter // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1955. – Vol. 8, № 2. – P. 164–178.
- [4] *Сулим, Г. Т.* Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины / Г. Т. Сулим, Д. В. Грилицкий // *Прикладная механика.* – 1972. – Т. 8, Вып. 11. – С. 58–65.
- [5] *Багдасарян, Р. А.* Задача для кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной бесконечным кусочно-однородным стрингером / Р. А. Багдасарян // *Известия НАН Армении.* – 2005. – Т. 58, Вып. 4. – С. 15–21.
- [6] *Сильвестров, В. В.* Интегро-дифференциальное уравнение Прандтля и контактная задача для кусочно-однородной пластины / В. В. Сильвестров, А. В. Смирнов // *Прикладная математика и механика.* – М. : Изд-во РАН, 2010. – Т. 74, Вып. 6. – С. 951–968.
- [7] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

V. V. Silvestrov, A. V. Smirnov

CONTACT INTERACTION BETWEEN TWO SEMI-INFINITE ELASTIC
PLATES THROUGH A THIN PIECEWISE-HOMOGENEOUS INCLUSION

Gubkin Russian State University of Oil and Gas

Abstract. Stress state of the elastic plate composed of two semi-infinite plates which are connected with each other through a thin elastic piecewise-homogeneous inclusion is studied. The stresses on the lines of contact are found, and their behavior near the change point of the inclusion rigidity is studied.

Keywords: plates, inclusion, stresses, contact problem, exact solution.

Сильвестров Василий Васильевич

доктор физико-математических наук, профессор, Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, г. Москва

e-mail: v-silvestrov@yandex.ru

Смирнов Александр Валериянович

аспирант, Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, г. Москва

e-mail: smirnov09al@gmail.com

Silvestrov, Vasily Vasilyevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow

Smirnov, Aleksandr Valeriyovich

Postgraduate student, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow

А. Н. Спорыхин, Е. Д. Чуфринова

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НЕОДНОРОДНЫМ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ НАГРУЖЕНИИ

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости исследована устойчивость упругой изотропной сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластическим наполнителем при всестороннем равномерном нагружении, когда физические параметры наполнителя изменяются по экспоненциальному закону. Дана оценка влияния на величину критического давления геометрических и физико-механических параметров оболочки и наполнителя.

Ключевые слова: наполнитель, оболочка, упруговязкопластическая среда, устойчивость.

УДК: 539.374

Исследованию устойчивости оболочек с наполнителем при нагружении посвящены работы [1], [2], [7]. При этом в работе [2] наполнитель описывался соотношением теории малых упругопластических деформаций [4] и предположением степенной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, а в работах [1], [7] – соотношениями теории упрочняющегося упруговязкопластического тела [8].

Отметим, что устойчивость сферического тела под действием внутреннего давления рассматривалась в работах [3], [6], при этом в [3] – в рамках приближенного подхода Лейбензона-Ишлинского и теории малых упругопластических деформаций, а в [6] – в рамках точных трехмерных уравнений устойчивости для модели упругопластического тела.

Рассмотрим устойчивость упругой изотропной сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластическим наполнителем при всестороннем равномерном нагружении, считая что физические параметры наполнителя изменяются по экспоненциальному закону.

При решении задачи докритическое состояние определяется в рамках геометрически линейной теории. При этом в упругой области имеет место закон Гука, а в пластической области соотношения теории упруговязкопластического тела.

Для описания упруговязкопластических свойств наполнителя функция нагружения принимается в форме [5], [8]

$$F = \left(S_j^i - c\varepsilon_j^{p_i} - \eta\varepsilon_j^{\dot{p}_i} \right) \left(S_j^i - c\varepsilon_j^{p_i} - \eta\varepsilon_j^{\dot{p}_i} \right) - K^2 = 0. \quad (1)$$

Ассоциированный закон течения имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_j^i = \lambda_0 \left(S_j^i - c\varepsilon_j^{p_i} - \eta\varepsilon_j^{\dot{p}_i} \right), \quad (2)$$

здесь $S_j^i = \sigma_j^i - \frac{1}{3}\sigma_k^k g_j^i$ – компоненты девиатора тензора напряжений, g_j^i – смешанные компоненты метрического тензора, c и η – коэффициенты упрочнения и вязкости соответственно,

ε_j^{pi} – компоненты тензора пластических деформаций, $\dot{\varepsilon}_j^{pi}$ – компоненты тензора скоростей пластических деформаций, K – предел текучести, λ_0 – неопределенный множитель.

Полные деформации в пластической области ε_j^i состоят из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_j^i = \varepsilon_j^{ei} + \varepsilon_j^{pi}. \quad (3)$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$S_j^i = 2\mu\varepsilon_j^{ei}. \quad (4)$$

Формулы Коши связывают полные деформации с перемещениями

$$\varepsilon_j^i = \frac{1}{2} (\nabla^i u_j + \nabla^j u_i). \quad (5)$$

Условие несжимаемости в случае отсутствия объемной деформации имеет вид

$$g_j^i \varepsilon_i^j = 0. \quad (6)$$

Уравнения равновесия и граничные условия приняты в обычной форме. При исследовании оболочки с наполнителем принимается обобщенная концепция продолжающегося нагружения [8], а также предположение, что потеря устойчивости составной оболочки происходит по одной форме без проскальзывания и отставания.

Линеаризованная связь между амплитудами напряжений и деформаций для несжимаемой упруговязкопластической среды согласно [8] представима в виде

$$\begin{aligned} \sigma_j^i &= (a_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_\alpha + \hat{p}) g_j^i + (1 - g_j^i) g^{ii} G_j^i (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \\ a_{ij} &= 2\mu\delta_{ij} - 3\hat{a} f_{ii}^0 f_{jj}^0, \quad f_{ij}^0 = S_{ij}^0 - c\varepsilon_{ij}^{0p}, \quad G_j^i = \mu, \quad \Sigma^i, j, \\ \hat{a} &= \frac{4}{3} \chi \frac{\mu^2}{K^2 (2\mu + c + i\Omega\eta)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где \hat{p} – гидростатическое давление, μ – параметр Ламе. Значение $\chi=1$ соответствует упруговязкопластической среде наполнителя, $\chi=0$ – упругой среде оболочки. Верхний индекс «0» относится к величинам в докритическом состоянии.

Исследование устойчивости основного состояния составной оболочки сводится [8] к решению уравнений равновесия в вариациях для оболочки и наполнителя при соответствующих граничных условиях.

Уравнения равновесия и граничные условия имеют вид

$$\nabla_i (\sigma_j^i + \sigma^{0i\alpha} \nabla_\alpha u_j) + \rho\Omega^2 u_j = 0, \quad (8)$$

$$(\sigma_j^i + \sigma^{0i\alpha} \nabla_\alpha u_j) n_i = P_j, \quad (9)$$

в случае «мертвой» нагрузки $P_j = 0$.

Условия непрерывности напряжений и перемещений на границе контакта оболочки и наполнителя таковы:

$$\left(\sigma^{(1)i} + \sigma^{0(1)i\alpha} \nabla_\alpha u_j^{(1)} \right) n_j^{(1)} - (\sigma_j^i + \sigma^{0i\alpha} \nabla_\alpha u_j) n_j = 0, \quad u_j^{(1)} - u_j = 0. \quad (10)$$

Здесь через верхний индекс «1» обозначены величины, относящиеся к наполнителю.

К соотношениям (1)-(10) для наполнителя и оболочки следует присоединить условия несжимаемости

$$\nabla_\alpha u^{(1)\alpha} = 0, \quad \nabla_\alpha u^\alpha = 0. \quad (11)$$

Уравнения (7)-(11) представляют собой связную краевую задачу относительно амплитуд компонент векторов перемещений $u, v, w, u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$ и гидростатических давлений $\hat{p}, \hat{p}^{(1)}$ для оболочки и наполнителя соответственно. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. При этом критические значения комбинаций параметров нагружения определяются из условия

$$\min (Im\Omega_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

где Ω_k – собственные значения краевой задачи.

Исследуем устойчивость упругой изотропной сферической оболочки (рис. 1) с неоднородным упруговязкопластическим наполнителем. Положим, что все физические параметры наполнителя являются функциями радиуса

$$\mu_2 = \mu_{20}e^{\alpha r}, \quad \eta_2 = \eta_{20}e^{\alpha r}, \quad c_2 = c_{20}e^{\alpha r}, \quad \rho_2 = \rho_{20}e^{\alpha r}, \quad K_2 = K_{20}e^{\alpha r}, \quad \alpha > 0. \quad (13)$$

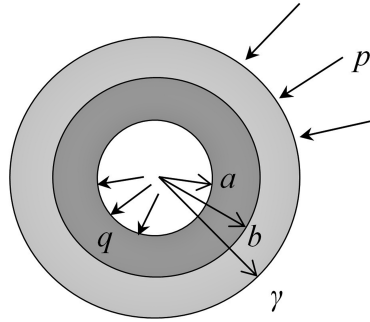


Рис. 1. Оболочка с неоднородным упруговязкопластическим наполнителем

На рис. 1 b – внешний радиус оболочки, γ – внешний радиус наполнителя, a – радиус кругового отверстия, т.е. радиус полости. По контуру оболочки равномерно распределена нагрузка интенсивности p , а к внутреннему контуру наполнителя приложена равномерно распределенная нагрузка q . Таким образом, рассматривается двусвязная область – упругая оболочка и упрочняющийся упруговязкопластический наполнитель – при всестороннем сжатии. Ограничимся случаем, когда в оболочке не возникают пластические деформации.

Исходя из уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки и наполнителя, привлекая при этом соотношения (1)-(6), а также условия на поверхности контакта оболочка-наполнитель, находим докритическое напряженно-деформированное состояние, которое в осесимметричном случае ($\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$) в сферической системе координат (ρ, θ, φ) имеет вид:

для оболочки –

$$u_r^{0e} = \frac{C_1}{r^2}, \quad \sigma_r^{0e} = \frac{-4\mu_1 C_1}{r^3} + C_2, \quad \sigma_\theta^{0e} = \frac{2\mu_1 C_1}{r^3} + C_2, \quad (14)$$

для наполнителя –

$$u_r^{0(1)} = B_1 r^{-2}, \quad \varepsilon_r^{0(1)p} = -2\varepsilon_\theta^{0(1)p} = \frac{4\mu_2 B_1 + k_2 r^3}{(2\mu_2 + c_2) r^3},$$

$$\sigma_r^{0(1)} = -\frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left\{ c_{20} B_1 \left[\left(\frac{2}{r^3} + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{\alpha r} - \alpha^3 E_*(r) \right] + 3k_{20} E_*(r) \right\} + B_2, \quad (15)$$

$$\sigma_\theta^{0(1)} = -\frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left\{ c_{20} B_1 \left[\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{\alpha r} - \alpha^3 E_*(r) \right] - 3k_{20} (E_*(r) + e^{\alpha r}) \right\} + B_2,$$

где

$$C_1 = B_1 = \frac{\frac{6\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} (E_*(\gamma) - E_*(a)) - p + q}{4\mu_1 \left(-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{\gamma^3} \right) + \frac{2\mu_{20}c_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left(\left(\frac{2}{\gamma^3} + \frac{\alpha}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma} \right) e^{\alpha\gamma} + \left(\frac{2}{a^3} + \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a} \right) e^{\alpha a} + \alpha^3 (E_*(\gamma) + E_*(a)) \right)},$$

$$C_2 = \frac{4\mu_1 C_1}{b^3} - p, \quad (16)$$

$$B_2 = \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left(c_{20} C_1 \left(\left(\frac{2}{a^3} + \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a} \right) e^{\alpha a} - \alpha^3 E_*(a) \right) + 3k_{20} E_*(a) \right) - q,$$

$$k_{20}^2 = \frac{2}{3} K_{20}^2, \quad E_*(r) = \int \frac{e^{\alpha r}}{r} dr,$$

здесь и далее физико-механическим параметрам оболочки и заполнителя внизу приписаны индексы «1» и «2» соответственно.

Для осесимметричной формы потери устойчивости уравнения равновесия в вариациях (8) в сферической системе координат принимают вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \sigma_r^0 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \sigma_\theta^0 \frac{1}{r} \left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right) + \rho \Omega^2 u_r = 0, \quad (17)$$

здесь компоненты с индексом «0» сверху определяются соотношениями (14) – для оболочки и (15) – для заполнителя. Из формул (7) выводим

$$\sigma_r = \hat{p} + 2(\mu - \tilde{a}) \frac{du_r}{dr} + 2\tilde{a} \frac{u_r}{r},$$

$$\sigma_\theta = \hat{p} + \tilde{a} \frac{du_r}{dr} + (2\mu - \tilde{a}) \frac{u_r}{r}, \quad (18)$$

$$\tilde{a} = \frac{4}{3} \chi \frac{\mu^2}{2\mu + c + i\Omega\eta}.$$

Подставляя в уравнение (17) соотношения (18) и учитывая при этом условия несжимаемости (11), находим

для оболочки –

$$u_r^e = \frac{A_1}{r^2},$$

$$\sigma_r^e = \left(-\frac{5\mu_1}{r^6} C_1 + \frac{4\mu_1}{r^3 b^3} C_1 - \frac{4\mu_1}{r^3} + \frac{C_2}{r^3} + \frac{\rho_1^0 \Omega^2}{r} \right) A_1 + M_1, \quad (19)$$

$$\sigma_\theta^e = \sigma_r^e + 6\mu_1 \frac{A_1}{r^3} = \left(-\frac{5\mu_1}{r^6} C_1 + \frac{4\mu_1}{r^3 b^3} C_1 + \frac{2\mu_1}{r^3} + \frac{C_2}{r^3} + \frac{\rho_1^0 \Omega^2}{r} \right) A_1 + M_1,$$

для заполнителя –

$$u_r^{(1)} = \frac{A_2}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{\mu_{20} k_{20} A_2}{2\mu_{20} + c_{20}} \left(\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{\alpha r} - \frac{1}{2} \alpha^3 E_*(r) - 6 \frac{E_*(r)}{r^3} \right) + \frac{\mu_{20} c_{20} A_2 B_1}{2\mu_{20} + c_{20}} \times$$

$$\times \left(-\left(\frac{5}{r^6} + \frac{11}{5} \frac{\alpha}{r^5} + \frac{41}{20} \frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{1}{60} \frac{\alpha^3}{r^3} + \frac{1}{120} \frac{\alpha^4}{r^2} + \frac{1}{120} \frac{\alpha^5}{r} \right) e^{\alpha r} + \frac{\alpha^6}{120} E_*(r) + 2\alpha^3 \frac{E_*(r)}{r^3} \right) +$$

$$+ 2\mu_{20} A_2 \left(1 - \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20} + i\Omega\eta_{20}} \right) \left(-\left(\frac{2}{r^3} + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{\alpha r} + \alpha^3 E_*(r) \right) + \frac{A_2 B_2}{r^3} + M_2 +$$

$$+ \rho_{20} A_2 \Omega^2 \left(\frac{e^{\alpha r}}{r} - \alpha E_*(r) \right), \quad (20)$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \frac{\mu_{20} k_{20} A_2}{2\mu_{20} + c_{20}} \left(\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{\alpha r} - \frac{1}{2} \alpha^3 E_*(r) - 6 \frac{E_*(r)}{r^3} \right) + \frac{\mu_{20} c_{20} A_2 B_1}{2\mu_{20} + c_{20}} \times$$

$$\times \left(-\left(\frac{5}{r^6} + \frac{11}{5} \frac{\alpha}{r^5} + \frac{41}{20} \frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{1}{60} \frac{\alpha^3}{r^3} + \frac{1}{120} \frac{\alpha^4}{r^2} + \frac{1}{120} \frac{\alpha^5}{r} \right) e^{\alpha r} + \frac{\alpha^6}{120} E_*(r) + 2\alpha^3 \frac{E_*(r)}{r^3} \right) +$$

$$+ 2\mu_{20} A_2 \left(1 - \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20} + i\Omega\eta_{20}} \right) \left(\left(\frac{1}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{\alpha r} + \alpha^3 E_*(r) \right) + \frac{A_2 B_2}{r^3} + M_2 +$$

$$+ \rho_{20} A_2 \Omega^2 \left(\frac{e^{\alpha r}}{r} - \alpha E_*(r) \right),$$

здесь A_1, A_2, M_1, M_2 – постоянные интегрирования – определяются из условий (9) и (10), которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$\sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{0(1)} \frac{du_r^{(1)}}{dr} = q_r \text{ при } r = a,$$

$$\sigma_r^e + \sigma_r^{0e} \frac{du_r^e}{dr} = p_r \text{ при } r = b, \quad (21)$$

$$u_r^e = u_r^{(1)}, \sigma_r^e = \sigma_r^{(1)} \text{ при } r = \gamma.$$

Заметим, что если нагрузка «мертвая», то в (21)

$$p_r = q_r = 0. \quad (22)$$

Из первого условия находим, что $A_1 = A_2$. Для определения оставшихся трех констант имеем систему трех однородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}A_1 + 1 \cdot M_1 - 1 \cdot M_2 = 0, \\ \alpha_{21}A_1 + 1 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 = 0, \\ \alpha_{31}A_1 + 0 \cdot M_1 + 1 \cdot M_2 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Коэффициенты α_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = & \frac{\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20}+c_{20}} \left(\left(\frac{5}{\gamma^6} + \frac{11}{5} \frac{\alpha}{\gamma^5} + \frac{41}{20} \frac{\alpha^2}{\gamma^4} + \frac{1}{60} \frac{\alpha^3}{\gamma^3} + \frac{1}{120} \frac{\alpha^4}{\gamma^2} + \frac{1}{120} \frac{\alpha^5}{\gamma} \right) e^{-\alpha\gamma} - \frac{\alpha^6}{120} E_*(\gamma) - 2\alpha^3 \frac{E_*(\gamma)}{\gamma^3} \right) + \\ & + 2\mu_{20} \left(1 - \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}+i\Omega\eta_{20}} \right) \left(\left(\frac{2}{\gamma^3} + \frac{\alpha}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma} \right) e^{-\alpha\gamma} - \alpha^3 E_*(\gamma) \right) + \\ & + \frac{\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}} \left(- \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\gamma} \right) e^{-\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \alpha^3 E_*(\gamma) + 6 \frac{E_*(\gamma)}{\gamma^3} \right) - \frac{5\mu_1}{\gamma^6} C_1 - \frac{4\mu_1}{\gamma^3} - \frac{B_2}{\gamma^3} + \frac{C_2}{\gamma^3} + \\ & + \frac{\rho_1^0 \Omega^2}{\gamma} - \rho_{20} \Omega^2 \left(\frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} - \alpha E_*(\gamma) \right), \\ \alpha_{21} = & \frac{3\mu_1 C_1}{b^6} - \frac{C_2}{b^3} - \frac{4\mu_1}{b^3} + \frac{\rho_1^0 \Omega^2}{b}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{31} = & \frac{\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20}+c_{20}} \left(\left(\frac{3}{a^6} + \frac{9}{5} \frac{\alpha}{a^5} + \frac{39}{20} \frac{\alpha^2}{a^4} - \frac{1}{60} \frac{\alpha^3}{a^3} - \frac{1}{120} \frac{\alpha^4}{a^2} - \frac{1}{120} \frac{\alpha^5}{a} \right) e^{-\alpha a} + \frac{\alpha^6}{120} E_*(a) - 2\alpha^3 \frac{E_*(a)}{a^3} \right) + \\ & + 2\mu_{20} \left(1 - \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}+i\Omega\eta_{20}} \right) \left(- \left(\frac{2}{a^3} + \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a} \right) e^{-\alpha a} + \alpha^3 E_*(a) \right) + \\ & + \frac{\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}} \left(\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{a} \right) e^{-\alpha a} - \frac{1}{2} \alpha^3 E_*(a) + 6 \frac{E_*(a)}{a^3} \right) + \rho_{20} \Omega^2 \left(\frac{e^{-\alpha a}}{a} - \alpha E_*(a) \right) + \frac{B_2}{a^3}. \end{aligned}$$

Определитель $\Delta = \alpha_{11} - \alpha_{21} + \alpha_{31}$. Откуда приходим к характеристическому уравнению вида

$$\begin{aligned} \Phi(p, q, \Omega, \lambda_i) = & \frac{\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}} \times \\ & \times \left(\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{a} \right) e^{-\alpha a} - \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\gamma} \right) e^{-\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \alpha^3 (E_*(\gamma) - E_*(a)) + 6 \frac{E_*(a)}{a^3} - 6 \frac{E_*(\gamma)}{\gamma^3} \right) + \\ & + 2\mu_{20} \left(1 - \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}+i\Omega\eta_{20}} \right) \left(\left(\frac{2}{\gamma^3} + \frac{\alpha}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma} \right) e^{-\alpha\gamma} - \left(\frac{2}{a^3} + \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a} \right) e^{-\alpha a} - \alpha^3 E_*(\gamma) + \alpha^3 E_*(a) \right) + \\ & + \frac{\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20}+c_{20}} \left(\left(\frac{5}{\gamma^6} + \frac{11}{5} \frac{\alpha}{\gamma^5} + \frac{41}{20} \frac{\alpha^2}{\gamma^4} + \frac{1}{60} \frac{\alpha^3}{\gamma^3} + \frac{1}{120} \frac{\alpha^4}{\gamma^2} + \frac{1}{120} \frac{\alpha^5}{\gamma} \right) e^{-\alpha\gamma} - \frac{\alpha^6}{120} E_*(\gamma) - 2\alpha^3 \frac{E_*(\gamma)}{\gamma^3} \right) + \\ & + \frac{\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20}+c_{20}} \left(\left(\frac{3}{a^6} + \frac{9}{5} \frac{\alpha}{a^5} + \frac{39}{20} \frac{\alpha^2}{a^4} - \frac{1}{60} \frac{\alpha^3}{a^3} - \frac{1}{120} \frac{\alpha^4}{a^2} - \frac{1}{120} \frac{\alpha^5}{a} \right) e^{-\alpha a} + \frac{\alpha^6}{120} E_*(a) - 2\alpha^3 \frac{E_*(a)}{a^3} \right) - \\ & - \mu_1 C_1 \left(\frac{5}{\gamma^6} + \frac{3}{b^6} \right) + 4\mu_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{\gamma^3} \right) - B_2 \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{a^3} \right) + C_2 \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \\ & + \rho_{20} \Omega^2 \left(\frac{e^{-\alpha a}}{a} - \frac{e^{-\gamma a}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma) - \alpha E_*(a) \right) + \rho_1^0 \Omega^2 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{b} \right) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, вопрос определения критической комбинации нагрузок сводится к разрешимости уравнения (25). Однако анализ такого уравнения затруднен ввиду того, что наряду с приложенными нагрузками, геометрическими и физико-механическими характеристиками оболочки и заполнителя λ_i в него входит в общем случае произвольное комплексное число Ω . Поэтому для упрощения вычислений при численном анализе будем считать, что $i\Omega = s$; в этом случае критерием устойчивости будет условие $s < 0$.

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 2–4. При численном расчете определителя (25) введены переменные:

$$a^* = \frac{a}{b}, \gamma^* = \frac{\gamma}{b}, p^* = \frac{p}{\mu_1}, q^* = \frac{q}{\mu_1}, c_{20}^* = \frac{c_{20}}{\mu_1}, k_{20}^* = \frac{k_{20}}{\mu_1},$$

$$\mu_{20}^* = \frac{\mu_{20}}{\mu_1}, \quad \eta_{20}^* = \frac{\eta_{20}}{\mu_1}, \quad \rho_1^* = \frac{\rho_1 b^2}{\mu_1}, \quad \rho_2^* = \frac{\rho_2 b^2}{\mu_1}.$$

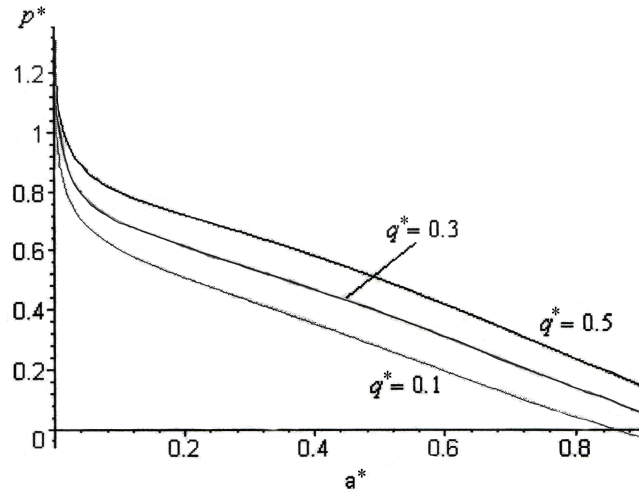


Рис. 2. Зависимость критической нагрузки p^* от относительного радиуса отверстия a^* при различных значениях внутренней нагрузки q^* . Кривые построены при следующих значениях параметров: $\gamma^* = 0.95$, $c_{20}^* = 0.1$, $k_{20}^* = 0.1$, $\eta_{20}^* = 0.1$, $\mu_1^* = \mu_{20}^* = 1$, $\alpha = 1$, $\rho_1^* = 0.1$, $\rho_2^* = 0.01$

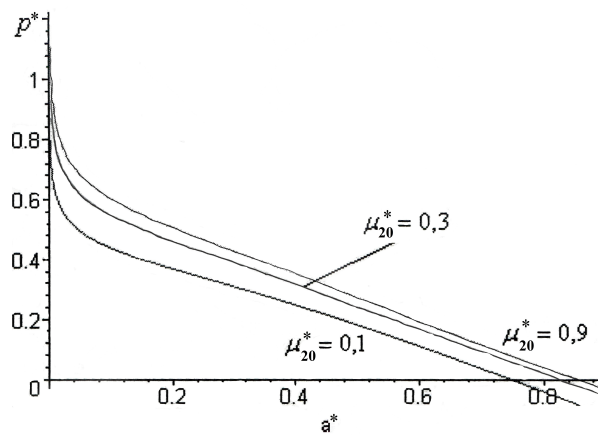


Рис. 3. Зависимость критической нагрузки p^* от относительного радиуса отверстия a^* при различных значениях относительного модуля сдвига μ_{20}^* . Кривые построены при следующих значениях параметров: $\gamma^* = 0.95$, $q^* = 0.1$, $c_{20}^* = 0.1$, $k_{20}^* = 0.1$, $\eta_{20}^* = 0.1$, $\mu_1^* = 1$, $\alpha = 1$, $\rho_1^* = 0.1$, $\rho_2^* = 0.01$

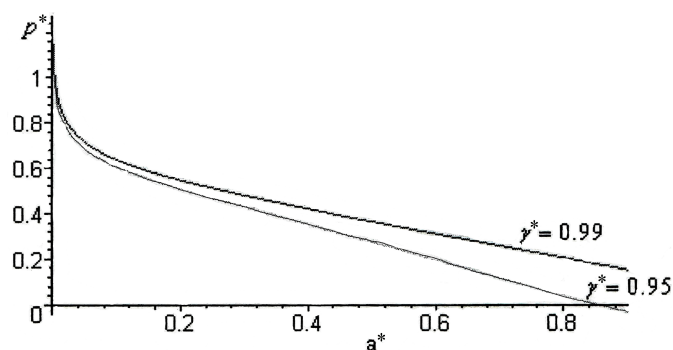


Рис. 4. Зависимость критической нагрузки p^* от относительного радиуса отверстия a^* при различных значениях относительного радиуса границы γ^* между упругой оболочкой и упруговязкопластическим заполнителем. Кривые построены при следующих значениях параметров: $q^* = 0.1$, $c_{20}^* = 0.1$, $k_{20}^* = 0.1$, $\eta_{20}^* = 0.1$, $\mu_1^* = \mu_{20}^* = 1$, $\alpha = 1$, $\rho_1^* = 0.1$, $\rho_2^* = 0.01$

Из анализа результатов вычислительного эксперимента следует:

- с увеличением внутренней нагрузки (рис. 2) критическая нагрузка также увеличивается;
- с увеличением относительного модуля сдвига заполнителя (рис. 3) критическая нагрузка возрастает;
- при увеличении толщины упругой оболочки (рис. 4) критическая нагрузка уменьшается, таким образом оболочка оказывает стабилизирующее влияние;
- при уменьшении радиуса отверстия критическая нагрузка увеличивается, при увеличении радиуса отверстия – уменьшается;
- при стремлении радиуса отверстия к нулю критическая нагрузка неограниченно возрастает, что согласуется с общими теоретическими представлениями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андреева, И. Ю. Моделирование отказов цилиндрической оболочки с упруговязкопластическим заполнителем при осевом сжатии / И. Ю. Андреева, Н. А. Медведь, А. Н. Спорыхин // Прикладные задачи механики и тепломассообмена в авиастроении : труды II Всерос. науч.-техн. конф. – Воронеж, 2001. – Ч.1. – С. 12–18.
- [2] Бабич, И. Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел / И. Ю. Бабич, А. Н. Гузь. – Киев : Наукова думка, 1985. – Т. 4. – 279 с.
- [3] Ершов, Л. В. Об осесимметричной потере устойчивости толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления / Л. В. Ершов // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1960. - №4. – С.81–83.
- [4] Ильюшин, А. А. Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Наука, 1963. – 271 с.
- [5] Ивлев, Д. Д. Математическая теория пластичности / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский. – М. : Наука, 2002. – 821 с.
- [6] Кирсанов, М. И. О неустойчивости сферического тела при равномерном нагружении / М. И. Кирсанов, А. Н. Спорыхин // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1979. - №1. - С. 161-165.
- [7] Зенин, А. Н. К устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластическим заполнителем при нагружении / А. Н. Зенин, А. Н. Спорыхин // Вестник

ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2008. – № 1(4). – С. 88–95.

[8] Спорыхин, А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. – 361 с.

A. N. Sporykhin, E. D. Chufrinova

NUMERICAL AND ANALYTICAL INVESTIGATION OF STABILITY OF THE ELASTIC SPHERICAL SHELL WITH THE INHOMOGENEOUS ELASTOVISCOPLASTIC FILLER AT ALL-ROUND LOADING

Voronezh State University

Abstract. The stability of the elastic isotropic spherical shell with the inhomogeneous elastoviscoplastic filler at all-round loading, when physical parameters of the filler vary exponentially, within the scope of three-dimensional linearized stability theories is investigated in this paper. The estimation of influence on size of critical pressure of geometrical and physical-mechanical parameters of the shell and the filler is given.

Keywords: filler, shell, elastoviscoplastic medium, stability.

Спорыхин Анатолий Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru

Чуфринова Елена Дмитриевна

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: gelya1818@mail.ru

Sporykhin, Anatoliy Nikolaevich

Dc. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Chufrinova, Elena Dmitrievna

Postgraduate student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматривается упругопластическое состояние двуслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Предполагается, что каждый из слоев трубы обладает своими свойствами анизотропии. Рассматриваются анизотропия согласно Хиллу [1] и трансляционная анизотропия согласно [2]. Рассматриваются два случая: в первом случае предполагается, что материал, обладающий свойствами анизотропии по Хиллу, примыкает к внутренней части трубы (первый слой), второй слой обладает свойствами трансляционной анизотропии; во втором случае первый слой трубы обладает свойствами трансляционной анизотропии, второй слой – свойствами анизотропии по Хиллу. В обоих случаях определены напряженное состояние трубы, граница упругопластической зоны, проведен сравнительный анализ.

Ключевые слова: напряжение, упругость, пластичность, анизотропия, трансляционная анизотропия, труба.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим двуслойную толстостенную трубу, обозначим через a , b – внутренний и внешний радиусы трубы, величина c определяет границу слоев трубы (рис. 1).

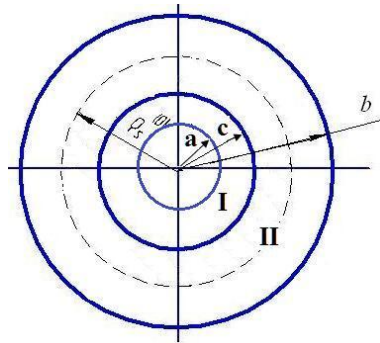


Рис. 1.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам

Поступила 10.10.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00103)

$$\alpha = \frac{a}{\rho_s^0}, \quad c = \frac{c}{\rho_s^0}, \quad \beta = \frac{b}{\rho_s^0},$$

где ρ_s^0 – радиус упругопластической границы в исходном нулевом приближении, ρ – текущий радиус.

В первой, внутренней области I $a < \rho < c$ (рис. 1) имеет место условие пластичности

$$A \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B \cdot \tau_{xy}^2 = K_1^2, \quad A, B, K_1 - const. \quad (1.1)$$

Во внешней области II $c < \rho < b$ условие пластичности примем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x^{(p)} - \sigma_y^{(p)}}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + \left(\tau_{xy}^{(p)} - k_3 \right)^2 = K_2^2, \quad k_1, k_2, k_3, K_2 - const, \quad (1.2)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Будем считать компоненты напряжений безразмерными, отнесенными к некоторой величине k_0 .

Согласно (1.1), (1.2) анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат x, y .

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Из (1.1), (1.2), (1.3) получим условия пластичности в полярных координатах: в первой, внутренней области I –

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \left(\tau_{\rho\theta}^p \right)^2 \left[\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \\ + \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right) \tau_{\rho\theta}^p [A-B] \sin 4\theta - K_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

во внешней области II –

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right) \{ \cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta \} - \\ - 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} R \{ \cos \mu \sin 2\theta + \sin \mu \cos 2\theta \} + R^2 - 1 = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + k_3^2}, \\ \frac{k_1 - k_2}{2R} &= \cos \mu, \quad \frac{k_3}{R} = \sin \mu. \end{aligned}$$

Решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру δ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(o)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)}. \quad (1.6)$$

Индекс "0" наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при $\delta = 0$.
Предположим

$$A = 1 + d_1 \delta, \quad B = 1 - d_1 \delta, \quad 0 \leq d_1 \leq 1. \quad (1.7)$$

В нулевом исходном осесимметричном состоянии положим

$$\sigma_\rho^{(0)} = \sigma_\rho^{(0)}(\rho), \quad \sigma_\theta^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)}(\rho), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (1.8)$$

В исходном нулевом приближении согласно (1.4), (1.8) имеет место $\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = \pm 2K_1$.
При растяжении пластины $\sigma_\theta^{(0)} > \sigma_\rho^{(0)}$,

$$\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = -2K_1. \quad (1.9)$$

Для определения компонент напряжений в пластической области в нулевом приближении используем уравнение равновесия в полярной системе координат

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (1.10)$$

Из (1.9), (1.10) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)} &= 2K_1 \ln \rho + C_1, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= 2K_1 (1 + \ln \rho) + C_1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление $-p$

$$\sigma_\rho^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = -p, \quad \alpha = \frac{a}{\rho_s^0}. \quad (1.12)$$

Напряжения в первой, внутренней области I имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2K_1 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2K_1 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha}\right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (1.13)$$

В исходном нулевом приближении согласно (1.5), (1.10) имеет место

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)} &= 2K_2 \ln \rho + C_2, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= 2K_2 (1 + \ln \rho) + C_2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Условия сопряжения компонент напряжений на границе имеют вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=c} = \sigma_{\rho_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=c}. \quad (1.15)$$

Напряжения во внешней области II имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)} &= -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_2 \ln \frac{\rho}{c}, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{c}\right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$\sigma_\rho^{(0)e} = A - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = A + \frac{B}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (1.17)$$

Условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\theta^{(0)e} \Big|_{\rho=1}. \quad (1.18)$$

Удовлетворяя граничному условию $\sigma_\rho^{(0)e} = 0$ при $\rho = \beta$, получим

$$0 = A - \frac{B}{\beta^2}. \quad (1.19)$$

Согласно (1.16), (1.19)

$$A = -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + K_2 (1 - 2 \ln c), \quad B = K_2. \quad (1.20)$$

Напряжения во внешней области II имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)e} &= -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + K_2 (1 - 2 \ln c) - \frac{K_2}{\rho^2}, \\ \sigma_\theta^{(0)e} &= -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + K_2 (1 - 2 \ln c) + \frac{K_2}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Из (1.4) во внутренней зоне в первом приближении имеет место

$$\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = d_1 K_1 \cos 4\theta. \quad (1.22)$$

Решение неоднородного уравнения (1.22) представимо в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Частным решением неоднородного уравнения согласно [4] является:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(I)} &= \frac{7}{8} K_1 \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta_1}^{(I)} &= -\frac{1}{8} K_1 \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta_1}^{(I)} &= -\frac{1}{4} K_1 \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Общее решение в первом приближении согласно [3] и (1.23) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= \frac{1}{\rho} \left[\left(C_{41}(-15) + \sqrt{15} C_{42} \right) \cos \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) + \right. \\ &+ \left. \left(-\sqrt{15} C_{41} + C_{42}(-15) \right) \sin \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) \right] \cdot \cos 4\theta + \frac{7}{8} K_1 \cos 4\theta, \\ \sigma_\theta^{(I)p} &= \frac{1}{\rho} \left[\left(C_{41}(-15) + \sqrt{15} C_{42} \right) \cos \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) + \right. \\ &+ \left. \left(-\sqrt{15} C_{41} + C_{42}(-15) \right) \sin \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) \right] \cdot \cos 4\theta - \frac{1}{8} K_1 \cos 4\theta, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = \frac{1}{\rho} \left[4\sqrt{15} \left\{ C_{42} \cos \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) - C_{41} \sin \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) \right\} \sin 4\theta \right] - \frac{1}{4} K_1 \sin 4\theta.$$

В первом приближении граничные условия согласно [3] имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\ \sigma_\theta^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Согласно (1.24), (1.25) получим

$$\begin{aligned} C_{41} &= \frac{\alpha}{240} K_1 \left(\cos \left(\sqrt{15} \ln \alpha \right) - \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \alpha \right) \right), \\ C_{42} &= \frac{\alpha}{240} K_1 \left(\sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \alpha \right) + \sin \left(\sqrt{15} \ln \alpha \right) \right). \end{aligned}$$

Результирующее напряжение во внутренней пластической области имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)p} &= K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}\rho} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}\rho} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \frac{1}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}\rho} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta.\end{aligned}\quad (1.26)$$

Во внешней области согласно [5]

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) + C_{12} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) - C_{11} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) \right\} \cos 2\theta + \\ &+ \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) + C_{22} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) - C_{21} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) \right\} \sin 2\theta + \\ &+ R' \left(\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta \right), \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) + C_{12} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) - C_{11} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) \right\} \cos 2\theta + \\ &+ \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) + C_{22} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) - C_{21} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) \right\} \sin 2\theta + \\ &- R' \left(\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta \right), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) - C_{11} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) \right\} \sin 2\theta - \\ &- 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22} \cos \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) - C_{21} \sin \left(\sqrt{3} \ln \rho \right) \right) \right\} \cos 2\theta - \\ &- R' \left(\cos \mu \sin 2\theta + \sin \mu \cos 2\theta \right),\end{aligned}\quad (1.27)$$

где C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} – некоторые постоянные.

Условия сопряжения компонент напряжений на границе имеют вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=c} = \sigma_{\rho_2}^{(I)p} \Big|_{\rho=c}.\quad (1.28)$$

Из (1.28) определим коэффициенты C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22}

$$C_{11} = \frac{R'c}{2} \cos \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln c \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\sqrt{3} \ln c \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{R'c}{2} \cos \mu \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\sqrt{3} \ln c) + \sin(\sqrt{3} \ln c) \right), \\
C_{21} &= \frac{R'c}{2} \sin \mu \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3} \ln c) - \cos(\sqrt{3} \ln c) \right), \\
C_{22} &= -\frac{R'c}{2} \sin \mu \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\sqrt{3} \ln c) + \sin(\sqrt{3} \ln c) \right).
\end{aligned}$$

Результирующее напряжение в пластической области во второй зоне имеет вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= R' \cos \mu \left[-\frac{c}{\rho} (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c})) + 1 \right] \cos 2\theta + \\
&+ R' \sin \mu \left[\frac{c}{\rho} (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c})) - 1 \right] \sin 2\theta + \\
&+ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15c}} \sin(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= R' \cos \mu \left[-\frac{c}{\rho} (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c})) - 1 \right] \cos 2\theta + \\
&+ R' \sin \mu \left[\frac{c}{\rho} (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c})) + 1 \right] \sin 2\theta + \\
&+ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15c}} \sin(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) - \frac{1}{8} \right] \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= R' \cos \mu \left[\frac{c}{\rho} (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c})) - 1 \right] \sin 2\theta + \\
&+ R' \sin \mu \left[\frac{c}{\rho} (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c})) - 1 \right] \cos 2\theta + \\
&+ K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15c}} \{ \sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) - \sin(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) \} - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

На границе пластической зоны при $\rho = 1$ из (1.29) следует

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= R' \cos \mu \left[-c (\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) + 1 \right] \cos 2\theta + \\
&+ R' \sin \mu \left[c (\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin 2\theta + \\
&+ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15c}} \sin(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= R' \cos \mu \left[c (\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \sin 2\theta + \\
&+ R' \sin \mu \left[c (\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right] \cos 2\theta + \\
&+ K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15c}} \{ \sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) - \sin(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) \} - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

В дальнейшем запишем соотношения (1.30) в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta + a_4'' \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta + b_4''' \sin 4\theta,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

где

$$\begin{aligned}
a_2'' &= R' \cos \mu \left[-c (\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) + 1 \right], \\
b_2'' &= R' \sin \mu \left[c (\cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\
a_4'' &= -K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15c}} \sin(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) + \frac{7}{8} \right], \\
a_2''' &= R' \sin \mu \left[c (\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\
b_2''' &= R' \cos \mu \left[c (\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c)) - 1 \right], \\
b_4''' &= K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15c}} \{ \sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) - \sin(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}) \} - \frac{1}{4} \right].
\end{aligned}$$

Внешняя часть трубы свободна от усилий

$$\sigma_{\rho}^{(I)e} = \tau_{\rho\theta}^{(I)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta. \quad (1.32)$$

На границе пластической зоны компоненты напряжения $\sigma_{\rho}^{(I)}$, $\tau_{\rho\theta}^{(I)}$ равны между собой

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = \sigma_{\rho}^{(I)e}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta}^{(I)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (1.33)$$

Из условий (1.32), (1.33) согласно (1.30) определяются компоненты напряжения в упругой области.

В рассматриваемом случае имеют место формулы раздела (VI) и (VIII), приведенные в [3].

1) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (1.31) при

$$\begin{aligned} a_2'' &= R' \cos \mu [-c (\cos (\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) + 1], \\ b_2'' &= R' \sin \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1], \\ a_4''' &= a_2''' = a_2'' = b_4''' = 0, \end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\rho^4} + \frac{4}{\rho^2} \right) \{ R' \cos \mu [-c (\cos (\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) + 1] \cos 2\theta + \\ &+ R' \sin \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1] \sin 2\theta \}, \\ \sigma_{\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{\rho^4} \{ R' \cos \mu [-c (\cos (\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) + 1] \cos 2\theta + \\ &+ R' \sin \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1] \sin 2\theta \}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) \{ R' \cos \mu [-c (\cos (\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) + 1] \sin 2\theta - \\ &- R' \sin \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1] \cos 2\theta \}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

2) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (1.31) при

$$\begin{aligned} a_2''' &= R' \sin \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1], \\ b_2''' &= R' \cos \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1], \\ a_2'' &= b_2'' = a_4'' = b_4'' = 0. \end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right) \{ -R' \sin \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1] \sin 2\theta + \\ &+ R' \cos \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1] \cos 2\theta \}, \\ \sigma_{\theta}^{(I)e} &= -\frac{2}{\rho^4} \{ -R' \sin \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1] \sin 2\theta + \\ &+ R' \cos \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1] \cos 2\theta \}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \{ R' \sin \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1] \cos 2\theta + \\ &+ R' \cos \mu [c (\cos (\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln c)) - 1] \sin 2\theta \}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

3) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (1.31) при

$$\begin{aligned} a_4'' &= -K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right], \\ b_4''' &= K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right], \\ a_2'' &= b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0, \end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)e} &= \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4}\right) \left\{-K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15c}} \sin\left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}\right) + \frac{7}{8}\right]\right\} \cos 4\theta, \\ \sigma_{\rho}^{(I)e} &= \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right) \left\{-K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15c}} \sin\left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}\right) + \frac{7}{8}\right]\right\} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right) \left\{-K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15c}} \left\{\sqrt{15} \cos\left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}\right) - \sin\left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}\right)\right\} - \frac{1}{4}\right]\right\} \sin 4\theta.\end{aligned}\tag{1.36}$$

Результирующее напряжение в упругой области определяется как сумма напряжений (1.34) – (1.36)

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)e} &= R' \cos \mu \left[c \left(\left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right) \cos(\sqrt{3} \ln c) + \frac{\sqrt{3}}{\rho^4} \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) + \left(-\frac{3}{\rho^4} + \frac{4}{\rho^2} \right) \right] \cos 2\theta + \\ &+ R' \sin \mu \left[c \left(-\frac{3}{\rho^4} \cos(\sqrt{3} \ln c) - \sqrt{3} \left(\frac{1}{\rho^4} + \frac{4}{\rho^2} \right) \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) + \left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right) \right] \sin 2\theta + \\ &+ \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \left\{ -K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15c}} \sin\left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}\right) + \frac{7}{8} \right] \right\} \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)e} &= -R' \cos \mu \left[\frac{\sqrt{3}c}{\rho^4} \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln c) + \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) - \frac{3}{\rho^4} \right] \cos 2\theta + \\ &+ R' \sin \mu \left[\frac{\sqrt{3}c}{\rho^4} \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln c) + \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) - \frac{3}{\rho^4} \right] \sin 2\theta + \\ &+ \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ -K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15c}} \sin\left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}\right) + \frac{7}{8} \right] \right\} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= R' \cos \mu \left[c \left(\left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \cos(\sqrt{3} \ln c) + \frac{\sqrt{3}}{\rho^4} \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) + \left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \right] \sin 2\theta + \\ &+ R' \sin \mu \left[c \left(\left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \cos(\sqrt{3} \ln c) + \frac{\sqrt{3}}{\rho^4} \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) + \left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \right] \cos 2\theta + \\ &+ \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ -K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15c}} \left\{ \sqrt{15} \cos\left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}\right) - \sin\left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}\right) \right\} - \frac{1}{4} \right] \right\} \sin 4\theta.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Из (1.16), (1.21) получим

$$\left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 2K_2c, \quad \left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -2K_2,$$

тогда для определения границы раздела упругопластической области в первом приближении будем иметь

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_{\theta}^{(I)p} - \sigma_{\theta}^{(I)e}}{\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{2K_2(1+c)} \left(\sigma_{\theta}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)p} \right),$$

откуда

$$\begin{aligned}\rho_s^{(I)} &= \frac{1}{K_2(1+c)} \left\{ -R' \cos \mu \left[c \left(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) - 2 \right] \cos 2\theta + \right. \\ &+ R' \sin \mu \left[c \left(\cos(\sqrt{3} \ln c) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln c) \right) - 2 \right] \sin 2\theta - \\ &\left. + K_1 \left[\frac{\alpha}{\sqrt{15c}} \sin\left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha}\right) - \frac{3}{8} \right] \cos 4\theta \right\}.\end{aligned}\tag{1.38}$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической (1.29) и упругой (1.37) областях полностью определено, изменение границы раздела упругой и пластической областей определяется из соотношения (1.38).

2. В первой, внутренней области I $a < \rho < c$ (рис. 1) имеет место условие пластичности

$$\left(\frac{\sigma_x^{(p)} - \sigma_y^{(p)}}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + \left(\tau_{xy}^{(p)} - k_3 \right)^2 = K_2^2, \quad k_1, k_2, k_3, K_2 - const. \quad (2.1)$$

Во внешней области II $c < \rho < b$ условие пластичности примем в виде

$$A \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B \cdot \tau_{xy}^2 = K_1^2, \quad A, B, K_1 - const, \quad (2.2)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ - компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Будем считать компоненты напряжений безразмерными, отнесенными к некоторой величине k_0 .

Согласно (2.1), (2.2) анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат x, y .

Из (1.3), (2.1), (2.2) получим условия пластичности в полярных координатах: в первой, внутренней области I -

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right) \{ \cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta \} - \\ & - 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} R \{ \cos \mu \sin 2\theta + \sin \mu \cos 2\theta \} + R^2 - 1 = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + k_3^2}, \\ \frac{k_1 - k_2}{2R} &= \cos \mu, \quad \frac{k_3}{R} = \sin \mu, \end{aligned}$$

во внешней области II -

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \left(\tau_{\rho\theta}^p \right)^2 \left[\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \\ & + \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right) \tau_{\rho\theta}^p [A - B] \sin 4\theta - K_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру δ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(o)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)}, \quad (2.5)$$

Предположим

$$k_1 = \delta_1 k'_1, \quad k_2 = \delta_1 k'_2, \quad k_3 = \delta_1 k'_3. \quad (2.6)$$

Обозначим

$$R = \delta_1 R', \quad R' = \sqrt{\left(\frac{k'_1 - k'_2}{2} \right)^2 + k'_3}. \quad (2.7)$$

В дальнейшем положим $\delta_1 = d_1 \delta$ и $0 \leq d_1 \leq 1$.

В нулевом исходном осесимметричном состоянии положим

$$\sigma_\rho^{(0)} = \sigma_\rho^{(0)}(\rho), \quad \sigma_\theta^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)}(\rho), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (2.8)$$

В исходном нулевом приближении согласно (2.3), (2.5), (2.8) имеет место $\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = \pm 2K_2$.

При растяжении пластины $\sigma_\theta^{(0)} > \sigma_\rho^{(0)}$,

$$\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = -2K_2. \quad (2.9)$$

Из (1.10), (2.9) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)} &= 2K_2 \ln \rho + C_1, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= 2K_2 (1 + \ln \rho) + C_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Напряжения в первой, внутренней области I согласно (1.12) имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2K_2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2K_2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha}\right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (2.11)$$

В исходном нулевом приближении согласно (1.10), (2.4) имеет место

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)} &= 2K_1 \ln \rho + C_2, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= 2K_1 (1 + \ln \rho) + C_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Напряжения во внешней области II согласно (1.15) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)} &= -p + 2K_2 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_1 \ln \frac{\rho}{c}, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= -p + 2K_2 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_1 \left(1 + \ln \frac{\rho}{c}\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$\sigma_\rho^{(0)e} = A - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = A + \frac{B}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0, \quad (2.14)$$

Согласно (2.13), (2.14)

$$A = -p + 2K_2 \ln \frac{c}{\alpha} + K_1 (1 - 2 \ln c), \quad B = K_2. \quad (2.15)$$

Напряжения во внешней области II имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)e} &= -p + 2K_2 \ln \frac{c}{\alpha} + K_1 (1 - 2 \ln c) - \frac{K_1}{\rho^2}, \\ \sigma_\theta^{(0)e} &= -p + 2K_2 \ln \frac{c}{\alpha} + K_1 (1 - 2 \ln c) + \frac{K_1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из (2.3) во внутренней зоне в первом приближении имеет место

$$\sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} = 2R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta). \quad (2.17)$$

Решение неоднородного уравнения (2.17) представимо в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Частным решением неоднородного уравнения согласно [5] является:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho \text{ неоднор}}^{(I)} &= R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta), \\ \sigma_{\theta \text{ неоднор}}^{(I)} &= -R' (\cos \mu \cos 2\theta - \sin \mu \sin 2\theta), \\ \tau_{\rho\theta \text{ неоднор}}^{(I)} &= -R' (\cos \mu \sin 2\theta + \sin \mu \cos 2\theta). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Общее решение в первом приближении согласно [3] и (2.18) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho \text{ одн}}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta + \\
&+ \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta \\
\sigma_{\theta \text{ одн}}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta + \\
&+ \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta \\
\tau_{\rho\theta \text{ одн}}^{(I)p} &= 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin 2\theta - \\
&- 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos 2\theta,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} – некоторые постоянные.

В первом приближении граничные условия согласно [3] имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Согласно (2.19), (2.20) получим

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{R'\alpha}{6} \cos \mu \left(3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right), \\
C_{12} &= \frac{R'\alpha}{6} \cos \mu \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right), \\
C_{21} &= -\frac{R'\alpha}{6} \sin \mu \left(3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right), \\
C_{22} &= -\frac{R'\alpha}{6} \sin \mu \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Результирующее напряжение во внутренней области I будет определяться из (2.18), (2.19) согласно (2.21)

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{R'\alpha}{\rho} \cos \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + R' \cos \mu \right\} \cos 2\theta + \\
&\quad + \left\{ \frac{R'\alpha}{\rho} \sin \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - R' \sin \mu \right\} \sin 2\theta, \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{R'\alpha}{\rho} \cos \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - R' \cos \mu \right\} \cos 2\theta + \\
&\quad + \left\{ \frac{R'\alpha}{\rho} \sin \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + R' \sin \mu \right\} \sin 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= \left\{ \frac{R'\alpha}{\rho} \cos \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - R' \cos \mu \right\} \sin 2\theta + \\
&\quad + \left\{ \frac{R'\alpha}{\rho} \sin \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - R' \sin \mu \right\} \cos 2\theta.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Во внешней области согласно [4]

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= \frac{1}{\rho} \left[\left(C_{41}(-15) + \sqrt{15}C_{42} \right) \cos \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\sqrt{15}C_{41} + 15C_{42} \right) \sin \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) \right] \cdot \cos 4\theta + \frac{7}{8}K_1 \cos 4\theta, \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= \frac{1}{\rho} \left[\left(C_{41}(-15) + \sqrt{15}C_{42} \right) \cos \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\sqrt{15}C_{41} + 15C_{42} \right) \sin \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) \right] \cdot \cos 4\theta - \frac{1}{8}K_1 \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= \frac{1}{\rho} \left[4\sqrt{15} \left\{ C_{42} \cos \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) - C_{41} \sin \left(\sqrt{15} \ln \rho \right) \right\} \sin 4\theta \right] - \frac{1}{4}K_1 \sin 4\theta,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где C_{41} , C_{42} – некоторые постоянные.

Условия сопряжения компонент напряжений на границе имеют вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=c} = \sigma_{\rho_2}^{(I)p} \Big|_{\rho=c}. \tag{2.24}$$

Из (2.24) определим коэффициенты C_{41} , C_{42}

$$\begin{aligned}
C_{41} &= \frac{c}{16} K_1 \left(\cos \left(\sqrt{15} \ln \alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{15}} \sin \left(\sqrt{15} \ln \alpha \right) \right), \\
C_{42} &= \frac{c}{16} K_1 \left(\cos \left(\sqrt{15} \ln \alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{15}} \sin \left(\sqrt{15} \ln \alpha \right) \right).
\end{aligned}$$

Результирующее напряжение в пластической области во второй зоне имеет вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{R'\alpha}{c} \cos \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) + R' \cos \mu \right\} \cos 2\theta + \\
&\quad + \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - R' \sin \mu \right\} \sin 2\theta - \\
&\quad - \frac{K_1}{8} \left[\frac{c}{\rho} \left(\sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{c} \right) + 7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 7 \right] \cos 4\theta, \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{R'\alpha}{c} \cos \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - R' \cos \mu \right\} \cos 2\theta + \\
&\quad + \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) + R' \sin \mu \right\} \sin 2\theta - \\
&\quad - \frac{K_1}{8} \left[\frac{c}{\rho} \left(\sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{c} \right) + 7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) + 1 \right] \cos 4\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \cos \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \cos \mu \right\} \sin 2\theta + \\
& + \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \sin \mu \right\} \cos 2\theta + \\
& + \frac{K_1}{4} \left[\frac{c}{\rho} (\cos(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\rho}) - \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\rho})) - 1 \right] \sin 4\theta.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

На границе пластической зоны при $\rho = 1$ из (2.25) следует

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} = & \left\{ -\frac{R'\alpha}{c} \cos \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) + R' \cos \mu \right\} \cos 2\theta + \\
& + \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \sin \mu \right\} \sin 2\theta - \\
& - \frac{K_1}{8} [c(-\sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln c) + 7 \cos(\sqrt{15} \ln c)) - 7] \cos 4\theta, \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} = & \left\{ -\frac{R'\alpha}{c} \cos \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \cos \mu \right\} \cos 2\theta + \\
& + \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) + R' \sin \mu \right\} \sin 2\theta - \\
& - \frac{K_1}{8} [c(-\sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln c) + 7 \cos(\sqrt{15} \ln c)) + 1] \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \cos \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \cos \mu \right\} \sin 2\theta + \\
& + \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \sin \mu \right\} \cos 2\theta + \\
& + \frac{K_1}{4} [c(\cos(\sqrt{15} \ln c) + \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln c)) - 1] \sin 4\theta.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

В дальнейшем запишем соотношения (2.26) в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} = & a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta + a_4'' \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta + b_4''' \sin 4\theta,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где

$$\begin{aligned}
a_2'' = & \left\{ -\frac{R'\alpha}{c} \cos \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) + R' \cos \mu \right\}, \\
b_2'' = & \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \sin \mu \right\}, \\
a_4'' = & -\frac{K_1}{8} [c(-\sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln c) + 7 \cos(\sqrt{15} \ln c)) - 7], \\
a_2''' = & \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \sin \mu \right\}, \\
b_2''' = & \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \cos \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \cos \mu \right\}, \\
b_4''' = & \frac{K_1}{4} [c(\cos(\sqrt{15} \ln c) + \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln c)) - 1].
\end{aligned}$$

Из условий (2.27) согласно (2.26) определяются компоненты напряжения в упругой области.

В рассматриваемом случае имеют место формулы раздела (VI) и (VIII), приведенные в [3].

1) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (2.27) при

$$\begin{aligned}
a_2'' = & \left\{ -\frac{R'\alpha}{c} \cos \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) + R' \cos \mu \right\}, \\
b_2'' = & \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu (\cos(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha})) - R' \sin \mu \right\}, \\
b_2''' = & a_4''' = a_2''' = b_4''' = 0.
\end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\rho^4} + \frac{4}{\rho^2} \right) \left\{ \left\{ R' \cos \mu \left(-\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) + 1 \right) \right\} \cos 2\theta + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ R' \sin \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) \right\} \sin 2\theta \right\}, \\
\sigma_{\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{\rho^4} \left\{ \left\{ R' \cos \mu \left(-\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) + 1 \right) \right\} \cos 2\theta + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ R' \sin \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) \right\} \sin 2\theta \right\}, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) \left\{ \left\{ R' \cos \mu \left(-\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) + 1 \right) \right\} \sin 2\theta - \right. \\
&\quad \left. - \left\{ R' \sin \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) \right\} \cos 2\theta \right\}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

2) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (2.27) при

$$\begin{aligned}
a_2''' &= \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \sin \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - R' \sin \mu \right\}, \\
b_2''' &= \left\{ \frac{R'\alpha}{c} \cos \mu \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - R' \cos \mu \right\}, \\
a_2'' &= b_2'' = a_4'' = b_4'' = 0,
\end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right) \left\{ -R' \sin \mu \left\{ \frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right\} \sin 2\theta + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ R' \cos \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) \right\} \cos 2\theta \right\}, \\
\sigma_{\theta}^{(I)e} &= -\frac{2}{\rho^4} \left\{ -R' \sin \mu \left\{ \frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right\} \sin 2\theta + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ R' \cos \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) \right\} \cos 2\theta \right\}, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \left\{ R' \sin \mu \left\{ \frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right\} \cos 2\theta + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ R' \cos \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) \right\} \sin 2\theta \right\}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

3) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (2.27) при

$$\begin{aligned}
a_4'' &= -\frac{K_1}{8} \left[c \left(-\sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln c \right) + 7 \cos \left(\sqrt{15} \ln c \right) \right) - 7 \right], \\
b_4''' &= \frac{K_1}{4} \left[c \left(\cos \left(\sqrt{15} \ln c \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln c \right) \right) - 1 \right], \\
a_2'' &= b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0,
\end{aligned}$$

тогда напряжения будут определяться

$$\sigma_{\rho}^{(I)e} = \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \left\{ -\frac{K_1}{8} \left[c \left(-\sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln c \right) + 7 \cos \left(\sqrt{15} \ln c \right) \right) - 7 \right] \right\} \cos 4\theta,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)e} &= \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right) \left\{ -\frac{K_1}{8} \left[c \left(-\sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln c \right) + 7 \cos \left(\sqrt{15} \ln c \right) \right) - 7 \right] \right\} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right) \left\{ -\frac{K_1}{4} \left[c \left(\cos \left(\sqrt{15} \ln c \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln c \right) \right) - 1 \right] \right\} \sin 4\theta.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Результирующее напряжение в упругой области определяется как сумма напряжений (2.28) – (2.30)

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\rho^4} + \frac{4}{\rho^2} \right) \left\{ \left\{ R' \cos \mu \left(-\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) + 1 \right\} \cos 2\theta + \right. \\ &+ \left. \left\{ R' \sin \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right\} \sin 2\theta \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right) \left\{ -R' \sin \mu \left\{ \frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right\} \sin 2\theta + \right. \\ &+ \left. \left\{ R' \cos \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right\} \cos 2\theta \right\} + \\ &+ \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \left\{ -\frac{K_1}{8} \left[c \left(-\sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln c \right) + 7 \cos \left(\sqrt{15} \ln c \right) \right) - 7 \right] \right\} \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)e} &= \frac{R' \cos \mu}{\rho^4} \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}\alpha}{c} \left(\sqrt{3} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) + 3 \right) \right\} \cos 2\theta + \\ &+ \frac{R' \sin \mu}{\rho^4} \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}\alpha}{c} \left(\sqrt{3} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 3 \right) \right\} \sin 2\theta + \\ &+ \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ -\frac{K_1}{8} \left[c \left(-\sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln c \right) + 7 \cos \left(\sqrt{15} \ln c \right) \right) - 7 \right] \right\} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) \left\{ \left\{ R' \cos \mu \left(-\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) + 1 \right\} \sin 2\theta - \right. \\ &- \left. \left\{ R' \sin \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right\} \cos 2\theta \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \left\{ R' \sin \mu \left\{ \frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right\} \cos 2\theta + \right. \\ &+ \left. \left\{ R' \cos \mu \left(\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right) - 1 \right\} \sin 2\theta \right\} - \\ &- \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ -\frac{K_1}{4} \left[c \left(\cos \left(\sqrt{15} \ln c \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln c \right) \right) - 1 \right] \right\} \sin 4\theta.\end{aligned}\quad (2.31)$$

Из (2.26), (2.31) получим

$$\left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 2K_1 c, \quad \left. \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -2K_1.$$

тогда для определения границы раздела упругопластической области в первом приближении будем иметь

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_{\theta}^{(I)p} - \sigma_{\theta}^{(I)e}}{\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{2K_1(1+c)} \left(\sigma_{\theta}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)p} \right),$$

откуда

$$\begin{aligned}\rho_s^{(I)} &= \frac{1}{K_1(1+c)} \left\{ R' \cos \mu \left[\frac{\alpha}{c} \left(-\cos \left(\sqrt{3} \ln c \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln c \right) \right) + 2 \right] \cos 2\theta + \right. \\ &+ \left. R' \sin \mu \left[\frac{\alpha}{c} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln c \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln c \right) \right) - 2 \right] \sin 2\theta + \frac{K_1}{2} \cos 4\theta \right\}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической (2.25) и упругой (2.31) полностью определено, изменение границы раздела упругой и пластической областей определяется из соотношений (2.32).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
 [2] Ивлев, Д. Д. О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). Ч. 3. – С. 583–584.
 [3] Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
 [4] Леденев, А. П. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из анизотропного идеальнопластического материала / А. П. Леденев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 2 (49). – С. 16–21.
 [5] Фоминых, С. О. Двуосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). Ч. 3. – С. 610–622.

S. O. Fominykh

ELASTOPLASTIC STATE OF A THICK-WALLED PIPE AT THE INTERACTION OF DIFFERENT TYPES OF PLASTIC ANISOTROPY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. We consider the elastoplastic state of a two-layer thick-walled pipe under internal pressure. It is assumed that each of the layers of the pipe has its own anisotropy properties. Anisotropy is considered according to Hill [1] and translational anisotropy, according to [2]. We consider two cases: in the first case it is assumed that the material has the properties of the anisotropy of Hill, adjacent to the inside of the pipe (first layer), the second layer has the properties of the translational anisotropy in the second case the first layer of tubes has the properties of the translational anisotropy and the second layer - the properties anisotropy according to Hill. In both cases, to determine the stress state of the pipe, the boundary of an elastic-plastic zone, the comparative analysis.

Keywords: tension, elasticity, plasticity, anisotropy, translational anisotropy pipe.

Фоминых Светлана Олеговна

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ermakovaso@rambler.ru

Fominykh Svetlana Olegovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физ-мат наук (1996), профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – Академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@nw.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (prorektor@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет “СТАНКИН”, г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marucbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния» издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

К 80-летию Владимира Георгиевича Зубчанинова.....	3
<i>Зубчанинов В. Г.</i> О моих учителях	23
<i>Зубчанинов В. Г.</i> Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат изотропии А. А. Ильюшина	38
<i>Вервейко Н. Д.</i> К статической определимости пространственных задач теории пластичности	61
<i>Вульман С. А., Семькина Т. Д.</i> Упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние плоскости с круговым отверстием из листового материала	68
<i>Гоцев Д. В., Плотников Л. Г., Спорышин А. Н.</i> О влиянии силы тяжести на напряженно-деформированное состояние толстостенных цилиндрических труб..	73
<i>Гулиев С. М.</i> Зарождение трещин в композитах, армированных однонаправленными волокнами, при поперечном сдвиге	82
<i>Звягин А. В., Ромашов Г. А.</i> Критическая скорость в контактных задачах...	92
<i>Ивлев Д. А.</i> О предельном состоянии слоистых анизотропных круговых цилиндров при кручении	97
<i>Ивлев Д. Д.</i> Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии	101
<i>Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г.</i> К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии	107
<i>Искандеров Р. А.</i> Анализ влияния предварительного выпучивания цилиндрической оболочки, усиленной перекрестной системой ребер, контактирующей со средой на критические напряжения общей потери устойчивости.....	111
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко Н. М.</i> Вариант полиномиального условия предельного состояния изотропных и анизотропных сред.....	117
<i>Кузнецов Е. Е., Матченко Н. М.</i> О полной пластичности сыпучих сред	125
<i>Кулиев В. Д., Алексеева Т. Н.</i> Многослойные материалы под воздействием внешней температуры	133
<i>Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В.</i> О кручении анизотропных цилиндрических стержней	140

<i>Мирсалимов М. В.</i> Контактное взаимодействие берегов трещины в полосе переменной толщины	146
<i>Митрофанова Т. В.</i> О вдавливании жесткого гладкого штампа в анизотропное идеальнопластическое полупространство.....	158
<i>Мочалов Е. В., Сильвестров В. В.</i> Взаимодействие тонких жестких остроконечных межфазных включений под действием сосредоточенных сил.....	167
<i>Радаев Ю. Н., Таранова М. В.</i> Связанное волновое термоупругое поле в длинном волноводе эллиптического поперечного сечения	173
<i>Сильвестров В. В., Смирнов А. В.</i> Контактное взаимодействие двух упругих полубесконечных пластин через тонкое кусочно-однородное включение.....	187
<i>Спорыхин А. Н., Чуфринова Е. Д.</i> Численно-аналитическое исследование устойчивости упругой сферической оболочки с неоднородным упруговязкопластическим наполнителем при нагружении	193
<i>Фоминых С. О.</i> Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии	201
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	217
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	220
СОДЕРЖАНИЕ	222

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2011. № 1(9)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, И. А. Федянина

Компьютерная верстка: Т. В. Митрофанова, С. О. Фоминых

Макет: Т. В. Митрофанова, С. О. Фоминых

Подписано в печать 29.04.2011 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.
Усл. печ. л. 27,87. Тираж 400 экз. Цена свободная. Заказ №

Отпечатано в отделе полиграфии ГОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38